Wetenschapsfilosofie

P. van Ulsen

6 november 2017

Inhoudsopgave

1 Grondslagenstrijd

2 Inleiding

In de twintiger en dertiger jaren waren bij methodologische en wetenschapsfilosofische kwesties de volgende punten van belang:

a De methodologie van het eigen vak.

b De voorbeeldmethodologie en -wetenschap: natuurkunde, de haar omringende vakken en de inkadering door de wiskunde.

c De achtergrond waar welhaast elke voor die tijd serieus te nemen methodologie mee te maken had: de wiskunde en de logica.

Helaas voor de methodologen van de eerste helft van de twintigste eeuw had men bij punten b. en c. met verwarring te maken en waren de natuurkunde en wiskunde gedurende korte tijd niet meer zo duidelijke en stabiele ankers.

De natuurkunde was sterk uitgebreid en abstracter geworden. Daarnaast was er het het verbreden van natuurkundig inzicht buiten de tot dan toe gebruikelijke kaders. De Newtonse ruimte en tijd hadden zich te onderschikken aan de relativiteitstheorie, met wel heel snel daarop de introductie van de quantummechanica.

Ook de wiskunde had met velerlei veranderingen te maken, ook voor zijn grondslagen. Dit hing samen met verbeteringen en formaliseringen in de negentiende eeuw. Voor de grondslagen was er ook de ontwikkeling van verzamelingenleer, topologie en exacte logica.

Al deze punten trokken in die periode ook onder de Nederlandse methodologen en filosofen de nodige aandacht en ook zij lieten van zich spreken. In Nederland en internationaal kwamen taal, wetenschap en de 'werkelijkheid' met hun onderlinge verbindingen in de belangstelling te staan. In Nederland had men bovendien belangstelling voor de psychische verschijnselen, die van belang zijn voor de verwerving, opslag en verwerking van kennis. Deze belangstelling vond men bij iedereen, die een hoofdrol vervulde gedurende deze periode: L.E.J. (Bertus) Brouwer (1881-1966), Arend Heyting (1898-1980), Gerrit Mannoury (1867-1956) en Evert W. Beth (1908-1964).

De sporen van de grondslagenstrijd in de wiskunde zijn overal aanwezig bij de personen en de periode, die wij trachten te beschrijven.

Deze grondslagenstrijd kan men opdelen in verschillende perioden.

1 De naïeve wiskunde tot aan de beginperiode van de negentiende eeuw.

2 De pogingen om aan de naïeve wiskunde een eind te maken door o.a. een sterkere formalisering en het introduceren van nieuwe wiskundige methoden en theorieën. Enkele namen: K. Weierstraß (1815-1897), G.F.B. Riemann (1826-1866), R. Dedekind (1831-1916; analyse), G. Cantor (1845-1918; verzamelingenleer), G. Frege (1848-1925; logica), F. Klein (1849-1925; algebraïsering in meetkunden), G. Peano (1858-1932; formalisering, logica).

3 Dit ging gepaard met de nodige tegenstand op deze methoden en theorieën: o.a. uit de hoek van L. Kronecker (1823-1891), H. Poincaré (1854-1912), E. Borel (1871-1956).

4 Gebreken binnen deze nieuwe aanpak onder 2., waaronder het daarbinnen kunnen construeren van paradoxen.

5 De pogingen om de vernieuwing te verbeteren: voor de verzamelingenleer E. Zermelo (1871-1953); voor de logica B. Russell (1872-1970); voor de wiskunde als geheel Hilbert (1862-1943) met zijn bewijstheorie. Zoeken naar consistentiebewijzen.

6 De tegenstand tegen de onder 5. genoemde verbeteringen: Brouwer met zijn intuïtionisme en Hilbert met zijn finitistische bewijstheorie.

7 Het ineenstorten van Hilberts al te zware claims: K.F. Gödel (1906-1978).

8 De periode na 7.: bezinning en proberen wat er nog te redden valt; opgeven van de al te zware claims van Hilbert (G. Gentzen (1909-1945), P. Bernays (1888-1977), Gödel).

Er zijn ook andere manieren van indelen mogelijk, bijvoorbeeld systematisch, maar bovenstaande indeling is voor ons doel toch de meest handzame. Min of meer hiermee oplopend is de indeling door Brouwer (1952). Gezien zijn aandeel in de strijd zal ook deze indeling gegeven worden:

a de oude formalistische school, met als 'leden' Dedekind, Cantor, Peano, Hilbert, Russell, Zermelo, Couturat.

b de pre-intuïtionische school, met als 'leden' Poincaré, Borel en Lebesgue.

c de nieuwe formalistische school: Hilbert als 'oprichter'.

d de intuïtionisten

Men kan extra namen gaan toevoegen aan de opsomming van Brouwer zoals Brouwer onder intuïtionisten. Sommige namen bleven door Brouwer onvermeld zoals Kronecker; het eigenaardige is dat deze nooit echt aangehaald werd door Brouwer als een vroege voorloper, terwijl Hilbert toch sterk tegen Kronecker fulmineerde en in Brouwer een tweede Kronecker zag. Bij de 'nieuwe formalistische school' kan men verder vermelden Ackermann, Bernays en Von Neumann. Men kan als een soort voortzetting van de 'Nieuwe formalistische school' de bewijstheoretici zien zoals Herbrand en Gentzen, maar ook anderen vallen daar onder. Zij waren overigens ook bezig met intuïtionistische logica en 'bewijstheorie'. Aan de intuïtionisten zijn toe te voegen Brouwer, Heyting en tijdelijk Weyl. Er zijn ook andere indelingen en benamingen mogelijk zoals door Fraenkel (1927, 1930). Voor Fraenkel waren Poincaré, Brouwer, Kronecker, etc. intuïtionisten. Maar sommige intuïtionisten gingen volgens hem verder: de neo-intuïtionisten. Fraenkel (1927) bracht Brouwer bij de neo-intuïtionisten onder, maar ook Weyl en Skolem. Brouwer (1912, p. 12) gebruikte het begrip neo-intuïtionisme al voor zijn eigen denkbeelden. De door Fraenkel ingebrachte Skolem is hier zeker misplaatst, Troelstra (1991) bracht Skolem onder bij de finitisten. In later tijd zijn volgens Troelstra hier ook Goodstein en Tait bij onder te brengen. De pre-intuïtionisten worden in Troelstra (1991) opgevoerd als semi-intuïtionisten. Onder hen rekent hij E. Borel, H. Lebesgue, R. Baire en N.N. Luzin. Poincaré is bij hem een geval apart, net zoals H. Weyl. Als extra komt Troelstra met de actualisten, met als belangrijk vertegenwoordiger A.S. Esenin-Volpin. Deze laatste groep wordt soms ook aangeduid als ultra-intuïtionisten —de moeilijkheid daarbij is dat er ook andere groepen voor deze benaming in aanmerking komen.

Brouwer vond dat hij er in Fraenkel (1927) bekaaid afkwam. Daarin had hij wel gelijk. Alle anderen hadden ook geen alomvattend programma zoals Brouwer. Volgens Brouwer werd door Fraenkel zijn inbreng deels onder tafel geschoven en eigenlijk bij anderen ondergebracht. Dit mondde uit in een boze briefwisseling, waarin door Brouwer zelfs de door Fraenkel naar voren geschoven Kronecker genoemd werd.[1] In later tijd, na 1930, is het aanbod aan ingrepen op de grondslagen van de wiskunde diverser en komt van allerlei mensen vandaan: hele, halve, kwart, etc. -intuïtionisten. Soms alleen op het technische vlak, soms ook met het oog op andere denkbeelden van Brouwer.

Op de lange voorgeschiedenis van de grondslagenstrijd zal hier niet worden ingegaan. Hoogstens op de tweede helft van de 19e eeuw. Het echte werk zullen wij laten beginnen met een lezing van Hilbert in 1904.[2] Hierin werd de rekening opgemaakt van de afgelopen vijftig jaar, waaronder ook zijn eigen werk, en een nieuw begin gemaakt van een in zijn ogen betere aanpak en de finale oplossing voor alle problemen. In de tweede helft van de 19e eeuw had men namelijk al een grondslagenstrijd, die na een

[1] Voor de ruzie tussen Brouwer en Fraenkel, zie van Dalen (2000). Voor Kronecker, zie de brief van Brouwer naar Fraenkel van 28.I.1927, zoals in Brouwer (2011).

[2] Hilbert (1905).

aanvankelijk ineenzakken al spoedig weer oplaaide, zij het ten dele anders bemand. Helaas voor Hilbert zag niet iedereen in zijn plannen de ultieme oplossing. In het begin van de tweede grondslagenstrijd wisten Hilbert, Russell en Brouwer, ook door hun literaire gaven, nog veel aandacht te trekken voor respectievelijk het formalisme, logicisme en intuïtionisme als ultieme grondslagen van de wiskunde. De belangrijkse tegenspelers waren Hilbert in Göttingen en Brouwer in Amsterdam.

Het leven en in mindere mate het werk van Hilbert zijn al besproken in Reid (1970). Het leven en werk van Brouwer in van Dalen (1999, 2001, 2005). Daarnaast zijn er talloze artikelen over beiden, waaronder die door Hermann Weyl. Wel valt er het nodige af te dingen op diverse geschriften. Als voorbeeld hiervan kan Reid (1970) dienen. Bij de behandeling van de grondslagenstrijd voert zij Brouwer nogal badinerend op als een immer vervelend heerschap, dat voortdurend de les moest worden gelezen door de geniale en welwillende Hilbert. Soms willen latere auteurs de grondslagenstrijd graag in hun schrifturen nog eens overdoen. Tussen de latere beschouwingen en terugblikken blinkt Weyl uit door zijn neutrale houding en kundigheid.[3] In zijn relatie tot Brouwer zou hem dat overigens niet veel goed gedaan hebben: voor Brouwer was men voor of tegen hem, neutraliteit viel onder tegen.

In niets zouden Hilbert en Brouwer elkaar toegeven. Overigens kwamen later hun standpunten op zekere gebieden van grondslagen voor de wiskunde en logica nogal bij elkaar te liggen, maar dat riep geen erkenning van de een voor de ander op. Beiden vergaten niets, beiden hadden een groot ego en waren weinig vergevingsgezind. Van Brouwer was dit al bekend, maar Hilbert kon er ook weg mee, zij deden niet voor elkander onder. Men kan voor Hilberts karakter niet volledig afgaan op de beschrijving in Reid (1970). Hilbert schrok voor weinig terug als hij zich verongelijkt voelde of zijn zin niet kreeg. En in zijn voetstappen zijn Göttinger getrouwen.[4] Overigens hadden beide geleerden ook andere gemeenschappelijke trekjes. Brouwer werkte graag buiten in zijn tuin aan wiskunde, hij wandelde en fietste veel.[5] Hilbert had in zijn tuin een groot schoolbord laten aanbrengen onder een afdak zodat hij in de buitenlucht kon werken, hij wandelde veel, en was op oudere leeftijd begonnen met fietsen.[6] Echter op één punt waren ze elkaars tegengestelde: Hilbert at veel vlees, hetgeen naar hij dacht goed was voor zijn intellect en werklust. Brouwer was een ascetische vegetariër.[7]

Maar goed, zonder Brouwer geen Heyting. Derhalve kan er niet aan diverse denkbeelden van Brouwer worden voorbijgegaan. Wel zal al vroeg gebruik worden gemaakt van Heytings heldere uitleg en scherpe formuleringen. Brouwer geeft wel eens de indruk van imponeren, Heyting die van een zo goed mogelijk uiteenzetten van de problemen. Als illustratie: Menger heeft ooit nog eens een lijst van omzettingen uit Brouwers niet alledaagse taaleigen in het Duits gepubliceerd, Menger (1928), waarin 'Wörterbuch der Mengenlehre: Zuordnung der von Brouwer verwendeten Termini zu

[3] Wel heeft Weyl het euvel van meer mensen uit die tijd: het maar al te graag geven van literaire verhandelingen en blijk willen geven van zijn belezenheid wanneer hij schrijft over de filosofie van de wiskunde.

[4] Zie hiertoe de correspondentie rond 1928, 1929 in Brouwer (2011) met het doel Brouwer uit de Annalen te werken.

[5] van Dalen (2001).

[6] Reid (1970).

[7] Zie voor Brouwers dieet de brief van zijn vrouw Lize Brouwer-de Holl naar Brouwers toen in Oost-Indië verblijvende broer Aldert Brouwer, 4 mei 1913, in Brouwer (2011); voor Hilberts vleesdieet, Reid (1970) .

den üblichen'. Brouwers niet alledaagse wiskundetermen werden ook in het leven geroepen door de ontwikkeling van zijn eigen technieken en begrippenapparaat.

Er zal niet ingegaan worden op alle fasen in Brouwers denkbeelden en evenzeer niet op die van Hilbert. Die zijn al genoeg beschreven.[8] Hier treft men enkele hoofdlijnen aan. En zeker zal niet gekeken worden naar alle dieper liggende en niet-wiskundige achtergronden van Brouwers denkbeelden.[9]

Niemand schudt een volledige omvorming van de wiskunde à la minute uit zijn mouw, zelfs Brouwer niet. Brouwer deed er dus jaren over en per artikel over dit onderwerp kwam hij op het moment zelf al weer met verbeteringen — dit valt al fraai op de overdrukken af te lezen, zoals men ook in Brouwers Collected Works II bemerken kan. Brouwer was niet snel tevreden en wilde het uiterste halen van wat mogelijk was aan zeggingskracht. Maar ook Hilbert is vanaf 1900, zij het met lange onderbrekeningen, ongeveer dertig jaar bezig geweest met verbeteringen, verduidelijkingen en aanpassingen van zijn formalismen. Het gaat te ver al deze veranderingen hier te beschrijven.

Vooral de periode rond 1930 vormt hier het ijkpunt. In 1928 hield Brouwer zijn Weense lezingen over intuïtionisme, taal en het continuum. In 1928 verkondigde Hilbert in Bologna zijn denkbeelden over axiomatiek, consistentie, volledigheid, aangepast finitisme en formalisme. In deze tijd ook cumuleerde hun onderlinge ongenoegen naar nieuwe hoogtepunten. Voor Hilbert en Brouwer zouden dit vooreerst de laatste publicaties zijn. In 1928 publiceerde Gödel zijn volledigheidsstelling. In 1930 verscheen Heytings formalisatie van de intuïtionistische logica en wiskunde (keuzerijen en continuum). En in 1930 en 1931 schoof Gödel zijn onvolledigheidsstelling naar voren. Hierna was het woord vooreerst aan anderen, en niet meer aan Brouwer of Hilbert. Voor onvolledigheid en onbeslisbaarheid waren het Gödel, Post, Turing, Church e.a. Voor de bewijstheorie, formalisatie en consistentie Gentzen en Bernays, voor het intuïtionisme vooral Heyting, maar ook Kolmogorov. Brouwers Nederlandse leerlingen hielden zich vooral bezig met het onderzoeken van het intuïtionistische draagvlak van allerlei wiskundige theorieën. Later zou dit onder het hoogleraarschap van Heyting verder gaan. Heytings proefschrift betrof de intuïtionistische axiomatiek van de projectieve meetkunde (1925). Een latere voortzetting hiervan, met Heyting als promotor, waren de dissertaties van Troelstra en Van Dalen. Belinfante hield zich met algebra, en in het bijzonder de hoofdstelling, bezig. Heyting is onder Brouwers leerlingen evenwel de enige geweest die zich met de vormgeving van de theorie van het intuïtionisme zelf heeft beziggehouden en daarmee resultaten heeft geboekt.

In de loop van de dertiger jaren doofde de grondslagenstrijd uit en zou het bestuderen van de grondslagen van de wiskunde zich meer beperken tot de strikte technische kant van de zaak met belangstelling en respect voor elkanders werk. Dit was een kalme waarnemer als Heyting meer op het lijf geschreven. Met hem had men te maken met een uitbouw van het intuïtionisme in wiskundig voor hem rustiger tijden. Brouwer bleef vooreerst verbitterd en inactief achter. Hilbert had niet veel meer in te brengen, maar zette zijn werkzaamheden niet stil: Hilbert & Bernays (1934, 1939), evenzo Hil-

[8]Bijvoorbeeld in Mancosu (1998).

[9]Men kan daarvan kennis nemen in Kousbroek (1982), van Stigt (1990). van Dalen (1999), Kuiper (2004), Koetsier (2005).

bert & Courant , *Methoden der mathematischen Physik* I (1924) en II (1937), Berlin. Welk aandeel van Hilbert en respectievelijk van Bernays en van Courant kwam, kan ik niet beoordelen. Overigens hield Hilbert zich tot in de jaren dertig bezig met de nieuwe ontwikkelingen binnen de mathematische fysica.

Bij dit alles moet men wel voor ogen houden dat het Hilberts verdienste is geweest om verduidelijking en positionering van de 'tweede grondslagenstrijd' te bewerkstelligen. Daarmee gaf hij Brouwer ongewild gelegenheid daarop in te springen en scherper zijn gedachten te formuleren, of om met Weyl te spreken: [10]

'But whatever the future may bring, there is no doubt that Brouwer and Hilbert raised the problem of foundations of mathematics to a new level. A return to the standpoint of Russell-Whitehead's *Principia Mathematica* is unthinkable.'

Het enthousiasme om terug te keren tot de grondslagenstrijd was er ook in de loop van de jaren dertig niet meer. Het bleef buiten de normale wiskundige practijk van elke dag staan, en zeker van die van de toegepaste wiskunde. Heyting (1936, p.15) was er wel aan gelegen om de natuurkundigen mee te krijgen in het gebruik van het intuïtionisme —tevergeefs overigens:

'Het zou haar [d.w.z. het intuïtionisme] prestige buitengewoon verhogen, als het gelukte, er de theoretische physica op te grondvesten; dit zou bovendien naar mijn mening uit philosophisch oogpunt van groot belang zijn. Het zou mij te ver voeren, uitvoerig op de philosophie der natuurkunde in te gaan; ik wil slechts opmerken, dat onze natuurwaarneming en de verwerking tot ervaring een proces vormen, waarin onze geest actief optreedt op een wijze, die veel overeenkomst vertoont met hetgeen in de intuitionistische wiskunde geschiedt. Het zou tot de eenheid van de wetenschap veel bijdragen, als beide gebieden tot een eenheid konden worden samengesmolten.'

Het is een fraaie wens. Bewijzen van de beweringen van samenvallen werkwijze en gedachtengoed worden er bovendien niet door Heyting gegeven. Overigens is het maar de vraag wat Brouwer hiervan dacht gezien zijn opvattingen over natuurkunde. Wellicht kon het hem in geen enkel opzicht ook maar iets schelen. Heyting loopt hier dus niet achter Brouwer aan. Voor het tegendeel van Heytings vooroorlogsche wens m.b.t het dageljkse gebruik kan men Carnap aanhalen: [11]

'If we compare. e.g. the systems of classical mathematics and of intuitionistic mathematics, we find that the first is much simpler and technically more efficient, while the second is more safe from surprising occurences, e.g. contradictions. At the present time, any estimation of the degree of safety of the system of classical mathematics, in other words, the degree of plausibility of its principles, is rather subjective. The majority of mathematicians seem to regard this degree as sufficiently high for all practical purposes and therefore prefer the application of classical mathematics to that of intuitionistic mathematics. The latter has not, so far as I know, been seriously applied in physics by anybody.'

De laatste opmerking was waarschijnlijk voor Carnap zwaarwegend vanwege de toen in zwang zijnde denkbeelden over reducties van wetenschappen, waarbij de fysica

[10] Weyl (1944, p.644).

[11] Citaat uit Carnap (1939), p.51, maar zie ook von Neumann (1947) voor vergelijkbare beweringen.

een belangrijke rol vervulde. Voor Brouwer zal dit van geen enkele betekenis zijn geweest gezien zijn denkbeelden over de voor hem onbetekende rol van de fysica en toegepaste wiskunde. Kortewegs (Brouwers promotor) oratie aan de UvA uit 1881 met de titel ‘De wiskunde als hulpwetenschap’ zal niet aan Brouwer besteed zijn geweest. Brouwer stond geen dienende taak van de wiskunde voor ogen.

Een nog zwaarder wegende wens doet zich in Heyting (1949) aan. Hier vraagt Heyting zich niet alleen af of de intuïtionistische wiskunde wat te betekenen kan hebben voor de natuurkunde, maar zelfs voor de geesteswetenschappen. Hierin heeft hij wel een raakvlak met Brouwer, die sprak over een combinatie van samenhangende wetenschappen: wiskunde —voor Brouwer dan natuurlijk wel de intuïtionistische—, theologie en wijsbegeerte. Heyting (1949, p.18):

‘Wanneer ik nog even mag terugkomen op de koene gedachte van collega Schouten,[12] namelijk dat de intuitionistische wiskunde wellicht daarom met zoveel geestdrift beoefend wordt, omdat de natuurwetenschap in een volgend stadium van haar ontwikkeling behoefte zou hebben aan de nieuwe logica; dan zou ik dit denkbeeld aldus willen aanvullen, dat de toepassing even goed zou kunnen liggen op het gebied der geesteswetenschap. Misschien kan de denkvorm der intuitionistische wiskunde met andere denkvormen in vruchtbare wisselwerking treden, ja, de grote belangstelling voor het intuitionisme van de zijde der logici en kentheoretici maakt dit zelfs waarschijnlijk.’

Wellicht duidde Heyting m.b.t. Schouten op Schouten (1949, p.19-20). Schouten refereert daar naar Reichenbach en zijn voorstel voor een driewaardige logica voor de quantummechanica. Eigenaardig genoeg refereert Schouten nergens naar Birkhoff & von Neumann (1936), maar wel komt Heyting aan de beurt:

‘Waar nu reeds de quantenmechanica in haar huidig stadium een driewaardige logica verlangt is de onderstelling niet gewaagd, dat die toekomstige ‘organica’ ook meerwaardige logica’s zou gaan eischen en misschien zelfs wel die oneindig waardige, die door Heyting in verband gebracht is met het formeele schema der intuitionistische wiskunde. Ware dit zoo dan zou er ook aan het grondslagenonderzoek duidelijk een onbewust doelgerichte kant zijn.’

Schoutens opmerking over de oneindige waarden binnen de semantiek van het intuïtionisme bevreemdt wellicht. Tussen Heytings ‘in verband brengen’ en ‘voorstellen’ zit een verschil. Het kan zijn dat Schouten beïnvloed was door Heyting (1947/48*a*). Later zal op dergelijke interpretaties worden teruggekomen. Het nut van het grondslagenonderzoek lijkt door Schouten afgemeten te worden naar het nut voor de natuurkunde. Maar het ‘onbewust doelgerichte’ kan men van veel wiskunde zeggen, Schouten zelf geeft daar voorbeelden van, en bovendien neemt hij in de rest van zijn oratie gas terug. Het bovenstaande citaat van Heyting had bijna uit de mond van Beth kunnen komen. Hun denkbeelden m.b.t. toepassingen ontliepen elkaar niet zo erg. Maar op filosofisch terrein waren de denkbeelden zeker anders. Ook nam Beth heel pragmatisch en realistisch een soort middenpositie in tussen klassieke en intuïtionistische wiskunde. M.b.t. Beth zou men kunnen opmerken dat hij generalistische trekjes had. Maar Beth stond wel op het standpunt dat men vakkennis moest inbrengen. Een opleiding tot generalist stond

[12] J.A. Schouten (1883-1971), buitengewoon hoogleraar wiskunde UvA, 1948-1953; opdracht ‘differentiaal meetkunde’.

hem niet aan. Ook Heyting bracht vakkennis aan ter dienste van andere disciplines. Men trof echter Heytings bredere kijk niet bij iedereen aan. Vandaar nu een uiting uit Tarski (1947, p.12), die vergelijkbaar is met die van Carnap met zijn antwoord op de vraag welke niet-klassieke logica's van belang kunnen zijn. Tarski ging hiermee een stap verder dan Carnap doordat hij een duidelijke keuze maakte, en die was niet voor de intuïtionistische logica:

'Tarski felt that 'The system of von Neumann and Birkhoff [13] seems to me to be the most interesting of these (non-classical logics), and the only one which has any chance to replace our customary two-valued logic, since it is the only one which has arisen from the needs of science'.'

Afgezien van klasieke logica en daarvan afwijkende systemen kan men ook net zoals Carnap kijken naar de totale wiskunde. Dit werd o.a. door d'Abro in 1939 gedaan,[14] en hij kwam met de conclusie dat klassieke wiskunde past bij de natuurkunde zoals ontwikkeld door Einstein en Planck, maar dat de de Brouweriaanse intuïtionistische wiskunde bij uitstek geschikt was voor de latere quantenmechanica (d.w.z. de periode na de quantenmechanica zoals bij Planck en Einstein in een vroegere fase)

E.W. Beth was in de veertiger jaren begonnen met het ontwikkelen van een systeem met syntax en semantiek voor de toenmalige natuurkunde. Dit resulteerde in Beth (1948*a*). Snel hierop sprong Beth met Beth (1949, 1948/49) over op het systeem van Von Neumann en Birkhoff zoals vermeld in het citaat van Tarski. Overigens ging Beth niet zo ver als Tarski met te beweren dat dit dan ook meteen de meest interessante niet klassieke logica zou worden. Beth vond aanvankelijk met deze introductie ongeloof bij zijn vroegere leermeester Kramers,[15] maar wist al snel deze te overtuigen dat met de quantummechanica men beter uit de voeten kon met een geeigende logica dan de klassieke. De relativistische natuurkunde kon nog steeds bediende worden met de klassieke logica.

Als hedendaagse exponent van desinteresse met betrekking tot de grondslagen van de wiskunde voeren we Vladimir Arnol'd (mathematische physica) op, die wel heel unverfroren zijn mening hierover geeft. Arnol'd hecht geen enkel belang aan de axiomatische benadering, zoals zijn leermeester Kolmogorov dit wel deed, en meer nog:[16]

[Arnol'd:] 'Kolmogorov was beïnvloed door de school van Hilbert, en door Brouwer hier in uw land. Voor mij is dat grondslagengedoe het slechtste deel van de wiskunde, het is compleet dood. Het komt neer op massaproductie van volstrekt oninteressante resultaten. Dat zie je in de wiskunde altijd; zodra zich iets oninteressants voordoet, stort zich er een meute epigonen op. [...]' [vraag Eijgenraam:] 'Een boek als de *Principia Mathematica* van Russell en Whitehead kunnen we volgens u dus net zo goed in de prullenbak gooien.' [antwoord Arnol'd]: 'Jazeker. Dat heeft niets te maken met echte wiskunde, het is hoogstens historisch interessant. Men overdrijft altijd over de invloed van de *Principia* op computers en kunstmatige talen, maar voor mij komt het neer op diefstal van wat serieuze mensen daarvoor hebben gedaan [...] Wat zij [R en W] deden

[13] Birkhoff & von Neumann (1936).
[14] d' Abro (1952, pp.212,213).
[15] H.A. Kramers, 1894-1952.
[16] Eijgenraam (1991), interview ter gelegenheid van een eredoctoraat voor Arnol'd aan de Universiteit van Utrecht.

maakt op mij de indruk niets te maken te hebben met de wiskundige realiteit [...]'

Men moet hier niet te licht over denken. ook Beth voelde de last van de niet in grondslagen geïnteresseerde wiskundigen altijd zwaar op zich rusten. Later zou hij in het begin van de vijftiger jaren op dat punt door Brouwer terzijde worden gestaan. Ook Tarski had er in de VS mee te maken.[17] Het valt overigens op dat Arnol'd in het interview Brouwer en Hilbert niet alleen op één hoop veegt waar zij verschillen. maar dat tal van Arnol'ds opmerkingen aardig corresponderen met denkbeelden van Brouwer. Brouwer en Arnol'd zouden denkelijk wel verschillen over wat men precies onder 'wiskundige realiteit' moet verstaan.

In de veertiger jaren had Beth ook bepaalde gedachten over het wiskundig grondslagenonderzoek. Daarbij maakte hij onderscheid tussen wetenschap, die nog in opbouw is, en wetenschap die dat stadium allang voorbij is. Het hieronder gebruikte citaat is afkomstig uit een belering door Beth aan de psycholoog A.D. de Groot n.a.v. de Groot (1943/44). In zekere zin lijkt dit op Arnol'ds denkbeelden, maar Beth draaft minder door dan Arnol'd: [18]

'Bij het wiskundig grondslagenonderzoek gaat het er om, aan een in groote trekken voltooide theorie de finishing touch te geven. De psychologie daarentegen kan nog niet wijzen op een eenigermate afgerond systeem van min of meer algemeen aanvaarde begrippen en inzichten, het is juist de bedoeling, de ontwikkleing van zulk een systeem mogelijk te meken. Terecht bepleit U hier een groote omzichtigheid, die U, naar het mij voorkomt, ook op de juiste wijze hebt betracht.'

2.1 Het voorspel

2.1.1 Het eerste formalisme

In de 19e eeuw zijn er tal van verbeteringen verkregen voor een stevigere onderbouwing van de wiskunde. Bepaalde delen van de wiskunde zoals de algebra leverden hiertoe werktuigen. Cauchy en Weierstrass gaven een exactere grondslag voor de analyse d.m.v. de reëlen en het terzijde schuiven van oneindig kleine grootheden (Leibniz). [19] Pasch is een geval apart: een empirist met een soort formalisme, waar wij op ingaan gezien de belangstelling van Beth en Heyting in meetkuyndige constellaties. citet[p.110-111]Heyting1946b:

'Pasch was overtuigd, zelfs fel, empirist. Hij beschouwde de ervaring als de enige bron van alle, ook wiskundige kennis. Het is merkwaardig, dat hij tengevolge van dit empiristische standpunt de grondlegger is geworden zowel van de moderne axiomatische behandeling der meetkunde in het algemeen als van de onafhankelijk van de Euclidische meetkunde opgebouwde projectieve meetkunde. Hij zag namelijk in, dat van de wiskunde alleen grondbegrippen en grondstellingen aan de ervaring ontleend kunen worden en kwam zo tot de opstelling van het programma, dat alle overige stellingen

[17] Hier zal op worden ingegaan bij het bekijken van organisaties op methodologisch gebied, het loskomen van geldstromen en het opeisen van hoogleraarsposten.

[18] Brief E.W. Beth naar A.D. de Groot, 25 juni 1944, Amersfoort.

[19] Die werden later weer opnieuw naar voren geschoven in Robinson (1966), en al iets eerder door P. du Bois-Reymond, bijvoorbeeld in zijn 'Über die Paradoxen des Infinitär-Calcüls' uit 1877.

zuiver logisch uit de grondstellingen af te leiden. Wat de grondstellingen zelf betreft, de ervaring kan ons slechts iets leren over een eindig deel van de ruimte. Pasch stelt dus zijn axioma's zo op, dat zij in een eindig deel van de ruimte vervuld zijn. [...] Om nu zijn ruimtedeel tot de gehele ruimte uit te breiden voert hij de zogenaamde *oneigenlijke punten* in.'

Men had tal van soorten meetkunde: Euklidische, Bolyai, Lobatschewski, Riemann (pas later aan de beurt). De projectieve, de affiene, de metrische. Hun onderlinge verband werd duidelijk gemaakt door Felix Kleins Erlanger Program: [20] algebraïsering van de meetkunde d.m.v. transformatiegroepen. Bij elke meetkunde past een invariantentheorie, die behoort bij een eindige of oneindige Lie'sche transformatiegroep, waarover de ondergroepen van de groep van de continue transformaties. Ook Brouwer en Hilbert waren werkzaam binnen de transformatie-algebra binnen de meetkunde.[21] Zo algemeen als dezen waren Heyting en Beth evenwel niet —zij werkten op een ander plan.

analyse: Dedekind, Weierstrass

Andere gebieden werden pas in de tweede helft van de negentiende eeuw ontgonnen. Hierbij kunnen wij wijzen naar abstracte algebra, maar ook naar de topologie en de verzamelingenleer. En naar wederkerige toepassingen zoals van algebra binnen topologie. In verband met de ontwikkeling van Brouwer zijn hier vooral die topologie en verzamelingenleer van belang. De verzamelingenleer kreeg een verbreding en verdieping door G. Cantor. Later gevolgd door Zermelo en Hausdorff. Vanuit de verzamelingenleer werd door Hausdorff, maar ook door Cantor, gekeken naar de combinatie met de topologie (ook door Young en Schoenflies). Hierbij heeft men de bestudering van de puntverzamelingen. Brouwer had van alles op Cantors verzamelingenleer aan te merken, maar niet op diens puntverzamelingen.

Het is wellicht aardig om vanwege de rol van Brouwer en Poincaré een omschrijving van topologie uit min of meer de tijd zelf te geven door twee 'leerlingen' van Brouwer, nml. Hopf en Alexandroff:[22]

'Topologie ist Stetigkeitsgeometrie; sie handelt von denjenigen Eigenschaften geometrischer Gebilde, welche bei *'topologischen'*, d.h. eineindeutigen und in beiden Richtungen stetigen Abbildungen erhalten bleiben — von Eigenschaften also, welche jedenfalls nichts mit Größenverhältnissen zu tun haben —, und sie handelt auch von den stetigen Abbildungen selbst.'

De topologie heeft al oudere wortels, Alexandroff & Hopf (1935) zoeken die al bij Descartes en Euler. Vandaar komt men zo her en der wiskundigen tegen die wel iets in deze richting gedaan hebben. Zij laten de huidige topologie pas echt beginnen bij Riemann in 1851 (dissertatie), daarna Möbius (1857), Jordan (1866) om daarmee voor-

[20] Klein (1872).

[21] In kort bestek: Hilbert (1902) en Brouwer (1909), en Brouwers commentaar op Hilbert (1902) in de brief van Brouwer naar Hilbert van 28 oktober 1909 (Amsterdam), zoals in Brouwer (2011).

[22] Alexandroff & Hopf (1935, p. 1). Alexandroff & Hopf (1935) vonden het te ver gaan om al op p. 1 in te gaan op wat zij onder de vage term 'geometrische Gebilden' zouden moeten verstaan. Voor de relaties tussen deze mensen, zie van Dalen (1999) en de brieven in Brouwer (2011). Voor de geschiedenis van de Nederlandse topologie, zie Koetsier & van Mill (1997).

eerst te eindigen bij Poincaré en Cantor. Ook in de topologie krijgt men in die periode al snel velerlei deelgebieden.

Beth (1950*b*, p. 77) zoekt de oorsprong verder terug, wat mede door zijn definitie van topologie mogelijk is: 'De topologie houdt zich bezig met twee op het eerste gezicht diametraal uiteenlopende klassen van eigenschappen, die we kunnen aanduiden als de *dichtheidseigenschappen* en de *samenhangseigenschappen* der meetkundige figuren.' Beth vervolgt: 'Het onderzoek van de dichtheidseigenschappen dateert uit de klassieke Oudheid [...].' Beths gebruik van 'dichtheid' binnen meetkundige stelsels valt onder de definitie van Alexandroff & Hopf (1935), en dit gaat ook op voor de rest van zijn definitie. Beth wil wel verschilende soorten dichtheid onderscheiden om daarmee de Oudheid te kunnen oproepen. Doordat Alexandroff & Hopf (1935) dat niet aanroeren hebben zij Beths tussenstappen van verschillende soorten dichtheid met de daarmee samenhangende meetkunden dan ook niet nodig.

Het uitwaaieren van de wiskunde en het ontwikkelen van nieuwe en abstractere gebieden bracht ook de noodzaak van een duidelijker vastlegging met zich mee. O.a. speelden hierin de axioma's een grote rol. Een soort leer der axioma's in een formalistische samenhang werd door Hilbert al vanaf 1900 ontwikkeld.

Daarnaast waren er logisch-formalistische voorlopers, waaronder Frege en Peano. Deze twee kan men als formalistische voorlopers van Hilbert beschouwen. Alleen met een apparaat van axioma's en inferentieregels kon men verder gaan. Later was B. Russell hier een exponent van. Russell ging overigens nog een stapje verder in zijn poging de wiskunde te willen herleiden tot logica. Dit cumileerde in het tezamen met A.N. Whitehead schrijven van de 'Principia Mathematica'. Al eerder was Russell (1903) gepubliceerd. En op Russell (1903) richtte Brouwer (1907) zijn pijlen. Ook Hilbert moest van dit extreme standpunt van Russell weinig hebben.

Met betrekking tot Frege komt Heyting met een denkbeeld, dat later ook als een belangrijk punt bij Beth terug te vinden is: de combinatie tussen logica en denken, ofwel in Beths later denkbeelden als een onderdeel van de denkmachine. Voor Beth speelde hierbij de deductieve logica een belangrijke rol. Heyting (1947/48*a*, p.277):

'Rather than explicitly treating these improvements (some of which I will revert to later on) I will point out a second reason why Frege's work is of such manifest importance. Through the formalisation of logic it had become clear that the method of mathematics need not be restricted to the domain of number and extensiveness, generally taken: of quantity. In principle every process of thought proceeding according to fixed rules is capable of formalization. In Frege's work we meet the first instance of a system of symbols, allowing of operating according to fixed rules, whereby these manipulations may in a certain sense replace thinking.'

