STUDIEN OVER TOPOLOGISCHE ALGEBRA

D. VAN DANTZIG

STUDIEN OVER TOPOLOGISCHE ALGEBRA

Academisch proefschrift
ter verkrijging van den graad
van doctor in de wis- en natuurkunde
aan de Rijksuniversiteit te Groningen,
op gezag van den Rector Magnificus,
Dr H. J. Backer, Hoogleeraar
in de faculteit der wis- en natuurkunde,
in het openbaar te verdedigen
op Vrijdag 27 Maart 1931,
des namiddags te 4 uur,
door

DAVID VAN DANTZIG
GEBOREN TE AMSTERDAM

H. J. PARIS
AMSTERDAM
1931

AAN MIJN VADER
AAN MIJN VROUW

Het zij mij vergund, bij deze gelegenheid allen te danken, die aan mijne wetenschappelijke vorming hebben medegewerkt.

Van den allergrootsten invloed op mijne ontwikkeling is de relativistische philosophie van Prof. G. Mannoury geweest. De herinnering aan de enkele colleges die ik in 1917 als student in de scheikunde bij hem kon volgen heeft mij in 1921 ertoe gebracht, mij geheel aan de mathesis te wijden. Mijne liefde en belangstelling voor de wiskunde heb ik allereerst aan hem te danken. Zijne belangrijke, steeds nieuwe gezichtspunten openende colleges, zijne sympathieke persoonlijkheid, zijne hartelijke belangstelling voor mijn werk en bovenal zijne persoonlijke vriendschap zal ik nooit genoeg kunnen waardeeren.

Mijne daardoor gewekte belangstelling voor de grondslagen der wiskunde werd in hooge mate versterkt door de uiterst belangrijke, door mathematische strengheid en diepgaande begripsontleding uitmuntende en in ieder behandeld onderwerp nieuw en dieper inzicht schenkende colleges van Prof. Brouwer. Door het onder zijne leiding in 1925 gehouden seminarium werd mijne belangstelling voor de topologie gewekt en de grondslag voor mijne studie gelegd. Grooten invloed daarop hebben ook de interessante en vriendschappelijke besprekingen met Prof. Alexandroff, Prof. Menger, Prof. Vietoris en Dr. Hurewicz gehad.

Ook Prof. de Vries, Prof. Weitzenböck, Prof. van der Waals en Prof. Kohnstamm hebben mijne ontwikkeling in verschillende richtingen beïnvloed, mijn blik in menig opzicht verruimd en mij bij verschillende gelegenheden bereidwillig terzijde gestaan, waarvoor ik ook hen te dezer plaatse mijn oprechten dank breng.

De twee jaren gedurende welke ik als assistent van Prof. Schouten met hem mocht samenwerken behooren tot de prettigste en leerzaamste van mijn geheelen studietijd. Eerst daardoor heb ik het moeilijk te beheerschen apparaat der Ricci-rekening eenigszins leeren hanteeren en eenig inzicht in de meerdimensionale differentiaalmeetkunde verworven. Zijn meesleepend enthousiasme en hartelijke samenwerking zullen mij steeds in dankbare herinnering blijven.

Tenslotte, Hooggeleerde van der Waerden, Hooggeschatte Promotor, zij het mij vergund, U mijn hartelijken en diepgevoelden dank te betuigen voor de vriendschappelijke medewerking, die ik steeds van U mocht ontvangen. Reeds in onze gemeenschappelijke studiejaren hebben onze vele gesprekken in hooge mate tot mijn inzicht in de wiskunde bijgedragen. Mijne kennis van de abstracte algebra heb ik geheel aan U te danken. Uw scherpe en kritische blik, Uw veelomvattende kennis en Uw diep inzicht in welhaast ieder onderdeel der wiskunde hebben mij over vele moeilijkheden heengeholpen. De bereidwilligheid, waarmede Gij de bewerking van dit proefschrift op U genomen hebt, de vele moeite, die Gij U daarvoor getroost hebt en de tallooze goede raadgevingen die het zoo zeer bevorderd hebben, zullen mij voor altijd aan U verplichten.

INLEIDING.