2.1.2 Kronecker en de Franse intuïtionisten

We zullen hier onder de Franse intuïtionisten een aantal kritische geesten met betrekking tot de op dat moment gebezigde wiskunde verstaan. Het is een aantal Fransen, maar voor het gemak zullen we hieonder ook Kronecker rangschikken: zowel bij hem alsook bij Poincaré ontsproot de getaltheorie uit de menselijke geest. Bij Kronecker krijgt men van daar uit een zeer constructieve opbouw van de getaltheorie, maar eigenlijk ook voor de rest van de wiskunde, waartoe de getaltheorie de basis moest leveren.

De term intuïtionisme werd al door sommigen gebruikt. Meestal rekent men als belangrijksten exponenten onder hen: Poincaré, Borel, Baire, Lebesgue en dan toch ook maar Kronecker. In zekere zin kan men hiertoe ook nog Weyl rekenen voordat hij zich bij Brouwer aansloot (hij is natuurlijk wel van iets latere tijd). Zij hebben het nodige in te brengen tegen de op dat moment vigerende tendensen naar formalisering.

Poincaré verzette zich op een aantal punten, o.a. tegen een al te stringent toepassen van de logica en delen van de verzamelingenleer.[23] Borel, maar ook Baire, behandelden vooral wat zij tegenkwamen in hun wiskundige beroepsuitoefening, waar zij het niet mee eens waren.[24] In al deze gevallen heeft men het over diverse opdoemende en zich ontblotende problemen, maar nooit over grondslagen voor de gehele wiskunde. Men hield zich ook niet bezig naar verbindingen te zoeken tussen dergelijke problemen: zijn er diepere oorzaken, heeft men groepen van vergelijkbare problemen? Brouwer met zijn intuïtionisme maakte gebruik van door semi-intuïtionisten naar voren gebrachte denkbeelden, maar bij hem vormen ze een onderdeel van een grotere en alles omvattende aanpak. In tegenstelling tot Brouwer ontbrak bij hen critisch beschouwen van de rol van de taal, en daarbij de formulering van de wiskunde en de logica als een talig project. Aan dit punt wordt nogal eens voorbijgegaan. Als voorbeeld hiervan kan men von Neumann (1947) nemen, die Weyl en Brouwer beiden op eenzelfde hoogte stelde. Hij ging daarmee voorbij aan het feit dat Weyl in zijn eigen aanpak ook weer kritiek op punten had, en zeker niet zoals Brouwer probeerde een nieuwe fundering te leveren. Weyl sloot zich gemakshalve bij Brouwer aan, maar had in dat opzicht geen eigen inbreng. Overigens was daar ook al iets misgegaan, gezien Brouwers opmerking: [25]

'Im Sommer 1919 habe ich während der persönlichen Besprechungen mit Weyl im Engadin, in Anschluss an welche dieser zu meinen Auffassungen bekehrt wurde, einmal anlässlich der Definition der stetigen Funktionen im § 1 des ersten Teiles meiner 'Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten' [26] die Vermutung geäussert und motiviert, dass diese Funktionen die einzigen im vollen Kontinuum existierenden seien (vgl. in diesem Zusammenhang S. 62 meines eben im Riemannheft der Annalen erschienenen Aufsatz: 'Ueber Definitionsbereiche von Funktionen') [27]

Nur auf dieser ((wie vieles?) andere, von Weyl halbverstanden) *Vermutungsäusserung* meinerseits kann es beruhen, dass seitdem von Weyl die Legende verbreitet wurde, dass es in der Brouwerschen Analysis *selbstverständlich* sei, dass im Kontinuum keine anderen als gleichmässig stetige Funktionen existieren können.'

Het gaf Brouwer derhalve veel ongenoegen kennis te nemen van dit soort verontachtzaming van zijn allesomvattende inbreng en het op een grote hoop gooien van iedereen die het in bepaalde opzichten niet eens was met de brede wiskundestroom. Volgens hem geschiedde dit ook al op het gebied van de topologie. Niet ten onrechte

[23] van Dalen (2012)

[24] Bockstaele (1949).

[25] Brouwer, op en aanmerkingen mbt Fraenkel (1927), brief Brouwer naar Fraenkel 28.I.1927, zie Brouwer (2011).

[26] Brouwer (1918).

[27] Brouwer (1927).

reageerde hij daar bij tijd en wijle scherp op. Enkele voorbeelden uit Brouwers correspondentie met Fraenkel: [28]

‘ Und da möchte ich Sie nun dringend bitten, dass Sie nicht die Expropriation kontinuieren, die die deutsche referierende mathematische Literatur an mir verübt hat, indem sie mich dasjenige, was mein ausschliessliches persönliches geistiges Eigentum ist, mit Poincaré, Kronecker und Weyl teilen lässt. (Einigermassen bin ich übrigens an diesem Unrecht selbst dadurch Schuld, dass ich mich einige Male in den oberflächlichen Leser leicht irreführender Weise mit meinen Vorläufern, mit denen ich nur die Bekämpfung des Formalismus gemeinsam hatte, durch die Bezeichnung als Intuitionisten vereinigt habe).’

Hier had men volgens Brouwer te maken met een vaker voorkomend verschijnsel: [29]

‘Nach einer Aussage Schopenhauers wird gegen jeden Neuerer von der ihm automatisch erwachsenden Gegnerschaft zunächst die Taktik des (sachlichen) Totschweigens, und nach dem Versagen dieser, die Strategie des (persönlichen) Prioritätsraubes angewandt.’

Brouwer en Kronecker gingen beiden uit van de natuurlijke getallen als grondstof voor de wiskunde. Volgens Kronecker (1887) moet alle arithmetica op de eenvoudigste wijze tot het getalbegrip herleidbaar zijn, en het getalbegrip is een aan de mens gebonden voortbrengsel — men zou kunnen zeggen een intuïtief begrip. Dit laatste haalde Kronecker uit Gauss.[30] Overigens vallen volgens Gauss geometrie en mechanica hier niet onder: ruimte en tijd hebben buiten ons om een werkelijkheid. Enkele citaten uit Kronecker (1887, pp. 338-339):

’Dabei ist aber das Wort ‘Arithmetik’ nicht in dem üblichen beschrankten Sinne zu verstehen, sondern es sind alle mathematischen Disciplinen mit Ausnahme der Geometrie und Mechanik, also namentlich die Algebra und Analysis. Und ich glaube auch, dass es dereinst gelingen wird, den gesammten Inhalt aller dieser mathematischen Disciplinen zu ‘arithmetisieren’, d.h. einzig und allein auf den im engsten Sinnen genommenen Zahlbegriff zu gründen, also die Modificationen und Erweiterungen dieses Begriffs[31] wieder abzustreifen, welche zumeist durch die Anwendungen auf die Geometrie und Mechanik veranlasst worden sind.’

Kronecker (1887) gaat daarna over op het getalbegrip met toegelaten eenvoudige bewerkingen. daarna wordt het tijd om onbekenden en constanten (Buchstabenrechnung) in te voeren, en te laten zien hoe men begrippen zoals negatieve, gebroken en irrationele getallen kan vermijden. Derhalve besluit Kronecker (1887, p. 355):

‘Insofern gehören also auch die Resultate der *allgemeinen* Arithmetik eigentlich der speciellen gewöhnlichen Zahlentheorie an, und alle Ergebnisse der tiefsinnigsten mathematischen Forschung müssen schliesslich in jenen einfachen Formen der Eigen-

[28] Brouwer, op en aanmerkingen m.b.t. Fraenkel (1927), brief Brouwer naar Fraenkel 28.I.1927, zie Brouwer (2011).

[29] Brief Brouwer naar Fraenkel 28.I.1927, zie Brouwer (2011).

[30] Kroneckers ‘god’ verschijnt in een noot op p. 338 en wordt door hem aan Gauss toegeschreven: ‘O $\vartheta\varepsilon o\varsigma\,{}'\alpha\varrho\iota\vartheta\mu\eta\tau\iota\zeta\varepsilon\iota.$

[31] Kroneckers noot: ‘Ich meine hier namentlich die Hinzunahme der irrationalen sowie der continuirlichen Grössen.’

schaften ganzer Zahlen ausdrückbar sein.'

Alles wat hieraan te buiten ging kon op tegenstand van Kronecker rekenen. Echter in het laatste citaat komt een zware bewering voor 'alle ... sein.': de vraag is in hoeverre dit nu nog houdbaar is. Onduidelijk is wat Kronecker met 'tiefsinnigsten mathematischen Forschung' bedoelt. Daarnaast kan men zich afvragen of inderdaad alles uit de reële getallen omgezet kan worden in de natuurlijke, en of dan ook de 'alle Ergebnisse der tiefsinnigsten mathematischen Forschung' binnen de natuurlijke getallen uitgedrukt kunnen worden. Tarski (1939) beantwoordt dit negatief.[32]

Kronecker werd door Hilbert als een dogmaticus gekenschetst, en later Brouwer eveneens. Kronecker wilde een streng finitistische opbouw. Zijn vertrekpunt waren de gehele getallen. En dat waren ze ook voor Brouwer. Dit leidde uiteindelijk tot wrijving tussen Kronecker en zijn leerling Cantor. Maar ook tussen Kronecker en Weierstrass. En tenslotte tussen Kronecker en Dedekind.

Poincaré en Brouwer hadden diverse punten gemeen. Bij Poincaré is mathematische inductie een afgeleide van ons intuïtieve getalbegrip. Poncaré zag veel onheil in het toepassen van impredicatieve definities. Er is echter op een belangrijk punt een verschil tussen Poincaré en Brouwer: de logica. Poincaré had het nodige op de logica aan te merken, maar dit lag in de sfeer van verbeteringen van de oude vertrouwde logica en niet in een totaal andere opvatting van het gebruik en de vorm van de logica: bij Poincaré geen verwerping van de wet van het uitgesloten derde $A \vee \neg A$.[33] Daarnaast gebruikte Poincaré 'mathematische existentie' als een evenbeeld van 'geen contradictie'.[34]

nog te bespreken:
indirecte bewijzen
Kummer gerelateerd aan Kronecker

Hilberts leerling Weyl begon eind jaren negentientien met een eigen zuiveringsprogramma. Hij was tegen een aantal voor hem onjuste principes, waaronder impredicatieve definities. Ook de quantoren ontkwamen niet aan zijn zuivering. Later, rond 1920, is hij de weg van Brouwer opgegaan.[35]

2.1.3 De paradoxen

Overigens verliep niet alles op een even gemakkelijke wijze. Zowel de verzamelingenleer alsook het logisch-formalisme geraakte in moeilijkheden. Rond 1900 was er de nodige consternatie bij het bekend worden van diverse paradoxen. De paradox van Burali Forti uit 1897 had betrekking op de theorie van de ordinaalgetallen, die samenhingen met Cantors verzamelingenleer. Een antwoord kwam vanaf 1904 van Zermelo. Als tweede kwam de Russell-paradox met betrekking tot de door Frege ontwikkelde

[32]Zie ook Beth (1948*b*, p. 83).
[33]Zie van Dalen (2012).
[34]Troelstra (1991, p. 4); voor Poincarés filosofische denkbeelden, zie ook Mooij (1966).
[35]Zie ook van Dalen (1995), en natuurlijk Brouwer in de al geciteerde brief naar Fraenkel, zie ook Brouwer (2011).

formele logica.[36] Uitvoerig werd de paradox in Russell (1903) beschreven. In 1908 droeg Russell zijn typentheorie als oplossing aan. Het lag op de weg van Brouwer (1907) op deze paradoxen in te gaan. Ook voor Hilbert gaf dit aanleiding tot bezinning op zijn bezigheden: de leer van Cantor en die van Zermelo lagen hem na aan het hart. Met dit tweetal had Brouwer niet veel op zo gauw men zich in voor hem onbestemde en onbestaanbare oneindigheden verliest.

Naar aanleiding van Ramsey verdeelde Beth (1939, p.200), [37] de logische en wiskundige paradoxen in 2 groepen:

a. contradicties die kunnen ontstaan in het logische of wiskundige systeem zelf

b. contradicties gerelateerd aan denken, taal of symbolisme — de epistemologische of semantische paradoxen.

Opnieuw kan dit aanleiding geven tot onduidelijkheid. Maar goed, wij kunnen niet op alles ingaan, en vervolgen met Beth (1939, 1959); **?**: De paradoxen van groep a., zoals die van Russell, Cantor, Burali-Forti, komen bij formalisatie van logica en wiskunde terecht in de formuletekst en worden daaruit door Russell's typen-voorschrift verwijderd. Onder b. treft men de semantische paradoxen zoals de paradoxen van Grelling, Berry, Richard, Zermelo-Köning. Deze zijn te verwijderen door gebruik van Tarski's semantische methode.

Er zal hier een voorbeeld gegeven worden van een paradox uit Beth (1935, pp.47-48). Deze paradox valt onder het type Russell-paradoxen: ellende bij eigenschappen van eigenschappen, ofwel klassen van klassen. Een eigenschap kan de eigenschap bezitten steeds een andere eigenschap in te sluiten. Bijvoorbeeld: een eigenschap kan op zichzelf slaan —bv. eigenschap 'abstract' is abstract. Maar ook 'op zichzelf slaan' is een eigenschap (maar alleen voor eigenschappen). Maar evenzo de eigenschap 'niet op zichzelf slaan', en hier begint de ellende. Slaat die laatste eigenschap wel of niet op zichzelf? —bij de ene en de andere mogelijkheid is er sprake van contradictie.

Waar kunnen paradoxen door ontstaan? — onzuiver of onzorgvuldig taalgebruik, eigenaardige definities. Fraenkel (1927, p. 27) bracht naar voren:

'J. Richard und Henri Poincaré sowie — namentlich unter des letzteren Einfluss — B. Russell, erblickten den Quell des Bösen, aus dem die Antinomieen hervorgingen, in den sogenannten *nicht-prädikativen Verfahren*.' [38]

Impredicative definities kunnen een boosdoener zijn. Zij staan in een slechte reuk van circulus vitiosus. Enerzijds zijn ze voor bepaalde doeleinden nodig, anderzijds kan men er paradoxen door laten ontstaan. Beth was zeer geïnteresseerd in deze combinaties,[39] maar hij niet alleen. Het is aardig een niet-intuïtionist dit aan een ten dele

[36] De beroemde brief van Russell naar Frege uit 1902, en Freges antwoord, eveneens uit 1902.

[37] Beth (1939) verwijst naar Ramsey, 'The foundations of mathematics', *Proceedings of the London Mathematical Society*, Series 2, 25, 1926, pp. 338-384.

[38] Door Fraenkel (1927) wordt verwezen naar Henri Poincaré, *Wissenschaft und Methode*. Deutsche Ausgabe, Teubner, Leipzig und Berlin, 1914, en naar B. Russell, 'Mathematical logic as based on the theory of types', *American Journal of Mathematics* 30, 1908, 222-262.

[39] Beth (1959); **?**, 1948*b*, 1939).

voor het intuïtionisme gewonnene te zien uitleggen, d.w.z. Gödel aan zijn vroegere hoogleraar Karl Menger:[40]

'Eine Definition heisst imprädikativ, wenn in ihr auf eine Gesamtheit Bezug genommen wird, zu der das definierte Objekt selbst gehört. [...] Die intuitionistische Einwände richten sich nicht gegen solche Fälle von imprädikativen Definitionen, bei denen feststeht, dass das definierte Objekt auf andere Weise *auch* prädikativ definiert werden kann (z.B. die kleinste Zahl aus einer Menge von natürlichen Zahlen; jede natürliche Zahl kann als Summe von Einsen prädikativ definiert werden!)'

Bij intuïtionisten waren dus de tanden uit de impredicatieve definities getrokken. De uitgebreidere versie was voor hen zinloos. Bij het bekijken van de paradoxen moet men evenwel niet denken dat het verwijderen hiervan een hoofddoel vormde voor Brouwer en zijn intuïtionisme. Het was een bijproduct, omdat de voorwaarden voor het ontstaan van paradoxen niet meer aanwezig waren binnen zijn wiskunde.

Russell onderkende het gevaar van paradoxen door hun toedoen en verbood ze. Hij kwam als vervanging met zijn typentheorie en een verfijning (i.v.m. de paradox van Richard en van de liegende Kretenzer) van de typentheorie. Het geheel kan dan weer verbeterd worden door reduceerbaarheid in plaats van de typentheorie.

Soms wordt ook van Gödels onvolledigheidsbewijs gedacht dat daarin paradoxen een rol spelen zoals door Wittgenstein. Wellicht komt dit ook door de formulering van de eerste sectie van Gödel (1931*b*).[41] Dit werd door Gödel bestreden:[42]

'He [i.e. Wittgenstein] interprets it as a kind of logical paradox, while in fact it is just the opposite, namely a mathematical theorem within an absolutely uncontroversial part of mathematics, namely finitary number theory or combinatorics. [...]'

2.1.4 Het tweede formalisme en logicisme

Hilberts voorzet werd gegeven met de axiomatische opbouw binnen Hilbert (1899), Een belangrijke toevoeging hieraan was Hilbert (1902). Hierin werd de overstap naar topologie gemaakt.[43] De volgende stappen werden gezet met Hilbert (1900*b*) en tijdens de congressen van Parijs in 1900 en Heidelberg in 1904. [44]

Hilbert had in 1900 een begin gemaakt met zijn formele systemen. De vorm van de uitdrukkingen speelde de hoofdrol, niet de modellen. Hier heeft men het beroemde 'stoel en tafel' voorbeeld van Hilbert. Voor Brouwer waren dergelijke interpretaties zinloze excercities.

In 1904 werd ook Hilbert ingehaald door de door Russell aangetroffen paradoxen. Hilbert gaf niet op, maar dacht dat hij het in een nog beter, op hetzelfde stramien voortbordurend programma moest zoeken. In Hilbert (1905) werd bovendien de gedachte van een metatheorie of metamathematica naar voren geschoven. Brouwer zag niets in metamathematica en was daar op tegen. Hierna concentreerde Hilbert zich gedurende

[40] Brief K. Gödel aan K. Menger, 6.IV.1933, Wien, in Gödel (2003*b*, p.104).

[41] zie ook van Heijenoort (1967), inleiding tot Gödel (1931*b*, p.592).

[42] Brief K. Gödel aan K. Menger, 20.IV.1972, Princeton, in Gödel (2003*b*, p.133).

[43] Op Hilbert (1902) had Brouwer overigens het nodige aan te merken op technisch gebied, zie de brief Brouwer naar Hilbert, 28.X.1909 in Brouwer (2011), maar dit valt na Brouwers proefschrift in 1907.

[44] Parijs: Hilbert (1900*a*); Heidelberg: Hilbert (1905)

enige tijd op andere wiskundige problemen. Hilberts denkbeelden werden direct door Brouwer in zijn proefschrift van 1907 verwerkt en afgekeurd. Daarna was ook Brouwer enige tijd met andere wiskundige problemen bezig, maar verloor niet zijn denkbeelden over de grondslagen van de wiskunde uit het oog. In die periode was zijn verhouding met Hilbert niet slecht. Heyting neemt in het volgende citaat wat gas terug: [45]

'Zowel het formalisme als het intuitionisme gaat dus strenger te werk dan de wiskunde der 19e eeuw. Toch zou ik niet durven beweren, dat nu met een van deze twee richtingen de absolute strengheid bereikt is. Beide bevatten nog resten van materiele interpretatie. Hilbert moet materiele tekens gebruiken, waarover niet formeel, maar aanschouwelijk geredeneerd wordt. Men heeft ook die metamathematica alweer geformaliseerd, wat in zoverre een vooruitgang geeft, dat daarvoor met een eenvoudiger systeem kan worden volstaan dan voor de formalisering van de hele wiskunde nodig is. Principieel is echter op de tekens van de metamathematica hetzelfde van toepassing als zoeven over die van de wiskunde is gezegd. Een mogelijkheid van verdere ontwikkeling zie ik hier nog in de richting van uiterste beperking van het aantal tekens en vooral van het aantal met de tekens te verrichten bewerkingen.'

In de twintiger jaren zal wel veel veranderen. Hilbert besteedde taken uit. Voor de verdere ontwikeling van het formalisme zette hij in : Ackermann, Bernays en Von Neumann. Ook met de resultaten van Skolem werd door hen en door Hilbert het formalisme verfijnd en beter onderbouwd.

Brouwer deed merendeels alles zelf: in die periode ontwikkelde hij zijn concept van keuzerijen verder en verfijnde zijn verzamelingen. Hierin werd zijn vroegere intuïtionistische werk ingebed.

Zermelo

2.1.5 Brouwer

Wij zullen hier beginnen met een omschrijving in Heyting (1968):

'Het intuïtionisme is ontstaan als reactie tegen het begripsrealisme en het formalisme. Brouwer definieerde wiskunde als denkvorm, waarbij in abstracte eenheden gedacht wordt en de aard van de eenheden buiten beschouwing blijft. Volgens Brouwer is de taal slechts een begeleidend verschijnsel van de wiskunde. Hij beschouwde daarom formalisering als voor de wiskunde onvruchtbaar.'

Het begrip 'formalisme' zijn we al eerder tegengekomen, maar nog niet 'begripsrealisme'. Heyting (1968) legt aan de hand van een voorbeeld begripsrealisme uit: 'De onder wiskundigen meest gebruikelijke opvatting is die van het begripsrealisme. Zij stellen zich een actueel bestaande wereld van verzamelingen voor.' Dit kan de verkeerde kant uitschieten volgens Heyting als men naar de status van het keuze-axioma vraagt: waar of onwaar, ofwel een Zermelosche of een niet-Zermelosche verzamelingenleer. Als men dit in het midden laat en alleen formeel theorieën bouwt, dan volgens Heyting (1968) 'komt die verzamelingswereld helemaal buiten de wiskunde te liggen en is ze voor de wiskunde volkomen irrelevant.'

[45] Heyting (1940, p.21).

2.1.6 Brouwer: taal en intuïtie

Brouwer geeft als volgt het voorspel aan om bij zijn opvattingen van de wiskunde te komen: het wiskundige intellect en de daarin opkomende denkbeelden. In een tweede stadium heeft men te maken met de verwoordingen van deze denkbeelden, d.w.z. de taal en de beperkingen die aan de taal inherent zijn. De rol van de taal is volgens Brouwer vaak dubbelzinnig en kan aanleiding geven tot onjuiste voorstellingen. Heyting (1931, p.106):

'Das Ziel, das der intuitionistische Mathematiker sich setzt, ist folgendes. Er will Mathematik treiben als natürliche Funktion des Intellekts, als freie, lebendige Aktivität des Denkens. Für ihn ist die Mathematik ein Erzeugnis des menschlichen Geistes. Die Sprache, sowohl die gewöhnliche wie die formalistische gebraucht er nur zur Mitteilung, d.h. um andere oder sich selbst zum Nachdenken seiner mathematische Gedanken zu veranlassen. Eine solche sprachliche Begleitung ist kein Bild der Mathematik, noch weniger die Mathematik selbst.'

Als men taal gaat gebruiken om daarmee wiskundige constructies te beschrijven of om over wiskundige constructies te redeneren heeft men altijd de mogelijkheid dat daarmee fouten of paradoxen insluipen. Brouwer beschouwt taal niet als een stabiel medium en zeker niet als dit betrekking heeft op wiskunde, en helemaal niet als van daaruit 'metawiskunde' bedreven wordt. Ofwel vertaald: formele wiskundige systemen en metamathematica. Ook de axiomatische aanpak gaat daarmee op de helling: Brouwers intuïtionisme kent geen axioma's. Brouwer (1933, p.53) gaat als volgt hierop in: [46]

'Daar de meest vlot verlopende wilsoverdracht tenslotte toch een onvolkomen stabiel en onvolkomen wetmatig verschijnsel blijft, kan daarbij nòch van volkomen exactheid, nòch van volkomen zekerheid sprake zijn. Dit blijft het geval als wilsoverdracht door middel van taal tot stand komt, en dit blijft ook het geval, als wilsoverdracht op de constructie van zuiver wiskundige systemen betrekking heeft, zoodat onze redelijke bezinning tot het resultaat heeft gevoerd, dat er *ook voor de zuiverewiskunde geen onfeilbare taal kan bestaan*, d.w.z. geen taal die bij de gedachtenwisseling misverstanden uitsluit en in haar mnemotechnische functie een garantie biedt tegen fouten, d.w.z. tegen verwarring van verschillende wiskundige entiteiten met elkaar. En tegen deze onvolkomenheid kunnen geen voorzieningen worden getroffen door zoals de *formalistische school* te werk gaat, de wiskundige taal, d.w.z. het teekensysteem dat overeenkomstig de beooging van spreker of schrijver zuiverwiskundige constructies bij andere menschen oproept, op haar beurt aan een wiskundige beschouwing te onderwerpen, haar door omwerking een nauwkeurigheid en stabiliteit te verleenen [...] en zich daarbij te bedienen van een over haar handelende 'boventaal' of taal der tweede orde.'

En bovenstaande hangt volgens Brouwer (1933) samen met het '[o]ngerechtvaardigde geloof aan de betrouwbaarheid der klassieke logica.' Ook Heyting (1931, pp.106-107) ontkende in navolging van Brouwer een Platoonse hemel en het overal en altijd toepasbare uitgesloten derde:

[46] Deels is Brouwer (1933) een vertaling van Brouwer (1929), zijn Weense lezing. Volgens Heyting (1925) is er wel een mogelijkheid tot een soort van axiomatiek bij Brouwer ingebouwd, maar natuurlijk niet zoals bij Hilbert.

‘Die mathematische Gegenstände, wenn auch vielleicht unabhängig von einzelnen Denkakt, sind ihrem Wesen nach durch das mensliche Denken bedingt. Ihre Existenz ist nur gesichert, insoweit sie durch Denken bestimmt werden können; ihnen kommen nur Eigenschaften zu, insoweit diese durch Denken an ihnen erkannt werden können [...] Der Glaube an die transzedente Existenz, der durch die Begriffe nicht gestüzt wird, muss als mathematisches Beweismittel zurückgewiesen werden. Hier liegt [...] der Grund für den Zweifel an dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten.’

Wel kan het uitgesloten derde binnen bepaalde probleemstellingen geldig zijn. Eerder al bracht Heyting (1925, pp.1-2) naar voren:

‘Toch is het feit, dat de nieuwe opvattingen zoo langzaam doordringen, voornamelijk te wijten aan metaphysische denkgewoonten. Het geloof in het ‘principium tertii exclusi’ berust meestal op de waan, dat het woord ‘bestaan’ in ontologische zin zonder meer duidelijk is. daardoor zien de meeste wiskundigen de mogelijkheid en noodzakelijkheid, een dergelijk ‘bestaan’ als grondslag voor abstracte wiskunde te wraken, niet onmiddelijk in. Zij komen dan licht tot de meening, dat de vraag, of een entiteit met gegeven eigenschappen ‘bestaat’, een van ons denken onafhankelijke betekenis heeft. Zoo ontstaat, wat Weyl ‘naiver Existentialabsolutismus’ noemt.’

En opmerkelijk is het directe vervolg in Heyting (1925, p.2):

‘De formalisten hebben het laatst bedoelde standpunt sinds lang overwonnen; bij hen vindt men dan ook soms een zuiver begrip van het intuïtionisme (zie bijv. P. Bernays, Jahresbericht der D.M.V. 31, blz. 13-15). Daar hun doel is, zoo veel mogelijk van de oude wiskunde te redden, ook al gelukt dat slechts naar den uiterlijken vorm, is een juiste waardering van hen niet te verwachten.’

Overigens hadden de ‘grondslagers’ om Hilbert zeker een genuanceerdere kijk op de zaken en gaven dit ook toe. Hun verhouding met de intuïtionisten was dan ook niet slecht. Alleen Hilbert gooide alles in de strijd en gaf naar de vorm niets toe, maar wel naar de inhoud: hij bleef sleutelen aan verbeteringen van zijn langzamerhand steeds meer finitistische bewijstheorie, ook al tendeerde deze naar het intuïtionisme. Weyl (1944, pp. 640-641) heeft de volgende mening over deze tweeslachtigheid:

‘But how to make sure that the ‘game of deduction’ never leads to a contradiction? [...] The game is played in silence, but the rules must be *told* and anything about it, in particular about its consistency, communicated by *words*. Incidentally, in describing the indispensable intuitive basis for his *Beweistheorie* Hilbert shows himself an accomplished master of this, alas, so ambiguous medium of communication, language. With regard to what he accepts as evident in this ‘mathematical’ reasoning, Hilbert is more papal than the pope, more exacting than either Kronecker or Brouwer. [...] Hence Hilbert prefers to make a clear cut: he becomes strict formalist in mathematics, strict intuitionist in metamathematics.’

Weyl haalt twee punten naar voren: Hilberts toenemend finitisme en zijn gebruik van taal bij zijn zoeken naar consistentie in zijn bewijstheorie. Dit laatste zou Hilbert in moeilijkheden brengen. En hier ten overvloede herhaald, Brouwer zag niets in metamathematica. Hilbert (1931, p.493) had andere denkbeelden over intuïtie, taal en denken:

‘Das Denken geschieht eben parallel dem Sprechen und Schreiben: durch Bildung und Aneinanderreihung von Sätzen. Und zur Begründung [van de wiskunde] brauche ich weder den lieben Gott wie Kronecker, noch die Annahme einer besonderen auf das Prinzip der vollständigen Induktion abgestimmten Fähigkeiten unseres verstandes wie Poincaré, noch die Urintuition wie Brouwer, endlich auch nicht wie Russell und Whitehead das Axiom der Unendlichkeit und Reduzierbarkeit, die ja wirkliche inhaltliche and durch Beweise der Widerspruchsfreiheit nicht kompensierbare Voraussetzungen sind, von denen die letztere nicht einmal plausibel ist.’

Brouwer (1912, p.7) bracht hiertegen in: ‘Op de vraag, waar de wiskundige exactheid dan wel bestaat, antwoorden beide partijen verschillend; de intuitionist zegt: in het menschelijke intellect, de formalist: op het papier.’ In dit verband is het aardig om uit Heytings afscheidsrede te citeren: [47] ‘Een wiskundige kan nu eenmaal niet ernstig spreken als hij geen schrijfmateriaal bij de hand heeft.’

De citaten geven al een voorschot op wat ons nog verder van de kant van Brouwer te wachten staat. Brouwer schuift intuïtie naar voren als bestaansgrond van de wiskunde. Hierin wordt hij vooreerst nagevolgd door Heyting. Wij zullen een voorbeeld bekijken, dat afhangt van het gebruik van het begrip ‘natuurlijk getal’. Dit is natuurlijk niet zomaar een voorbeeld. De natuurlijke getallen spelen bij Brouwer en Kronecker een rol als bouwstenen van het wiskundige bedrijf. Heyting (1940, p.20):

‘Het hangt van de betekenis af, die men aan de woorden ‘natuurlijk getal’ hecht, of men de fundering van elk dier feiten [enkele voorbeelden door Heyting uit de taalpractijk: ‘is ... een natuurlijk getal?’] voldoende zal achten om die woorden [natuurlijk getal] te gebruiken. Nu kan men de definitie van ‘natuurlijk getal’ wel zo scherp geven, dat in elk der genoemde gevallen twijfel omtrent het antwoord uitgesloten is, maar men kan zich niet de zekerheid verschaffen, dat een dergelijke twijfel zich bij een ander voorbeeld niet weer zal voordoen. Wil men zich hiervoor vrijwaren, dan moet men het antwoord op de vraag, of een zin een natuurlijk getal definieert, niet laten afhangen van de betekenis van die zin, maar uitsluitend van zijn uiterlijke gedaante. Zo komen de formalisten er toe, de wiskunde op te bouwen als een spel met tekens. [...]

Terwijl de formalisten terwille van de formele strengheid de interpretatie van de wiskunde als geestelijke werkzaamheid op de achtergrond schuiven, plaatsen de intuitionisten deze in het centrum van de belangstelling; zij moeten daarom een zekere vaagheid in de uitdrukkingswijze aanvaarden. Dit is voor hen geen groot bezwaar, omdat de wiskunde voor hen bestaat in een denkproces en de taal slechts een bemiddelende functie heeft.’

In zeker opzicht naderden de formalisten en intuïtionisten elkaar op het punt van zorgvuldigheid en constructie. Men kan hierin zelfs verder gaan: ook Hilbert en de significa; Mannoury (1934, p.319):

‘Und das Merkwürdigste ist hierbei, dass der Nestor [Hilbert] unserer heutigen Formalisten bisweilen eine recht klare Vorstellung der psychologischen Bedeutung der Mathematik zu besitzen kundgibt, z.B. als er sich (39, S. 15) [48] in dem Sinne äussert,

[47] Heyting (1968).
[48] Zie Hilbert (1928).

sein wissenschaftliches Ziel sei nicht anderes, 'als die Tätigkeit unseres Verstandes zu beschreiben, ein Protokoll über die Regeln aufzunehmen, nach denen unser Denken tatsächlich verfährt.' Eben! Das ist aber reine Signifik.'

Beth maakte overigens graag gebruik van Hilbert. Hilberts eerste zin zit niet van ver van sommige denkbeelden van Beth af. Meer nog, volgens Beth weerspiegelt de deductieve logica denkprocessen.

De standpunten lopen op het eerste gezicht nogal uiteen. Zij kunnen echter ook onder één noemer worden gebracht. Wij doen dit met de dissertatie van Beth, die gaat over rede en aanschouwing in de wiskunde. Hierbij kan men aanschouwing deels of geheel vervangen door intuïtie.[49] Beth (1935, p.87):

'Een existentiebewijs is derhalve alleen aanvaardbaar, wanneer de bewezen existentie te verifieeren is, d.w.z. wanneer het mathematische object in quaestie áán te geven is. Hierdoor vervalt het logische principe van het uitgesloten derde, tenminste als universeel bewijsmiddel, waardoor het niet mogelijk is, de wiskunde in haar traditioneelen omvang langs intuitionistischen weg op te bouwen. De door de formalisten in de bewijstheorie toegepasten methoden vertoonen met de intuitionistische een sterke analogie [...]'

En Beth (1935) gaat dan verder naar een laatste stap om aan te tonen dat rede en aanschouwing, dus in zekere zin formalisme en intuïtie, twee kanten van eenzelfde zaak zijn, die niet zonder elkaar kunnen. Men kan zich afvragen of Beth wel de meest geëigende persoon is om hiertoe ten tonele te worden gevoerd, daar hij later duidelijk naar voren bracht geïnteresseerd te zijn in de formele kant van het intuïtionisme, maar verder geen intuïtionist genoemd wilde worden. Men kan hier tegen in brengen dat dit zijn denkbeelden van na 1950 zijn, en dat voor de oorlog zijn interessen anders lagen. Beth (1935, p.89):

'De wiskunde vindt dus haar subjectieven (aanschouwelijken [dus ook intuitieve]) grondslag in den opbouw van de mathematische objecten, haar objectieven (redelijken [formele?]) grondslag in de wetten van dien opbouw. Aanschouwing en Rede zijn dus in de wiskunde geen kenbronnen van verschillend karakter, die aan haar opbouw op geheimzinnige wijze samenwerken; het zijn begripsvormen, die hun ontstaan danken aan de twee verschillende wijzen, de subjectieve en de objectieve, waarop men wiskunde kan en moet fundeeren.'

Het zij wel bemerkt dat over het algemeen men voor het ontstaan van wiskunde allerlei psychische processen naar voren brengt, maar dit wel uit de losse pols doet. Zeker is dit bij Brouwer het geval. Men kan natuurlijk dit alles terzijde laten en gewoon naar de merites van de diverse soorten van aanpak kijken, zoals we Carnap (1939) al hebben zien doen. Of de pragmatisch-realistische koers van de latere Beth bevaren. Beth heeft overigens zich tijdens zijn studieën en zijn artikelen laten kennen als iemand die wetenschappelijker op deze materie is ingegaan. Daarvan kan niet los worden gezien zijn belangstelling voor leerprocessen en het kennende subject. Bij Brouwer moet men zich maar afvragen wat hij met intuïtie bedoelt en hoe de intuïtie in werking treedt.

[49] Beth (1935), p. 90 e.v. Met het woord 'aanschouwing' heeft men te maken met velerlei interpretaties en toepassingen, ook met innerlijke aanschouwing.

Wellicht lost hij iets op door aan te geven hoe men wiskunde leren moet, als hij er niet al vanuit gaat dat er niets te leren valt: je hebt het of je hebt het niet.

Men kan ook uitgaan van de bespreking in Bell (1945). Kijk naar wat er wordt afgeleverd en beschouw dat op zijn mérites: wat kan men met de axiomatiek van de een, wat kan men met de opbouw van het intuïtionistische wiskunde van de ander. En laat de rest, zoals de oerintuïtie e.d., voor de ware gelovige. Overigens was door kenners aan Bell verteld dat alleen in het Nederlands men het juiste begrip voor de nuances bij Brouwer kon hebben. Daarmee is men als een niet-Nederlander snel uitgepraat.

2.1.7 Brouwer: primitieven

Hoe moet een opbouw van de wiskunde verschaft worden? Hilbert grijpt meteen naar zijn axioma's en afleidingsregels. Brouwer komt aan met de natuurlijke getallen als eerste bouwstenen voor het 'wiskundige bedrijf'. Deze correleerde hij met een tijdsbesef: een ding, en nog eens een ding. Overigens moet men dan niet denken dat men aan de gedachte van één ding genoeg heeft als grondgedachte, de gedachte van een ding erbij nemen 'vooronderstelt de intuïtie van twee. Men heeft derhalve 'constantheid in wisseling als eenheid in veelheid'.[50] Van één ding naar nog één ding is voor Brouwer het scheppende moment, en is voor hem de tijdsintuïtie, en tegelijk de continuumintuïtie. Men heeft hierbij de constructie van ordetype ω: van één naar twee, van daaruit naar drie. Daarnaast de constructie van ordetype η: de overgang tussen twee eenheden.[51] Overigens vindt men bij Brouwer het gebruik van de woorden 'construeren' en 'opbouwen'. Soms gebruikt hij het ene, dan weer het andere woord. 'Construeren' heeft wel een zekere connotatie van 'systeem', 'formalisme', 'iets gemaakts' en 'regeltjes' — dat vindt Brouwer niet altijd geschikt volgens van Stigt (1990).

Het valt hier op dat Brouwer diverse termen gebruikt, die alle hetzelfde inhouden. Deze gebruikte hij al naargelang zijn pet stond: *elementairintuïtie, tijdsintuïtie, oerintuïtie der wiskunde, intuïtie van veelenigheid, continuumintuïtie*. Voor het vervolg is het van belang dat Brouwer de continuumintuïtie gelijkschakelt met de tijdsintuïtie.[52]

Heyting (1940) staat iets gereserveerder tegenover het aangedragen beeld van de natuurlijke getallen:

'In de intuïtionistische wiskunde kunnen wij nog zo ons best doen, de natuurlijke getallen te denken vrij van alle niet wezenlijke associaties, volkomen gelukt ons dat nooit. Een verdere ontwikkeling is denkbaar bijv. in [de] richting van een diepere analyse van het getalbegrip, waardoor dit ontleend [ontleed?] wordt in eenvoudiger elementen, die zich zuiverder laten denken.'

In 1907 had Brouwer nog niet de beschikking over eigen werktuigen, afgezien van de natuurlijke getallen. Die eigen werktuigen, de keuzerijen, zou hij pas later construeren. In Brouwer (1907) werd al wel aangegeven wat de toekomstige werktuigen wel en niet moesten doen. Brouwers proefschrift bestond uit inperkingen van de bestaande wiskundige practijk, maar daarnaast uit zijn grondgedachten betreffende de constructie van een nieuwe wiskunde.

[50] Brouwer (1907), samenvatting, p.179.
[51] Brouwer (1908).
[52] Zie brief Brouwer naar J. de Vries, 15.II.1907, in Brouwer (2011).

Brouwer hanteerde een elementairintuïtie bij de opbouw van de wiskunde; deze elementairintuïtie is niet anders dan tijdsintuïtie, en dit geeft al meteen aanleiding tot stelling 2 van Brouwer (1907), Stellingen, p. 1:

‘De geoorloofdheid der *volledige inductie* kan niet alleen niet worden bewezen, maar behoort ook geen plaats als afzonderlijk axioma of afzonderlijk ingeziene intuïtieve waarheid in te nemen. Volledige inductie is een daad van wiskundig bouwen, die in de oer-intuïtie der wiskunde reeds haar rechtvaardiging heeft.’

In plaats van een ‘axioma voor volledige inductie’ gebruikt Brouwer ‘de wiskundige bouwhandeling van volledige inductie’

Met alleen zijn tijdsbesef verschilde Brouwer met anderen zoals Russell, die ook een ruimtelijk inzicht naar voren bracht. Het besef voor ruimtelijk inzicht kan met de ontwikkeling der wetenschap veranderen, maar dit kan ook gezegd worden met betrekking tot Brouwers tijdsbesef. In zoverre schiet het dus niet op.[53]

In later tijd bracht Brouwer zijn kijk op de wiskunde kort en krachtig naar voren met zijn *twee handelingen van het intuïtionisme*: [54]

- De *eerste handeling* bestaat uit twee aspecten. Volledige scheiding tussen wiskunde en taal (in het bijzonder de logica). Aanwezigheid van een tijdsbesef: per tijdsmoment een opslag daarvan en een volgend tijdsmoment.

- De *tweede handeling* geeft het voortbrengen van nieuwe wiskunde aan. Dit kan door oneindig voortlopende reeksen. Of door intuïtionistische verzamelingen (species, soort).

Voor de eerste handeling zij opgemerkt dat voor hem taal voor diverse doeleinden gebruikt kan worden, maar de taal niet wiskundig scheppend is. En voor de tweede handeling dat men het intuitionistische continuum kan invoeren.

Beth (1938)

Tenslotte kan men een opsomming geven van de door Brouwer geaccepteerde machtigheden. Wij zullen hier nu eerst uit stelling 12 van Brouwer (1907), Stellingen p. 4 opsommen wat voor Brouwer bestaansrecht had:

> ‘Behalve de eindige, bestaan geen andere machtigheden dan
> aftelbaar oneindig
> aftelbaar oneindig onaf
> continu’

Aftelbaar oneindig onaf is dan een opstap naar het continuum.

Zonder de mogelijkheid van een opbouw van het continuum heeft men wel heel weinig te bieden. Brouwer probeerde toch zoveel mogelijk constructief een continuum te verkrijgen dat zo dicht mogelijk aanlag tegen het algemeen gebruikte. Hij wist ook waar hij op moest houden gezien stelling 13 uit Brouwer (1907), Stellingen p. 5:

> ‘ De tweede getalklasse van Cantor bestaat niet’

[53]Zie hiertoe Brouwer (1907).
[54]o.a. in Brouwer (1952).

2.1.8 Brouwer: continuum

Brouwers lineaire continuum. Zie hiertoe in de eerste plaats Heyting (1925), Hoofdstuk 1, Opbouw der analytische meetkunde. Dit gaat uit van Brouwer (1921)

Brouwer ging uit van een constructie van wiskundige beweringen. Voor die constructie bedacht hij zijn keuzerijen. Deze vervolmaakte hij in de loop der tijden, en met hen kon hij uit de voeten om daarmede in de eerste plaats zijn continuum te construeren. Wel wordt in Heyting (1962, p.195) opgemerkt dat, als recursietheorie al eerder ontwikkeld was, Brouwer wellicht daarvoor gekozen zou hebben, en niet voor keuzerijen:

'It is undeniable that the appreciation of constructivity has considerably fallen since 1930. On the other hand, the notion of constructivity has been made more precise by the creation of the theory of recursive functions. One of the difficulties which Brouwer met when he tried to create a constructive theory of the continuum was that the notion of a sequence of natural numbers determined by a law was completely unmanageable. If recursive functions had been invented before, he would perhaps not have formed the notion of a choice sequence, which I think, would have been unlucky.'

Er valt natuurlijk het nodige op recursieve functies af te dingen en daarnaast blijft de vraag of alles intuïtionistisch geoorloofd is. Maar binnen deze context is het volgende van groter belang. Heyting (1974, p.83) brengt te berde dat recursietheorie niet de middelen heeft om een continuum te bereiken zoals Brouwer voor ogen had:

'[R]ecursive analysis has become an important field of research. But the notion of a recursive function was introduced in the 30's, whilst Brouwer's work on real numbers falls between 1907 and 1927. Moreover, as is well known, the recursive real numbers do not exhaust the continuum; the set of recursive real numbers is denumerable while the continuum is not. Brouwer tried to find a constructive notion which is as near as possible to that of the usual continuum. He struggled with this problem all his life.'

De laatste zin van bovenstaand citaat is ook van belang. Het houdt in dat Brouwer zijn hele leven bezig was met verbeteringen en veranderingen m.b.t. de constructie van zijn continuum. Dit impliceert dat hij dus ook dit deed met betrekking tot de constructiemiddelen, zijn keuzerijen. Als dit waar is, dan is het moeilijk om ergens uit Brouwers leven iets te plukken en dat als maatgevend te beschouwen. En bovendien geeft dit aan dat het blijkbaar nog steeds niet af was bij Brouwers verscheiden. Men zou dan niet een halt kunnen toeroepen aan veranderingen en verbeteringen, ook in de huidige tijd. Of anders uitgedrukt: Brouwer wilde een continuum bereiken op constructieve wijze vanuit zijn 'eerste handeling', hierdoor is dat continuum eveneens constructief te noemen. Met het constructieve continuum probeert hij zo dicht mogelijk aan te liggen tegen het algemeen gehanteerde continuum. Eigenlijk doet het er dan niet verder toe hoe men van het een naar het ander gaat, als het maar constructief is. Brouwer ontwikkelde zijn keuzerijen hiertoe. Het had, als men Heyting juist interpreteert, ook anders gekund, als daartoe maar de mogelijkheid aanwezig was geweest.

Keuzenrijen De keuzerijen vormden de brandstof voor Brouwers intuïtionisme. In Brouwer (1907) kwamen ze nog niet voor. Troelstra (1977) laat de keuzerijen beginnen met Brouwer (1912).[55]

Opbouw van het continuum d.m.v. keuzerijen. Het gebruik van keuzerijen binnen de semantiek van de intuïtionistische logica . (Beth, Kreisel) Tenslotte de vraag: zijn de keuzerijen uit te schakelen. (Heyting, Troelstra, Kreisel)

recursietheorie

Recursietheorie vervult talloze belangrijke rollen. Wij zijn echter in slechts enkele geïnteresseerd, nml de rol van de recursietheorie binnen bepaalde takken van logica en binnen de intuïtionistische wiskunde.

[keuzeaxioma, Hilberts epsilon-symbool]

Maar goed, in zijn algemeenheid liggen grote moeilijkheden bij de quantoren: de existentiële quantor , waarbij men dan ook een bewijs (constructie) moet kunnen leveren voor het object. En evenzo de universele quantor, met de vraag waarover deze loopt, d.w.z. hoe groot de omvang kan zijn van de veronderstelde objecten. Hiermee hangen dan ook Brouwers verzamelingen samen, zijn keuzerijen en de opbouw van Brouwers continuum. Dit betreft dan Brouwer (1930), zijn tweede lezing.[56]

2.1.9 Brouwer: verzamelingen

Bouwers verzamelingen

De invoer van de moderne abstracte verzamelingenleer stuitte op tal van plaatsen bij Brouwer op weerstand, zoals het ongebreidelde keuze-axioma, reducibiliteit en de continuum-hypothese. Deze theorie kwam op met Cantor, in voorafgaande paragrafen zijn al punten behandeld die voor moeilijkheden zorgden. Echter niet zijn daar kwesties aan de orde gekomen waar het continuum mee te maken had. Daar kunnen wij nu wel op in gaan.

Het is overigens niet zo dat Brouwer al het werk van Cantor afwees. Brouwer onderscheidt twee onderdelen in het werk van Cantor, die niet van elkaar afhankelijk zijn : 1. Cantors abstracte verzamelingstheoretische werk, waar hij het nodige op aan te merken heeft, en 2. Cantors verzamelingstheoretische geometrie, de theorie van de puntverzamelingen (topologie).[57] Brouwer noemt dit (in Van Dalens vertaling) 'Cantor's gigantic creation of set theoretic geometry (the theory of point sets)' en 'a manner of view which has produced one of the greatest revolutions in science'. De basis hiervan bestaat uit deelverzamelingen van gegeven domeinen van elementen — bijvoorbeeld deelverzamelingen van Euclidische ruimten. Deze worden onderzocht

[55] Troelstra (1977, p.129) verwijst naar Heyting als zijn bron.

[56] Vanwege de toen in alle hevigheid losgebarsten ruzie met Menger en Hahn is deze niet gelijk de eerste opgenomen in de Monatshefte für Mathematik und Physik, maar een jaar later als een zelfstandige uitgave.

[57] Deze overwegingen zijn gehaald uit een niet gepubliceerde recensie door Brouwer van Fraenkel (1927), zoals in van Dalen (2000, pp.298-300); vertaling in het Engels door Van Dalen. Deze opmerkingen door Brouwer staan niet in zijn recensie over Fraenkel (1927), zoals verschenen in Jahresberichte D.M.V. 39, p. 10-11.

relatief hun geometrische (topologische en metrische) eigenschappen, z.d.d. (en verder Brouwer op zijn Van Dalens) 'even if one restricts oneself to subsets which can be built constructively in the strictest sense, still such an immeasurable extension of the domain of geometric results, that it is at best comparable to the one that in its day was accomplished by the introduction of the notion of 'coordinate'.'

Er zijn enkele belangrijke punten, die hier aan de orde moeten komen: orde, machtigheden en de relatie tussen de diverse machtigheden.

Dus als eerste Cantors continuumhypothese. Daar Hilbert deze ook in zijn Hilbert (1900*a*) als probleem '1. Cantors Problem von der Mächtigkeit des Continuums' heeft opgenomen, zal van zijn formulering hier gebruik worden gemaakt:

'Jedes System von unendlich vielen reellen Zahlen d.h. jede unendliche Zahlen- (oder Punkt)menge ist entweder der Menge der ganzen natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ oder der Menge sämmtlicher reellen Zahlen und mithin dem Continuum, d.h. etwa den Punkten einer Strecke aequivalent; *im Sinne der Aequivalenz giebt es hiernach nur zwei Zahlenmengen, die abzählbare und das Continuum*.' En Hilbert vervolgt dat 'Aus diesem Satz würde zugleich folgen, daß das Continuum die nächtste Mächtigkeit über der abzählbaren Mengen hinaus bildet, [...].'

Dus klassiek: de continuumhypothese zegt dat er tussen aftelbaar en overaftelbaar oneindig geen andere machtigheden bestaan. Men kan natuurlijk ook afstand nemen van aftelbaar en continuum, en zich alleen met machtigheden in meer algemene zin bezig houden. Dan heeft men de algemene continuumhypothese: als de machtigheid van een oneindige verzameling V ligt tussen de machtigheid van een oneindige verzameling en de macht van die verzameling dan heeft die verzameling V de machtigheid van die verzameling of de machtigheid van de macht van die verzameling. In modernere tijden wordt de boven vermelde continuumhypothese aangeduid als de zwakke continuumhypothese (Cantor). Dan heeft men de tegenwoordige continuumhypthese als $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (dwz de zwakke continuumhypothese tezamen met de aanname dat de reëlen welgeordend kunnen worden), (Cantor). En de gegeneraliseerde continuumhypothese $2^{\aleph_1} = \aleph_2$ (Cantor). En de laatste, nog iets algemener: $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ (Hausdorff).

Men heeft hierbij de natuurlijke getallen met welordening ω, met machtigheid, en het continuum met zijn ordening η en machtigheid c. De aanname zegt dat er tussen de machtigheid van de natuurlijke getallen en het continuum niets ligt.

Overigens was ook niet voor iedereen rond 1900 duidelijk wat voor soort getallen men had, en met welke eigenschappen. Ofwel wat kan men een getal noemen en wat niet, en algemener, wat kan men nog een wiskundig object noemen en wat niet.[58] Dit gaat al op voor de oneindig grote kardinaalgetallen: zijn dit wiskundige objecten, mag men ze getallen noemen? Voor Brouwer en Cantor laten deze vragen zich zich op een andere manier beantwoorden. Maar ook Cantor maakt onderscheid tussen eindige en oneindige objecten. Maar men kan dit ook op ander gebied bekijken: zijn de reële getallen en de oneindige kardinaalgetallen wel getallen van eenzelfde soort. In 1914 waren de gedachten over de kardinaalgetallen nog steeds niet eensluidend, zoals in Hausdorff (1914, p.44) te lezen valt: 'Über die absolute Beschaffenheit dieses neu eingegeführten Etwas kann man allerhand verschiedene Auffassungen hegen.'

[58]Zie ook Gericke (1966, pp.9,10).

Hausdorff bracht verschillende meningen naar voren om deze 'Etwas' inhoud te geven. Enkele daarvan wees hij af. Maar uiteindelijk ging Hausdorff toch er toe over om ze als bestaande entiteiten op te voeren en ze van uitvoerige eigen rekenregels te voorzien. Maar waren ze daarmee ook getallen zoals de reëlen geworden?

Volgens Hilbert (1900*b*) niet. Hilbert (1900*b*) onderscheidde twee verschillende manieren om de getallen in te voeren: door middel van een genetische definitie of door axiomatiek. Met een genetische definitie bedoelde Hilbert dat vanuit de meest eenvoudige getallen men uitbreidingen gaat invoeren, waarmee men tenslotte op de reëlen uitkomt. Eigenlijk was dit, met extra eisen, enigzins de werkwijze van Kronecker en Brouwer.

Hilbert (1900*b*, p.181) zelf gaf de voorkeur aan axiomatiek: 'Trotz des hohen pädagogischen und heuristischen Wertes der genetischen Methode verdient doch zur endgültigen Darstellung und völligen logischen Sicherung des Inhaltes underer Erkenntnis die axiomatische Methode den Vorzug.' Met zijn axiomatisaties kwam Hilbert tenslotte bij de axiomatisatie van de reëlen uit. Hiertoe gaf hij twee extra axioma's, die tezamen continuïteit leveren: ax IV.1, het archmedische axioma: voor willekeurige $a, b > 0$, dan $a + a + .. + a > b$. En IV.2 volledigheidsaxioma: alles zit in het systeem, en er is geen uitbreiding in dat opzicht mogelijk. Men heeft dan d.m.v. IV onafhankelijkheid van de axioma's, geen contradicties binnen het gevormde systeem, en convergentie (dichtheid). Volgens Hilbert is zijn systeem van de reëlen een consistente (ofwel 'fertige', affe, syntactisch volledige) verzameling. En hiermee gaat hij met Cantor mee. Hilbert (1900*b*, p.184) wijdde de laatste alinea nog aan Cantor:

'Würden wir in ähnlicher Weise den Beweis für de Existenz eines Inbegriffs aller Mächtigkeiten (oder aller Cantor'schen Alephs) erbringen wollen, so würde dieser Versuch misslingen: in der That der Inbegriff aller Mächtigkeiten existiert nicht, oder —in der Ausdrucksweise G. Cantor's— das System aller Mächtigkeiten ist eine nichtconsistente (nichtfertige [d.w.z. niet-affe, niet syntactisch volledige]) Menge.' Als zijn getalsystemen wel daaraan moeten voldoen, dan gaat het voor het systeem van de kardinaalgetallen dus niet op.[59] In Hilbert (1905, p.185) heet het:

'In gleicher Weise zeigt sich, dass den Grundbegriffen der Cantorschen Mengenlehre, insbesondere den Cantorschen Alefs, die widerspruchsfreie Existenz zukommt.'

Hierbij gaat men ver bovenuit voor wat voor Brouwer aanvaardbaar is, en zeker in het geval van rekenen met alephs, en is dus in dit bestek eigenlijk niet meer voor ons van belang. Het blijft evenwel goed om af en toe een blik te werpen op wat Brouwers grenzen te boven gaat. We laten een laatste woord m.b.t. Cantor aan Heyting (1949, p.4) over:

'Dit heeft men reeds ervaren aan het voorbeeld van de duizelingwekkende toren van transfiniete getallen, die Cantor uit het niets meende op te bouwen, maar die wij tegenwoordig moeilijk als veel meer dan een hersenschim kunnen beschouwen.'

Brouwer: er bestaan daarbuiten ook geen machtigheden meer. Cantor, Brouwer, Gödel, Bernays, Cohen, Hilbert.

Er zijn twee aannnames in de klassieke verzamelingenleer. Zermelo in 1904: in-

[59]Zie ook de 'Introduction' tot Hilbert (2013) door W. Ewald en W. Sieg.

troductie van het keuze-axioma om te bewijzen dat elke verzameling welgeordend kan worden. Als de klassieke verzamelingenleer consistent is, dan blijft ze het met toevoeging van het keuze-axioma (Gödel, 1938), en evenzo met de ontkenning van het keuze-axioma (Cohen). Zoals we gezien hebben, vond Heyting dit maar niets. Hiermee valt de continuumhypothese te vergelijken. Cohen (1963/64): continuum hypothese volgt niet uit de andere ZF (Zermelo-Fraenkel)-axioma's. In zekere zin kan men dit vergelijken met de Euklidische meetkunde. Als de Euklidische meetkunde consistent is, dan blijft ze dit met het paralellenaxioma, en evenzo met de ontkenning van het paralellenaxioma. Dit zou Heyting eigenlijk ook maar niets moeten vinden.

Ook hier weer een begrip dat volgens Brouwer niet zomaar kan worden toegepast: het keuze-axioma.

2.1.10 Axiomatiek: Brouwer en Heyting.

Felix Klein en axiomatiek

Men kan zich afvragen of Heyting wel in de geest van Brouwer handelde door een axiomatisch getinte verhandeling te geven. Maar in de overdracht van wiskunde komt men niet ver zonder te vertellen waar men mee bezig is, dus ook de vastlegging van de gebruikte begrippen en hun onderlinge relaties (of verstandhouding als men een signifisch taalgebruik prefereert). Zelfs Brouwer ontkwam daar eigenlijk niet aan.

Brouwer zag niets in axiomatiek. Een aardig voorbeeld hiervan is zijn beantwoording van een brief van Van Dantzig: [60] 'In antwoord op je brief van 19 dezer zou ik je willen doen opmerken, dat het intuïtionisme geen axioma's erkent, ze dus ook nimmer gebruikt, in het bijzonder dus het comprehensie-axioma nimmer gebruikt [. . .].'

Volgens Heyting is echter de ene axiomatiek de andere niet. Daartoe eerst een citaat uit later tijd: [61]

'[T]he very general modern theories proceed by the axiomatic method. Now this method can only work well, if some concrete theories exist, from which the axiomatic theory can be constructed by generalization. For instance, general topology could only be developed after the topology opf euclidean spaces was known in some detail. As a matter of fact, almost no part of intuitionistic mathematics has been investigated deeply enough to admit construction of a general axiomatic theory.'

Overigens dacht ook Hilbert er zo over. In zekere zin voert Heyting dit ook aan in Heyting (1940), als hij het heeft over wiskunde in het vwo-onderwijs: alleen geven wat tot in de puntjes beheerst wordt en waar wetenschappelijk geen enkele eer meer mee te behalen is: dat is geschikt voor het wiskundeonderwijs, en eigenlijk dus ook voor de axiomatiek. Geen wonder dat Vladimir Arnol'd daar weinig mee op heeft. Heyting (1959, p.160) gaat langzamerhand overstag:

'At first sight it may appear that the axiomatic method cannot be used in intuitionistic mathematics, because there are only considered mathematical objects which have be constructed, so that it makes no sense to derive consequences from hypotheses which

[60] Brief L.E.J. Brouwer – D, van Dantzig, 21.VIII.1947, (Blaricum), in Brouwer (2011). De brief van Van Dantzig naar Brouwer van 19.VIII.1947, waarnaar Brouwer verwijst, is niet aanwezig.

[61] Heyting (1956, pp.VII,VIII).

are not realized. Yet the inspection of the methods which are actually used in intuitionistic mathematics, shows us that they are for an important part axiomatic of nature, though the significance of the axiomatic method is perhaps somewhat different from that which it has in classical mathematics.'

Men kan volgens Beth (1935, pp.57-58) diverse interpretaties van het woord 'axiomatiek' geven. Als eerste de axiomatiek waardoor Heyting toch op de lijn van Brouwer blijft zitten. Hiertoe kan men Beth (1935, p.57) aanvoeren, waar Heyting, en in zekere zin ook Brouwer, tegenover Weyl worden gesteld: 'In afwijking van Weyl,[62] die over schijnt te hellen tot de opvatting, dat voor den intuitionist de axiomatiek elke betekenis verliest, meent Heyting,[63] dat voor een axiomatische behandeling van intuïtionistische theorieën plaats blijft, al kan ze niet langer dienen als grondslag.' Heyting (1925, pp.2-3) gaat uit van Brouwer (1918) met het beginsel '[...] waardoor uit de soorten der ne orde een soort A der $(n+1)$e orde gevormd wordt, een duidelijken zin heeft. De axiomatiek is een toepassing van dat principe: de definieerende eigenschap der nieuwe soort A is, dat tusschen de elementen van haar elementen de door de axioma's gepreciseerde relaties bestaan.'

Heyting (1925) is korter en duidelijker dan Brouwer, maar volledigheidshalve, en vanwege het belang, hier het citaat van Brouwer (1918, pp. 4):

'Unter einer *Species erster Ordnung* verstehen wir eine Eigenschaft, welche nur eine mathematische Entität besitzen kann, in welchem Falle sie ein *Element der Species erster Ordnung* genannt wird. Die Menge bilden besondere Fälle von Species erster Ordnung

Unter einer *Species zweiter Ordnung* verstehen wir eine Eigenschaft, welche nur eine mathematische Entität oder Species erster Ordung besitzen kann, in welchen Falle sie ein *Element der Species zweiter Ordung* genannt wird.

In analoger Weise definieren wir *Species n-ter Ordnung*, wo n ein beliebiges Element von A repräsentiert.'

Hierbij is A een verzameling van de getallen, die optreden in een reeks ζ met keuzen uit $1, 2, 3, ...$ als bestanddelen heeft. Men moet hierbij Brouwers eerste zin in het oog houden: 'Der Mengenlehre liegt ein unbegrenzte Folge von Zeichen zu Grunde, welche bestimmt wird durch ein erstes Zeichen und das Gesetz, das aus jedem dieser Zeichen das nächstfolgende herleitet.'

Overigens geeft het citaat van Brouwer meer de indruk van een voorschrift of een recept dan een duidelijk axioma; men kan ook spreken van een constructieve regel. Men kan in dit verband wijzen op deductieve regels binnen de logica als een vergelijkbare constructie. Volgens Beth kwamen de deductieve regels binnen de logica zelfs het meest het intuïtieve redeneren nabij.

Bij Heyting (1961) zou dit alles onder de descriptieve axiomatiek moeten vallen. Brouwer hanteerde wel vaker een 'descriptieve axiomatiek', en duidelijker dan in het door Heyting aangehaalde voorbeeld. Overigens moest Heyting het in 1925 doen met bovenstaande voorbeeld. Een duidelijker voorbeeld is in Brouwer CWI (1975), p. 499,

[62] Weyl (1921).

[63] Heyting (1925, p.2).

te vinden ('Remarques sur la notion d'ordre' [64]). Hierin omschrijft Brouwer een ordebegrip.

Volgens Beth (1935) treft men bij de Kolmogorov-interpretatie van de 'problemen' een wat ruimere mate van zelfstandigheid van de axiomatiek aan. Bij de problemen heeft men herleidingen van het ene probleem op het andere. De axioma's kan men dan opvatten als de 'grond-problemen'. Men herleid de onopgeloste problemen (stellingen) tot opgeloste problemen, en tenslotte tot grondproblemen. Volgens Beth gebeurt dit in zekere zin bij Heyting (1925) door voor de projectieve meetkunde een arithmetische/algebraïsche fundering te geven. De houdbaarheid van de projectieve meetkunde wordt dan doorgeschoven.

Als Heytings promotor zat Brouwer er zelf bij. Heyting (1925) en Heytings latere werk heeft in die tijd geen negatieve reactie van Brouwer veroorzaakt. Dit is des te opmerkelijker daar hij bij een aantasting van door hem ontwikkelde denkbeelden over het intuïtionisme altijd hard uithaalde zonder onderscheid des persoons. Ook, in een andere setting, spaarde hij zichzelf nietzelfs niet met zijn intuïtionistische omwerkingen van vroegere niet-intuïtionistische stukken. Van der Waerden zegt er in Dold-Samplonius (1997) het volgende over: 'It seemed that he was no longer convinced of his results in topology because they were not correct from the point of view of intuitionism, and he judged everything he had done before, his greatest output, false according his philosophy. He was a very strange person, crazy in love with his philosophy.' Meer nog, wij zullen zien dat hij rond 1930 het verdedigen en formuleren van het formele aspect onder positieve bewoordingen aan Heyting overliet. Brouwer heeft op den duur wel onenigheid met Heyting gekregen, maar dat betrof geheel andere zaken. Brouwer zag niets in formalismen zoals aanvankelijk door Hilbert naar voren gebracht. Aangepast aan zijn denkbeelden had hij blijkbaar geen bezwaar. Van Dantzig overschreed blijkbaar net die grens.

In later tijd gaat Heyting duidelijker op het probleem in. Heyting (1961) geeft een overzicht van wat een wiskundige theorie zoal te bieden heeft:

- Fundamentele begrippen.
- Axioma's: beweringen over fundamentele begrippen (en hun onderlinge verhoudingen).
- Stellingen: beweringen verkregen uit de axioma's door middel van een bewijstheorie/logica —in het geval van intuïtionisme moet dit dan wel intuïtionistisch houdbaar zijn.
- Afgeleide begrippen: deze worden verkregen als expliciete definities uit de fundamentele begrippen.

Heyting (1961) maakt een onderscheid tussen twee soorten axiomatisaties:[65]

- De creatieve axiomatisatie.

[64] Note de M. L.E.J. Brouwer, présentée par M. Emil Borel, op de C.R. Acad. Sci., Paris 230, pp. 263-266, 1950

[65] Vergelijk ook Troelstra (1968, pp.7-8).

- ○ De descriptieve axiomatisatie.

Nu is voor de intuïtionist de creatieve axiomatisatie te wantrouwen. Hiermee kan men objecten invoeren, waarvan het bestaan niet door middel van een constructie zeker gesteld is. Een voorbeeld is de klassieke verzamelingsleer.

De descriptieve axiomatisatie systematiseert en unificeert alleen. Als dit dan gebeurt in intuïtionistische wiskunde, dan is dit aanvaardbaar. Zolang formalisatie en axiomatisatie op de juiste intuïtionistische manier gehanteerd worden en tot verduidelijking leiden, maakt Heyting er gebruik van. Echter formalisatie en axiomatisatie zijn geen op zichzelf staande doelen. Dit zegt Heyting (1978, p.15) een paar jaar voor zijn verscheiden zeer uitdrukkelijk:

'I regret that my name is known to-day mainly in connection with these papers [i.e. Heytings logica papers uit 1930], which were very imperfect and contained many mistakes. They were of little help in the struggle to which I devoted my life, namely a better understanding and appreciation of Brouwer's ideas. They diverted the attention from the underlying ideas to the formal system itself.'

Heyting mag dit dan wel betreuren, maar soms is het niet tegen te houden: [66]

'Toch blijkt het voor het wederzijdse begrip van intuïtionistische wiskundigen onmisbaar, sommige onderdelen te formaliseren. Zo laat het begrip 'keuzenrij' verschillende interpretaties toe en om aan te geven welke men bedoelt, is het nodig zekere eigenschappen van het begrip te preciseren, wat neerkomt op een formalisering van de theorie der keuzenrijen.[67] Wij zien weer, hoe de ontwikkeling gaat in een richting, tegengesteld aan diegene die Brouwer zich voorstelde, hoewel Brouwers grondgedachten daarbij onaangetast blijven.'

Maar ook Brouwer maakte gebruik van 'formalisering' en systematisering als dit in zijn kraam te pas kwam, zoals al is aangegeven.[68]

2.2 De finale: Wenen, Bologna en Köningsberg

2.2.1 Brouwers Weense lezingen

Met diverse mensen binnen de Wiener Kreis had Brouwer contact. Aanvankelijk het nauwst met Menger en Hahn. Hans Hahn was een van de leidende figuren van de Wiener Kreis, Karl Menger was een leerling van Hahn en eveneens betrokken bij de Wiener Kreis. Menger is zelfs enige tijd in Amsterdam Brouwers assistent geweest, zij het dat dit betrekking had op topologie. Wel was Menger zeer geïntersseerd in Brouwers intuïtionisme. Brouwer zou de uitnodiging voor de lezingen in Wenen in 1928 in het kader van Gastvorträgen ausländischer Gelehrter der exakten Wissenschaften nog

[66] Heyting (1968).

[67] Heyting heeft in Heyting (1968) in een later stadium de woorden 'keuzenrij' en 'keuzenrijen' geschrapt, en vervangen door een onduidelijke afkorting: 'c.i. rij' of 'c.r. rij'. Waar dit een (Nederlandse?) afkorting van is, is onduidelijk. Het was in die tijd gebruikelijk in het Engels over dit onderwerp te schrijven. Wellicht was het een latere aanpassing, die verder verwaarloosd kan worden, want het waren blijkbaar niet Heytings eerste gedachten.

[68] Ik denk dat Brouwer het hier wel niet eens geweest zal zijn: formalisering is meer iets van metawiskunde, waar hij op tegen was.

aan Menger te danken hebben.[69] Ook Tarski kwam later in dit kader naar Wenen. Men was in Wenen in Brouwers filosofische en intuitionistische ideeën geïnteresseerd. Net als de WK stond ook Brouwer een zuivering van de wetenschap voor, zij het dat beide zuiveringen niet samenvielen.

Brouwers aanvankelijk goede contact met Hahn en Menger is toch op ruzies uitgelopen. Dit had vooral te maken met prioriteiten binnen de topologie (dimensietheorie). Menger eiste erkenning op van zijn rechten op prioriteiten. Hier had ook mee te maken dat Menger de in Blaricum verblijvende Pavel Alexandrov en Brouwer er van verdacht bij de uitgave van het topologische werk van de in 1924 jong gestorven Pavel Urysohn deze boven hemzelf te bevoordelen met betrekking tot prioriteiten.[70] Hahn wierp zich op als bemiddelaar tussen Menger en Brouwer. Echter in de jaren 1929, 1930 verhevigde deze ruzie zich en leidde tot een echte breuk. Hahn werd vanwege zijn tussenpositie door Brouwer tot de vijand gerekend.

Overigens kreeg Brouwer toen niet met alle WK-ers en hun vrienden ruzie. In later tijd stond Brouwer Popper en Carnap bij sollicitaties bij. Met Von Mises (eigenlijk Berlijner) ging hij goed om in zijn strijd tegen de uitsluiting van de Duitse wetenschappelijke wereld na de Eerste Wereldoorlog. De denkbeelden van Von Mises op het gebied van waarschijnlijkheidsleer en statistiek hebben later Van Dantzig en Beth niet onberoerd gelaten.

Brouwer (1929, 1930) hebben betrekking op taal, wetenschap en wiskunde, en op de opbouw van het continuum. Vooral de eerste lezing is in dit verband van belang.[71] Deze lag keurig netjes binnen de interessen van de WK en hield tevens een aantal van Brouwers stokpaardjes in —en daarmee ook van de significa. Mannoury vond dan ook deze lezing een aanwinst voor de significa, [72] maar Brouwers UvA-collega Weitzenböck zag er niets in.[73] Brouwer ging daarbij in op de door hem geconstateerde gevaren van formaliseringen. In plaats van Brouwers geschriften kan men ook de niet veel later uitgekomen en iets beter geformuleerde Heyting (1931, 1934) raadplegen, zij het dat Heyting (1934) toen bekend was met onvolledigheidsresultaten van Gödel, en dat op Brouwer voorhad.

Op de beide Weense lezingen van Brouwer waren tal van prominenten. Ook Wittgenstein was volgens Menger aanwezig. Met Wittgenstein heeft Brouwer zich nadien onderhouden.[74] Daarna heeft er een wending plaatsgevonden in de opvattingen en de belangstelling van Wittgenstein.[75] Vermoedelijk was ook Gödel aanwezig en heeft daar wellicht lering uit getroken.[76]

---

[69]Komitee zur Veranstaltung von Gastvorträgen ausländischer Gelehrter der exakten Wissenschaften; leden: Egger, Lampa, Wegschneider, en Brouwers bekenden Felix Ehrenhaft en Hans Hahn.

[70]Urysohn, 1898-1924 (Bretagne).

[71]Deze is later ten dele nog in het Nederlands uitgegeven als de lezing 'Willen, Weten, Spreken' (12-12-1932) in de bundel 'De uitdrukkingswijze der wetenschap'.

[72]Brief Mannoury naar Brouwer van 10-04-1929.