Het belang dat het getallencontinuum voor de geheele wiskunde heeft, berust in hoofdzaak op tweeërlei eigenschappen. Eenerzijds bestaan namelijk tusschen de elementen van het getallencontinuum eenvoudige *algebraische* (of arithmetische) betrekkingen, d.z. betrekkingen tusschen telkens *eindig vele* getallen: de reëele resp. complexe getallen vormen een *lichaam*. Anderzijds bestaan er echter eenvoudige *topologische* (continuïteits-) relaties, d.z. zijn betrekkingen tusschen telkens *oneindig vele* getallen: de reëele resp. complexe getallen vormen een *continuum*. En wel culmineeren de algebraische betrekkingen in de stelling van d'Alembert (hoofdstelling der algebra): „Iedere algebraische vergelijking met complexe coëfficienten bezit in het lichaam der complexe getallen minstens één wortel". en de topologische betrekkingen in de stelling van Bolzano-Weierstrass: „Iedere begrensde oneindige getallenverzameling bezit minstens één verdichtingspunt". Zuiver algebraisch zegt de stelling van d'Alembert, dat het lichaam der complexe getallen *algebraisch afgesloten* is; zuiver topologisch zegt de stelling van Bolzano-Weierstrass, dat de verzameling der reëele resp. complexe getallen *mikrocompact* [1]) is.

In de oudere wiskunde werden deze beide aspecten van het getallencontinuum niet van elkaar onderscheiden, zooals b.v. blijkt uit de zuiver algebraische stelling van d'Alembert, welks bewijs wezenlijk op de zuiver topologische stelling van Bolzano-Weierstrass berust. De oorzaak ligt daarin, dat de reëele resp. complexe getallen zelf niet zuiver algebraisch (uitgaande van de

1) *Mikrocompact* („kompakt im kleinen") is eene verzameling, als ieder punt in eene omgeving met compacte afsluiting (bij afkorting: eene compacte omgeving) bevat is. *Compact* is eene verzameling als iedere oneindige deelverzameling daarvan minstens één limespunt in de gegeven verzameling bezit.

natuurlijke getallen) gedefinieerd kunnen worden, maar dat daartoe de *convergentie* van bepaalde rijen van rationale getallen, een *topologische* eigenschap dus, beschouwd moet worden.

De scheiding der beide aspecten van het getallencontinuum heeft zich onder invloed van de axiomatiseeringstendentie van de vorige eeuw geleidelijk voltrokken; in het bijzonder was het Dedekind, die in zekeren zin zoowel de topologische als de algebraische eigenschappen der getallen afzonderlijk onderzocht heeft. Sindsdien hebben topologie en algebra zich tot afzonderlijke takken der wiskunde ontwikkeld.

Daarmede ontstaat echter een nieuw probleem. Het getallencontinuum heeft geen eigenschap, die het algebraisch van andere algebraisch afgesloten lichamen van de karakteristiek nul en oneindigen transcendentiegraad onderscheidt. Topologisch beschouwd bestaat er een menigte van meetkundige puntverzamelingen, die niet minder eenvoudige eigenschappen bezitten dan dit een- of tweedimensionale continuum. *Waarin is dan echter de eigenlijke oorzaak gelegen van de fundamenteele rol, die het getallencontinuum in de geheele wiskunde vervult?*

Klaarblijkelijk moet dit eene combinatie van topologische en algebraische eigenschappen zijn. Daarmede ontstaat echter een nieuw onderdeel van de wiskunde, de *topologische algebra: in een verzameling mogen zoowel topologische als algebraische relaties gegeven zijn, waartusschen eenvoudige continuiteitsrelaties bestaan; men vraagt, deze* (axiomatisch gedefinieerde) *verzamelingen in het algemeen te onderzoeken en te classificeeren.*

Dit onderzoek is nog in een ander opzicht van belang. Naast het lichaam der reëele en dat der complexe getallen en min of meer gelijkwaardig daarmede verschijnen in de moderne getallentheorie een reeks van andere lichamen: die der p-adische en der $\mathfrak{p}$-adische getallen van Hensel [1]), die evenals het lichaam der reëele getallen door metriseering of „Bewertung" en een zekere afsluiting (completeering) uit het lichaam der rationale getallen ontstaan. Voor de beschrijving dezer lichamen als metrische (bewertete) lichamen heeft men het lichaam der reëele getallen als hulpmiddel noodig. Om nu deze lichamen zonder gebruik te maken van de reëele ge-

1) K. Hensel, Zahlentheorie, Leipzig, Göschen, 1913; Theorie der algebraischen Zahlen, Teubner, 1908.

tallen op te bouwen en door interne eigenschappen te karakteriseeren, moet men de metriek door een topologisch omgevingssysteem vervangen: men komt dus weer op het terrein der topologische algebra.