[73]Brief Brouwer naar Mannoury 10-04-1929

[74]De aanwezigheid van Wittgenstein, zie van Dalen (2005). van Dalen (2005) haalt Mengers *Reminiscences of the Vienna Circle and the Mathematical Colloquium* (Kluwer, Dordrecht (1994) aan. Voor een latere ontmoeting tussen Brouwer en Wittgenstein op een eiland, zie van Dalen (2005), en een door hem aangehaalde brief van Finch naar Van Dalen van 10 oktober 1990.

[75]Zie o.a. Monk (2003), van Dalen (2005).

[76]Zie hiertoe Carnaps aantekeningen volgens van Dalen (2005), en nogmaal van Dalen (2005): Wangs *Reflections on Kurt Gödel*, MIT Press, Cambridge Mass, 1987. En DePauly-Schimanovisch (1997). Kuiper

Van Brouwers lezingen is hier al her en der gebruik gemaakt. Derhalve een zeer korte samenvatting van zijn beide lezingen

Maar helemaal op het einde van Brouwer (1929) is er nog wel op pp. 163-164 een vingerreiking naar de formalisten aanwezig: [77]

'Schliesslich bemerken wir noch, dass das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten in der intuitionistischen Mathematik, obwohl *nicht richtig*, so doch, wenn man es ausschliesslich für *endliche Spezies* [eindige Brouwerse verzamelingen] von Eigenschaften gleichzeitig voraussetzt, *widerspruchsfrei* ist, was in erster Linie erklärt, dass die Irrtümmer der bisherigen Mathematik sich so lange behaupten konnten, und in zweiter Linie als ermutigender Umstand für die formalistischen Bestrebungen gelten kann. Denn auf der Basis der intuitionistischen Einsichten lassen sich ausser den unabhängig vom Prinzip des ausgeschlossenen Drittens entwickelbaren richtigen Theorien auch unter Heranziehung dieses Prinzipes mit der obigen Einschränkungen, nichtkontradiktorische Theorien herleiten, mit denen sich von der bisherigen Mathematik ein viel grösserer Teil als mit den richtigen Theorien umfassen lässt. Eine geeignete Mechaniserung der Sprache dieser intuitionistisch-nichtkontradiktorischen Mathematik müsste also gerade das liefern, was die formalistische Schule sich zum Ziel gesetzt hat.'

2.2.2 Hilbert in Bologna; volledigheid en consistentie

Brouwer was in 1928 niet te vinden op het internationale wiskundecongres te Bologna, Hilbert daarentegen wel. Brouwer had campagne gevoerd tegen dit congres, en daarmee Hilbert wederom voor de voeten gelopen. Hilbert was ook hierom in de jaren 1928 en 1929 bezig Brouwer uit de Mathematische Annalen, het vanuit Göttingen aangestuurde en indertijd veruit het meest belangrijke wiskunde tijdschrift, te werken. Zijn Göttinger vriendenkring zoals Courant, Harald Bohr (de broer van Niels Bohr) en Blumenthal was hem daarbij behulpzaam. Dit wil niet zeggen dat de verdere entourage van Hilbert Brouwer vijandig gezind was. Von Neumann zocht in 1929 op doorreis naar Leiden Brouwer op, in 1949 maakte Bernays zich sterk voor een verzameld werk van Brouwer.[78] Bernays had ook een goede verstandhouding met Heyting en Beth. Tussen Brouwer en Hilbert was er een persoonlijke vijandschap. Brouwer zou in Duitsland na de Annalen-affaire geen wiskundebijeenkomsten meer bezoeken en viel voor langere tijd nagenoeg stil met wiskundig onderzoek. Brouwer was overigens al zijn hele leven psychisch uit zijn evenwicht te brengen door al dan niet vermeende tegenwerking. Voorbeelden hiervan zijn te vinden in de biografieën door Van Dalen,[79] maar valt ook te halen uit de uitgegeven correspondentie.[80] Twee interessante voorbeelden worden gegeven als Brouwer rond 1910 in zijn wanhoop eerst vanwege Schoenflies en later

(2004). En brief Gödel naar Menger 20.IV.1972, Princeton, GCWV, p. 133: 'I only saw him [i.e. Wittgenstein] once in my life when he attended a lecture in Vienna. I think it was Brouwer's.' Zie ook Menger (1994)

[77]Niet opgenomen in Brouwer (1933).

[78]Zie ook de correspondentie tussen Heyting en Bernays van na de oorlog in Brouwer (2011).

[79]van Dalen (1999, 2005)

[80]Brouwer (2011).

vanwege Paul Koebe de hulp van Hilbert als wijze vader inroept.[81]

De kritiek van Brouwer was in de eerste plaats gericht op het logicisme van Russell en het formalisme van Hilbert. Hilbert vond echter, dat kritiek op zijn denkbeelden wiskundig gedragen moest worden. Als voorbeeld zal hier een citaat genomen worden uit zijn lezing tijdens het Mathematische Wereldcongres te Bologna in 1928. Hilbert vond dat hij op niet exact geformuleerde aanspraken niet hoefde te reageren. Enkele voorbeelden van Hilberts gezichtspunten in Hilbert (1929, p.141):

'Aber in allgemeinen prinzipiellen Sinne ist auch nicht mehr die leiseste Spur einer Unklarheit möglich: jede prinzipielle Frage lässt sich auf Grund der von mir skizzierten Beweistheorie in einer Weise beantworten, die mathematisch präzise und eindeutig is. [...] Wer mich widerlegen will, muss, wie es in der Mathematik bisher stets üblich war und bleiben wird, mir genau der Stelle zeigen, wo der vermeintliche Fehler von mir liegt. Eine Einwendung, die das nicht tut, lehne ich limine ab.'

Een goede lezer zal hierin de manier, waarop Brouwer zijn denkbeelden uitspeelde, kunnen herkennen. Brouwers naam wordt hier niet genoemd; dit was overigens wel gebeurd in Hilberts Hamburgse lezing van 1927.[82] Het valt in het nu volgende citaat op hoe opmerkelijk Hilbert zijn gelijk verwoordt: emotioneel en heel zware claims leggend. Brouwer schreef dit toe aan een zich verergerend geestelijk ziektebeeld. Hilbert groef zich steeds dieper in, en zou, als ook maar iets daarvan ondergraven werd, niet goed meer weten hoe hierop te reageren. Zijn artikelen over de grondslagen van de wiskunde kregen een enigzins pamfletachtige nevenzijde met kleineren en schelden op wat door hem als tegenstander gezien werd: zwetser, als wiskundigen vermomde filosofen, dogmatici, occultist. Een ander voorbeeld bestaat uit het negeren van Gödel, de man die twee door Hilbert, ook in Bologna, gestelde vragen over volledigheid beantwoord heeft. Enige nederigheid en dankbaarheid zou hier van de kant van Hilbert op zijn plaats geweest zijn. Men moet echter wel toevoegen dat beide hier opgevoerde citaten van Hilbert ook enigzins lijken op wat soms in Wiener Kreis (1929) naar voren werd gebracht. Hilbert (1929, p.141):

'Tatsächlich kommt heutzutage gar nicht selten selber in Fachschriften und öffentliche Vorträgen Zweifelsucht und Kleinmut gegenüber der Wissenschaft zum Ausdruck; es ist dies eine gewisse Art Okkultismus, den ich für schädlich halte. Die Beweistheorie macht eine solche Einstellung unmöglich und verschaft uns das Hochgefühl der Überzeugung, dass wenigstens dem mathematischen Verstande keine Schranken gezogen sind und dass er sogar die Gesetze des eigenen Denkens selbst aufspüren vermag. [...] in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus [...].' De wiskunde twijfelt niet, maar geeft altijd antwoord met ja of neen.

De grondslagenstrijd valt fraai af te sluiten met enkele citaten uit het in memoriam in 1944 door Hermann Weyl vanwege het sterven van Hilbert op 14 februari 1943.[83]

[81] Zie Brouwer (2011).

[82] Hilbert (1928).

[83] Er zij hier vermeld dat ook in Reid (1970) dit stuk van Weyl is opgenomen. Weyl (1944) maakt een neutrale indruk m.b.t. de onenigheden tussen Brouwer en Hilbert, dit in tegenstelling tot wat van Reid kan worden gezegd.

Weyl (1944, p.639):

'Meanwhile the difficulties concerning the foundations of mathematics had reached a critical stage, and the situation cried for repair. [...] and finally L.E.J. Brouwer by his intuitionism had opened our eyes and made us see how far generally accepted mathematics goes beyond such statements as can claim real meaning and truth founded on evidence. I regret that in his opposition to Brouwer. Hilbert never openly acknowledged the profound debt which he, as well as all other mathematicians, owe Brouwer for this revelation.'

2.2.3 Volledigheid

Tijdens Hilberts lezing in Bologna werden twee belangrijke kwesties aangeroerd. Want op dat moment was de bewijstheorie nog niet af. De eerste kwestie behelsde volledigheid gerelateerd aan geldigheid voor alle interpretaties —voor eerste orde predicatencalculus. Is het axiomasysteem gecombineerd met de regels zodanig dat er niet 'ware' volzinnen kunnen zijn die niet afgeleid kunnen worden? Hilbert (1929, p.140): [84]

'Die Frage nach der Vollständigkeit des Systems der logische Regeln, in allgemeiner Form gestellt, bildt ein Problem der theoretischen Logik. Zu dieser allgemeineren Problemstellung gelangen wir von der Zahlentheorie aus, wenn wir aus dem Bereich der betrachteten Formeln, und insbesondere auch der Axiome, alle diejenigen ausschalten, in denen das Zeichen '+1' vorkommt, dafür aber das Auftreten von Prädikatenvariablen zulassen. Dies bedeutet sachlich, dass wir von dem Ordnungscharacter des Systems der Zahlen absehen und dieses nur als irgendein System von Dingen behandeln, auf welches Prädikate mit einem oder mehreren Subjekten bezogen sind. Unter diesen Prädikaten wird nur die Gleichheit (Identität) [...] festgelegt, während die übrigen Prädikate frei wählbar bleiben. In diesem Bereich von Formeln sind diejenigen ausgezeichnet, die durch keine bestimmte Festlegung der wählbaren Prädikate widerlegbar sind. Diese stellen die algemein gültigen logischen Sätze dar. Es entsteht nun die Frage, ob alle diese Formeln aus den Regeln des logischen Schliessens unter Hinzunahme der genannten Gleicheitsaxiome beweisbar sind, mit anderen Worten, ob das System der üblichen logischen Regeln vollständig ist.'

De tweede nog uitstaande kwestie betrof volledigheid als maximale consistentie —voor een systeem van elementaire getaltheorie, zeg de Peano rekenkunde met +, x, en = . De door Peano geformaliseerde rekenkunde is voortdurend Hilberts geliefde proefkonijn, zij het dat hij in het volgende citaat daar niet woordelijk naar terugverwijst. Hilbert (1929, p.140):

'Die Behauptung der Vollständigkeit des Axiomensystems der Zahlentheorie lässt sich auch so aussprechen: Wird eine der Zahlentheorie angehörige, aber nicht beweisbare Formel zu den Axiomen der Zahlentheorie hinzugenommen, so kann aus dem erweiterten Axiomensystem ein Widerspruch abgeleitet werden.'

[84] In Hilbert (1929) komt het citaat grotendeels niet voor. Het volledige citaat is gehaald uit Hilbert (1971, p.17). Deze uitgave beweert als een hoofdstuk Hilbert (1929) weer te geven. Echter wordt in Hilbert (1971) meer materiaal per paragraaf gegeven in het hoofdstuk over de Bologna-lezing dan er in Hilbert (1929) werkelijk staat. Vanwege de nuttige uitbreiding in Hilbert (1971) is deze toch maar gevolgd. Overigens is dit niet het enige verschil.

Er zijn tal van varianten en gevolgtrekkingen op bovenstaande kwesties aanwezig. Voor de tweede kwestie bijvoorbeeld: Als van een volzin A de consistentie met de axioma's van de getaltheorie bewezen kan worden, dan geldt dit niet voor 'niet A'.

De apotheose van formalisme, finitisme (in zekere zin de bestrijding van Kronecker met zijn eigen middelen) en bewijstheorie werd gevormd door twee boekwerken: Hilbert & Ackermann (1928) en Hilbert & Bernays (1934, 1939). Het gaat hier vooral om Hilbert & Ackermann (1928, 1938). Hilbert & Ackermann (1938) heeft op twee punten verbeteringen en aanvullingen, die te danken zijn aan Gödel en beide met volledigheid te maken hebben.

Gödel (1929, 1931*b*) maakten gebruik van en baseerden zich op Hilbert & Ackermann (1928), meer dan op de Principia Mathematica.[85] Dit was ook niet zo vreemd gezien Hilbert & Ackermann (1928) aankwam met punten die rechtstreeks met Gödels latere vraagstelling te maken hadden, maar die niet aanwezig waren in de Principia.

Afwezig in Hilbert & Ackermann (1928) was een volledigheidsbewijs, en dit vormde de eerste kwestie in Hilbert (1929). Dit vormde Gödels eerste project. Hij slaagde hierin, en daarmee verdiende hij tevens zijn doctorstitel bij Hans Hahn. Toch was ook naar Gödels zeggen iemand hem al bijna voor geweest, nml. Th. Skolem.[86] Gödels dissertatie gaf aanleiding tot de eerste verbetering op Hilbert & Ackermann (1928) zoals ook in Hilbert & Ackermann (1938) te vinden is. Emil Post had in zijn dissertatie van 1920, met een gepubliceerde verbeterde uitwerking in Post (1921), al een semantische volledigheid voor de propositielogica geleverd.

2.2.4 Köningsberg en onvolledigheid

De aanleiding tot de tweede verbetering op Hilbert & Ackermann (1928) kwam hier al snel bovenop. Dit betrof de tweede kwestie van Hilbert (1929). Dit gebeurde aanvankelijk op een congres in Köningsberg in september 1930: Versammlung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärtze. Naast het grote congres was er een 'werkgroep' voor jonge geleerden, dus niet de al lange tijd gevestigde namen, om de wiskundige grondslagenproblemen door te nemen: de Tagung für Erkenntnislehre der Exakten Wissenschaften. Heyting was uitgenodigd om het intuïtionisme te vertegenwoordigen.[87] Naast hem waren daar ook Carnap voor logicisme en Von Neumann voor formalisme. Daarnaast waren er ook andere lezingen zoals door Waismann over het standpunt van Wittgenstein.[88] Maar ook was aanwezig Gödel, die met een voorlopige versie van de eerste onvolledigheidsstelling aankwam.

[85]Zie in de eerste plaats het werk van Gödel zelf, maar ook de diverse commentaren door anderen in de 'Collected Works'. Gödel was hierin de enige niet, ook Heyting (1930) berustte voornamelijk op Hilbert & Ackermann (1928). Beiden noemden de 'Principia', maar dat is dan wel voornamelijk in afgeleide vorm.

[86]Volgens Wang (1970) heeft Skolem zeer dicht op Gödels volledigheidsstelling gezeten, zoals volgens hem ook door Gödel tegenover hem erkend werd.

[87]Zie Heyting (1931) als resultaat. Heyting (1962) geeft een beschrijving van de lezingen tijdens Köningsberg, maar eigenaardig genoeg zegt hij daarin niets over Gödel. Overigens hebben Brouwer en Heyting in hun briefwisseling direct na Köningsberg het er ook niet over. Men kan overigens niet zeggen dat Heyting op onbekend terrein was met Gödel: beiden hadden Hilbert & Ackermann (1928) als uitgangspositie.

[88]Voor de lezing van Waismann was tevoren nog in Wenen beraad geweest tussen Wittgenstein, Schlick en Waismann, zie Monk (2003).

Hilbert behoorde niet tot angry young men, was dus niet tijdens de 'werkgroep' aanwezig, maar gaf wel op 8 september op het grote congres de lezing 'Naturerkennen und Logik'. Volgens de legenden zat Hilbert op het moment van Gödels lezing in een taxi, op weg om met een opname van zijn stem zijn lezing te laten vereeuwigen.[89]

Met zijn artikelen over formaliseringen binnen het intuïtionisme en zijn aanwezigheid in Köningsberg had Heyting de nodige internationale statuur opgebouwd. Dit bleef niet zonder gevolgen. In 1931 heeft Neugebauer Heyting naar Göttingen gehaald om een lezing te geven en daarbij als editor van 'Ergebnisse der Mathematik' geprobeerd Heyting er toe aan te zetten een monografie te schrijven over het wiskundige grondslagen onderzoek.[90] De bedoeling was dat Heyting het intuïtionisme voor zijn rekening zou nemen en Gödel de klassieke logica. Heyting was hier al snel mee bezig, maar van de hand van Gödel verscheen er maar steeds niets. Tenslotte is men er toe overgegaan het door Heyting geschreven deel als een afzonderlijke monografie uit te brengen in 1934: Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie.[91] Niet veel later, in 1937, werd Heyting benoemd tot lector voor wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam als opvolger van Mannoury.

2.2.5 Onvolledigheid

Al snel na Köningsberg kwamen de definitieve versies van de eerste en tweede onvolledigheidsstelling uit in Gödel (1931*b*), als volgt hier kort geformuleerd:

- De eerste zegt dat er binnen ieder consistent formeel systeem een uitspraak (stelling) zal zijn, waarvan niet bewezen kan worden of ze waar of onwaar is (= stelling VI van 1931).
- De tweede houdt in dat de consistentie van een formeel rekenkundig systeem niet kan worden bewezen binnen dat systeem. Als voorbeeld ging Gödel van Peano uit (= stelling XI in 1931).[92]

Afgezien van het gelijk uit de veronderstellingen —maar geen bewijzen— van Brouwer, staan er ook anderen op de lijst van mogelijke voorgangers zoals Finsler. Finsler (1926) was niet erg formeel en gaf geen echt bewijs volgens J.W. Dawson,[93] en ook volgens Gödel in zijn correspondentie met Finsler.[94] Wel is er net als bij de volledigheidssteling in de persoon van Skolem ook bij de onvolledigheid een ander in de buurt geweest, nml. E. Post.[95] Post merkte in een brief van 29 october 1938 aan Gödel op:[96]

'Since you seemed interested in my way of arriving at these new developments perhaps Church can show you a long letter I wrote him about them. As for any claims I might

[89] van Dalen (2005), DePauly-Schimanovisch & Weibel (1997).

[90] Zie Ch. Parsons, Introductory note, Arend Heyting-Gödel correspondence, in Gödel (2003*b*).

[91] Heyting (1934), ook in Heyting (1980).

[92] zie ook de correspondentie tussen J. Von Neumann en Gödel over de 2e stelling, die ook door von Neumann gevonden was, maar Gödel was eerder; in Gödel (2003*b*).

[93] J.W. Dawson, Introductory note, Paul Finsler-Gödel correspondence, in Gödel (2003*a*).

[94] Zie Gödel (2003*a*).

[95] Zie Sieg (2003) en de briefwisseling tussen Gödel en Post, in Gödel (2003*b*), pp. 169-174.

[96] Zie Gödel (2003*b*), p. 169

make perhaps the best I can say is that I would have *proved* Gödel's theorem in 1921 — had I been Gödel.' Het is Post dus niet in 1921 gelukt, maar van belang is dat al in 1921 door iemand als Post getracht is een bewijs te leveren. Dus vóór de vraag van Ackermann en Hilbert naar de volledigheid van de predicatenlogica en het bijzondere geval van de getaltheorie in 1928.

Hilbert werd dus snel door Gödel bediend: deze maakte in zijn exacte aanpak van het aantonen van onvolledigheid gebruik van juist het soort wiskunde, waar Hilbert belang aan hechtte en geen (Brouweriaanse) filosofische omschrijvingen. Hilberts brede verten kwamen hiermee te vervallen, evenals het streven van Russell om de wiskunde van de logica af te leiden. Maar niet een wat minder grootse aanpak. Men moet in bovenstaande dus niet een disqualificatie zien van de prestaties van Hilbert en Ackermann: zij hebben de problemen duidelijk aangeroerd en om een antwoord gevraagd, zij het dat ze dachten dat de antwoorden positief zouden uitvallen voor hun opzet van hun bewijstheorie en de ideologie daarachter. Het antwoord is dan eveneens niet een disqualificatie van bewijstheorie. Daarmee kan men onder beperkingen vrolijk verder gaan. Dit werd dan ook door velen gedaan, maar het meest naar voren tredend waren Herbrand en Gentzen.[97] Ook Hilbert en Bernays bleven doorwerken. In het voorwoord van Hilbert & Bernays (1934) ging Hilbert wel heel ver, en onjuist, in zijn kenschetsing van de nieuwe situatie:

'Dieser Ergebnisstand [het al aanwezige werk op het gebied van bewijstheorie] weist zugleich die Richtung für die weitere Forschung in der Beweistheorie, auf das Endziel hin, unsere üblichen Methoden der Mathematik samt und sonders als widerspruchsfrei zu erkennen.

Im Hinblick auf dieses Ziel möchte ich hervorheben, dass die zeitweilig aufgekommene Meinung, aus gewissen neueren Ergebnissen von Gödel folge die Undurchführbarkeit meiner Beweistheorie, als irrtümlich erwiesen ist. Jenes Ergebnis zeigt in der Tat auch nur, dass man für die weitergehenden Widerspruchsfreihheitsbeweise den finiten Standpunkt in einer schärferen Weise ausnutzen muss, als dieses bei der Betrachtung der elementaren Formalismen erforderlich ist.'

Bernays vermeed in zijn voorwoord alles waar Hilbert aanstoot aan zou kunnen nemen. Maar goed, de methoden van Hilberts finiete aanpak waren zonder zijn einddoelen nog steeds bruikbaar. In Gentzen (1936) werd consistentie van de rekenkunde aangepakt met finiete methoden buiten de theorie van de rekenkunde om. Weyl (1944), p. 644:

'Obviously *completeness* of a formalism in the absolute sense in which Hilbert had envisaged it was now out of the question. When G. Gentzen[98] later closed the gap in the consistency proof for arithmetics, which Gödel's discovery had revealed to be serious indeed, he succeeded in doing so only by substantially lowering Hilbert's standard of evidence. The boundary line of what is intuitively trustworthy once more became vague.'

Hun beider systemen werden alom gebruikt. In Nederland pakte Heyting dit al snel op in de dertiger jaren. Na de Tweede Wereldoorlog baseerde Beth zijn tableaux-

[97] De Franse wiskundige J. Herbrand (1908-1931), die enige tijd in Göttingen verbleef; G. Gentzen (1909-1945), die gedurende enige tijd in Göttingen zat. Zie ook Sieg (2012).

[98] Gentzen (1936).

systemen op Gentzens bewijstheorie, zij het op een indirecte wijze vanwege zijn gebruik van Kleenes vereenvoudigingen.[99]

Heyting (1947/48*a*, 279) staat positief tegenover de werkwijze van Gentzen:

There are however partial results

Zoals altijd bij de introductie van nieuwe methoden en resultaten was niet iederen overtuigd. In 1931 bij de jaarvergadering van de DMV onmoette Gödel Zermelo. Dit was niet zonder belang. Zermelo was tezamen met Russell de ontdekker van de Russell-paradox en had het systeem van Cantor verbeterd met zijn verzamelingenleer. Zermelo meende dat Gödel fout zat. Gödel stuurde Zermelo een korte uitleg van zijn probleemstelling en bewijs.[100] Dit bracht weliswaar Zermelo niet van zijn onjuiste aannamen af, maar had aldus een later gepubliceerde fraaie uitleg van de stelling van Gödel door Gödel zelf tot gevolg.

3 Bewijstheorie en interpretatie

3.1 Bewijstheorie, intuïtionisme en logica

De bewijstheorie kent diverse soorten van aanpak. De oorspronkelijke bedoeling daarmee op consistentiebewijzen te komen op een directe manier en bewoord vanuit het formalisme van de beoogde bewijstheorie was mislukt. Te zware doelstelingen moesten hiermee overboord worden gezet. Over bleef een minder zware aanpak zoals bij Gentzen en zijn voorloper Herbrand. Of als het over consistentie ging juist een zwaardere aanpak met een weg over een ander systeem.

Waarschuwing: vanwege de citaten uit diverse auteurs kan de formulering nogal eens verschillen. Er is derhalve voor een enigzins geuniformiseerde aanpak gekozen om de leesbaarheid te vergroten. Dit is ook gedaan bij logische formules en hun interpretaties. Als men een model heeft uit bijvoorbeeld tralies en daarbij ook kijkt naar logische formules, dan pleegt men nogal eens voor een operator en zijn tegenbeeld verschillende aanduidingen te gebruiken. Dit is dan ook zoveel mogelijk weggewerkt. Hiernaast was er een andere aanpak geformuleerd door Heyting voor de intuitionistische logica. In beide gevallen bleef Hilbert & Ackermann (1928) een belangrijke basis vormen. Maar Heyting liep niet in de pas met de anderen. Hij ging uit van de onvolkomenheid van de taal en bijgevolg accepteerde hij dit ook m.b.t. tot zijn logica. Dit had de nodige implicaties. Hij bewees voor zijn axioma's binnen zijn logica wel onafhankelijkheid, maar daar bleef het bij. Zijn interpretatie noemde hij een bewijsinterpretatie, en erkende later dat hiermee de probleeminterpretatie van Kolmogorov mee opliep. Hierdoor kreeg Heyting wel een roedel logici achter zich aan, die verdere resultaten wensten te formuleren: Gödel, Jaśkowski, Tarski en vele anderen. Bij het beschouwen van intuitionistische resultaten deden zij dit vanuit een klassiek gezichtspunt. De resultaten van deze mensen vond ook Heyting zeer belangrijk. Voor zijn eigen bezigheden op het intuïtionistische pad was hij terughoudender: [101]

[99] Kleene (1952).
[100] K. Gödel naar E. Zermelo, 12.X.1931, Wien; in Gödel (2003*b*, pp.422-429) (Duits + Engels).
[101] Heyting (1947/48*a*, p.281).

‘Intuitionism rejects the principle of the excluded middle. Intuitionistic logic consequently diverges considerably from traditional or classic logic. Although intuitionists are quite positive that the complete formalisation of their logic is impossible, a calculus may be estabished reflecting more or less intuitionistic logic. In this way a logic arises deviating from the traditional one.’ Overigens formuleerde Heyting (1947/48*a*, p.282) iets algemener:

‘If we review the totality of relations between symbolic logic and mathematics, we get the following picture. Symbolic logic was the indespensible condition for the creation of completely formalised mathematics. It was only with this formalization that the modern research of foundations became practicable, as without its aid it would not have been possible to put the problems with sufficient clearness to permit their thorough treatment. Formal mathematics played an important rôle with the creation of intuitionistic mathematics, although to comprehend the latter formalism is not essential.’

3.1.1 Heyting en zijn formaliseringen

Heyting had in 1925 zijn proefschrift bij Brouwer voltooid. Daarna was hij naar aanleiding van een door Mannoury uitgeschreven prijsvraag bij het Wiskundig Genootschap er toe overgegaan een intuïtionistische logica te formuleren. Om een formalisering werd in de prijsvraag uitdrukkelijk gevraagd: [102]

‘Hoewel de Brouwer’sche verzamelingsleer principieel *niet* te vereenzelvigen is met de gevolgtrekkingen, welke formeel uit een bepaalde pasigrafie zijn af te leiden,[103] vallen niettemin in de taal, waarmede Brouwer zijn wiskundige intuïtie begeleidt, zekere regelmatigheden op te merken, die in een formalistisch-mathematisch systeem kunnen worden samengevat. Gevraagd wordt 1° een zoodanig systeem op te stellen en de afwijkingen aan te geven van de uit dat systeem volgende formalistiek en de Brouwer’sche theorieën, en 2° te onderzoeken of uit het op te stellen systeem door (formele) verwisseling van het *principium tertii exclusi* en het *principium contradictionis* een daaraan duaal toegevoegd systeem kan worden afgeleid (Vergelijk i.h.b. *L.E.J. Brouwer*, ‘Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik’, Mathematische Annalen, XCIII p. 244–257 [Z.B.i.M. I, MA vol. 93, 1925], XCV, p. 453–472 [Z.B.i.M. II, MA vol 95, 1926] en id. ‘Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe’, Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung 33, p. 251–256 [1923]).’

Heytings antwoord werd bekroond en later op voorspraak van Brouwer als Heyting (1930*a*,*b*,*c*) uitgegeven.[104] Kolmogorov (1925) met zijn problemencalculus was Heyting in het Russisch al voorgegaan. Later zouden ook Von Neumann, Gödel en Gentzen over intuïtionistische kwesties publiceren, juist vanwege de voorafgaande formaliseringen.

Heyting (1930*a*,*b*,*c*) bewees dat zijn logische axioma’s onafhankelijk waren,[105] en

[102] Afschrift van de prijsvraag, zoals vermeld als enclosure onder de brief van Mannoury naar Brouwer, 26.I.1927, zie onder Brouwer (2011).

[103] pasigrafie – tekenschrift, zeer algemeen, men kan het bv. ook voor verkeerstekens gebruiken – een echte Mannoury-term derhalve. Ook Beth heeft over de signifische pasigrafie gepubliceerd: Beth (1936/37) en Heyting (1947/48*b*).

[104] Heytings artikelen ook in Heyting (1980).

[105] Op de geijkte manier van afwijkende interpretaties.

dat de 'uitgesloten derde' niet afleidbaar was uit zijn systeem. Daarnaast liet hij zien dat ook andere (klassieke) stellingen niet opgingen. Van Glivenko nam hij over
(1) dat als volzin A klassiek bewijsbaar is, dat dan 'A kan niet onwaar zijn' intuïtionistisch-logisch bewijsbaar is: dus voor een klassiek bewijsbare stelling is er met dubbele negatie een intuïtionistische stelling; en
(2) dat als 'A is onwaar' klassiek bewijsbaar is, dit ook intuïtionistisch het geval is.
Maar wat bedoelt Heyting nu met volzin A? Een antwoord vindt men in Heyting (1931):

'Ich unterscheide zwischen Aussagen und Sätzen: ein Satz ist die Behauptung einer Aussage. Eine mathematische Aussage drückt eine bestimmte Erwartung aus [...] Vielleicht noch besser als das Wort 'Erwartung' drückt das von den Phänomenologen geprägte Wort 'Intention' aus, was hier gemeint wird. [...] Die Behauptung einer Aussage bedeutet die Erfüllung der Intention, z.B. würde die Behauptung 'C ist rational' bedeuten, man habe die gesuchten ganzen Zahlen tatsächlich gefunden [de Aussprache (proposition) C is rationaal heeft als bedoeling de verwachting (expectation) dat men twee gehele getallen a en b kan vinden zodanig dat $C = \frac{a}{b}$]. [...] Die Behauptung einer Aussage ist selbst nicht wieder eine Aussage, sondern die Feststellung einer empirischen Tatsache, nämlich der Erfüllung der durch die Aussage ausgedrückten Intension.' [de intentie dat een propositie geldt en de intentie dat die propositie bewijsbaar is moet men van elkaar onderscheiden, zelfs dan wanneer de corresponderende twee beweringen (Behauptung, assertie) hetzelfde betekenen] [106]

Met een Brouwerse/intuïtionistische bevestiging van een uitspraak wordt dan bedoeld dat men deze kan bewijzen. Dit bewijsbaarheidscriterium komt dan in plaats van het klassieke waarheidscriterium. Evenzo is dit het geval bij onwaarheid. Dit geeft aan dat men een contradictie kan afleiden. Derhalve vallen beide onder bevestiging. Over blijven de gevallen, waar men nog geen definitief antwoord weet: dit is dan de tweede waarde en niet een derde. Hiermee komt een tijdsaspect tot uiting.
Men heeft hier ook te maken met de interpretatie van het systeem. Bij Heyting was dit dus een bewijsinterpretatie. Kolmogorov (1932) hanteerde een interpretatie van een problemencalculus. Bijvoorbeeld: 'als A dan B' geeft het probleem aan om vanuit de oplossing van probleem A het probleem B op te lossen. Heyting (1934) werkte aan een Kolmogorov interpretatie voor de predicaatlogica. Later beschouwde Heyting (1958) de Kolmogorov interpretatie gelijkwaardig aan de zijne.[107]

Heyting (1930*a*) en Heyting (1930*b*) behandelen respectievelijk de propositielogica en de predicatenlogica. Het zij opgemerkt dat Heyting in die twee delen o.a. steunt op Hilbert & Ackermann (1928). Volgens Heyting neemt de intuïtionische logica zijn eigen plaats in: het is geen modale of een meerwaardige logica. Wellicht in de jaren dertig, maar ook daarna?

Heyting bekijkt ook of de verschillende axioma's onafhankelijk van elkaar zijn.

[106] Zie ook Gödel (1931*a*) als bespreking van Heyting (1931).
[107] BHK-interpretatie (Brouwer-Heyting-Kolmogorov), zie ook Troelstra & van Dalen (1988), Troelstra (1968).

3.1.2 Heyting: propositielogica

Bij de intuitionistische logica heeft men zich in acht te nemen voor het afwijkende gebruik van de operatoren zoals $\rightarrow$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$. Daarnaast zijn er principes die niet mogen worden afgeleid, zoals $A \vee \neg A$, Daarnaast heeft Brouwer zo her en der zijn instructies gegeven van wat hij wel of niet wenselijk acht.

Disjunctie

Conjunctie

Implicatie

Men kan ook systemen met een beperkt aantal operatoren beschouwen, bijvoorbeeld de combinatie met $\vee$ en $\neg$. Dan is het eenvoudig wat men niet wil: $A \vee \neg A$, of formules die uiteindelijk daar naartoe leiden. Voor een implicatief fragment met alleen $\rightarrow$ wordt een dergelijke rol vervuld door de formule van Peirce $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ —hier in zijn klassieke gedaante.

Dit beperkt natuurlijk de speelruimte.

Negatie

Hieronder de omschrijving van de negatie in Heyting (1931). Voor de mathematisch logica kan de negatie als een normale operator en 'speeltje' gezien worden, voor de intuïtionist ligt dit toch anders.[108]

'Eine logische Funktion ist ein Verfahren, um aus einer gegebenen Aussage eine andere Aussage zu bilden. Die Negation ist eine solche Funktion; ihre Bedeutung hat Becker, im Anschluss an Husserl, sehr deutlich beschrieben. Sie ist nach ihm etwas durchaus Positives, nähmlich die Intention auf einen mit der ursprünglichen Intention verbundenen Widerstreit. Die Aussage 'C ist nicht rational' bedeutet also die Erwartung, man könne aus der Annahme, C sei rational, einen Widerspruch herleiten. Es ist wichtig, zu bemerken, dass die negation einer Aussage immer auf ein Beweisverfahren, welches den Widerspruch herbeiführt, Bezug nimmt, auch wenn in der ursprünglichen Aussage von keinem Beweisverfahren die Rede ist. [...]'

Bij de negatie valt direct het aantal stellingen in Heyting (1930*a*) m.b.t. dubbele negatie op.

Bij Heytings systeem staat voorop dat $A \vee \neg A$ niet geldt, hetgeen niet inhoudt dat $\neg(A \vee \neg A)$ wel geldt —Heyting was niet gek. Maar wel geldt $\neg\neg(A \vee \neg A)$. Merk nogmaals op dat voor Heytings systeem ook geldt:
4.3. $A \rightarrow \neg\neg A$; Heyting (1930*a*, p.49). stelling 4.3
4.31, 4.32. $\neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg A$; Heyting (1930*a*, p.49). stellingen 4.31 en 4.32. Vergelijk dit als vrije vertaling van Brouwer (1923, p.253): 'Absurdität der Absurdität der Absurdität ist äquivalent mit Absurdität.'

Maar niet voor Heyting geldt het omgekeerde van 4.3. $\neg\neg A \rightarrow A$, want
∘ $A \vee \neg A \Rightarrow \neg\neg A \rightarrow A$, Heyting (1930*a*, p.50). want stelling 4.45 ($A \vee \neg A \rightarrow \neg\neg A \rightarrow A$, en
∘ $\neg\neg A \rightarrow A \Rightarrow A \vee \neg A$; want Heyting (1930*a*, p.50). stelling 4.8

[108] Bij een verder gaande beschouwing kan men ook afzien van het gebruik van negatie zoals bij van Dantzig en Griss, Overigens had Brouwer hiertegen zo zijn bezwaren. Heyting vond overigens Brouwers bezwaren niet geheel afdoende.

Zie verder in Heyting (1930a, pp.51-52), de stelingen over de dubbele negatie en het uitgesloten derde. Hier treft men een uitbouw aan van de combinatie tussen dubbele negatie en uitgesloten derde, zoals de stellingen:
4.4. $(A \wedge \neg A) \rightarrow B$ (stelling 4.4),
4.8. $\neg\neg(A \vee \neg A)$ (stelling 4.8),
4.81. $\neg\neg(\neg\neg A \rightarrow A)$ (stelling 4.81),
4.82. en 4.83 $((A \vee \neg A) \rightarrow B) \rightarrow \neg\neg B$ én $((A \vee \neg A) \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg B$ (stellingen 4.82 én 4.83).

De rol van de dubbele negatie is ook van belang voor het volgende item: de verhouding tussen klassieke en intuïtionistische getaltheorie

Dubbele negatie: klassieke en intuïtionistische systemen
Gödel, Heyting, Kleene, Glivenko

3.1.3 Heyting: apartheidsrelatie

Een vreemde eend in de negatie-bijt wordt gevorm door het begrip apartheid. In zekere zin is hier negatie in verwerkt: het één is het andere niet, verschil moet er wezen. Brouwer is er mee begonnen. Het begrip is verder uitgebouwd, grformaliseerd en gesystematiseerd door Heyting. Het is zijn versie, die sindsdien naar voren wordt gebracht. Ook in van Dalen (1999, p.329,403) en van Stigt (1990, pp.347-351) wordt er nader op deze relatie ingegaan. Volgens van Dalen (1999, p.329) kwam Brouwer bij zijn topologie met de als volgt door Van Dalen omschreven relatie: 'a positive inequality relation, the apartness (örtlich verschieden)' [...] We note passing that Brouwer did not introduce a symbol for apartness, neither here nor later. Strictly speaking he could do without, since in the presence of a metric, apartness is the same as having a (strictly) positive distance.' Van Dalen is zo gedienstig de diverse gebruikte symbolen voor apartheid te geven: $A\omega B$ in Heyting (1925), $= || =$ in Heyting (1935/36), $\#$ in Heyting (1941) —en verwarrend $\neq$ bij Bishop. Hier zal verder de notatie uit Heyting (1941) worden aangehouden: $\#, =$. Dus:
∘ $A\omega B$, later $A\#B$, ofwel: A wijkt af van B;
∘ $A\sigma B$, later $A = B$, ofwel: A valt samen met B.
De apartheidsrelatie is natuurlijk ook handig, indien men negatieloze systemen gebruikt: je hoeft er geen negatie voor te gebruiken, maar een ander soort begrip is hiermee in te zetten wanneer er iets over verschil moet worden gezegd.
Meestal wordt het begrip geïntroduceerd in samenhang met reële getallenvoortbrengende (real number generators) mechanismen, dus dat zullen we ook doen, maar eerst Heyting (1925).

• $a, b, ..$ punten van een ruimte (soort).

Heyting (1925, p.27) geeft in Hoofdstuk 2 de relaties van 'dragen en afwijken'. Hierbij geeft hij aan dat de ruimte een wiskundige soort is, waarvan de elementen punten (hier $A, B, ...$) genoemd worden. Let wel: ook hier geeft Heyting een specifieke kontekst aan, waarbinnen de relaties opgaan. Daarbij geeft hij de onderlinge eigenschappen, met de latere notatie gebruikt, en voor de uniformisatie ook maar verder $a, b, ...$ i.p.v. $A, B, ..$:

1. $a\#b \leftrightarrow b\#a, a = b \leftrightarrow b = a$;
2. $a = b \rightarrow \neg a\#b$, $a\#b \rightarrow \neg a = b$;
3. $\neg a\#b \rightarrow a = b$;
4. $a\#b$, dan voor elk punt c geldt minstens één van de relaties: $a\#c$ of $b\#c$.

Heyting (1925) geeft nu een tweetal leerzame, juist door de interactie tussen $\#, =, \neg, \neq$ (d.w.z $\neg =$), stellingen uit bovengenoemde eigenschappen:
1. $A\sigma B$, $B\sigma C$, dan$A\sigma C$. Ofwel $a = b, b = c$, dan $a = c$. Want uit $a\#c$, dan of $a\#b$ of $c\#b$, maar dan $\neg a\#b, \neg c\#b$, maar dan $a = c$
2. $A\omega B$, $B\sigma C$, dan $A\omega C$. Ofwel $a\#b, b = c$, dan $a\#c$. Want uit $a\#b$ dan of $b\#c$ of $a\#c$, maar $\neg b\#c$ vanwege $b = c$, dus $a\#c$.

Naar Heyting (1925) komt van Dalen (1999, p.403), dus nog steeds relatief de gebruikte projectief-meetkundige kontekst van Heyting, met de volgende bijeengeschraapte meer algemene eigenschappen en relaties tussen $\#, =, \neq$ en $\neg$:
1. $a\#b \rightarrow b\#a$;
2. $a = b \leftrightarrow \neg a\#b$;
3. $a\#b \rightarrow (c\#a \vee c\#b)$.
Naar Brouwer geeft Heyting de stelling: Als $a\#b$ onmogelijk is, dan $a = b$.

Bij Heyting wordt apartheid binnen een bepaalde kontekst gedefinieerd, bijvoorbeeld tussen getallen-voortbrengers, verzamelingen, punten bij topologie. Naar Brouwer definieert Heyting (1956, p.19) het door en ieder meest naar voren gehaalde voorbeeld:

• $a, b, ..$ 'real number generators'
Voor reële getallen-voortbrengers a en b met a ligt apart van b, $a\#b$, wordt bedoeld dat n en k gevonden kunnen worden met $|a_{n+p} - b_{n+p}| > 1/k$ voor elke p. Binnen deze kontekst impliceert $a\#b$ dan $a \neq b$, maar niet omgekeerd. Dus:
◦ wel: $a\#b \rightarrow a \neq b$
◦ niet: $a \neq b \rightarrow a\#b$
Heyting (1956, p.19) zegt er volgende over: '$a\#b$ is an stronger condition than $a \neq b$, because the former demands the actual indication of the numbers n and k, whereas the latter contents itself with a mere proof of impossibility.' De 'mere proof of impossibility' is een omschrijving van de intuïtionistische negatie, vergelijkbaar met: men kan laten zien dat het tegendeel tot absurdum leidt.

• $a, b, ...$ rational number generators
De apartheidseigenschappen fluctueren al naargelang de kontekst: bij de rationale getallen is er geen onderscheid tussen $\neq$ en $\#$. Dus:
◦ wel: $a\#b \rightarrow a \neq b$
◦ wel: $a \neq b \rightarrow a\#b$

Bij de verzamelingen geeft Heyting een opbouw om de apartheidsrelatie te omschrijven:

3.1.4 Heyting: predicatenlogica

Ook de quantoren leveren moeilijkheden op.

Brouwer en Weyl hadden zo hun denkbeelden over het gebruik hiervan. In ieder geval bij existentieel dat dit inhoudt dat men dit ook echt constructief kan aantonen. Bij de universele quantor kan men mbt het te gebruiken domein vragen en eisen stellen.
Existentie
Universele quantor

Aanvullingen op Heytings artikelen uit 1930 worden gegeven in Heyting (1946). Dit houdt enkele verduidelijkingen en betrekkingen in.

3.2 Interpretaties

Eind jaren twintig, begin jaren dertig hadden de intuïtionisten af te rekenen met denkbeelden hen onder te brengen bij een meerwaardige logica. Dit kwam het meest duidelijk van de kant van Barzin & Errera (1927) en Barzin & Errera (1929). Dit gezichtpunt werd algemeen bestreden door Heyting (1930*d*), hetgeen uitmondde in een vraag en antwoordspel in 1932.[109]

Afgezien van de technische kant van het onderwerp is in verband hiermee volgens van Dalen (2005, p. 676) ook een andere zaak van groot belang: Brouwer gaf in een brief aan De Donder met zijn weigering het antwoord zelf aan te pakken en dit naar Heyting door te schuiven daarbij de intuïtionistische logica uit handen: [111]

‘En préparant une note sure l'intuitionnisme pour le Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, je fus agréablement surpris d'envoir paraître une [note] de mon élève M. Heyting élucidant d'une manière magistrale les points que j'avais voulu mettre en lumière moi-même. Je crois qu'après la note de M. Heyting[112] il ne reste plus grand'chose à dire sur les questions en litige, et que dès à présent le lecteur des éditions de votre Académie saura suffisamment à quoi s'en tenir concernant les idées de M.M. Barzin et Errera, qui, à part du grand intérêt qu'elles présentent, sont néanmois intenables dans leur tendance essentielle. J'examinerai si à la note de M. Heyting il reste à ajouter quelque chose qui puisse approfondir les notions générales sur la logique intuitionniste, et dans le cas affirmatif je ne tarderai pas à en composer une note et je serai heureux de vous l'envoyer.’

Brouwer en Heyting geven hierna de indruk van een al dan niet bewuste werkverdeling. Brouwer bleef zich vooral bezig houden met het continuum, rijen, taal en het creatieve subject. Heyting droeg meer zorg voor logica, formalisme, axiomatisatie en recursietheorie.

Het op een andere wijze interpreteren van de intuïtionistische logica bleef niet beperkt tot Barzin en Errera. In de jaren dertig kan men ook naar Gödel, Jaśkowski en Tarski wijzen. In die gevallen komt wederom de hoeveelheid interpretatiewaarden op. We hebben al gehad: Brouwer en Heyting met twee, Barzin en Errera met drie. Hierna kreeg men te maken met meer waarden. Als eerste geeft Heyting (1947/48*a*, p.281) een voorbeeld van een driewaardige logica. die afwijkt van de klassieke, maar niet als

[109]Brouwer zelf was daartoe eerst gevraagd door De Donder, maar liet dit liever over aan Heyting.[110] Zie verder voor het vraag en antwoordspel: *l'Enseignement mathématique* XXX!, 1932-1933, no 1, 2, 3, 4, 5, 6 (Heyting 1x in 1932, en op 11.II.1933, 19.VI.1933; Barzin en Errera: 1x in 1932 en op 18.V.1933.

[111]Brief Brouwer naar Th. De Donder, 9.X.1930, in Brouwer (2011).

[112]Heyting (1930*d*).

intuionistische wordt voorgesteld: 'A trivalent logic has been constructed before by Łukasiewicz, a logic namely in which besides the two 'values' true and false a judgement may have a third value.' Na Łukasiewicz kwam de combinatie Łukasiewicz met Tarski, dat weer gebruikt werd door Jaśkowski. Heyting (1947/48*a*, p.282): [113] 'Gödel[114] has proved f.i. that intuitionistic logic cannot be described as an n-valent logic for a finite value of n. And Jaśkowski demonstrated that it is equivalent to a definite logical system which is defined by means of a denumerably infinite system of truth values.' Wij gaan nu eerst door met Gödel. Als eerste kan Gödel (1933*b*) genoemd worden. Hier wordt nog getwijfeld:

'In der Diskussion wird die Frage aufgeworfen, wieviele verschiedenen Wahrheitswerte es in Heytingschen Aussagenkalkül [H] gibt, d.h. wieviele nicht äquivalente Funktionen einer Variablen ($p \vee \neg p$ z.B. ist weder mit p noch mit $\neg p$ noch mit $\neg\neg p$ äquivalent). Bisher ist nicht einmal bekannt, ob es endlich oder unendlich viele sind.' Dit geeft het begin van de discussie aan, en wordt gevolgd door een eerder gepubliceerd, maar een niet eerder behandeld stuk, of in de woorden van W.V. Quine: [115] 'In the discussion someone (evidently Hahn) wondered how many truth values are needed in modeling Heyting's intuitionistc propositional calculus. Gödel answered the question a few month after the colloquium and thus before this publication of it; see Gödel (1932).' Zo komen we als volgende stap uit op stelling 1 van Gödel (1932):

'1. Es gibt keine Realisierung mit *endlich* vielen Elementen (Wahrheitswerten), für welche die und nur die in H beweisbaren Formeln erfüllt sind (d.h. bei beliebiger Einsetzung ausgezeichnete Werte ergeben.' Ofwel: er is geen eindig matrixmodel adequaat voor de intuïtionistische logica. Men kan altijd wel een formule vinden, die niet uit de axioma's volgt, maar wel waar is op eindige matrices waarop de axioma's waar zijn.

Als het dan niet met eindig kan, dan is de volgende zet oneindig —op dit spoor gaan Jaśkowski en Tarski verder. Gödel zelf zegt hierover niets. Direct hierop geeft Gödel (1932), stelling 2:

'2. Zwischen H und dem System A des gewöhnlichen Aussagenkalüls liegen unendlich viele Systeme, d.h. es gibt eine monoton abnehmende Folge von Systemen, welche sämtlich H umfassen und in A enthalten sind.'

Deze stelling geeft aan dat er tussen de klassieke logica en de intuïtionistische oneindig veel systemen in liggen. Dit is van belang doordat Heytings latere opvolger A.S. Troelstra hierover gepubliceerd heeft in het kader van Beths Euratom-project: Troelstra (1965). Beth zelf was ook al op zoek naar afzwakkingen tussen de klassieke logica en de intuïtionistische. o.a. aan de hand van de formule van Peirce. En verzwakkingen op de intuïtionische logica met de minimaalcalculus. Troelstra ging meer algebraïsch en methodisch te werk en kon daarmee preciezere resultaten scoren dan Beths welhaast 'empirische' hap-snap-methode'. In een mondelinge informatie vertelde Troelstra dat

[113] Het is eigenaardig dat Heyting geen positief of negatief commentaar geeft op deze interpretaties. Hij constateert alleen maar. Is dit wellicht het artikel waar de bewering over het intuïtionisme in Schouten (1949) op berust?

[114] I.e. Gödel (1932).

[115] W.V. Quine, Introductory note to 1933 (= Gödel (1933*b*), in Gödel (1986, pp266-267).

Beth zeer verbaasd was dat er niet enkele systemen tussen klassiek en intuïtionistisch inlagen, maar oneindig veel. Het soort werkzaamheden van Troelstra werd later voortgezet door o.a. W. Blok. Troelstra: [116] 'Gödels second result may be regarded as the first contribution to the topic of intermediate propositional logic.'

In het spoor van Gödel gaat Jaskowski verder, en van daaruit eerst Tarski en dan Tarski in combinatie met McKinsey. Echter in dit latere werk van Tarski en McKinsey is het van belang eerst Gödel (1933*a*) te laten passeren. Hierin wordt door Gödel een interpretatie van intuïtionistische propositielogica (Heytings propositiecalculus) in klassieke propositielogica met een extra operatie B gegeven. Uitgangspunt blijft Heytings interpretatie van A als 'A is bewijsbaar'. Dit dient dan ook als een opwarmer van algebraïsche semantiek zoals in de artikelenreeks Tarski & McKinsey (1948), Tarski & McKinsey (1946), Tarski & McKinsey (1944) ontwikkeld wordt. Hierachter komen dan weer Rasiowa & Sikorski (1963) en Rasiowa (1974).[117] Op een gegeven moment is men ook de predicatencalculus hierin mee gaan nemen.

Het in Gödel (1933*a*) toegevoegde begrip B staat voor 'het is bewijsbaar dat....' Binnen dit systeem van klassieke logica met operator B, dat door Gödel $\mathcal{S}$ wordt genoemd, geeft hij, naast de axioma's van de klassieke propositielogica met afleidingsregels voor de operatoren $\rightarrow, \neg, \vee, \wedge$, de toegevoegde axioma's voor operator B met een nieuwe afleidingsregel, nml. uit A, en A is (intuïtionistisch) bewijsbaar, kan men BA afleiden. Gödels $\mathcal{S}$ is het latere S_4. Hierin gaat Gödel de Heytingse propositielogica interpreteren over de operatoren (negatie, implicatie, conjunctie en disjunctie). Volgens Gödel heeft men hiermee de strikte implicatie van Lewis met een extra axioma, dat vergelijkbaar is met B voor een bewijsbare propositionele formule A. Overigens zal Beth later met zijn tableaus zelf onderzoek doen in deze hoek: de strikte implicatie, het systeem S_4, de interpretaties van de intuïtionistische logica, het zwakkere systeem van Johansson. Heyting zal overigens daar niet zo een moeite meer voor doen. In Nederland zal later wel weer vanuit modaallogisch oogpunt weer naar dergelijke systemen worden gekeken, vanuit Kripke-systemen alsook vanuit de algebraïsche logica.
De B-axioma's van Gödel: $BA \rightarrow A; BA \rightarrow (B(A \rightarrow C) \rightarrow BC); BA \rightarrow BBA$.
De interpretatie I(...) van Heyting in $\mathcal{S}$ is dan als volgt: $I(\neg A) = \neg BA; I(A \rightarrow C) = BA \rightarrow BC; I(A \vee C) = BA \vee BC; I(A \wedge C) = A \wedge C$.
Volgens Gödel kan men ook $I(\neg A) = B\neg BA$, en $I(A \wedge C) = BA \wedge BC$ nemen.

De laatste alinea van Gödel (1933*a*) is van belang: 'Es ist zu bemerken, dass für den Begriff 'beweisbar in einem bestimmten formalen system S' die aus S beweisbaren Formeln nicht alle gelten. Es gilt z.B. für ihn $B(Bp \rightarrow p)$ niemals, d.h. für kein System S, das die Arithmetik enthält.' Dus het is niet zo dat de consistentie van een S met getaltheorie binnen die S bewijsbaar is!

Het is nu het moment om op Jaśkowski (1936) over te stappen. Jaśkowski gaat voor zijn systeem uit van Tarski & Łukasiewicz (1930). Tarski en Łukasiewicz geven in dit artikel ook een verhandeling over meerwaardige logica, zowel eindig als oneindig in hun definitie 7; hierbij is er sprake van een matrix (model) $M = (A, B, f, g)$, waarbij:

Das n-wertige System L_n des Aussagenkalküls (wo n eine natürliche Zahl oder $= \aleph_0$ ist) ist die Menge aller Aussagen, welche die Matrix [model] $M = (A, B, f, g)$

[116] A.S. Troelstra, Introductory note to 1932, in Gödel (1986, pp.222-223).
[117] Zie ook A.S. Troelstra in zijn 'Introductory note to 1933f' in GCW1, pp.296-299.

erfüllen[model] , wobei im Falle $n = 1$ die Menge A leer ist, im Falle $1 < n < \aleph_0$ A aus allen Brüchen der Form $\frac{k}{n-1}$ für $0 \leq k < n-1$ und im Falle $n = \aleph_0$ aus allen Brüchen $\frac{k}{l}$ für $0 \leq k < l$ besteht, ferner die Menge B gleich $\{1\}$ ist und die Funktionen f und g durch die Formeln: $f(x,y) = min(1, 1-x+y)$, $g(x) = 1-x$ bestimmt werden.'

Jaśkowski

Tarski (1938) sluit volgens eigen zeggen zich bij de opvattingen van Jaśkowski en Gödel aan:

'Im Gegensatz zu $\mathcal{ZK}$ [klassieke tweewaardige logica] gibt es für das System $\mathcal{IK}$ [intuïtionistische logica] keine adäquate Matrix mit einem endlichen Wertsystem [volgens Gödel, Jaśkowski en Tarski].' We nemen nu Tarski (1938, stelling2.1) aan: de matrix ZK en $\mathcal{E}(ZK) = \mathcal{ZK}$

'Man kann hingegen eine unendliche Folge von Matrizen $IK_1, ..., IK_n, ...$ mit endlichen Wertsystemen angeben, derart dass $\prod_{n=1}^{\infty} E(IK_n) = \mathcal{IK}$.' Hierbij is $E(M)$ de verzameling van formules, die de matrix (model) M vervullen, met in dit geval $M = IK_n$. Dan levert het oneindige product (doorsnede) over deze formuleverzamelingen de formuleverzameling van de intuïtionistische logica op, er is dus geen eindige adequate matrix voor $\mathcal{IK}$. Merk op dat Tarski het voortdurend over het intuïtionistische logische systeem heeft, als een verzameling formules, die hij in de hand heeft en die hij kan manipuleren. Men kan zich afvragen wat Brouwer hiervan zou hebben gevonden.

Naast zijn beschouwingen over oneindig waardige intuitionistische logica, wordt in Tarski (1938) ook met behulp van topologie naar de logica gekeken. Dit is ook door Beth gedaan. Beth (1951) zette voor klassieke logica een volledigheidsbewijs op, waarin topologie een rol vervulde. Later heeft Beth opnieuw van topologie gebruik gemaakt bij intuïtionistische propositielogica met Beth (1959), en een fragment van de modale S_4 en intuïtionisme met Beth (1961) en Beth & Nieland (1965). Het waren echter Kreisel (1958) en Dyson & Kreisel (1961), waarin het belangrijkste werk op de combinatie van de intuïtionistische Beth-modellen en topologie werd geleverd. Beth (1959)

Met Tarski & McKinsey (1944) werd ook de algebra binnengehaald. Tarski vormde zelf een Brouwer-algebra, en in latere instantie een Heyting-algebra

Tarski & McKinsey (1948), Tarski & McKinsey (1946)

Misschien naar aanleiding van de artikelen door Tarski en McKinsey refereert Heyting (1947/48*a*) naar de tralie-algebra's. Na een noemen van Łukasiewicz, Gödel en Jaskowski komt Heyting tot de conclusie: 'These metalogical investigations, forming an important sub-section of the metamathematics described before, do no longer stand apart from the rest of mathematics. They are in close relation to several subdivisions of ordinary mathematics. I only want to touch upon the theory of lattices.' Hierna gaat Heyting over tot een beschrijving van tralies en geeft daarbij enkele voorbeelden. Zijn laatste voorbeeld betreft de logica. Heyting (1947/48*a*, p.282) omschrijft de desbetreffende tralie, en sluit af: In this way logic is connected with the theory of lattices and through this to modern algebra in general.' En hij geeft als extra: 'The problem arises of characterising every one of the logical systems among the lattices by certain characteristic properties. In this respect too, important and interesting results have been obtained.' Bij mijn weten is dit de eerste keer dat in een dergelijke kontekst in Nederland melding wordt gemaakt van dit soort algebra. Overigens heeft Heyting zelf niets meer gedaan aan deze combinatie tussen logica en tralie-algebra. De bezigheden op dit terrein speelden zich voornamelijk buiten Nederland af. Pas in de combinatie met modale logica is de tralie-algebra en algebraïsche logica oo in Nederland wer een rol gaan spelen. Er kan in dit verband, als een vroeg begin, gewezen worden op de dissertatie van Wim Blok: 'Varieties of interior algebras' uit 1976. Deze dissertatie liep in zekere zin op met de louter modaallogisch gerichte dissertatie van Van Benthem: 'Modal correspondence theory' uit 1977.[118] Daarna is de algebraŝche logica zich ook in Nederland snel gaan ontplooien.

Voor de duidelijkheid nu deze specifieke tralie uit Heyting (1947/48*a*, p.281-282): er is een verzameling T, met twee operatoren $\sqcap, \sqcup$, als volgt gedefinieerd:
D1. $a \sqcap b = b \sqcap a$; M1. $a \sqcup b = b \sqcup a$; D2. $(a \sqcap b) \sqcap c = a \sqcap (b \sqcap c)$; M2. $(a \sqcup b) \sqcup c = a \sqcup (b \sqcup c)$; D3. $a \sqcap a = a$; M3. $a \sqcup a = a$; DM. $a \sqcup b = a$ iff $a \sqcap b = b$
Voor T kan men van alles nemen, bijvoorbeeld punten, lijnen en vlakken in een projectieve ruimte. Maar ook een formuleverzameling met conjunctie, dus $\sqcap$ als $\wedge$ en disjunctie, dus $\sqcup$ als $\vee$.

De weg van Tarski en McKinsey, d.w.z. algebraïsering zal later het meest uitvoerig naar voren gebracht worden door Rasiowa & Sikorski (1963), Rasiowa (1974). Los hiervan staat de indertijd door Kleene naar voren gebrachte op recursie berustende interpreatie.

Uiteindelijk zullen de systemen van Beth (Beth-modellen) en Kripke (werelden-semantiek) het laatste woord op het gebied van interpretatie van de intuitionistische bewijstheorie vomen. Wij zijn echter daar nog niet aan toe: eerst dienen enkele woorden aan de systemen van Gentzen en de daaruit afgeleide systemen van Kleene gewijd te worden, voordat Beth en Kripke aan de beurt kunnen komen.

Dummett (2000)

Naast logica behandelt Heyting (1930*c*) intuïtionistische wiskunde. Hiertoe worden keuzerijen, functies en verzamelingen ingevoerd en hun onderlinge betrekkingen beschreven.

Gödel (1933*c*) in getaltheorie

3.2.1 Negatie: Significa, Mannoury

Heyting was niet de enige Nederlander, die een eigen logisch systeem probeerde te ontwikkelen. Ook bij Mannoury treft men logica aan. Dit is interessant doordat ook Brouwer en Heyting tot op zekere hoogte aan deze club gelieerd waren. Er is door Mannoury niet een echt logisch systeem ontwikkeld, maar dat was dan ook niet zijn bedoeling. Mannourys vertrekpunt was een gelaagde taal en betekenistheorie. Logica en wiskunde zijn eigenlijk illustraties en bijvangst. Hij is er zeker niet op uit om m.b.v. zijn logische denkbeelden systemen te formaliseren of bepaalde bewijzen dienaangaande te gaan leveren. En dit zeker niet op het gebied van consistentie —hij was wel bekend met Gödels resultaten. Over blijven zijn interpretaties van logische

[118] Dissertatie van Blok op 3 november 1976, UvA, promotoren Ph. Dwinger en A.S. Troelstra. Dissertatie van Van Benthem op 2 februari 1977, UvA, promotoren M.H. Löb en S.K. Thomason.

functies/operatoren. Mannoury stond los van de intuïtionistische logica. Mannoury is met taalonderzoek bezig, zijn regels zijn pragmatisch. Hij is er niet in de eerste plaats geïnteresserd om een regelsysteem voor te schrijven. Klassiek logische denkbeelden en intuïtionistische denkbeelden gebruikt hij zoals het in zijn pragmatische kraam van taalonderzoek te pas komt. Dat Mannoury al eerder in zijn carrière zich niet voor dik en dun bepaalde stromingen van het grondslagenonderzoek steunde, dus ook niet achter Brouwers intuïtionisme aanliep, laat de kritiek van Brouwer (1911) op Mannoury (1909) zien:

'Waar verder moet worden erkend, dat op verschillende plaatsen in het boek met succes tegen het intuitionisme wordt geargumenteerd, is dit hoofdzakelijk toe te schrijven aan de slordige wijze, waarop de betogen van Poincaré, den eenigen tegenstander, dien Mannoury zich in dezen stelt, zijn ingekleed. Zulke het intuitionisme blootgevende slordigheden zijn b.v. de verwerping van álle oneindige getallen, ook de aftelbare (vgl. p. 89), en de identificeering van wiskundig bestaan van niet-contradictoriteit (vgl. p. 89 en 140).

Mannoury leverde kritiek op Poincaré. Poincaré kwam met verbeteringen op de klassieke wiskunde. Deze verbeteringen kwamen voort uit de overtuiging vcan Poincaré, maar dat werd evenwel niet in de vorm van een nieuwe aanpak van de wiskunde als geheel gegoten. En uiteindelijk is volgens Brouwer (1911) wel degelijk oplossingen op punten te geven. Wel is het zo dat op dat moment Brouwer ook nog niet een andere aanpak op alle belangrijke punten of een geheel nieuwe aanpak voor alles achter de hand had. Brouwer (1911) ging verder met het voorafgaande citaat met een conclusie, waarbij hij enkele denkbeelden uit zijn dissertatie opriep —Mannoury had buiten Poincaré nog andere intuitionisten moeten raadplegen:

'Eerst na herstel dezer fouten, erkenning der prioriteit van wiskunde ten opzichte van logica, en aanvaarding van de intellectuele oerintuitie der tweeënigheid, wordt het intuitionisme onkwetsbaar.'

Men moet ook bij de ontwikkeling van Mannoury's denkbeelden aangaande redeneerregels zijn denkbeelden over gradualiteit en het relativiteit in ogenschouw nemen. Bij hem zijn eigenschappen deels eigenschappen binnen een een zekere breedte, en vandaar ook relatief te gebruiken. Om een voorbeeld te nemen: vaak treft men eigenschappen aan met een oppositie. Bij zuur en zoet heeft men twee uitersten, waartussen men gradueel van het een naar het ander komt. Dit geeft dan een gradering aan. Deze beschouwingswijze heeft zijn neerslag ook in het gebruik van logische operatoren. Bij een gradering en relativisme past een veljunctie, bij het alleen beschouwen van uitersten, dus absolute begrippen, autjunctie. Bij de negatie heeft men eenzelfde proces: de keuzenegatie en de uitsluitingsnegatie.

Volgens Beth (1950*b*, p.107) is Mannourys grootste verdienste op logisch gebied het invoeren van de keuzenegatie (Wahlnegation, het ov der Ouden) en de uitsluitingsnegatie (Ausschliessungsnegation, het klassieke $\mu\eta$). Volgens Beth veronderstelt de keuzenegatie een dilemma, er wordt een alternatief verondersteld: 'De negatie van van een der leden van dit dilemma is gelijkwaardig met de bevestiging van het andere lid.' En volgens Beth veronderstelt de uitsluitingnegatie geen dilemma, er wordt geen alternatief verondersteld: 'Ze is dan ook niet, als de keuzenegatie, vatbaar voor een adequate positieve interpretatie.' De keuzenegatie is in het taalgebruik indicatief, de uitsluitingsnegatie heeft alleen een emotioneel-volitionele betekenis. Beths voorbeelden: ik ga niet met de trein (dit kan inhouden dat men met de auto gaat) (keuze), een walvis is geen vis (keuze), een NSB-er (doorgehaald: belastinginspecteur) is geen mens (uitsluiting). De reeks keuzen voor de keuzenegatie kan natuurlijk lang zijn, bijvoorbeeld om van A naar B te gaan per auto, per trein, per bus, per fiets, lopend, met de boot, met de helicopter. Men heeft dan n alternatieven, waarvan men één negeert, men loopt dan het gehele rijtje af tot er één overblijft. Als ook die genegeerd wordt houdt men niets over, dan heeft men geen keuzerijtje gehad, want daar gebruikt men de negatie om binnen een verzameling mogelijkheden tot een keuze te komen. Volgens Beth: de keuzenegatie heet een positieve strekking, ergens treedt een ja op. Om nu terug te komen op het doorlopen van het gehele rijtje: als er nergens een ja optreedt, dan heeft men niet met een keuzerijtje en keuzenegatie te maken gehad. De keuzenegatie is dan tot een soort van uitsluitingsnegatie verworden, ofwel de uitsluitingsnegatie als een soort grensgeval van de keuzenegatie. Men heeft dan een uitsluitingsrijtje en een uitsluitingsnegatie: nooit een keertje ja, maar altijd neen.

Beth komt hier dan, geheel in overeenstemming met Mannoury's significa met de combinatie van spreker en hoorder aanzetten. Stel dat de spreker een ontkenning hanteert. Dan zijn er voor de hoorder twee mogelijkheden: hij vat de ontkenning van de spreker op als een keuzenegatie of een uitsluitingsnegatie. Beth: [119] 'Vat de hoorder de ontkenning op als keuzenegatie, dan zal hij vragen: 'hoe dan wel?' Indien hij haar als uitsluitingsnegatie opvat, dan vraagt hij 'waarom niet?'

Men kan wellicht de de keuzenegatie gaan vergelijken met de apartheids-relatie in het intuïtionisme.[120] Men zou het in dit geval ook een 'anders dan' relatie kunnen noemen.[121] Bij een aantal keuzen kan men een rijtje aflopen en per item 'het is anders dan' veronderstellen. Nogmaals Heyting (1956) herhalend: '$a\#b$ is an stronger condition than $a \neq b$, because the former demands the actual indication of the numbers n and k, whereas the latter contents itself with a mere proof of impossibility.' Voor n en k, zie de kontekst bij de al eerder gegeven citaten.

Als men keuzenegatie met apartheid gaat vergelijken, dan kan men wellicht $a \neq b$, dus $\neg a = b$, ofwel '$a = b$ is absurd' vergelijken met uitsluitingsnegatie. Wel heeft men te maken met $\#$ impliceert $\neq$, en niet omgekeerd, zij het dat dit kontekstgevoelig is. Wel gaat men dan wel heel ver met iets Mannoury in de mond te leggen.

Mannoury's denkbeelden hebben zeker implicaties, ook voor Beth. De implicaties horen overigens thuis bij Beths denkbeelden en bespreking van meetkunden. We gaan nu over op Mannoury (1934, pp.333-334):

'[...] dass bei der Ausschliessungsnegation, die als 'principium tertii exclusi' (Regel vom ausgeschlossenen Dritten [p.t.e]) bekannte Formel meistens sehr konsequent befolgt wird, während dies bei der Wahlnegation nicht oder in viel geringeren Masse der Fall ist.' Mannoury (1934, p.333-334) onderscheidt de volgende gevallen (met voorbeelden *, en voor het gemak Beths twee operatoren $\mu\eta, o\upsilon$):

a. verdoppelte Wahlnegation [keuze- op keuzenegatie] = Bejahung.
a*. Der Gegensatz von Grossstadt ist Kleinstadt *und umgekehrt* ($o\upsilon\, o\upsilon\, A$, dan A)

[119] Beth (1953*a*, p.45).
[120] Suggestie gedaan door Lex Hendriks gedurende een gesprek op 14 april2014.
[121] Apartness bijvoorbeeld in Heyting (1956).

b. Ausschliesssung der Wahlnegation [uitsluitings- op keuzenegatie] = Bejahung oder 'tertium'
b*. Was keine Kleinstadt ist, kann eine Grossstadt sein, aber auch wohl ganz etwas anderes. ($\mu\eta \, o\upsilon \, A$, dan A of tertium (dus een derde mogelijkheid)
c. Wahlnegation der Ausschliessung [keuze- op uitsluitingsnegatie]: kommt nicht vor. ($o\upsilon \, \mu\eta \, A$ is zinloos)
d. verdoppelte Ausschliessungsnegation [uitsluitings- op uitsluitingsnegatie] = Bejahung.
d*. Falls es *ausgeschlossen* ist, dass *keine* Grossstadt gemeint war, so muss eine Grossstadt wirklich gemeint gewesen sein.($\mu\eta \, \mu\eta \, A$, dan A)

Hiermede heeft men alle combinaties. Helaas geeft Mannoury geen syntactisch of semantisch systeem. Hoe de beide negaties zich gedragen t.o.v. samengestelde beweringen maakt hij niet duidelijk. Binnen de significa bestaan overigens wel samengestelde beweringen, zelfs beschreven in Mannoury (1934). Men kan natuurlijk wel trachten dit achteraf te construeren. maar dat is buiten Mannoury (en de rest van de significi) om. Er was binnen de significa geen Heyting om hierover onder de toeziende ogen van de meester zelf uitsluitsel te geven, zoals dus wel is geschied m.b.t. de leerstellingen van de peripateet uit Blaricum. Van belang is dat Mannoury (1934, p.334) m.b.t. de uitsluitingsnegatie nog tot het volgende komt:

'[...] der Ausschliessungsnegation eine ganze Gruppe Ausdrücke und Sprachformen entwickelt hat, welche als die Sprachform der Allgemeinheit angedeutet sein mag, und die mit der Ausschliessungs-Negation durch die Formel 'A oder nicht-A = alles' (p.t.e.) und 'A und (zu gleicher Zeit) nicht-A = nichts' (principium kontradiktionis) verbunden ist, wobei die weiteren zu dieser Sprachform gehörigen Begriffe (wie 'unendlich', 'ewig', niemals', 'gewiss', 'Wirklichkeit', Tod, Stoff, Ich, leer usw.) mehr oder weniger direkt auf diese beiden zurückzuführen sind.'

In de wiskunde treft men keuzenegatie (zeven is geen even getal) maar ook uitsluitingsnegatie (het aantal priemgetallen is oneindig) aan. Beth zegt hierover: [122]

'Dit heeft ingrijpende gevolgen omdat voor de keuzenegatie de geldigheid van het beginsel van het uitgesloten derde evident is (hier wordt immers verondersteld, dat *niet-A* het alternatief van *A* is), wat niet opgaat voor de uitsluitingsnegatie. Enerzijds kan Mannoury dus begrip hebben voor Brouwer's verwerping van laatstbedoeld beginsel, maar anderzijds kan hij ook moeilijk vrede hebben met een opvatting, die een emotionele betekenis moet toeschrijven aan een in de wiskunde voorkomende uitsluitingsnegatie, en daarmee tevens aan tal van wiskundige begrippen, waarvan de definitie een uitsluitingsnegatie bevat; hiertoe behoren o.a, de begrippen *oneindig, evenwijdig* en zelfs *gelijk*. Om aan deze consequentie te ontkomen, postuleert Manoury dat in de wiskunde de uitsluitingsnegatie, weliswaar geen indicatieve, maar daarom ook nog geen emotionele, betekenis bezit. Haar betekenis is zuiver formeel, dat wil zeggen: wiskundige uitspraken, waarin de uitsluitingsnegatie voorkomt, hebben geen zelfstandige betekenis, maar ze kunnen een rol spelen in het bewijs van andere uitspraken, waarin de uitsluitingsnegatie niet optreedt en die dus wel een zelfstandige betekenis bezitten.'