In deze dissertatie zal een beknopt overzicht over de tot dusverre bereikte resultaten gegeven worden. Ter bekorting worden de voornaamste eigenschappen, zoowel uit de topologie [1]) als uit de algebra [2]) bekend ondersteld, en worden de meeste bewijzen slechts kort aangeduid. In eene serie artikelen, die ik binnenkort onder den titel „Zur topologischen Algebra" hoop te publiceeren, zullen de bewijzen volledig worden weergegeven en zal ook vollediger naar de bestaande litteratuur worden verwezen.

In Hoofdstuk I worden de begrippen T-groep, T-ring en T-lichaam, benevens het fundamenteele begrip der *completeering* ingevoerd. Hoofdstuk II bevat de theorie der $\mathfrak{b}_\nu$-adische ringen, die o.a. de theorie der geheele p-adische en $\mathfrak{p}$-adische getallen van Hensel en der geheele „ideale" getallen van Prüfer als bijzondere gevallen omvat. Hoofdstuk III bevat enkele stellingen over topologische, in het bijzonder Cantorsche groepen. In Hoofdstuk IV tenslotte wordt het in den aanvang gestelde probleem volledig opgelost. En wel blijkt, wanneer men afziet van het triviale geval, dat alle punten van elkaar geïsoleerd zijn (dat dus eigenlijk in het geheel geen topologische relaties bestaan), dat het lichaam der complexe getallen door de beide bovengenoemde existentiepostulaten van d' Alembert en Bolzano-Weierstrass volledig gekarakteriseerd is: *het lichaam der complexe getallen is het eenige mikroperfecte* [3]) *algebraisch afgesloten lichaam.* Tevens wordt aan de lichamen der p-adische en $\mathfrak{p}$-adische getallen hun plaats temidden der T-lichamen aangewezen.

De eigenlijke aanleiding tot deze studie der topologische algebra was de ontdekking, dat er, behalve het getallencontinuum en de

---

1) Vgl. bv. F. Hausdorf, Grundzüge der Mengenlehre, erste Auflage, Leipzig, Veit & Comp., 1914; Tietze-Vietoris, Enz. der math. Wiss.

2) Vgl. B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, Julius Springer, I 1930, II 1931.

3) *Mikroperfect* wordt hier in de beteekenis van: mikrocompact en dicht in zich zelf gebruikt.

daaruit afgeleide meerdimensionale varieteiten, nog andere verzamelingen zijn, met name de Cantorsche verzameling en de daaruit afgeleide „solenoiden" en „solenoidale varieteiten", [1]) die zoowel topologisch als algebraisch hoogst eenvoudige eigenschappen bezitten. Kort te voren was door O. Schreier [2]) de theorie der limesgroepen opgesteld. Met behulp der toen door ons opgestelde completeeringstheorie trachtten B. L. van der Waerden en ik in 1926 (destijds zonder succes) de perfectiseerbare lichamen te classificeeren. Vervolgens ontstond in 1928 de theorie der $\mathfrak{b}_\nu$-adische ringen, en gelukte in het voorjaar van 1930 de classificatie der mikroperfecte lichamen. De stellingen over T-groepen dateeren in hoofdzaak van Januari 1931. Inmiddels zijn van andere zijde (Krull, Baer e.a.) belangrijke topologisch-algebraische onderzoekingen verschenen.

1) D. van Dantzig, Ueber topologisch homogene Kontinua, Fundamenta Mathematicae, **14** (1930) 102—125.

2) O. Schreier, Abstrakte kontinuierliche Gruppen, Abh. Math. Sem. Hamburg **4** (1925) 15—32; Die Verwandtschaft stetiger Gruppen im grossen, idem **5** (1926) 233—244.

Hoofdstuk I.

COMPLETEERINGSTHEORIE.