[122] Beth, 'Signifika', typoscript van 6 pp.; gezien de literatuuropgaven tussen 1953 en 1964.

En Beth verrvolgt nu met de kwestie van het al dan niet aanvaarden van het principe van het uitgesloten derde: 'Vatten we nu de uitsluitingsnegatie in de wiskunde in deze zin op, dan zijn we volkomen vrij, het beginsel van het uitgesloten derde te aanvaarden of te verwerpen. Maar dan ligt het voor de hand, het beginsel te aanvaarden, omdat daardoor een grote vereenvoudiging in de opbouw van de wiskunde kan worden verkregen.' Dit laatste past goed bij de pragmatisch ingestelde Beth, maar de vraag blijft hoe bevlogenen zoals Mannoury en Brouwer hiermee om zouden gaan.

Het wordt nu interessant over deze kwestie, na de uitleg van Beth, Mannoury zelf aan het woord te laten. Met betrekking tot die onderdelen van de wiskunde waar oneindigheid een rol speelt, merkt Mannoury (1934, pp.336-337) het volgende op: 'Auch eine Formel der n-dimensionalen Riemannschen oder Lobatchefskyschen Geometrie kann gelegentlich in der Physik oder Mechanik eine Anwendung finden und damit gewisse indikative Bedeutungselemente gewinnen, die ihr anfangs fremd waren.' Maar ergens houdt dit op, Mannoury (1934) vervolgt: 'Jedoch für einen beträchtlichen Teil der Mathematik ist eine solche Anwendung ausgeschlossen: für die Mathematik der nicht-endlichen Mengen nämlich. Alles, was unendliche Mengen einerseits und leere Mengen andererseits betrifft, m.a.W. alles, was zu ihrer Definierung die *Ausschliessungsnegation* erfordert, ist keiner physischen Korrelation fähig. Und zwar aus dem einfachen Grunde, dass die Ausschliessungsnegation sich eben durch ihre *emotionellen* Bedeutungselemente (der Abwehr) von der Wahlnegation unterscheidet (vgl. 54, S. 55)[123] Daher, dass das Unendliche in der Mathematik eine rein formale, in der lebenden Sprache aber eine rein emotionelle (bzw. volitionelle) Bedeutung hat, und dass das 'principium tertii' in der Physik keiner Anwendung fähig ist. Und daher auch, dass das Nichtunterscheiden dieser beiden Bedeutungen oft eine beträchtliche Begriffsverwirrung hervorgerufen hat, Die so oft diskutierte Frage nach der 'Existenz' des aktual Unendlichen z.B., gehört dieser Begriffsverwirrung an. [...]'

Indicatief en niet-indicatief in combinatie met de uitsluitingsnegatie is een punt, dat bij Beth een rol zal spelen bij het begrip van oneindigheid in de meetkunde.

Mannourys systeem was niet intuïtionistisch. Dat bleek al uit de verhaaltjes, die rondom Mannourys beide negaties heen gesponnen waren. Gezien Mannourys setting blijft het natuurlijk moeilijk, wat hij er precies binnen een volledig uitgewerkt systeem mee bedoeld zou kunnen hebben. Dat systeem is er nu eenmaal niet. Duidelijkheidshalve zal er toch nog wat uit het systeem van Heyting uit 1930 getoond worden. Heyting zit dus net voor Mannoury uit 1934. We kunnen wel aannemen dat Mannoury bekend was met de logische denkbeelden van Brouwer en Heyting: Heytings logische artikelen uit 1930 komen in de literatuurlijst van Mannoury (1934) voor, evenals alle terzake doende geschriften van Brouwer. Bij Heytings systeem staat voorop dat $A \vee \neg A$ niet geldt, en ook niet $\neg(A \vee \neg A)$, maar wel $\neg\neg(A \vee \neg A)$.
Bij Heyting gelden wel:
1. $A \to \neg\neg A$; Heyting (1930*a*, p.49). stelling 4.3
2. $\neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg A$; stellingen 4.31 en 4.32.
Bij Heyting geldt niet:
3. $\neg\neg A \to A$,

[123]Verwijzing naar F. Mauthner, Beitrage zu einer Kritik der Sp[rache.

want $A \vee \neg A \Rightarrow \neg\neg A \rightarrow A$, en $\neg\neg A \rightarrow A \Rightarrow A \vee \neg A$; Heyting (1930*a*, p.50). stellingen 4.45 en 4.8.

Hiertegen kunnen wij nogmaals Mannoury afzetten, met:
1. $ov\, ov\, A \leftrightarrow A$
2. $\mu\eta\, ov\, A \rightarrow A$ of tertium
3. $\mu\eta\, \mu\eta\, A \leftrightarrow A$
Bij Mannoury geldt niet, want is zinloos:
4. $ov\, \mu\eta\, A$

Deze voorbeelden worden gegeven om enig opwekkend onderzoek te doen naar Mannourys combinaties. Als men hier genoeg van heeft komt men terecht bij de affirmatieve wiskunde van Van Dantzig en de negatieloze van Griss. Griss heeft met deze opvatting van de wiskunde ook een logisch systeem geprobeerd op te zetten —maar ook Vredenduin, die hier verder verwaarloosd zal worden. Brouwer was het niet eens met Van Dantzig en Griss, en vond dat negatie niet gemist kon worden. Heyting stond aarzelend tegenover Griss. Gilmore (1953) zal gebruik maken van de apartheidsrelatie van Brouwer en Heying.

Overigens kan men proberen met meerdere negaties te werken, maar dan wel met een net systeem: bijvoorbeeld Rasiowa

3.2.2 Negatie: intuïtionistische varianten: Van Dantzig, Griss en Johansson

Tijdens en na WWII ontwikkelden In Nederland D, van Dantzig zijn affirmatieve wiskunde, en Griss zijn negatieloze wiskunde en logica. In Noorwegen had men Johansson met zijn minimaalcalculus.

Beth onderscheidde twee stromingen binnen de intïtionistische varianten.[124]
1. D. van Dantzig. Deze probeerde volgens Beth de kloof tussen de klassieke en de intuïtionistische wiskunde te overbruggen. Volgens Beth is J.J. de Iongh in het voetspoor van Van Dantzig verder gegaan.
2. G.F.C. Griss. Deze wilde het intuïtionisme verder op een meer radicale wijze ontwikkelen. Griss probeerde ook logische systemen te ontwikkelen. Dit is niet op die manier door Van Dantzig gedaan. In het spoor van Griss zijn P.C. Gilmore en P.G.J. Vredenduin verder gegaan.

Affirmatieve wiskunde. Als commentaar op Van Dantzig kan uit van der Corput (1948, p.260) geciteerd worden: 'De affirmatieve wiskunde sluit nauw aan bij de wijze, waarop de wiskunde in de ervaringswetenschappen wordt gebruikt, voor wier beschrijving men met een eindig aantal gevallen kan volstaan.'

Met betrekking tot aanpak 1., dus Van Dantzig, worden de belangrijkste artikelen gevormd door van Dantzig (1947*a*,*b*), en als antwoord op Brouwer van Dantzig (1949).

Van Dantzig kleedde zijn onderzoek naar affirmatieve wiskunde in twee deelonderzoeken in:

1. Zwakke interpretatie: stabiele (stable) wiskunde — klassieke wiskunde beschouwd vanuit een intuïtionistisch standpunt.

[124] Beth (1965, p.163).

2.Sterke interpretatie: affirmatieve wiskunde — intuïtionistische wiskunde bezien vanuit een formeel standpunt.

Negatieloze logica en wiskunde. Voor Griss kan men beginnen met zijn brief naar Brouwer ivan 19 april 1941. [125]

minimaalcalculus. Johansson[126]

3.2.3 Bewijstheorie na 1931

Door de formalisering van de intuitionistische logica kwam deze logica bij de bewijstheoretici in het blikveld. Men moest door Goedels reultaat wegen verzinnen om consistentie te behandelen. Dit kon door verzwakkingen van Hilberts oorsponkelijke standpunt maar wellicht viel er nu ook wat te halen van intuitionistische zijde.

Gentzen en Herbrand

Bernays

Goedel

Heyting

3.3 Gentzen-systemen

3.4 Beth: tableaus en bewijsmechanisatie

Een aparte afdeling wordt door Beth en zijn denkbeelden over bewijsmechanisatie gevormd. Al vanaf de ontwikkeling van zijn tableaus zag Beth dit als een belangrijk effect: het ineenschuiven van test en bewijs. Met een beetje trimmen van de tableaus was dit dan ook hopelijk mechanisch uit te voeren.

Er zaten echter toen het vanwege het Euratom-project op aankwam meer adders onder het gras. Bij het beschouwen van wiskundige theorieën heeft men al snel te maken met elementaire logica. Men heft derhalve de verschillende 1. propositielogica, 2. predicatenlogica, 3. wiskundige theorieën in predicatenlogica. Men moet op dit punt bedacht zijn op verschillende metastellingen: volledigheid versus onvolledigheid, en meer nog beslisbaarheid.

4 Algebra en meetkunde

4.1 Meetkunde en algebra in het perspectief van Beth en Heyting

Heyting (1927)

Heyting (1937)

Meetkunde en algebra hebben een grote rol gespeeld in de onderzoekingen van Heyting en Beth. Het proefschirft van Heyting ging over de intuïtionistische mogelijkheden binnen de projectieve geometrie. De basis hiertoe vormde echter de algebra, net

[125] Brouwer2011

[126] Johansson (1936).

zoals dit later ook bij Tarski's beschouwing van de beslisbaarheid van de elementaire meetkunde zou zijn. Hiernaast had Heyting meetkunde in zijn leeropdracht. Heyting zal natuurlijk ook in meetkunde geïnteresseerd geweest zijn in verband met het werk van Hilbert, en de formalistische aanpak daarin. Voordat Hilbert met zijn combinatie tussen bewijstheorie en grondslagen kwam, had hij al een combinatie tussen zijn meetkundewerk en grondslagen gemaakt. Ook op dat punt fulmineerde Brouwer tegen Hilbert. Voor zijn proefschrift bleef er voor Heyting maar een beperkt gebied over. De basis van de intuïtionistische wiskunde werd daarvoor en op dat moment zelf door Brouwer gevormd. De op dat moment opkomende topologie als een basisgebied voor de wiskunde werd ook al door Brouwer bediend, idem dito de verzamelingenleer. De eveneens als een soort basisdiscipline om zich heen grijpende algebra viel al onder Brouwer en De Loor inzake de intuïtionistische variant.[127] De meetkunde was al eeuwen een soort basis, en had door Felix Klein met zijn algebraïsche inbreng, maar vooral door Hilberts formalistische bemoeienissen een nieuwe Schwung gekregen. Het fraaie is dat Heyting eerst die formalistische meetkunde onder de loep nam en later met zijn logica nog eens een soort bewijstheorie introduceerde, waarmee hij ook een ander formalistisch project van Hilbert aanpakte. De algebra liet daarna niet al te lang op zich wachten.

Beth had filosofische en pedagogische belangstelling voor meetkunde.[128] In Beth (1935) was hij geïnteresseerd in de inzichtelijke —door hem plastisch als de gipsmodellen- en ijzerdraadconstructieswiskunde omschreven— versus de geformaliseerde behandeling, maar ook in de intuïtionistische aanpak tegenover de formalistische. Maar dat zijn aspecten die bij hem ook een rol spelen in het meetkunde-onderwijs. Door de beslisbaarheid van de elementaire meetkunde door Tarski is hij zich in het kader van Euratom en bewijsmachines ook vanuit dit perspectief met de meetkunde gaan bezighouden. Maar eerder al had Beth zich over de projectieve meetkunde moeten buigen vanwege de opbouw van een niet klassieke logica in verband met de quantenmechanica. Een ander uitstapje naar de meetkunde door Beth was het terugbrengen van het aantal basisbegrippen; dit had ook te maken met zijn definitietheorie. Het resulteerde in een gezamenlijk artikel met Tarski.

Men kan zich al met al dus op twee manieren met meetkunde bezighouden: om meetkunde te bedrijven of om over de meetkundetheorieën te praten. Nummer twee zal hier voor ons het belangrijkst zijn. Enkele voorbeelden uit nummer twee: hoe zien de axioma's er uit, hoeveel primitieve begrippen heeft men, hoe zien de stellingen er syntactisch uit: hoeveel symbolen, hoeveel veranderlijken vallen onder functies en relaties. Maar ook de toegepaste redeneerwijzen of de gebruikte getallenlichamen. Meer de kant van meetkunde zelf opgaand zijn vragen zoals: welke meetkunden dienen als ondergrond voor andere meetkunden? Heeft men bij een breed palet aan meetkunden een niet lege doorsnede, en hoe ziet die er uit naar de voortbrengende axiomatiek en primitieve termen?

Hilbert hield zich al bezig met (syntactische) volledigheids- en (indirect semantische) onafhankelijkheidsbewijzen.

---

[127] De Loor was hier al op gepromoveerd met de Loor (1925).

[128] Ook E.W. Beths vader H.J.E. Beth had belangstelling voor de niet-euclidische varianten van de meetkunde met zijn Beth (1929).

4.2 Heyting: intuïtionistische algebra en meetkunde

De dissertatie Heyting (1925) baseerde zich voor de axiomatiek op Whitehead (1906). Whitehead (1906) werkte ten dele vanuit M. Pieri. Tegen de opzet van de op euclidische meetkunde gebaseerde projectieve meetkunde van Whitehead had Heyting verschillende bezwaren. In dit kader zijn de bezwaren van constructivische aard het zwaarst wegend. In de eerste plaats betreft dit de gehanteerde ordening en continuïteit. Hiertoe maakte Heyting gebruik van Brouwers keuzerijen. Dit valt al meteen op bij de formulering van Heytings uitgesplitste continuïteitsaxioma (XVI) met (XVII), dat afwijkt van Whitehead en Hilbert:

(XVI) 'Op tenminste een lijnsegment a kan een aftelbaar oneindige, op dat segment in engeren zin overal dichte deelsoort H worden aangewezen.'
(XVII) 'Ieder aanvullingselement van de in XVI bedoelde soort H bepaalt een punt van het segment, dat t.o.v. de punten van H dezelfde orderelaties bezit als dat aanvullingselement.'

De in Whitehead aangenomen ordening en de gehanteerde metriek waren een belangrijk punt van aanval in Heyting (1925) Hierdoor verdwijnt al axioma XIV (Fano's axiom) van Whitehead (1906) uit zicht:

(XIV) 'If $Harm(ABCD)$ holds, then B and D are diverse points.' [129] of ook het equivalent hiervan: 'The three harmonic points of a complete quadrilateral are not collinear.'

Heyting zou belangstelling blijven houden voor meetkunde in combinatie met intuïtionisme. Hij publiceerde....Daarnaast schreef hij leerboeken over projectieve en axiomatisch projectieve meetkunde (zonder intuïtionisme).

Ook leerlingen van Heyting werden tot dergelijk onderzoek aangezet. Hierbij kan D. van Dalen genoemd worden met een dissertatie over affiene en projectieve meetkunde, maar ook A.S. Troelstra met zijn topologisch getint onderzoek.[130]

Het kan natuurlijk ook veel strenger. Met het gedachtengoed van Griss met zijn negatie- en disjunctieloze wiskunde kan men trachten een projectieve meetkunde op te zetten, zoals door N Dequoy.[131]

4.3 Tarski en zijn algebra en meetkunde

4.3.1 Tarski en zijn algebra

Tarski & McKinsey (1948) bespreekt een beslissingsprocedure voor de elementaire algebra en als nevenresultaat hetzelfde voor de elementaire meetkunde.

[129] $Harm(ABCD)$: D is de harmonisch geconjugeerde van B relatief A en C, als de vier punten collineair zijn en als een volledige vierhoek gevonden kan worden z.d.d. één paar tegenover elkaar liggende zijden elkaar in A snijden, een ander paar in C, en het derde paar door B en D gaat.
[130] van Dalen (1963), Troelstra (1966).
[131] Dequoy (1954).

Tarski wenste met elementaire logica een theorie te geven voor gesloten reële lichamen. Van die theorie wilde hij de beslisbaarheid aantonen. Voor de logica gebruikte hij klassieke eerste-orde logica. Bij de niet-logische afdeling heeft men te maken met axioma's die gaan over een lichaam met een bepaalde ordening en continuïteit. Enkele kunstgrepen zijn nodig omdat niet alles direct door middel van die elementaire logica uit te drukken valt. Tarski ging uit van Artin & Schreier (1927*a*) en Artin & Schreier (1927*b*) voor het algebraïsche deel. Maar het was vooral Van der Waerdens 'Moderne algebra', dat door hem gebruikt werd.[132]

Men heeft hier te maken met ordeningsaxioma's, een lichaam en daarenboven extra axioma's om tot de specifieke theorieën te komen, die Tarski op het oog heeft.

Tarski gaat uit van een commutatief geordend lichaam. Dit is opgebouwd uit een commutatieve ring met eenheidselement. Gemeenlijk houdt dit enkele axioma's voor abelse groepen in:

1. associativiteit
2. identiteit: $x + 0 = x, 0 + x = 0$
3. inverse bestaat: $\exists y(x + y = 0 \wedge y + x =)$
4. commutativiteit, abels

Daarbij nog axioma's voor '.':

5. eenheid: $1.x = x \wedge x.1 = x$
6. associativiteit
7. commutativiteit
8. distributie van . over +
9. geen nuldelers: $x.y = 0 \rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$

Voor (1) tot en met (8) heeft men te maken met een commutatieve ring met eenheidselement. Als men hier nog (10) en (11) aan toe voegt, dan heeft men een lichaam.

10. $0 \neq 1$
11. $x \neq 0 \rightarrow \exists y(y.x = 1)$

Voor de ordening kan men lineaire (simpele) ordening gebruiken, Voor A een (positief) element uit een lichaam L, dan $a = 0$ of $a > 0$ of $-a > 0$ (a heet negatief); als $a.b > 0$ dan $a + b > 0, a.b > 0$ ($-a$ is in L niet als een som van kwadraten voor te stellen, elk geordend lichaam is derhalve rëel). Als extra's kan men nog gebruiken: $(x < y \rightarrow x + z < y + z)$ en $((x < y \wedge y < z) \rightarrow x.z < y.z)$

Een lichaam heet algebraïsch gesloten als elke veelterm een wortel in dat lichaam heeft:

12. $\exists(x_n y^n = ... + x_1 y + x_0 = 0 \vee x_n = 0$ voor n even of oneven.

Een lichaam heeft formeel reëel als -1 niet binnen dat lichaam uitdrukbaar is als een som van kwadraten. Dus als onder 12., maar n oneven.[133] Tenslotte heeft een reëel lichaam altijd karakteristiek 0. Een lichaam heet een reëel gesloten lichaam, als dat lichaam formeel reëel is en er niet een eigenlijke algebraïsche uitbreiding van dat lichaam gevonden kan worden, die eveneens formeel reëel is.[134] Ofwel met een toevoeging aan formaal reëel van

---

[132] van de Waerden (1940).

[133] Tarski & McKinsey (1948), axioma (ii), én Artin & Schreier (1927*a*), p. 88, stelling12.

[134] Artin & Schreier (1927*a*), axioma p. 87.

13. $\forall x \exists y(y^2 = x \vee y^2 + x = 0)$. én
14. $(x_0^2 + x_1^2 + ... + x_n^2 = 0) \rightarrow (x_0 = 0 \wedge x_1 = 0 \wedge ... \wedge x_n = 0)$

Als dat niet zo is voor zeg L, dan heeft men een lichaam, zeg L^*, met L^* wel reëel gesloten en L een deellichaam van L^*, en alle elementen van L^* heten algebraïsch over L. Tenslotte is een reëel gesloten lichaam niet algebraïsch gesloten.[135] Een voorbeeld van een reëel gesloten lichaam is het lichaam van de reële getallen. Het door i als aan zo een lichaam extra toegevoegd element geeft echter wel een algebraïsch gesloten lichaam.[136] Ofwel, als een formeel reëel lichaam algebraïsch gesloten kan worden door de adjunctie van i, dan is dat lichaam zonder die geadjungeerde reëel gesloten.

Met de beoogde theorie zal men zo het een en ander willen uitdrukken. Het zal blijken dat met Tarski de Nullstellensatz van Weierstrass voor continue functies geformuleerd kan worden —als een functie, die continu is in een interval en waarvoor van twee gekozen elkaar opeenvolgende waarden het teken van de één positief, van de ander negatief is, dan heeft die functie een nulwaarde tussen die twee. Ook zal men de reële wortels van een polynoom willen berekenen. Alle polynomen van oneven graad komen hiertoe in aanmerking: in een reëel gesloten lichaam heeft elke veelterm van oneven graad minstens één wortel.[137] Meer nog, men kan zich afvragen of in een intervallen zekere hoeveelheid —en liever nog: hoeveel precies— aan nulpunten ligt (de stelling van Sturm met behulp van Weierstrass en afgeleide). In Tarski & McKinsey (1948, noot 9) wordt gesteld dat zijn resultaten niet alleen slaan op de reële getallen, maar op elk elementair reëel gesloten lichaam. Vanwege de volledigheid van zijn theorie is het niet mogelijk dat er een model is, waarin zijn theorie wel, en een ander, waarin zijn theorie niet houdbaar zou zijn.

Hiertoe stelde Tarski een theorie op met een aantal begrippen, waarmee hij dergelijke zaken kon uitdrukken. Hij voerde in:

- ○ variabelen, die binnen de geïntendeerde modellen over reële getallen lopen
- ○ een verzameling algebraïsche constanten $\{1, 0, -1\}$
- ○ operaties $\{+, .\}$ en relaties $\{>, =\}$

Men heeft nu de theorie $\mathcal{R} = (R, \{+, .\}, \{>, =\}, \{1, -1, 0\})$. Men kan alles bekijken vanuit het perspectief der veeltermen, zeg de verzameling P. De gebruikte veeltermen zijn echter wel in één variabele per veelterm. Een uitbreiding naar meer variabelen valt wel in de theorie onder te brengen. Maar, bij meer variabelen per veelterm worden de procedures voor de quantoreliminartie wel veel omvangrijker. De door Tarski gehanteerde polynomen verschillen wel van het normale gebruik: $(1-1)x^2$ is een polynoom van graad 2. Op de veeltermen —waar nu ook afzonderlijke getallen toe behoren— kan men opnieuw allerlei operaties los laten: bijvoorbeeld voor $p_1, p_2 \in P$, dan ook $p_1 + p_2, p_1.p_2, (-1)p_1 \in P$. De afdeling logische constanten is die van de elementaire logica. In alle opzichten is er zorg voor gedragen dat het recursieve karakter van de formules niet geschonden wordt. Om op dit punt ellende te voorkomen zijn er voorzorgsmaatregelen getroffen: het is niet mogelijk om binnen Tarski's systeem de begrippen geheel (Padoa, Gödel) of rationaal (J. Robinson (1949*b*,*a*)) te formuleren, evenmin als periodieke functies of exponent met een vast grondtal. Het is

[135] Artin & Schreier (1927*a*), stelling 3.
[136] Artin & Schreier (1927*a*), stelling 3/3a.
[137] Artin & Schreier (1927*a*), steling2.

nu mogelijk komplexere —maar nog wel definitorische afhankelijke— operaties vast te leggen zoals reductum, afgeleide en signum: dus voor een $p_1 \in P$ heeft men dat reductum(p_1), afgeleide(p_1) $\in P$. Om een voorbeeld van een body trap te geven: bij toevoeging van sinus als primitief begrip heeft men de mogelijkheid hiermee met behulp van de al gegeven primitieve begrippen het begrip rationaal te formuleren, en vervalt men door het resultaat van J. Robinson tot onbeslisbaarheid ((x is rationaal) $:\leftrightarrow \exists x \exists y(x.y = z \wedge y \neq 0 \wedge sin(y) = 0 \wedge sin(z) = 0)$, Tarski & McKinsey (1948, p.45)).

Men heeft bij Tarski komplexe en afhankelijke operaties, die wel lijken op zekere gevaarlijke operaties, maar op een dergelijke manier geformuleerd zijn dat ze het net niet zijn. Door de inperkingen kunnen sommige voor de hand liggende operaties op veeltermen, zoals deling, niet worden uitgevoerd. D.m.v. omweggetjes is het mogelijk om iets te construeren, dat daar op lijkt. Nu komen na deze vorming van uit veeltermen bestaande termen de relaties$<, >, =$ op P in zicht: zij vormen binnen de theorie de atomen. Algemene begrippen kunnen op deze elementair logische wijze niet weergegeven worden. Begrippen, waarbij gebruik wordt gemaakt van verzamelingen, kunnen derhalve niet behandeld worden. Hieronder vallen het algemene begrip van polynoom of van geheel getal. In plaats van te spreken over 'elke veelterm heeft minsten een oplossing', moet men het hebben over 'elke veelterm van graad 1 heeft een oplossing', 'elke veelterm van graad 2 heeft een oplossing',.....etc. (dan is men overigens wel bezig met een logica met oneindig lange formules, en daar zitten ook de nodige haken en ogen aan). Op een vergelijkbare wijze zullen ook oneindigheid en continuïteit geformuleerd moeten worden. Het is echter wel de bedoeling om een elementaire algebra te geven binnen de reële getallen —reëel gesloten lichamen—, waarmee dienovereenkonstige stellingen, zoals de stelling van Sturm, vallen uit te drukken. Tenslotte kan worden opgemerkt dat lichamen —die karakteristiek 0 hebben, ofwel algebraïsch gesloten, of formeel reëel, of reëel gesloten—de aanzet geven tot theorieën, die voor alle gevallen stabiel onder elementaire equivalentie, dan axiomatiseerbaar, maar niet eindig axiomatiseerbaar zijn.[138]

Voor het verkrijgen van een beslissingsprocedure kan men van verschillende technieken gebruik maken.[139] Tarski gebruikte de methode van de eliminatie van quantoren. Of de eliminatie van quantoren opgaat —d.w.z. dat voor elk geval een beslissingsprocedure kan worden afgedwongen—, hangt o.a. af van de theorie onder het mes. De resultaten kunnen tegen vallen. In zoverre is het een minder systematische methode dan bijvoorbeeld modelvolledigheid.[140] Het is echter zo dat bij het aangeven van een echt 'constructief' uit te voeren beslissingsprocedure voor een gegeven formule, men weer op de quantoreliminatie moet terugvallen. Het lukte Tarski een soort simulator te bouwen binnen zijn taal voor de beoogde structuur. De gebruikte functies blijken primitief recursief te zijn.[141] Het is hem derhalve mogelijk alle zinnen uit te kleden en een uitspraak te doen over hun waarheidsgehalte. Het uitkleden resulteert in het bekijken van de al gememoreerde atomen van de vorm, waarin gesteld wordt dat de

[138] Jensen & Lenzing (1989).

[139] Zie Rabin (1977).

[140] Zie A.Robinson (1958). Ten onrechte schrijft J.D. Monk in Monk (1976) in het staatje op p. 234 aan Tarski & McKinsey (1948) de methode van modelvolledigheid toe.

[141] Tarski & McKinsey (1948, noot 4).

ene veelterm gelijk aan of groter dan een andere is. Bij het juist of onjuist zijn worden hier de vergelijkingen 0=0 of 0=1 toegevoegd.

De hier behandelde methode heeft betrekking op de theorie van een getallenlichaam. Hoe nu met meetkunden? Er zal worden ingegaan op de vanuit de absolute meetkunde aftakkende euklidische meetkunde. Het betreft aldaar een directe overgang van de binnen de theorie van die meetkunde gehanteerde begrippen naar die van de theorie van het getallenlichaam. Hiermee kan men ook projectieve en affiene meetkunden bedienen. In die gevallen zal het proces wel moeizamer verlopen.

4.3.2 Tarski en zijn meetkunde

Resultaten voor de beslisbaarheid voor euklidische meetkunde waren aanwezig in Tarski & McKinsey (1948) als nevenresultaten op zijn ‘elementary algebra’. Tarski’s methode bestond uit het formuleren van een meetkunde-eigenschappen) en van een getallenlichaam, waarbinnen die meetkunde gemetriseerd wordt. Tarski gebruikte een tweedimensionale euklidische geometrie —n-dimensionaal kan ook. Hiertoe voerde hij een geaxiomatiseerde theorie in, die uiteenvalt in logische en geometrische axioma’s. Binnen de geometrische axioma’s is er een groep primitieve begrippen. Daarnaast natuurlijk het gebruikte getallenlichaam. Buiten de logische constanten nam Tarski de relaties van ‘identiteit’, ‘liggen tussen’ en ‘gelijke afstand’ aan. Met deze noties en het logiche apparaat is het mogelijk een elermentaire geometrie uit te drukken, maar dan wel met de beperkingen juist vanwege de elementaire logica. In het geval van twee dimensies werkt men in een vlak. Aan elke variabele van het soort $x, y, z,$, etc. wordt vanwege de dimensionering een tweetal variabelen toegevoegd (de punten van het vlak), maar dan wel zodanig dat binnen de nu nieuwe theorie niet op onjuiste punten variabelen gaan samenvallen. Enkele voorbeelden. Laat τ de vertaling zijn. Dan krijgt men $x^\tau = (x_1, x_2)$. Elke quantor verkrijgt nu ook en verdubbeling $(\exists x)^\tau = \exists x_1 \exists x_2$. Nu nog moeten ‘identiteit’, ‘liggen tussen’ en ‘gelijke afstand’ omgezet worden d.m.v. formules, waar logische constanten, polynomen, en de relaties ‘=’ en ‘$<$’ gebruikt worden. Als illustratie waar dit toe kan leiden qua ingewikkeldheid, vooral naar het aantal variabelen—ook met het oog op Beths latere pogingen tot bewijsmechanisatie voor de meetkunde; het lijkt leuk, maar de werkelijkheid is weerbarstig:

◦ identiteit: $(x = y)^\tau = (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2)$

◦ gelijke afstand: (gelijkeafstand$(xy, zu))^\tau = (((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2) = ((z_1 - u_1)^2 + (z_2 - u_2)^2))$

◦ liggen tussen: (liggentussen$(x, y, z)^\tau = (((y_2 - x_2).(z_1 - y_1) = (z_2 - y_2).(y_1 - x_1)) \wedge (((x_1 - y_1).(y_1 - z_1) > 0) \vee ((x_1 - y_1).(y_1 - z_1) = 0)) \wedge (((x_2 - y_2).(y_2 - z_2) > 0) \vee ((x_2 - y_2).(y_2 - z_2) = 0)))$

Nu kan men de door Tarski geformuleerde axioma’s voor de elementaire geometrie om gaan zeten in hun elementair-algebraïsche spiegelbeelden.

Bij deze axioma’s hoort ook een continuïteitsaxioma. Met tweede orde logica geformulererd zou dit kunnen zijn :

◦ $[DC]\ \forall X \forall Y((\exists z \forall x \forall y((x \in X \wedge y \in Y) \rightarrow$ liggentussen$(z, x, y)) \rightarrow \exists z \forall x \forall y((x \in X \wedge y \in Y) \rightarrow$ liggentussen$(x, z, y)))$. Hierbij lopen X en Y over puntenverzamelingen, Y ligt boven X ligt onder.

Ook dit wenste Tarski m.b.v. eerste orde te formuleren. Hij is dan wel gedwongen een axiomaschema in te voeren en verliest op deze wijze zijn eindige axiomatiseerbaarheid. Zijn continuïteitsaxioma, dat alle bijzondere gevallen van Dedekind omvat, luidt:
∘ $[TSC]$ $\forall x_1 ... \forall x_n(\exists z \forall y_1 \forall y_2((A \wedge B) \to$ liggentussen$(z, y_1, y_2)) \to \exists z \forall y_1 \forall y_2((A \wedge B) \to$ liggentussen$(y_1, z, y_2))))$. Hierbij zijn z en y_2 niet vrij in de formule A, en zijn z en y_1 niet vrij in de formule B.
Met τ kan men TSC in TSC^τ omzetten. Dit is echter voor DC niet mogelijk. Het is echter zo dat binnen de elementaire logica geformuleerde axioma's, die aan het axiomaschema voldoen, met elkaar voor continuïteit niet volledig het eerder door Tarski bekeken axioma, waarin over verzamelingen gequantificeerd wordt, kunnen vervangen. Dit vanwege de stelling dat een oneindige structuur niet tot op isomorfie te karakteriseren valt door een verzameling axioma's van eerste orde.[142] Er is dus sprake van twee soorten continuïteit: een zwakkere en een sterkere vorm.[143]

4.3.3 Beth en Heyting: Tarski's meetkunde en intuïtionisme

Vanwege het niet aanhouden van het klassieke continuum verwijderde Heyting een deel van de projectieve meetkunde. Was dit nodig? De dissertatie Beth (1935) zette zich hierin af tegen de dissertatie Heyting (1925): [144]

'Door A. Heyting is een opbouw van de intuïtionistische projectieve meetkunde gegeven, waarbij zekere klassieke resultaten hun geldigheid verliezen; het is evenwel mogelijk, een intuïtionistische opbouw te geven, zoowel van de elementaire Euclidische meetkunde van passer en lineaal, als van de algebraïsche meetkunde, zonder een overeenkomstig verlies'

Overigens zou Beth in zijn latere leven zich er niet meer zo om bekommeren, wanneer delen uit de meetkunde verwijderd moesten worden vanwege een of andere elementairogische formalisatie, gezien zijn: [145]

Pour la géométrie élémentaire se montre tout à fait adéquate. Tarski a montré que la quasi-totale de la géométrie élémentaire peut être formalisé en logique élémentaire; il n'y a que très peu de théorèmes —par exemple. Les théorèmes concernant la mesure du cercle— qui n'entrent pas dans ce schéma'

In de vroege jaren vijftig was er sprake van een heruitgave van Tarski & McKinsey (1948).[146] In verband hiermee vroeg Tarski aan Beth gegevens over door Beth gepleegde verwijzingen naar een in Beth (1935) mogelijk aanwezig resultaat over met dit onderwerp samenhangende denkbeelden. Die resultaten zouden misschien met die van hemzelf gerelateerd kunnen worden. Volgens Tarski lagen de prioriteiten overigens al vast, daar hij reeds in een vroeger stadium publcaties op zijn naam had staan over dit onderwerp, waaronder Tarski (1931), dat als een voorloper van Tarski & McKinsey (1948) beschouwd kon worden. Beth droeg op Tarski's brief van 22 januari 1951 per

[142] Schwabhäuser et al. (1983, pp.199-200).
[143] Schwabhäuser et al. (1983, pp.202-203).
[144] Beth (1935), stelling XII.
[145] Beth (1953*c*)??
[146] Brief A. Tarski - Beth, 15 juni 1951 (poststempel),. Berkeley.

kerende post zijn stelling XII uit Beth (1935) aan.[147] De vraag was hoe deze stelling XII zich verhield tot het werk van Tarski, en in hoeverre dit ook nog in overeenstemming te brengen was met Heyting (1925). Beth beweerde dat met basering op noot 13 van Tarski & McKinsey (1948) intuïtionistisch toch het een en ander kanworden behouden, indien men afstapt van de reële getallen als passend getallenlichaam, en ze vervangt door de inperking van de algebraïsche reële getallen. Men moet dan wel aantonen dat met de toevoeging van het nieuwe predicaat 'algebraïsch' de theorie beslisbaar blijft. De volgende vraag is naar de relatie van de dan ontstane toestand tot de door Heyting opgevoerde theorie.

In noot 21 van Tarski & McKinsey (1948) wordt gevraagd naar uitbreidingen van de aldaar gehanteerde theorie, die inperkingen op de resulterende getallenlichamen inhouden. Deze uitbreidingen van de in de theorie neergelegde voorwaarden leveren dan de algebraïsche en de construeerbare getallen.
Ter verduidelijking: een (geheel) *algebraïsch getal* is een (complex, reëel) getal, dat de wortel is van een veelterm met (gehele) rationale coëfficiënten. Of wat ruimer geformuleerd: een element van een lichaam L is algebraïsch over een deellichaam L_0 van dat lichaam L, wanneer dat element uit L een wortel is van een veelterm ongelijk 0 met coëfficiënten in het deellichaam L_0. Zij zijn dus gerelateerd aan een rationaal getallenlichaam. De som, het verschil, het product van en de deling tussen twee (gehele) algebraïsche getallen is weer een (geheel) algebraïsch getal. De verzameling van de algebraïsche getallen vormt een lichaam, en de wortel van een veelterm met algebraïsche coëfficiënten is een algebraïsch getal.

Met *rationale operaties* worden bedoeld som, product, verschil, deling. Met *construeerbare getallen* bedoelt Tarski de getallen, die vanuit het getal 1 alleen door middel van rationale operaties samen met tweedemachtsworteltrekking verkrijgbaar zijn. Vergelijk voor de relatie 'construeerbaar' het begrip $C(x, y, z)$, met $C(x, y, z)$ equivalent aan 'z kan uit x en y alleen door passer en lineaal geconstrueerd worden' —er zijn hier wel haken en ogen aan.[148] Indien men voor deze uitgebreide theorie een beslissingsprocedure zou kunnen verkrijgen, kan men beslissen of de geldigheid van een bewering alleen door elementaire constructies —door lineaal en passer— verkregen kan worden. Verder wil men graag, wanneer algebraïsch reële en construeerbare getallen ter sprake komen, weten of men over een beslissingsprocedure beschikt. De theorieën mogen dan een inperking inhouden, de formulering vraagt om een uitbreiding van de vertrektheorie, en deze uitbreiding is niet elementair in die zin, dat er alleen constanten —of een afhankelijk begrip— toegevoegd worden. Het is derhalve maar de vraag of deze uitbreidingen wel beslisbaar zijn. Dat dit niet voor de hand liggend is, laat het de vraag betreffende 'algebraïsch' positief beantwoordende A. Robinson (1959) zien. Hierdoor kan ook verklaard worden dat Tarski voorzichtig was, toen hij in 1951 (??) over dergelijke uitbreidingen sprak. A. Robinson gebruikte in zijn artikel bij zijn bewijs voor volledigheid en beslisbaarheid de methode van modelvolledigheid, en niet de quantoreliminatie zoals Tarski. Wel laat A. Robinson zien dat in dit speciale geval ook van de quantoreliminatie gebruik had kunnen worden gemaakt.

Noot 13 van Tarski & McKinsey (1948) gaat dieper in op de mogelijkheid om

[147]Brief Beth - A. Tarski, 28 januari 1951.
[148]Zie Supplement.

meetkundige verschijnselen te laten corresponderen met verschijnselen binnen een n-dimensionale analytische ruimte met reële coördinaten. Dit geeft dan wel i.p.v. veeltermen met 1 variabele, waar de bewijzen van Tarski & McKinsey (1948) op gebaseerd zijn, nu veeltermen met n variabelen. De voorafgaande noot 12 leert echter dat dit niet bezwaarlijk hoeft te zijn. In noot 13 bekijkt Tarski ook de notie van arithmetische —elementaire— definieerbaarheid. Een formule met één vrije variabele correspondeert dan met een verzameling reële getallen, die de formule vervullen —het is ook mogelijk tot n-plaatsige relaties over te gaan. Tarski concludeert in de noot dat een reëel getal —d.w.z. een verzameling bestaande uit één element— arithmetisch is alleen dan als het algebraïsch is. Resumerend heeft men dus: uit construeerbaar verkrijgt men algebraïsch —m.b.v. de ook intuïtionisch (Weyl in 1924, en Brouwer en de Loor in 1924)[149] aanvaardbare hoofdstelling van de algebra (Gauss)—; het omgekeerde is echter niet altijd het geval (Abel in 1828).

Nogmaals, volgens Beth komt de discrepantie tussen de klassieke meetkunde en de intuïtionistische tegenhanger voort uit het feit dat men bij de klassieke meetkunde de reële getallen als het getallenlichaam gebruikt. De intuïtionisten beknibbelen op de reële getallen en derhalve ook op de theorieën, die daar gebruik van maken. Zo kan men bijvoorbeeld niet beweren 'Er is een x zodanig dat $ax+b=0$ alleen dan wanneer $a \neq 0$ of $b=0$' [K1]. Het niet kunnen hanteren van [K1] geeft volgens Beh de afwijking van Heyting tot de klassieke meetkunde. Beth wil nu i.p.v. de reële getallen de algebraïsche reële getallen nemen. Hiermee vangt men twee vliegen in één klap. Binnen de reële getallen niet geldige regels zijn nu wel geldig, en men heeft binnen het intuïtionistische raamwerk de elementaire meetkunde weer terug. Uitgezonderd sterke volledigheid kan men nu een model contrueren dat intuïtionistisch Hilberts meetkundige axioma's en de klassieke gevolgtrekkingen daaruit vervult.[150]

In Beth (1950*b*) wordt opgemerkt dat het resultaat in Tarski & McKinsey (1948) niet zonder meer intuïtionistisch geldig is. Echter wel, indien de reële getallen door algebraïsche reëlen worden vervangen. Over het beslissingsprobleem zoals opgelost door Tarski (1939); Tarski & McKinsey (1948) zegt Beth (1950*b*, p. 49):

'Tarski heeft een methode gevonden, die toestaat, voor een gegeven meetkundige bewering X, uit te maken of ze al dan niet een stelling is van de parabolische meetkunde. Deze methode is van het intuïtionistische gezichtspunt van Brouwer aanvaardbaar als men (V_2) vervangt door de eis, dat het systeem der relatieven segmenten isomorph is met het systeem der reële algebraïsche getallen; voor dit geval is de door Tarski bewezen stelling eveneens uitgesproken [maar niet bewezen!] door Beth (1935). Vermeld dient te worden dat Tarski's resultaat zich niet uitstrekt tot de gevolgtrekkingen uit de axioma's van groep V, die de continuïteitseigenschappen van de euclidische ruimte vastleggen'

Met groep V wordt hier geduid op Hilberts axiomagroep V_1, V_2 (de continuïteitsaxioma's).

Beth vond dat men het bovenstaande kon verkrijgen uit Tarski & McKinsey (1948). Bovendien meende hij dat Tarski & McKinsey (1948) in dit opzicht relevantie vertoont met betrekking tot een resultaat van Brouwer betreffende de intuïtionistische

[149] In de dissertatie de Loor (1925), hoofdstuk 6.
[150] Hilbert (1899), i.h.b. Die Axiomgruppe V: Axiome der Stetigkeit.

inconsistentie van de elementaire meetkunde —er kan niet een model bestaan dat intuïtionistisch Hilberts axioma's en hun klassieke gevolgen vervult. Waarschijnlijk duidde Beth hiermee op Brouwer (1949*a*), dat ten dele voortbouwde op Brouwer (1949*b*). Brouwer (1949*a*) laat zien dat de equivalentie tussen zekere orderelaties op het continuum constructief niet houdbaar is, ja zelfs contradictie veroorzaakt. Hierna construeert Brouwer (1949*b*) deze equivalentie uit de aanname van de snijpuntstelling van de euklidische planimetrie —voor elk tweetal lijnen van het euklidische vlak, die niet samenvallen en ook niet evenwijdig zijn, kan een gemeenschappelijk punt worden aangewezen. Hier uit volgt dat deze stelling, en dus ook de deze stelling voortbrengende theorie, binnen de kontekst van Brouwer niet houdbaar is; zij het dat ook Brouwer zelf zijn bewijs nogal ver gezocht vond. Ook de projectieve meetkunde wordt door middel van een aanval op de snijpuntstelling aangepakt en zal ook daar en contradictie opleveren —voor elk tweetal lijnen van het projectieve vlak, die niet kunnen samenvallen, is er een gemeenschappelijk punt.[151]

Tarski meende uit Beths opmerkingen te kunnen opmaken dat Beth onderscheidde: [152]

1. Een projectieve meetkunde M_1.
2. Een algebraïsche meetkunde M_2 —deze valt te interpreteren als een meetkunde, waarin alle punten algebraïsche coördinaten hebben.
3. Een euklidische meetkunde van passer en lineaal M_3 —hierin zijn alle punten construeerbare coördinaten, d.w.z. dat de coördinaten van de numerieke waarden worden verkregen d.m.v. rationale operaties en worteltrekking

Er zijn nu volgens Tarski een tweetal eigenschappen —en hun ontkenningen—, die aan deze meetkunde toe kunnen komen.

∘ Eigenschap P: er is een intuïtionistische opbouw zonder verlies van geldigheid van klassieke resultaten.

∘ Eigenschap Q: beslisbaarheid en consistentie kunnen op een constructieve wijze bewezen worden.

In een staatje zijn ze tegen elkaar uit te zetten:

	eigenschap:	P	niet P	Q	niet Q
meetkunde:					
M_1		-	+	+	-
M_2		+	-	-	-
M_3		+	-	-?	+?

[($\mathcal{M}_{\ni}$,niet$Q$=+?, d.m.v. R.M. Robinson??]

Hieruit valt volgens Tarski af te lezen dat er geen samenhang bestaat tussen de eigenschappen P en Q.

Beth ging er nu toe over om te kijken in hoeverre de resulaten van Tarski en hemzelf samenhingen.[153] Hiertoe voerde hij twee principes in, namelijk [T] —waaruit Tarski's resultaten afleidbaar zijn . En [B] —waaruit de resultaten van Beth vallen af te leiden.

[151] In Brouwer (1951) worden definities gegeven voor de orderelaties in Brouwer (1949*a*,*b*). Voor commentaren van de kant van Heyting op Brouwer (1949*a*,*b*, 1951), zie Brouwer (1975).

[152] Brief A. Tarski - Beth, 2 mei 1951, Berkeley.

[153] Brief Beth - A. Tarski, 8 mei 1951.

∘ Principe [T]: voor elke uitdrukking $A(x)$ van de elementaire —tarskiaanse— algebra is er een uitdrukking C zodanig dat $\exists x A(x)$ equivalent aan C is.
∘ Principe [B]: als voor over reële getallen lopende variabelen de uitdrukking $\exists x A(x)$ klassiek/intuïtionistisch equivalent aan C is, dan heeft men voor variabelen over algebraïsche getallen dat $\exists x A(x)$ intuïtionistisch equivalent aan C is.

Volgens Beth zijn [T] en [B] te onderbouwen door middel van noot 13 uit Tarski & McKinsey (1948). Principe [B] is echter niet van een beslissingsprocedure afhankelijk. Dus is ¡¡R.M. Robinson??¿¿ uit Tarski's brief van 2 mei 1951, zoals in het staatje vermeld, volgens Beth niet voor hemzelf relevant. Uit principe [B] volgt volgens Beth wel dat, als er een beslissingsprocedure is voor klassieke geldigheid van de elementaire algebra van de reële getallen, er dan ook een beslissingsprocedure is —namelijk dezelfde— voor de intuïtionistische geldigheid van de elementaire algebra van de algebraïsche getallen. Tarski bleef er evenwel bedenkingen tegen koesteren dat uit noot 13 van Tarski & McKinsey (1948) zowel principe [B] alsook principe [T] afleidbaar zouden zijn.[154] Dan immers zou volgens deze algemene principes de meetkunde van passer en lineaal —en Tarski bedoelt hiermee de meetkunde M_3 van de construeerbare getallen— afleidbaar moeten zijn uit noot 13 van Tarski & McKinsey (1948). Maar dat gaat volgens Tarski niet op!

Tarski koesterde de ijdele hoop dat Beth, gezien zijn voorstellen en beweringen, over bewijzen zou beschikken, die de zijne —namelijk de toepasbaarheid van noot 13 in Tarski & McKinsey (1948) op de klassieke Euklidische meetkunde—, die nogal ingewikkeld zijn, zouden kunenn vervangen. Hiermee zouden dan misschien ook nog eens de beslissingsmethoden voor de elementaire algebra en meetkunde kunnen worden verbeterd. Uit Beths brief van 21 juni 1951 blijkt echter dat Beth niet over de relevante bewijzen beschikte. Beth bracht in dat indertijd —vóór de oorlog— hij hier niet aan toe gekomen was, wat onder andere te danken was aan de te weinig hiertoe stimulerende omgeving waarin hij indertijd verkeerde. Verder bedoelde Beth met de meetkunde van passer en lineaal niet de meetkunde van de construeerbare getallen, maar de middelbare-school meetkunde, waaraan wegens Heytings toedoen binnen de contructieve beschouwingswijze een aantal stellingen ontviel —hetgeen Beth wilde herstellen. Beth meende tenslotte dat het bij Tarski nodig was het resultaat van de eliminatie —het wegsnijden in de klassieke reële getallen door extra op te leggen condities zoals 'is algebraïsch'— expliciet te maken. Bij Beth zelf zou het voldoende zijn om te laten zien dat de eliminatie uitgevoerd kan worden. Verder doen zich intuïtionistisch geen moeilijkheden voor, als men van het algebraïsche systeem uitgaat. Door het voorafgaande kan men volgens Beth zijn resultaat zien als een direct corrolarium van Tarski's methode. Echter niet alles van Tarski is volgens Beth bij hemzelf van node. Bij hemzelf is het zo dat, als een eliminatie in de klassieke reële getallen uitgevoerd kan worden, dit ook intuïtionistisch mogelijk is —als men zich tot de algebraïsche getallen beperkt. Tarski daarentegen benodigt het resultaat van deze eliminatie.[155]

Volgens Heyting (1952), in een recensie op Beth (1950*b*) is echter Tarski's resultaat, ook zonder Beths extra condities, wel intuïtionistisch aanvaardbaar:

[154] Brief A. Tarski - Beth, 15 juni 1951 (poststempel), Berkeley.
[155] Zie ook Beth (1950*a*), hoofdstuk 'Algèbre et géométrie intuitionistes' of de heruitgave uit 1955, pp. 165-196.

De bewering [in Beth (1950*b*)] over de decisiemethode van Tarski is niet geheel juist. Tarski's resultaat is ook intuïtionistisch aanvaardbaar; het heeft dan ook geen betrekking op de meetkunde met het volledige continuïteitsaxioma.'

Al eerder is het gebruik door Tarski van een afgezwakte vorm van Dedekinds continuiteitsaxioma in de vorm van een axiomaschema TSC ter sprake gekomen.

Beth was het evenwel niet met Heyting eens.[156] Tarski's methode heeft volgens Beth betrekking op de elementair-logisch verwoordbare meetkunde. Voor deze meetkunde bestaan klassiek twee niet-isomorfe modellen —zelfs oneindig veel—, en wel: een volledig model, zeg M, en een onvolledig model, zeg N —alleen reële algebraïsche getallen. Voor M gaat de decisiemethode van Tarski intuïtionistisch niet, maar voor N intuïtionistisch wel op. Heyting[157] was van mening dat men de stellingengen uit de elementaire algebra bewijstheoretisch of semantisch kan beslissen. Hij gaf toe dat de reële getallen intuïtionistisch geen model kunnen opleveren vanwege het daarin voorkomende principe van uitgesloten derde. Maar Tarski laat volgens Heyting echter het bepalen van de modellen in het midden en derhalve kan Tarski intuïtionistisch gezien niets verweten worden.

4.3.4 Beth, Tarski en projectieve meetkunde

Wij zijn nu zover dat er een wat meer geformaliseerde kjik op de projectieve meetkunde kan worden aangeboden. Hiermee kan dan iets gemakklijker het begrip deelruimte en tralie worden ingevoerd. Men kan zich dus op velerlei wijzen bezighouden met meetkunden of met bepaalde deelaspecten van een meetkunde. Men kan dit meer of minder abstract doen.

Met een meetkunde $\mathcal{G} = (A, F)$ wordt bedoeld een puntenverzameling A en een functie F van de machtsverzameling van A naar zichzelf. Sommige van de deelverzamelingen van A worden wel deelruimten —FX, met $X \subseteq A$— genoemd van $\mathcal{G}$. Als $Y = FX$, dan wordt Y door X opgespannen —in dit geval heet Y van dimensie n als X is een verzameling van n+1 elementen, en er geen verzameling van minder dan n+1 een opspanner van Y is. Men heeft nu voor X in de machtsverzameling van A dat $X \subseteq FX$, en als $X \subseteq Y$ dan $FX \subseteq FY$. Vervolgens dat $FFX = FX$ [als $FX = X$, dan heet X gesloten????????????] $F\emptyset = \emptyset$, $F(\{x\}) = \{x\}$ voor $X \in A$. Als $x \in F(X \cup \{y\}$ en $X \notin FX$, dan $Y \in F(X \cup \{x\})$. Als $x \in FX$, dan $x \in FX^*$ voor een eindige X^* met $X^* \subseteq X$. Om een indruk te geven van het heen en weer gaan tussen tralies en meetkunbden zal van dit geval uitgegaan worden .

Bij een projectieve meetkunde kan men in de eerste instantie zeggen dat elk tweetal lijnen (voor het voorafgaande geval één-dimensionale deelruimten van $\mathcal{G}$) in eenzelfde vlak (een tweedimen sionale deelruimte van $\mathcal{G}$ een punt gemeen hebben. De lijn, die door de snijpunten (oneigenlijke punten) van evenwijdige lijnen loopt wordt ook wel oneigenlijke lijn genoemd. Een deelruimte is een verzameling punten z.d.d. deze verzameling elke lijn omvat, waarmee deze verzameling twee punten gemeenschappelijk heeft. Met een projectieve ruimte $\mathcal{P}$ wordt een tweetal $(A, L) = \mathcal{P}$ bedoeld, waarbij

[156]Brief Beth - A. Heyting, 14 september 1951.
[157]Brief A. Heyting - Beth, 14 september 1951, Epe.

A een verzameling (punten) en L (de lijnen) uit een aantal deelverrzamelingen van A bestaat. Er moet dan gelden dat

1. elke lijn minsten twee punten telt
2. voor elk vijftal punten $p_1, ..., p_5$ en tweetal lijnen l_1, l_2 —met p_1, p_2, p_4 op l_1, en p_2, p_3, p_5 op l_2— er een punt $Q \in A$ en lijnen $l_3, l_4 \in L$ bestaan

Er is bovendien een 1-1 correspondentie tussen projectieve ruimten en projectieve meetkunden. Lineaire deelruimten van de projectieve ruimten corresponderen dan met de deelruimten van de projectieve meetkunden.

Men kan hierbij de resultaten van Tarski weer gaan aanhalen. Er schuilen wel enkele addertjes onder het gras. Men zal zich met de algebraïsch gesloten en de reëel gesloten lichamen tevreden moeten stellen. Bij de rekenkunde van de gehelen en de rationalen gaat men al over de schreef. Zo laat Tarski & McKinsey (1948) naar aanleiding van J. Robinson (1949*b*) zien dat bij de keuze vam homogene rationale coördinaten tezamen met de operaties '+' en '.''de theorieën van de modulaire tralies, de modulaire tralies met complement en de abstracte projectieve meetkunden onbeslisbaar zijn.[158]

4.4 Beth: meetkunde en bewijsmechanisatie

4.4.1 Beth: meetkunde, formalisme en inzicht

Mannoury (1934) maakte onderscheid tussen keuze- en uitsluitingsnegatie, die uitgebreid behandeld is onder het hoofdstuk over beijstheorie, logica en interpretatie. Volgens Beth (1950*b*, pp.107-108) was dit een belangrijke bijdrage :

'Volgens Mannoury vooronderstelt in het bijzonder het *oneindigheidsbegrip* de uitsluitingsnegatie. Dit begrip is dientengevolge niet voor een adequate positieve interpretatie vatbaar en is derhalve ook voor de aanschouwing niet toegankelijk. De in de meetkunde toegepaste limietovergangen houden echter een beroep in op het oneindigheidsbegrip en daarmee op de uitsluitingsnegatie; zij bezitten derhalve geen adequaat aanschouwelijk correlaat. Dit is een rechtvaardiging van de in hoofdstuk 1 [van Beth (1950*b*)] besproken opvatting van Klein en Burkhardt. De door Mannoury gemaakte onderscheiding van keuzenegatie en uitsluitingsnegatie is van belang voor de beoordeling van de vraag naar de verhouding van de euclidische en de niet-euclidische meetkunden tot het aanschouwelijk ruimte-inzicht. Ook het evenwijdigheidsbegrip bevat namelijkde uitsluitingsnegatie en bezit dus geen adequaat aanschouwelijk correlaat. [...] de gehele probleemstelling van Saccheri, Lobatschewsky, Bolyai, Riemann, ging buiten de aanschouwelijkheid van de meetkunde om.'

Beth (1950*b*, 108) concludeert dan:

' Slechts een deel van de meetkunde heeft een adequaat aanschouwelijk correlaat; dit deel is zowel in de meetkunde van Euclides als in die van Lobatschewsky en van Riemann bevat: het behoort dus tot de absolute meetkunde. Van deze aanschouwelijke meetkunde kunnen we naar de stelsels van Euclides, van Lobatschewsky, van Riemann,

[158] Tarski (1949), Jónsson (1959) en Grätzer (1978).

overgaan door een beroep te doen op beginselen die de uitsluitingsnegatie veronderstellen en dus niet vatbaar zijn voor een adequaat aanschouwelijk correlaat.' Pasch wordt in dit verband niet door Beth genoemd. Juist Pasch ging voorzichtig met oneindigheid om en probeerde vanuit een zo realistisch-aanschouwelijk mogelijk vetrekpunt te werken. Uiteindelijk heeft ook hij veren moeten laten bij het ontwikkelen van de projectieve meetkunde.

4.4.2 Beth en Tarski in de grondbegrippen

De belangstelling voor de grondbegrippen van de meetkunde was voor Beth om diverse redenen niet zo vreemd. Beth was hierin geïnteresseerd als uitvloeisel van zijn belangstelling voor definitietheorie. Daarnaast zullen ook louter meetkundige redenen een rol hebben gespeeld. Tenslotte had hij er in later tijd, tijdens zijn werken aan bewijsmechanisatie, ook wat aan doordat hij met deze kennis kon schuiven met stukken uit de meetkunde, en dit ook kon doen met en zo klein mogelijk begrippenapparaat —hetgeen ook niet zo slecht is bij een mechanisatie. Voor mechanisatie is ook het minderen van de plaatsigheid van een dergelijk begrip van belang. Eeuwenlang had de meetkunde al in de belangstelling gestaan, dus geheel nieuw zal dit spelen met het begrippenapparaat ook niet zijn geweest. Voor dit geval zullen wij niet verder teruggaan dan M. Pieri. Ook Pieri werd gerekend tot de school van Peano.[159] In Pieri (1908) wordt gekeken in hoeverre het begrippenapparaat van de meetkunde te reduceren valt tot een geringer aantal niet gedefinieerde begrippen. Dit lukte hem met naar hem vernoemde de Pierische relatie I, met $I(x, y, z)$ equivalent met $(xy = xz)$, waarbij x, y, z punten, en xy een lijn stuk: dus gelijkbenigheid. Deze relatie is echter niet symmetrisch in alle termen, want $I(x, y, z)$ equivalent aan $I(y, x, z)$ gaat niet in het algemeen op, maar wel in de tweede en derde term. Verder gebruikte Pieri de notie 'liggen tussen'. Voor de dimensie $n = 1$ in de Euklidische ruimte zit er overigens een adder onder het gras. Lindenbaum heeft in zijn deel van Lindenbaum & Tarski (1926) laten zien dat voor een dergelijk geval de relatie I niet de enige primitieve notie kan zijn.[160]

Is het na die tijd gelukt de plaatsigheid van de grondbegrippen nog meer te beperken dan de drie door Pieri aangevoerde variabelen, misschien tot één wellicht? Zijn de eigenschappen van de relaties fraaier geworden? Worden ze nu gekenmerkt door symmetrie, transitiviteit en reflectie in alle variabelen? Gaan de ingevoerde begrippen per begrip nu op voor alle dimensies en elke meetkunde? Kunnen deze begrippen ook gedefinieerd worden door Pieri's I-relatie? En, als er sprake is van meerdere begrippen per theorie, welke vormen dan de basis? Voor een antwoord op dergelijke vragen heeft men werk van Scott, Beth en Tarski.[161]

1. In Scott (1956) wordt een begrip $S = S(x, y, z)$ ontwikkeld, dat symmetrisch in alle termen is. Dit begrip S duidt op en rechte hoek tussen een willekeurig tweetal punten uit het voornoemde drietal x, y, z, d.w.z. $xy \perp xz$ of $yz \perp yx$ of $zx \perp zu$.

[159] Pieri heeft enige tijd aan de universiteit van Turijn gewerkt, waar Peano hoogleraar was, en ook aan de militaire academie aldaar.

[160] Zie verder de supplementen onder 'Lindenbaum en dimensies'.

[161] Alle artikelen staan in eenzelfde aflevering van Indagationes Mathematicae. Tarski (1956) fungeert als afsluiting.

2. In Beth & Tarski (1956) wordt $E = E(x, y, z)$ als de enige primitieve notie aangenomen. Ook de notie E is symmetrisch, en wel als volgt: $E(x, y, z)$ equivalent aan $(I(x, y, z)$ en $I(y, x, z))$ —d.w.z. $xy = xz = yz$, dus nu een gelijkzijdige driehoek—, of het triviale geval, waarbij $x = y = z$ én I is weer Pieri's relatie.

3. In Tarski (1956) wordt een relatie $J = J(x, y, z)$ ingevoerd, met $J(x, y, z)$ equivalent aan $xy \leq xz$. Hierdoor blijken interdefinieerbaar te zijn: $I(x, y, z)$ equivalent $(J(x, y, z)$ en $J(x, z, y))$ en $B(x, y, z)$ equivalent $(J(x, y, z)$ en $J(z, y, x))$. In Beth & Tarski (1956) wordt opgemerkt dat relatief Pieri's notie I de relatie J symmetrisch is in de tweede en derde term en relatie B in de eerste en derde term.

Nu over naar de dimensies, waarin de grondbegrippen al dan niet gelden. Het is natuurlijk werk besparend om te laten zien dat de nieuw bedachte begrippen zo aan de Pierische I gerelateerd kunnen worden dat allerlei resultaten van Pieri overgenomen kunnen worden. Men kan laten zien dat de relatie I d.m.v. S gedefinieerd kan worden en ten tweede dat dit een uitdrukking(en) oplevert, waarin van equivalentie sprake is zodat men het resultaat van Pieri kan gebruiken —zij het dat dimensie 1 moeilijkheden zal blijven opleveren. Om dit te bereiken voert Scott een aantal hulpbegrippen in en kiest hij voor recht toe recht aan interpretatie door het nemen van een n-dimensionale euklidische vectorruimte; dit in tegenstelling tot hetgeen waar Beth en Tarskli hun toevlucht zullen nemen.[162] Met de hulpbegrippen laat Scott dan voor $\mathcal{E}$ met dim≥ 3 en afzonderlijk voor $\mathcal{E}$ met dim=2 zien dat m.b.v. de Pierische I zijn relatie S als een primitief begrip genomen kan worden. Beth en Tarski laten zien dat het voor $\mathcal{E}$ met dim≥ 3 mogelijk is de notie I d.m.v. de relatie E te definieren.[163] Voor $\mathcal{E}$ met dim=$1, 2$ levert dit moeilijkheden op. Voor dimensies 1 en 2 kan de relatie E niet het enige begrip zijn.[164] Voor $\mathcal{E}$ met dim=2 wordt hiertoe gebruik gemaakt van de methode van Padoa naar Beth (1953*b*) en het keuze-axioma.

Beth & Tarski (1956) laten zien dat voor een 1-1 transformatie T van het euklidische vlak op het euklidische vlak de relatie E invariant blijft en de relatie I —die wel als enig begrip valt te hanteren— niet (dit is een toepasing van Padoa). Hiertoe worden de complexen te hulp geroepen. In het onderhavige 2-dimensionale geval wordt $x = (x_1, x_2)$ afgebeeld op $x_1 + x_2 i$, met x_1, x_2 reëel. De transformatie T verwordt nu tot een tranformatie op de complexe getallen. Men moet dan laten zien dat T de relatie E in zijn waarde laat voor alle drietallen, maar dat er minstens één drietal is waarbij dit niet voor de Pierische relatie I opgaat. Dus voor alle x, y en z is $E(x, y, z)$ equivalent aan $E(Tx, Ty, Tz)$ en zijn er x_0, y_0 en z_0, met $I(x_0, y_0, z_0)$ niet equivalent aan $I(Tx_0, Ty_0, Tz_0)$. Hiertoe wordt een eigenaardige verzameling binnen de complexe getallen geconstrueerd, waarbij gebruik wordt gemaakt van het keuze-axioma. De vraag is of men ook zonder keuze-axioma kan aantonen dat de relatie E voor $\mathcal{E}$ met dim$= 2$ niet het enige begrip vormt. Het gebruik van het keuze-axioma valt te vermijden volgens noot 4 van Beth & Tarski (1956). Men zal dan wel ergens anders een veer moeten laten, bijvoorbeeld door het verwijderen van axioma's, die verzamelingstheo-

[162] Zie de supplementen onder Scott.
[163] Beth & Tarski (1956), stelling1. p. 463.
[164] Beth & Tarski (1956), stelling 2

retische begrippen oproepen en die derhalve uitstijgen boven elementaire logica.[165] In noot 4 wordt er verder op gewezen dat het gebruik van het keuze-axioma veroorzaakt wordt door de semantische constructie van het bewijs. Bij een louter syntatctische aanpak zou men er slechts toe moeten overgaan tot het aannemen van de relatieve consistentie van het keuze-axioma.

Voor het begrip J blijkt het dat als de begrippenverzameling$\{B, I\}$ een basis vormt, dat dan ook $\{J\}$ dit doet, en alle relaties, die met de ene groep begrippen uitwisselbaar zijn, dat ook zijn met J. De volgende stap is dat als een begrip N binnen een theorie definieerbaar is door de begrippen $N_1 \dots N_m$, er in het geval van een 1-1 transformatie T van die theorie op zichzelf, het begrip N invariant blijft, wanneer $N_1 \dots N_m$ dat ook blijven. Hiernaast kan men laten zien dat J invariant blijft onder elke gelijkvormigheidstransformatie T, waarbij $D(TX, TY) = r.d(X, Y)$ (d voor distance, de constante r reëel positief). En als men een 1-1 transformatie T heeft, waaronder T invariant blijft, dat dan T een gelijkvormigheidstransformatie is. Verder zal Tarski hieruit laten zien dat voor elk basisbegrip R de verzameling van alle 1-1 transformaties, waaronder R invariant is, samenvalt met de verzameling van alle gelijkvormigheidstransformaties — als R door J samengesteld is. verder zal er aan een machtigheidseis, en wel het oproepen van het continuum, voldaan moeten worden.[166]
In Tarski (1956) wordt de balans opgemaakt:

	dimensie: 1	2	3	4
relatie:				
I	-	+	+	+ ...
E	-	-	+	+ ...
S	-	+	+	+ ...

Hierbij is het geval $(I, 1) = -$ door Lindenbaum bedacht, $(E, 2) = -$ door de gezamenlijke inspanning van Beth en Tarski verkregen en vanwege de uitwisselbaarheid met I heeft men tenslotte $(E, 1) = (S, 1) = -$.

Men kan zich verder afvragen of ook buiten $\mathcal{E}$ met dim≥ 2 de relatie E opgeld doet. Dit is niet het geval voor de absolute meetkunde volgens Schwabhäuser et al. (1983).[167] Zij laten ook zien dat men de relatie E niet binnen de hyperbolische meetkunde kan handhaven. Dit heeft tot gevolg dat dit dan ook niet mogelijk is voor de absolute meetkunde, daar deze laatste de onderling niet strijdbare punten van de euklidische, hyperbolische en elliptische meetkunden verenigt. ??????????

Tarski (1959) zal tenslotte met de begrippen $B(x, y, z)$ (liggen tussen) en $D(x, y, z, u)$ (afstand xy = afstand zu) komen in een elementair geformuleerde meetkunde, die niet eindig axiomatiseerbaar blijkt te zijn . Tarski geeft aan dat de modellen van deze meetkunde isomorf moeten zijn aan de tweedimensionale cartesiaanse ruimte over een reëel gesloten lichaam. Het axiomaschema —d.w.z.een verzameling zinnen, die direct als axioma's herkenbaar zijn—, dat voor de continuïteit zorgt, heeft betrekking op de reële getallen, de rest op het geordende lichaam. Toegevoegd zijn ook dimensie-axioma's. Voor de hier besproken meetkunde zal een volledigheid en beslisbaarheid aan te geven zijn. Echter de begrippen 'willekeurige veelhoek', 'omtrek van een cirkel' en

[165] Zie hiertoe ook de discussie in Tarski (1956).
[166] Zie de supplementen.
[167] Schwabhäuser et al. (1983), p. 297, Anmerkung 4.53.

'oppervlak van een cirkel' zijn niet uitrdukbaar. Daartoe moet men verzamelingen introduceren en heeft men de meetkunde een uitbreiding gegeven. Deze uitbreiding is onbeslisbaar. Dit komt doordat de Peano-rekenkunde in deze uitbreiding interpreteerbaar is.[168]

4.5 Supplementen

4.5.1 Lindenbaum en dimensies

Het tot nu toe meest uitvoerige verslag met bewijsvoering staat in Lindenbaum & Tarski (1926). Lindenbaum gaat hierin uit van drie begrippen: $M(a, b, c, d)$ [hierbij is ab equivalent aan cd —een metrisch begrip], $P(a, b, c)$ [b tussen a en c] en $H(a, b, c, d)$ [a,b,c en d zijn harmonisch —een affien begrip]. Volgens het verslag liet Lindenbaum zien dat
∘ Voor $\mathcal{E}$ met dim≥ 1 het begrip M als basis genomen kan worden, en P en H definieerbaar zijn door M. P en H zijn onderling definieerbaar en de verzameling $\{P, H\}$ is als basis niet voldoende.
∘ Voor $\mathcal{E}$ met dim$= 1$ is er dan een bewijs dat P onafhankelijk is van M, en verder nog dat de verzameling $\{P, M\}$ voldoende is om een basis te vormen.
Lindenbaum zou door middel van het keuze-axioma het bestaan van een in de zin van Lebesgue niet meetbare reële functie F bewijzen. Hieruit kon hij de onafhankelijkheid van P ten opzichte van M geven. Als men het bestaan van niet-meetbare verzamelingen verwerpt, dan zou ook voor $\mathcal{E}$ met dim$= 1$ het begrip P effectief door M te definieren zijn.[169]

4.5.2 Scott

Scott (1956) voert de begrippen M met ($M(x, y, z) :\leftrightarrow (x$ ligt tussen y en $z)$), T met ($(T(x, y, z) :\leftrightarrow xy \perp xz)$, C met ($C(x, y, z) :\leftrightarrow x, y, z$ liggen op dezelfde lijn), en S^* met ($S^*(x, y, z) :\leftrightarrow (S(x, y, z)$ of $x = y = z)$) in. Dit valt vanwege zijn interpretatie vectorieël uit te drukken, waarbij bijvoorbeeld $M :\leftrightarrow (2x = y + z)$, $I :\leftrightarrow ((x - y)^2 = (x - z)^2$, etc.
Hij laat dan vervolgens zien dat
∘ Voor dim$(\mathcal{E}) \geq 3$ geldt dat I definieerbaar is d.m.v. M en T (lemma 1), M door T (lemma 2), en T door S (lemma 5): dus I definieerbaar door S
∘ Voor dim$(\mathcal{E})$=2 geldt dat I definieerbaar is door M en T (lemma 1), M door T (lemma 2), T door C en S^* (lemma 4), C door S^* (lemma 3), S^* door S: dus I definieerbaar door S.
Dit geheel vormt overigens een illustratie van hetgeen waar Tarski (1956) op de eerste bladzijden mee aankomt.

[168] Tarski (1959), p. 29.

[169] Vóór WWII heeft Tarski nogal eens met Lindenbaum samengewerkt. Lindenbaum is tijdens WWII door de Duitsers vermoord.

4.5.3 Relatie C

Vorm met $R(x, y, z)$ een relatie op de complexe getallen[170] van een tweedimensionale euklidische ruimte —met de reële R^2 als het gebruikte getallenlichaam. Men construeert een verzameling $\mathcal{C} = \{\text{c complex} |\ R(a_1, a_2, c\}$ met $a_1 \neq a_2$ en beide complex$\}$. Neem dan $\{a_1, a_2\} \cup \mathcal{C}$. Het door laatst genoemde verzameling voortgebrachte getallenlichaam blijkt de complexe getallen te vormen. Verder is een lichaam, dat een oneindige verzameling voortbrengt, van eenzelfde machtigheid als die verzameling. Hierdoor moet vernoemde $\mathcal{C}$ wel continu zijn als de complexen continu zijn . Dus de relatie $R(x, y, z)$ roept hier in z een continue verzameling op. Ook hier duikt het keuze-axioma, zoals te verwachten was, op een zelfde plaats weer op als in Beth & Tarski (1956).

E kan in de tweedimensionale euklidische ruimte geen continue verzameling voortbrengen en is derhalve geen enig basisbegrip.