§ 1 — *Topologische groepen.*

Een *topologische groep* of *T-groep* is een verzameling, waarin, 1e een groepoperatie, 2e een omgevingssysteem gedefinieerd is zóó dat eenerzijds aan de bekende groepaxiomata [1]), anderzijds aan de bekende omgevingsaxiomata van Hausdorf [2]) (met inbegrip der beide aftelbaarheidsaxiomata) voldaan is, terwijl bovendien de beide volgende axiomata vervuld zijn:

TG. 1. *Het inverse element van x hangt continu van x af.*
TG. 2. *Het product van x en y hangt continu van x en y af.*

Dan gelden de volgende definities en stellingen.

TG. 3. Een ondergroep van een T-groep is een T-groep.

TG. 4. Is $\mathfrak{H}$ een ondergroep van een T-groep $\mathfrak{G}$, dan is hare afsluiting [3]) $\bar{\mathfrak{H}}$ het ook.

TG. 5. Is $\mathfrak{H}$ Abelsch, dan is $\bar{\mathfrak{H}}$ het ook.

TG. 6. Is $\mathfrak{H}$ normaaldeeler, dan is $\bar{\mathfrak{H}}$ het ook.

TG. 7. Twee T-groepen $\mathfrak{G}$ en $\mathfrak{G}'$ heeten *isomeomorph,* [4]) als er een eeneenduidige afbeelding van $\mathfrak{G}$ op $\mathfrak{G}'$ bestaat, die 1e een (albraische) isomorphie, 2e een homeomorphie (topologische afbeelding) is.

TG. 8. Een *automeomorphie* van een T-groep is een (algebraische) automorphie, die tevens een homeomorphie is.

---

1) B. L. van der Waerden, l.c. bldz. 15. seq.

2) Hausdorf, l.c. bldz. 213 sec.

3) Afsluiting = „abgeschlossene Hülle".

4) Bij Schreier: Stetig isomorph; isomorph wordt hier in tegenstelling met het gebruik bij sommige schrijvers (Speiser, Weyl, e.a.), evenals bij v. d. W. voor de eeneenduidige relatie gebruikt.

TG. 9. Een T-groep is (topologisch) homogeen [1]). Geldt een topologische eigenschap dus voor één punt eener T-groep, zoo geldt ze voor ieder punt.

TG. 10. Een T-groep is hetzij discreet (dwz. alle punten zijn van elkaar geïsoleerd), hetzij dicht in zich zelf.

TG. 11. EenT-groep bevat een aftelbare overal dichte ondergroep.

TG. 12. De componente [2]) van het eenheidselement is een normaaldeeler [3]).

TG. 13. Er zijn willekeurig kleine omgevingen U van 1 met $U^{-1} = U$ [4]).

TG. 14. Is U een omgeving van 1, dan is er voor ieder natuurlijk getal n een omgeving V, waarvoor V^n in U bevat is. [5])

TB. 15. Een T-groep wordt door de nevenklassen naar een afgesloten ondergroep dubbelcontinu [6]) verdeeld. De verdeelingsruimte is topologisch homogeen.

TG. 16. De factorgroep naar een afgesloten normaaldeeler van een T-groep is zelf een T-groep.

TG. 17. De topologische transformaties eener mikrocompacte topologische verzameling in zich zelf vormen een T-groep zonder aftelbaarheidsaxioma [7]).

TG. 18. Een *1-rij* is een rij die naar 1 convergeert.

TG. 19. Een *fundamentaalrij* is een rij die aan het (multiplicatief geschreven) convergentiekriterium van Cauchy voldoet: $x_\nu x_\mu^{-1} \to 1$ [8]).

---

1) Vgl. D. van Dantzig, l.c. bldz. 4.

2) De componente van een punt is de grootste samenhangende verzameling die dat punt bevat.

3) Zonder bewijs bij Schreier. Met bewijs bij R. Baer, Zur Topologie der Gruppen, Crelle **160** (1929) 208—226.

4) U^{-1} is de verzameling der reciproken der elementen van U.

5) Onder het product van twee verzamelingen M en N wordt hier steeds de verzameling van alle producten xy, $x \epsilon M$, $y \epsilon N$ verstaan; analoog Mx en xM. Voorts is $V^2 = VV$, $V^3 = V^2 V$, enz.