Een ander geval is bij $R = C$, met $C(x, y, z)$ equivalent aan (z kan uit x en y alleen door passer en lineaal geconstrueerd worden). Er blijken slechts aftelbaar veel punten z te zijn, die hieraan voldoen, dus kan Cgeen primitief begrip zijn.[171]

Troelstra (1981)

Referenties

d' Abro, A. (1952), *The rise of the new physics, Its mathematical and physical theories, In two volumes*, Vol. I, Dover, New York. eerder (in 1939) als 'Decline of mechanism'.

Alexandroff, P. & Hopf, H. (1935), *Topologie I*, Springer, Berlin. (lithoprint, 1945 Ann Arbor, Michigan, USA).

Artin, E. & Schreier, O. (1927*a*), 'Algebraische Konstruktion reeller Körper', *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgische Universität* **V**, 85–99.

Artin, E. & Schreier, O. (1927*b*), 'Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper', *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgische Universität* **V**, 225–231.

Barzin, M. & Errera, A. (1927), Sur la logique de M. Brouwer, *in* 'Bulletin de la Classe des Sciences', Vol. 13 of *5*, Académie Royale de Belgique, pp. 56–71.

Barzin, M. & Errera, A (1929), 'Sur le principe du tiers exclu', *Archives, Société Belge de Philosophie, Bruxelles*.

Bell, E.T. (1945), *The development of mathematics*, McGraw-Hill, New York. 1940, 1945^2.

[170]Voor het type afbeeldingenn, zie boven; dus ook hier weer een 'semantisch' bewijs.

[171]Vergelijk hierbij ook de discussie tussen Beth en Tarski in de sectie over constructieve methoden. Voor het begrip van construeerbare getallen, constructie door passer en lineaal, en algebraïsche getallen, zie ook Hilbert (1899), hoofdstuk VII, 'Die geometrische Konstruktionen auf Grund der Axiome I-IV. Verder kan men ook van de Waerden (1940), en wel pp. 197-201 van de 1960 uitgave bij Springer raadplegen. Voor de loop van de verdere geschiedenis van en na Tarski & McKinsey (1948), zie A. Robinson (1974).

Beth, E.W. (1935), Rede en aanschouwing in de wiskunde, PhD thesis, Rijksuniversiteit van Utrecht, Utrecht. Noordhoff uitgeverij, Groningen; promotor J.C. Franken. (De dissertatie is een bewerking van de bekroonde prijsvraag 'Of de noodzakelijkheid van de ruimte als aanschouwingsvorm a priori vervalt, doordat de meetkunde zuiver logisch kan worden opgebouwd)'.

Beth, E.W. (1936/37), 'De significa van de pasigrafische systemen', *Euclides* **13**, 145–158.

Beth, E.W. (1938), 'Getalbegrip en tijdsaanschouwing', *Euclides* pp. 190–215. Bekroonde prijsvraag Wiskundig Genootschap 1937: Psychologische analyse van het subjectieve tijdsbegrip [...].

Beth, E.W. (1939), 'De paradoxen', *Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte* **32**(3), 193–208. En 'Annalen van het Genootschap voor Wetenschappelijke Philosophie' 9 (3), 41-56.

Beth, E.W. (1948/49), 'Analyse sémantique des théories physiques', *Synthese* **7**, 206–207.

Beth, E.W. (1948*a*), *Natuurphilosophie*, number 30 *in* 'Noordduijn's Wetenschappelijke Reeks', J. Noordduijn, Gorinchem. 230 pp.

Beth, E.W. (1948*b*), *Wijsbegeerte der wiskunde*, Philosophische Bibliotheek, Standaard-Boekhandel, Antwerpen.

Beth, E.W. (1949), 'Towards an up-to-date philosophy of the natural sciences', *Methodos* **1**, 178–185.

Beth, E.W. (1950*a*), *Les fondements logiques des mathématiques*, number 1 *in* 'Coll. de logique mathématique, série A', Gauthier-Villars - Nauwelaerts, Paris-Louvain. (224pp; verbeterd 1955, XVI+244 pp.).

Beth, E.W. (1950*b*), *Wijsgerige ruimteleer*, Philosophische Bibliotheek, Standaard Boekhandel, Antwerpen. (152 pp.).

Beth, E.W. (1951), 'A topological proof of the theorem of Löwenheim – Skolem – Gödel', *Indagationes Mathematicae* **13**, 437–444.

Beth, E.W. (1953*a*), *Inleiding tot de wijsbegeerte der exacte wetenschappen*, Philosophische bibliotheek, Standaard-Boekhandel, Antwerpen. 144 pp.

Beth, E.W. (1953*b*), 'On Padoa's method in the theory of definition', *Indagationes Mathematicae* **15**, 330–339.

Beth, E.W. (1953*c*), Sur le paraléllisme logico-mathématique, *in* 'Les méthdodes formelles en axiomatique', Colloques internationaux du CNRS, Centre national de la Recherche Scientifique, Paris, pp. 27–32. (Lezing: Paris, Décembre 1950; Discussion P. Bernays, E.W. Beth, A. Robinson, ibid, pp. 32-33).

Beth, E.W. (1959), *The foundations of mathematics, A study in the philosophy of science*, Studies in Logic and the foundations of mathematics, North-Holland, Amsterdam. 1965^2 revised; 1966 3e druk , Harper.

Beth, E.W. (1961), Le systéme S4 et la topologie, *in* 'Rapport CETIS', number 26, Compte-rendu des travaux effectué par l'Université d'Amsterdam dans le cadre de contrat Euratom, pp. 143–147. Rapport 13.

Beth, E.W. (1965), *Mathematical thought, An introduction to the philosophy of mathematics*, number 11 *in* 'Synthese Library', Reidel, Dordrecht. (XII + 208 pp.). (bezorgd door E.M. Barth, J.J.A. Mooij).

Beth, E.W. & Nieland, J.J.F. (1965), Semantic construction of Lewis's systems S4 and S5, *in* J.W. Addison, L. Henkin & A. Tarski, eds, 'Symposium of the theory of models', Studies in Logic, North-Holland, Amsterdam, pp. 17–24. (Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley).

Beth, E.W. & Tarski, A. (1956), 'Equilaterality as the only primitive notion of Euclidean geometry', *Indagationes Mathematicae* **18**, 462–467.

Beth, H.J.E. (1929), *Inleiding in de niet-euclidische meetkunde op historischen grondslag*, Groningen.

Birkhoff, G. & von Neumann, J. (1936), 'The logic of quantum mechanics', *Annals of Mathematics, 2e reeks,* **37**, 823–843.

Bockstaele, P. (1949), *Het intuïtionisme bij de Franse wiskundigen*, Vol. 32 of *Verhandelingen, Klasse der Wetenschappen XI*, Koninklijke Vlaamse Academie van Wetenschappen, Brussel. Paleis der Academiën.

Brouwer, L.E.J. (1907), Over de grondslagen der wiskunde, PhD thesis, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam. promotor D. Korteweg; Maas en Van Suchtelen Uitg. ook voor de stoomdruk 1907 (geen stellingen), Amsterdam; Engelse vertaling in Brouwer Coll. Works I (1975).

Brouwer, L.E.J. (1908), Die möglichen Mächtigkeiten, *in* 'Atti IV. Congr. internaz. matematici', Bologna, pp. 569–571. En in Brouwer, Coll. W. I (1975).

Brouwer, L.E.J. (1909), *Het wezen der meetkunde*, rede (UvA), Amsterdam. Rede bij de aanvaarding van het ambt van privaatdocent aan de UvA.

Brouwer, L.E.J. (1911), 'Recensie op Mannoury, Meth. und Phil z. Elemt.Math.', *Nieuw Archief Wiskunde (2)* **9**, 199–201.

Brouwer, L.E.J. (1912), *Intuitionisme en formalisme*, rede (UvA), Amsterdam. Oratie bij het aanvaarden van het ambt van bijzonder hoogleraar aan de UvA. Ook in Wiskundig tijdschrift, (1913), pp. 180-211; en in Wiskunde, waarheid, werkelijkheid, Noordhof, Groningen, 1919. in Engelse vertaling (A. Dresden), Bulletin American Mathematical Society 20 (1913)), en in Brouwer CWI, (1975) 123-138.

Brouwer, L.E.J. (1918), 'Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeslossenen Dritten. Erster Teil: Algemeine Mengenlehre', *KNAW Verhandelingen, 1ste sectie 12 no. 5*. 43 pp. (en in Brouwer CWI (1975), 150-190).

Brouwer, L.E.J. (1921), 'Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruch-Entwickelung', *KNAW Verslagen* **29**, 803–812. =KNAW Proc. 23 (1922), p. 955-964, (communicated at the meeting of Dec. 18 1920); en Math. Annalen 83. p. 201-210; en Brouwer CWI (1975) pp. 236-245.

Brouwer, L.E.J. (1923), 'Intuïtionistische splitsing van mathematische grondbegrippen', *Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Verslagen (Wis- en Natuurkunde)* **32**(9), 877–889. (=Jber.Deutsch.Math.Verein.33 (1924), pp.251-256)).

Brouwer, L.E.J. (1927), 'Über Definitionsbereiche von Funktionen', *Mathematische Annalen* **97**, 60–75.

Brouwer, L.E.J. (1929), 'Mathematik, Wissenschaft und Sprache', *Monatshefte f. Mathematik und Physik* **36**, 153–164. Vortrag gehalten in Wien am 10.III.1928; ook in Brouwer CW I, 417-428, (1975).

Brouwer, L.E.J. (1930), *Die Struktur des Kontinuums*, Komitee zur Veranstaltung von Gastvorträgen, Wien. Vortrag gehalten in Wien am 14 März 1928, Sonderabdruck; en in Brouwer Coll. W. I (1975), 429-440.

Brouwer, L.E.J. (1933), Willen, weten, spreken, *in* 'De uitdrukkingswijze der wetenschap, Kennistheoretische openbare voordrachten gehouden aan de Universiteit van Amsterdam gedurende den kursus 1932-1933', Noordhoff, Groningen, pp. 64–. Engelse vertaling in Brouwer Coll. W. I (1975).

Brouwer, L.E.J. (1949*a*), 'Contradictoriteit der elementaire meetkunde', *Indagationes Mathematicae* **11**, 89–90.

Brouwer, L.E.J. (1949*b*), 'De non-aequivalentie van de constructieve en de negatieve orderelatie in het continuum', *Indagationes Mathematicae* **11**, 37–39.

Brouwer, L.E.J. (1951), 'On order in the continuum, and the relation of truth to noncontradictory', *Indagationes Mathematicae* **13**, 357–358.

Brouwer, L.E.J. (1952), 'Historical background, principles and methods of intuitionism', *South African Journal of Science* pp. 139–146. Paper read to Section A of the South African Association for he Advancement of Science, Cape Town, July, 1952; en in Brouwer CWI (1975), 508-515.

Brouwer, L.E.J. (1975), *L.E.J. Brouwer, Collected Work*, number I, North-Holland, Amsterdam.

Brouwer, L.E.J. (2011), *Companion to the 'Selected correspondence of L.E.J. Brouwer'*, Springer. (ed. D. van Dalen), electronisch boek (ebook).

Carnap, R. (1939), *Foundations of logic and mathematics*, Vol. 3 of *International Encyclopedia of Unified Science I*, University of Chicago Press, Chicago Illinois.

van der Corput, J.G. (1948), Wiskunde, *in* K.F. Proost & J. Romein, eds, 'De wetenschappen van natuur, mens en maatschappij', Vol. 2 of *Geestelijk Nederland 1920-1940*, Kosmos, Amsterdam, pp. 255–291.

van Dalen, D. (1963), Extension problems in intuitionistic plane projective geometry, PhD thesis, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam. (promotor A. Heyting).

van Dalen, D. (1995), 'Hermann Weyl's intuitionistic mathematics', *Bulletin of Symbolic Logic* **1**(2), 145–169.

van Dalen, D. (1999), *Mystic, geometer and intuitionist, The life of L.E.J. Brouwer (1881-1966), The dawning revolution*, Vol. I, Clarendon Press, Oxford.

van Dalen, D. (2000), 'Brouwer and Fraenkel on Intuitionism', *Bulletin of Symbolic Logic* **6**, 284–310.

van Dalen, D. (2001), *L.E.J. Brouwer, Een biografie, Het heldere licht van de wiskunde*, Uitgeverij Bert Bakker, Amsterdam.

van Dalen, D. (2005), *Mystic, geometer and intuitionist, The life of L.E.J. Brouwer (1881-1966), Hope and disillusion*, Vol. I, Clarendon Press, Oxford.

van Dalen, D. (2012), 'Poincaré and Brouwer on intuition and logic', *Nieuw Archief voor de Wiskunde V* **13**(3), 191–195.

van Dantzig, D. (1947*a*), 'On the principles of intuitionistic and affirmative mathematics 1', *Indagationes Mathematicae* **9**, 430–440. (KNAW, Section of Science: meeting June 28, 1947).

van Dantzig, D. (1947*b*), 'On the principles of intuitionistic and affirmative mathematics 2', *Indagationes Mathematicae* **9**, 506–517. (KNAW: meeting June 28, 1947).

van Dantzig, D. (1949), 'Comments on Brouwer's theorem on essentially-negative predicates', *Indagationes Mathematicae* **11**(5), 347–355. (KNAW, Proc 52, no. 9).

DePauly-Schimanovisch, W. & Weibel, P. (1997), *Kurt Gödel, Ein mathematischer Mythos*, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.

Dequoy, N. (1954), Axiomatique intuitionniste sans négation de la géométrie projective, PhD thesis, Faculté des Sciences de l'Université de Paris, Paris. (1^{re} thèse, (Gauthier-Villars).

Dold-Samplonius, Y. (1997), 'Interview with Bartel Leendert van der Waerden', *Notices of the AMS* **44**(3), 313–320. review op 4 mei 1993; 1e publicatie 1993 in Journal NTM 2 (3).

Dummett, M. (2000), *Elements of intuitionism*, Clarendon Press, Oxford. 1977 1e druk, 2000 2e druk.

Dyson, V.H. & Kreisel, G. (1961), Analysis of Beth's semantic construction of intuitionistic logic, Technical Report 3, Applied mathematics and statististical laboratories, Stanford University, Stanford. (Office of Ordnance Research, Contract No. DA-04-200-ORD-997).

Eijgenraam, F. (1991), 'Wiskundige Vladimir Igorewitsj Arnol'd: Russische bijdragen aan de wetenschap worden door het Westen consequent genegeerd', *NRC Handelsblad*. interview, 11 april 1991.

Finsler, P. (1926), 'Formale Beweise und die Entscheidbarkeit', *Math. Zeitschrift* **25**, 676–632. Engelse vertaling in van Heijenoort (1967).

Fraenkel, A.A. (1927), *Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre*, number 31 *in* 'Wissenschaft und Hypothese', Teubner, Leipzig.

Fraenkel, A.A. (1930), 'Die heutigen Gegensätze in der Grundlegung der Mathematik', *Erkenntnis* **1**, 286–302.

Gentzen, G. (1936), 'Die Wiederspruchfreiheit der reinen Zahlentheorie', *Mathematische Annalen* **112**, 493–565.

Gericke, H. (1966), 'Aus der Chronik der Deutschen Mathematiker-Vereinigung', *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **68**, 46–74. Nachdruck 1980.

Gilmore, P.C. (1953), *The effect of Griss' criticism of the intuitionistic logic on deductive theories formalized within the intuitionistic logic*, Noord Holland, Amsterdam. (dissertatie 3 juni 1953, Universiteit van Amsterdam;promotor E.W. Beth).

Gödel, K. (1929), Über die Vollständigkeit der Logikkalküls, PhD thesis, Universiteit van Wenen, Wenen. Promotor H. Hahn. En in GCW1.

Gödel, K. (1931*a*), 'Recensie van Heyting: Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik', *Zentralblatt f. Mathematik u. ihre Grenzgebiete* **2**, 321–322. En in GCW1.

Gödel, K. (1931*b*), 'Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I', *Monatshefte f. Mathematik und Physik* **38**, 173–198. En in GCW1.

Gödel, K. (1932), 'Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls', *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien* **69**, 65–66. En in GCW1.

Gödel, K. (1933*a*), 'Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls', *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* **4**, 39–40. En in GCW1.

Gödel, K. (1933*b*), 'Über die Parryschen Axiome', *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*.

Gödel, K. (1933*c*), 'Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie', *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* **4**, 35–36. En in GCW1.

Gödel, K. (1986), *Kurt Gödel Collected Works I*, Oxford University Press, New York. S. Feferman ed.; GCW1.

Gödel, K. (2003*a*), *Kurt Gödel Collected Works IV, Correspondence A-G*, Clarendon Press, Oxford. S. Feferman ed.

Gödel, K. (2003*b*), *Kurt Gödel Collected Works V, Correspondence H-Z*, Clarendon Press, Oxford. S. Feferman ed.

Grätzer, G. (1978), *General lattice theory*, Birkhäuser, Basel.

de Groot, A.D. (1943/44), 'Toegepaste kennis- en taalkritiek', *Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte* **37**, 110–120, 155–165. dl.1 (110-120), dl.2 (155-165).

Hausdorff, F. (1914), *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit, Leipzig. (En: Dover, New York, 1944; Chelsea Publ.C., New York, 1949).

van Heijenoort, J. (1967), *From Frege to Gödel, A source book in mathematical logic, 1879–1931*, Harvard, Cambridge, Massachusetts.

Heyting, A. (1925), Intuïtionistische axiomatiek der projectieve meetkunde, PhD thesis, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam. Noordhoff uitgeverij, Groningen; promotor L.E.J. Brouwer.

Heyting, A. (1927), 'Zur intuitionistischen Axiomatik der projektiven Geometrie', *Mathematischje Annalen* **98**(3/4), 491–538.

Heyting, A. (1930*a*), 'Die formale Regeln der intuitionistischen Logik, I', *Sitzungsberichte der preußischen Akademie von Wissenschaften, physikalisch-mathematische Klasse* pp. 42–56.

Heyting, A. (1930*b*), 'Die formale Regeln der intuitionistischen Logik, II', *Sitzungsberichte der preußischen Akademie von Wissenschaften, physikalisch-mathematische Klasse* pp. 57–71.

Heyting, A. (1930*c*), 'Die formale Regeln der intuitionistischen Logik, III', *Sitzungsberichte der preußischen Akademie von Wissenschaften, physikalisch-mathematische Klasse* pp. 158–169.

Heyting, A. (1930*d*), Sur la logique intuitioniste, *in* 'Bulletins de la Classe des Sciences', Vol. 16 of *5*, Académie Royale de Belgique, pp. 957–963.

Heyting, A. (1931), 'Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik', *Erkenntnis* **2**, 106–115. (=Annalen der Philosophie 10).

Heyting, A. (1934), *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus, Beweistheorie*, Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete, Springer, Berlin.

Heyting, A. (1935/36), 'Intuïtionistische wiskunde', *Mathematica B4* pp. 72–83.

Heyting, A. (1936), *De otwikkeling van de intuitionistische wiskunde*, Noordhoff, Groningen-Batavia. Openbare les, gehouden bij de aanvaarding van de functie van privaat-docent aan de Universiteit van Amsterdam op 30 November 1936; ook in Euclides 13, afl. 3, (1936-37), pp.129-144.

Heyting, A. (1937), *Ruimteleer en axiomatiek*, Noordhoff, Groningen-Batavia. Openbare les gegeven bij de aanvaarding van het ambt van lector aan de Universiteit van Amsterdam op 27 September 1937.

Heyting, A. (1940), Wiskundige strengheid in wetenschap en school, *in* 'Verslag 5e Nederlands Congres van leraren in de wiskunde en natuurwetenschappen, gehouden op 28 maart 1940 te Amsterdam', J.B. Wolters, Groningen-Batavia, pp. 15–27. En ook in: Euclides 17 (1940-1941), pp. 79-93.

Heyting, A. (1941), *Untersuchungen über intuitionistische Algebra*, Vol. 2 of *Afdeling Natuurkunde, 1e sectie*, Verhandelingen der Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Amsterdam. 36 pp.

Heyting, A. (1946), 'On weakened quantification', *Journal of Symbolic Logic* **11**, 119–121.

Heyting, A. (1947/48*a*), 'Formal logic and mathematics', *Synthese* **6**, 275–282.

Heyting, A. (1947/48*b*), 'Taal en teken in de wiskunde', *Alg. Ned. Tijdschr. v. Wijsb. en Psych.* **40**, 121–131.

Heyting, A. (1949), *Spanningen in de wiskunde*, Noordhoff, Groningen-Batavia. Rede, uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar aan de universiteit van Amsterdam op 16 mei 1949; ook in Euclides 25, 1949-50).

Heyting, A. (1952), 'Recensie op Beths 'Wijsgerige ruimteleer' 1950', *Nw. Archief Wiskunde, 2e serie* **23**, 255–258.

Heyting, A. (1956), *Intuitionism, An introduction*, Studies in logic, North-Holland. (1966^2, 1971^3, both revised).

Heyting, A. (1958), Intuitionism in mathematics, *in* R. Klibansky, ed., 'Philosophy in the mid-century, A survey', La nueva Italia, Firenze, pp. 101–115.

Heyting, A. (1959), Axioms for intuitionistic plane affine geometry, *in* L. Henkin, P. Suppes & A. Tarski, eds, 'Proc. int. symposium on the axiomatic method, with special reference to geometry and physics', Symposium Berkeley Dec. 26, 1957-Jan. 4, 1958, North-Holland, Amsterdam, pp. 160–609.

Heyting, A. (1961), Axiomatic method and intuitionism, *in* Y. Bar Hillel, J. Poznanski, M.O. Rabin & A. Robinson, eds, 'Essays on the foundations of mathematics', Hebrew University, Magnes Press, Jerusalem. En North-Holland Publ. Com. Amsterdam, 1962.

Heyting, A. (1962), After thirty years, *in* Nagel, Suppes & Tarski, eds, 'Logic, methodology and philosophy of science, Proceedings of the 1960 International Congres', Stanford University Press, Stanford Cal., pp. 194–197.

Heyting, A. (1968), Is de toekomst der wiskunde voorspelbaar?, Afscheidsrede, UvA (copie van typoscript).

Heyting, A. (1974), 'Intuitionistic view on the nature of mathematics', *Bolletino dell'Unione Matematica Italiana* **4**(9), 122–134. Suppl.; en in Synthese 27 (1974), 79-91.

Heyting, A. (1978), 'History of the foundations of mathematics', *Nieuw archief voor wiskunde, 3e reeks* **26**, 1–21. Ook in Heyting CW (1980), pp. 765-785.

Heyting, A. (1980), *A. Heyting, Collected Papers*, Mathematical Institute, University of Amsterdam, Amsterdam. (ed. J. Niekus, H. van Riemsdijk, A.S. Troelstra; HCP).

Hilbert, D. (1899), *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig – Berlin. 1956^8, (ed. P. Bernays), Stuttgart (Teubner).

Hilbert, D. (1900*a*), 'Mathematische Probleme', *Nachrichten von derKöninglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* pp. 253–297. Ook als voordracht voor het 2e Internationale Wiskundecongres te Parijs in 1900.

Hilbert, D. (1900*b*), 'Über den Zahlbegriff', *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **8**, 180–184. Ook in latere drukken van 'Grundlagen der Geometrie' als aanhangsel.

Hilbert, D. (1902), 'Über die Grundlagen der Geometrie', *Mathematische Annalen* **56**, 318–422.

Hilbert, D. (1905), Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik, *in* 'Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker-Kongress, in Heidelberg vom 8. bis 13 August 1904', Leipzig, pp. 174–185. Kraus reprint 1967.

Hilbert, D. (1928), 'Die Grundlagen der Mathematik, II', *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* **6**, 65–85. lezing uit 1927(H. Weyl, Zusatz, *ibid.*, 86-88; P. Bernays, Zusatz, *ibid.*, 89–92) []. En Engelse vertaling in Van Heijenoort (1967), pp. 646-479.

Hilbert, D. (1929), Probleme der Grundlegung der Mathematik, *in* 'Atti del Congresso Internazional dei Matematici, Bologna 3-10 settembre 1928', Bologna, pp. 135–141. Vortrag gehalten auf den internationalen Mathematiker-Kongress in Bologna am 3 Sept. 1928.

Hilbert, D. (1931), 'Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre', *Mathematische Annalen* **104**, 485–494. Vortrag, gehalten im Dezember 1930 auf Einladung der Philosophischen Gesellschaft in Hamburg.

Hilbert, D. (1971), Probleme der Grundlegung der Mathematik, *in* K. Reidemeister, ed., 'Hilbert Gedenkband', Springer-Verlag, Berlin. Volgens deze uitgave is dit een heruitgave van Hilberts Bologna-lezing. Deze uitgave is echter langer dan de 1929-weergave van het 1928-congres.

Hilbert, D. (2013), *in* W. Sieg & D. Schlimm, eds, 'David Hilbert's lectures on the foundations of arithmetic and logic, 1917-1933', Vol. 3 of *David Hilbert's foundational lectures*, Springer, Heidelberg.

Hilbert, D. & Ackermann, W. (1928), *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer. (1938^2 herzien).

Hilbert, D. & Ackermann, W. (1938), *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer. (1928^1, 1938^2 herzien).

Hilbert, D. & Bernays, P. (1934), *Grundlagen der Mathematik I*, Springer, Berlin. (1939: dl. II; 1968^2 van dl. I).

Hilbert, D. & Bernays, P. (1939), *Grundlagen der Mathematik II*, Springer, Berlin.

Jaśkowski, S. (1936), Recherches sur le système de la logique intuitioniste, *in* 'Actes du Congres International de Philosophie Scientifique 6', Congres International de Philosophie Scientifique, Paris 1936, pp. 58–61. En als 'Investigations into the system of intuitionist logic', in Storrs McCall, 'Polish logic 1920-1939', Oxford (Clarendon Press), 1967, pp.259-263.

Jensen, Chr.U. & Lenzing, H. (1989), *Modeltheoretic algebra, with particular emphasis on fields, rings modules*, Gordon and Breach Science Publishers, New York.

Johansson, I. (1936), 'Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus', *Compositio Mathematica* **4**, 119–136.

Jónsson, B. (1959), Lattice-thgeoretic approach to projective and affine geometry, *in* L. Henkin, P. Suppes & A. Tarski, eds, 'The axiomatic method', Studies in Logic, North-Holland, Amsterdam, pp. 188–203.

Kleene, S.C. (1952), *Introduction to Metamathematics*, number 1 *in* 'Bibliotheca Mathematica', North-Holland—Noordhoff, Amsterdam—Groningen. (1959^2).

Klein, F. (1872), *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät und den Senat der k. Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen, Erlangen. Ook in Math. Annalen 43 (1893). En in: Felix Klein, Gesammelte mathematische Abhandlungen, B.1, Springer, Berlin, 1921 (reprint 1973).

Koetsier, T. (2005), Arthur Schopenhauer and L.E.J. Brouwer: a comparison, *in* T. Koetsier & L. Bergmans, eds, 'Mathematics and the devine; a historical study', Elsevier, chapter 30, pp. 569–593.

Koetsier, T. & van Mill, J. (1997), General topology, in particular dimension theory, in the Netherlands: the decisive influemce of Brouwer's intuitionism, *in* C.E. Aull & R. Lowen, eds, 'Handbook of the history of general topology', Kluwer, Dordrecht, pp. 135–180.

Kolmogorov, A.N. (1925), 'O principe tertium non datur', *Matematiceskii Sbornik* **23**, 646–667. (Recueil mathématique de la Société Mathématique de Moscou) [Russisch, met Frans abstract]. En als 'On the principle of excluded middle', Engelse vertaling in Van Heijenoort (1967), pp. 416-437.

Kolmogorov, A.N. (1932), 'Zur Deutung der intuitionistischen Logik', *Mathematische Zeitschrift* **35**, 58–65.

Kousbroek, R. (1982), 'L.E.J. Brouwer en de verbeeldingskracht', *NRC Handelsblad*. 10, 24 september 1982 en 1, 15, 29 oktober 1982.

Kreisel, G. (1958), 'A remark on free choice sequences and the topological completeness proofs.', *The Journal of Symbolic Logic* **23**, 369–388.

Kronecker, L. (1887), 'Ueber den Zahlbegriff', *Journal f. reine und angewandte Mathematik* **101**(4), 337–355.

Kuiper, J.J.C. (2004), Ideas and explorations, Brouwer's road to intuitionism, PhD thesis, Universiteit van Utrecht, Utrecht. Zeno-reeks Vol. XLVI, promotor D. van Dalen.

Lindenbaum, A. & Tarski, A. (1926), 'Sur l'indépendence des notions primitives dans les systèmes mathématiques', *Annales de la Société Polonaise de Mathématique* **5**, 111–113.

de Loor, B. (1925), Die hoofdstelling van die algebra van intuïsionistiese standpunt, PhD thesis, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam. (promotor L.E.J. Brouwer).

Mancosu, P. (1998), *From Brouwer to Hilbert, The debate on the foundations of mathematics in the 1920s.*, Oxford Univ. Press, Oxford.

Mannoury, G. (1909), *Methodologisches und Philosophisisch zur Elementar-Mathematik*, Visser, Haarlem.

Mannoury, G. (1934), 'Die signifischen Grundlagen der Mathematik', *Erkenntnis* **4**(4), 288–345. Annalen der Philosophie 12.

Menger, K. (1928), 'Bemerkungen zur Grundlagenfragen I, Ueber Verzweigungsmengen', *Jahresberichte der D. Math. Ver.* **37**, 213–226.

Menger, K. (1994), *Reminiscences of the Vienna Circle and the mathematical colloquium*, Kluwer, Dordrecht. ed. Golland, McGuinness, Sklar; (Menger †1985).

Monk, J.D. (1976), *Mathematical logic*, Springer, New York.

Monk, R. (2003), *Ludwig Wittgenstein, De biografie*, Prometheus, Amsterdam. 1991^2; Nederlandse vertaling van 'Ludwig Wittgenstein, The duty of a genius', 1990.

Mooij, J.J.A. (1966), La philosophie des mathématiques de Henri Poincaré, PhD thesis, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam. promotor A. Heyting.

von Neumann, J. (1947), The mathematician, *in* R.B. Heywood, ed., 'The works of the mind', University of Chicago Press, Chicago, pp. 180–196. En in Von Neumann, Collected Works I.

Pieri, M. (1908), 'La geometria elementare istituita sulle nozioni di 'punto' e 'sfera'', *Memorie di matematica e di fisica della Società Italiana delle scienze* **15**, 345–450.

Post, E. (1921), 'Introduction to a general theory of elementary propositions', *American Journal of Mathematics* **43**, 163–185. Ook in van Heijenoort, J., (1967).

Rabin, M.O. (1977), Decidable theories, *in* J. Barwise, ed., 'Handbook of mathematical logic', North Holland, Amsterdam, pp. 595–629.

Rasiowa, H. (1974), *An algebraic approach to non-classical logics*, number 78 *in* 'Studies in logic', North-Holland, Amsterdam.

Rasiowa, H. & Sikorski, R. (1963), *The mathematics of metamathematics*, number 41 *in* 'Monografie Matematyczne', Polish Scientific Publishers, Warszawa.

Reid, C. (1970), *Hilbert*, Springer, Berlin.

Robinson, A. (1958), 'Relative model-completeness and the elimination of quantifiers', *Dialectica* **12**, 394–407.

Robinson, A. (1959), 'Solution of a problem of Tarski', *Fundamenta Mathematica* **47**, 179–204.

Robinson, A. (1966), *Nonstandard analysis*, North-Holland, Amsterdam.

Robinson, A. (1974), A decision method for elementary algebra and geometry — revisited, *in* 'Tarski symposium 1974', pp. 138–153.

Robinson, J. (1949*a*), 'Definability and decision problems in arithmetic', *Journal of Symbolic Logic* **14**, 98–114.

Robinson, J. (1949*b*), 'Undecidability in the arithmetic of integers and rationals, and in the theory of fields', *Journal of Symbolic Logic* **14**, 77. abstract 8.

Russell, B.A.W. (1903), *The principles of mathematics*, Vol. I, Cambridge.

Schouten, J.A. (1949), *Over de wisselwerking tussen wiskunde en physica in de laatste 40 jaren*, Noordhoff, Groningen-Batavia. Rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van buitengewoon hoogleraar aan de universiteit van Amsterdam op 21 Februari 1949.

Schwabhäuser, W., Szmielew, W. & Tarski, A. (1983), *Metamathematische Methoden in der Geometrie*, Springer, Berlin/Heidelberg.

Scott, D. (1956), 'A symmetric primitive notion for Euclidean geometry', *Indagationes Mathematicae* **18**, 456–46.

Sieg, W. (2003), Introductory note to Emil L. Post, *in* S. Feferman, ed., 'Kurt Gödel Collected Works V', Clarendon, Oxford, pp. 165–169.

Sieg, W. (2012), In the shadow of incompleteness: Hilbert and Gentzen, *in* Palmgren Dybjer, ed., 'Epistemology versus ontology, Essays on the philosophy and foundations of mathematics in honour of Per Martin-Löf', Vol. 27 of *Logic, epistemology and the unity of science*, Springer, Dordrecht, chapter 5, pp. 87– 127.

van Stigt, W.P. (1990), *Brouwer's intuitionism*, North Holland, Amsterdam.

Tarski, A. (1931), 'Sur les ensembles définissables de nombres réels. I', *Fundamenta Mathematica* **17**, 210–239.

Tarski, A. (1938), 'Der Aussagenkalkül und die Topologie', *Fundamenta Mathematicae* **31**, 103–134. En in TCP2.

Tarski, A. (1939), 'On undecidable statements in enlarged systems of logic and the concept of truth', *Journal of symbolic logic* **4**, 105–112. Ook in TCP2, pp. 559-568.

Tarski, A. (1947), Problems of mathematics, Mathematical logic, *in* 'Princton University Bicentennial Conferences (1946)', 2, Princeton University, Princeton, pp. 10–12. Conference 2.

Tarski, A. (1949), 'On essential undecidability', *Journal of Symbolic Logic*.

Tarski, A. (1956), 'A general theorem concerning primitive notions of Euclidean geometry', *Indagationes Mathematicae* **18**, 75–76. (abstract 5).

Tarski, A. (1959), What is elementary geometry, *in* L. Henkin, P. Suppes & A. Tarski, eds, 'The axiomatic method', North-Holland, Amsterdam, pp. 16–29.

Tarski, A. & Łukasiewicz, J. (1930), Untersuchungen über den Aussagenkalkül, *in* 'Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie', Vol. 23 of *III*, Warschau, pp. 30–40.

Tarski, A. & McKinsey, J.C.C. (1944), 'The algebra of topology', *Annals of Mathematics* **45**, 141–191. En in TCP2.

Tarski, A. & McKinsey, J.C.C. (1946), 'On closed elements in closure algebras', *Annals of Mathematics* **47**, 122–152. En in TCP3, 21-61.

Tarski, A. & McKinsey, J.C.C. (1948), 'Some theorems about the sentential calculus of Lewis and Heyting', *Journal of Symbolic Logic* **13**, 1–15. En in TCP3, 147-161.

Troelstra, A.S. (1965), 'On intermediate propositional logics', *Indagationes Mathematicae* **27**, 141–152. (Rapport Euratom(-project) 32 (1963)).

Troelstra, A.S. (1966), Intuitionistic general topology, PhD thesis, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam. (promotor A. Heyting).

Troelstra, A.S. (1968), 'The scientific work of A. Heyting', *Compositio Mathematica* **20**, 3–12. dedicated to A. Heyting on the occasion of his 70th birthday.

Troelstra, A.S. (1977), *Choice sequences, A chapter of intuitionistic mathematics*, Clarendon Press, Oxford.

Troelstra, A.S. (1981), 'Arend Heyting and his contribution to intuitionism', *Nieuw Archief voor Wiskunde 3* **29**, 1–23.

Troelstra, A.S. (1991), History of constructivism in he twentieth century, prepublication ML-91-05, Institute for language , logic and information, Amstetdam. (ISSN 0924-2090).

Troelstra, A.S. & van Dalen, D. (1988), *Constructivism in Mathematics, I*, number 123 *in* 'Studies in logic', North-Holland, Amsterdam.

van de Waerden, B.L. (1940), *Modern algebra, In part a development from lectures by E. Artin amd E. Noether*, Vol. I, Frederick Unger, New York.

Wang, H. (1970), A survey of skolem's work in logic, *in* H.E. Fenstad, ed., 'Selected works in logic, by Th. Skolem', Universitetsforlaget, Oslo, pp. 17–52.

Weyl, H. (1921), 'Ueber die neue Grundlagekrise der Mathematik', *Math. Zeitschrift* **10**, 39–79.

Weyl, H. (1944), 'David Hilbert and his mathematical work', *Bulletin of the American Mathematical Society* **50**, 612–654. Deels in Reid (1970); ook internet.

Whitehead, A.N. (1906), *The axioms of projective geometry*, University Press, Cambridge. 1913, 2e druk.