6) Dwz. is $x_\nu \to x$, dan is $\lim x_\nu \mathfrak{H} = \lim\sup x_\nu \mathfrak{H} = \lim\inf x_\nu \mathfrak{H} = \mathfrak{H}$. Men kan de nevenklassen als „punten" eener nieuwe T-ruimte, de „verdeelingsruimte" beschouwen. Vgl. P. Alexandroff, Ueber stetige Abbildungen kompakter Räume, Math. Ann., **96** (1926) 555—571.

7) D. van Dantzig en B. L. van der Waerden, Ueber metrisch homogene Räume, Abh. Hamburg, **6** (1928) 367—376.

8) Grieksche indices duiden steeds *variabelen* aan, die bijna alle (soms:

TG. 20. Een rij heet *absoluut divergent* als ze geen fundamentaalrij als deelrij bevat.

TG. 21. Twee fundamentaalrijen x_ν en y_ν heeten *concurrent* als $x_\nu y_\nu^{-1} \rightarrow 1$ is.

TG. 22. Een fundamentaalrij x_ν heet *volledig in een omgeving U bevat,* als de doorsnede van alle omgevingen Ux_ν^{-1} een omgeving van 1 bevat.

TG. 23. Een T-groep is *compleet,* als iedere fundamentaalrij convergent is.

TG. 24. Een T-groep $\mathfrak{G}$ is *completeerbaar,* als ze isomeomorph is met een ondergroep $\mathfrak{H}$ eener complete T-groep. De afsluiting $\overline{\mathfrak{H}}$ heet dan een *completeering* van $\mathfrak{G}$. Deze is behoudens isomeomorphie eenduidig door $\mathfrak{G}$ bepaald.

TG. 25. *Completeeringsaxioma: de getransformeerden van een 1-rij met een fundamentaalrij vormen een 1-rij.*

Bij de volgende stellingen TG. 26. tot en met TG. 29. wordt het completeeringsaxioma verondersteld.

TG. 26. Is x_ν een fundamentaalrij, dan ook x_ν^{-1}. Is x_ν behoudens concurrentie bepaald, dan ook x_ν^{-1}.

TG. 27. Zijn x_ν en y_ν fundamentaalrijen, dan ook $x_\nu y_\nu$. Zijn x_ν en y_ν behoudens concurrentie bepaald, dan ook $x_\nu y_\nu$.

TG. 28. De concurrentie-relatie is reflexief, symmetrisch en transitief.

TG. 29. Is de fundamentaalrij x_ν volledig in U bevat en concurrent met y_ν, dan is ook y_ν volledig in U bevat.

TG. 30. *Opdat een T-groep $\mathfrak{G}$ completeerbaar zij, is noodig en voldoende, dat het completeeringsaxioma TG. 25 vervuld is.*

Bewijs. Dat TG. 25 noodig is, is triviaal. Is het vervuld, dan kan men alle fundamentaalrijen als elementen eener nieuwe verzameling $\mathfrak{F}$ nemen met de concurrentie als gelijkheidsrelatie (TG. 28) die wegens TG. 26, 27 een groep is. Wegens TG. 29 kan men als

---

oneindig veel) natuurlijke getallen doorloopen; latijnsche indices duiden constante natuurlijke getallen aan. Verschillende Grieksche indices zijn *onafhankelijke* variabelen. De pijl beteekent: convergeert naar. Overgang op een (geschikt te kiezen) deelrij wordt slechts dan door verandering, b.v. van een index ν in n_ν aangegeven, als gevaar voor verwarring bestaat; anders blijft de index onveranderd.

omgevingen in $\mathfrak{F}$ de verzamelingen van alle fundamentaalrijen nemen, die volledig in een omgeving U van $\mathfrak{G}$ bevat zijn. Men verifieert gemakkelijk, dat $\mathfrak{F}$ dan een complete T-groep is.

§ 2 — *Topologische ringen en lichamen.*

Een *topologische ring* of *T-ring*, resp. een *topologisch lichaam* of *T-lichaam* is een verzameling, waarin 1e een optelling, 2e een vermenigvuldiging, 3e een omgevingssysteem gedefinieerd is, zóó dat de optelling en vermenigvuldiging aan de bekende ring- resp. lichaamsaxiomata [1] en het omgevingssysteem aan de axiomata van Hausdorf (inclusive de beide aftelbaarheidsaxiomata) voldoen, terwijl bovendien de volgende continuiteits-axiomata vervuld zijn:

TR. 1, 2. *Som en verschil zijn continue functies.*

TR. 3. *Het product is een continue functie.*

en voor de T-lichamen bovendien:

TL. 1. *Het quotient is een continue functie van teller en noemer.*

Dan gelden vooreerst de met TG. 3, 4, 7, 8, 9, 10 analoge definities en eigenschappen, en voorts:

TR. 4. Is $\mathfrak{a}$ een ideaal in $\mathfrak{R}$, dan is zijn afsluiting $\bar{\mathfrak{a}}$ het ook.

TR. 5. = TL. 2. Een T-ring resp. een T-lichaam bevat een aftelbare overal dichte deelring resp. deellichaam.

TR. 6. Is U een omgeving van 0, $\varphi(x)$ een polynomium met coefficiënten uit $\mathfrak{R}$, dan is er een omgeving V van 0, zoodat $V\varphi(V)$ in U bevat is [2].

TR. 7. Een open ideaal is tevens afgesloten.

TR. 8. In een samenhangenden T-ring brengt iedere omgeving van 0 het eenheidsideaal voort.

TR. 9. Een T-ring wordt door de restklassen naar een afgesloten ideaal dubbelcontinu verdeeld.

TR. 10. De restklassenring naar een afgesloten ideaal in een T-ring is zelf een T-ring.

TR. 11. Een *nulrij* is een rij die naar nul convergeert.

TR. 12. Een *fundamentaalrij* is een rij, die aan het convergentiekriterium van Cauchy $x_\nu - x_\mu \to 0$ voldoet.

---

1) Vgl. B. L. van der Waerden, l.c. bldz. 37, 41.

2) De som van twee verzamelingen wordt analoog het product (vgl. 13) gedefinieerd. Is dus $\phi(x) = \Sigma a^i x^i$, dan is $\phi(V) = \Sigma a_i y_{i_1} \ldots y_{il}$, $y_{ij} \in V$.

TR. 13. Iedere convergente rij is een fundamentaalrij, maar niet omgekeerd.

TR. 14. Een rij heet *absoluut divergent* als ze geen fundamentaalrij als deelrij bevat.

TR. 15. Twee fundamentaalrijen x_ν en y_ν heeten *concurrent*, als $x_\nu - y_\nu \rightarrow 0$ is.

TR. 16. Een fundamentaalrij x_ν heet *volledig in eene omgeving U bevat*, als de doorsnede van alle omgevingen $U - x_\nu$ eene omgeving van 0 bevat.

TR. 17. Is x_ν een fundamentaalrij, dan ook ax_ν voor iedere $a \varepsilon \mathfrak{R}$. Is x_ν behoudens concurrentie bepaald, dan ook ax_ν.

TR. 18. Zijn x_ν en y_ν fundamentaalrijen, dan ook $x_\nu \pm y_\nu$. Zijn x_ν en y_ν behoudens concurrentie bepaald, dan ook $x_\nu \pm y_\nu$.

TR. 19. De concurrentierelatie is reflexief, symmetrisch en transitief.

TR. 20. Is de fundamentaalrij x_ν volledig in U bevat en concurrent met y_ν, dan is ook y_ν volledig in U bevat.

TR. 21. Een T-ring resp. T-lichaam heet *compleet*, als iedere fundamentaalrij convergent is.

TR. 22. = TL. 3. Een T-ring $\mathfrak{R}$ resp. een T.lichaam $\mathfrak{K}$ heet *completeerbaar*, als het isomeomorph is met een deelring $\mathfrak{S}$ (deellichaam $\mathfrak{L}$) van een complete ring (lichaam). De afsluiting $\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{L}$) heet een *completeering* van $\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{K}$). Deze is behoudens isomeomorphie eenduidig door $\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{K}$) bepaald.

TR. 23. *Ringcompleteeringsaxioma. De producten van een nulrij en een fundamentaalrij vormen een nulrij.*

TR. 24. Is aan TR. 23 voldaan, dan is het product $x_\nu y_\nu$ van twee fundamentaalrijen zelf een fundamentaalrij. Zijn x_ν en y_ν behoudens concurrentie bepaald, dan ook $x_\nu y_\nu$.

TR. 25. *Opdat een T-ring $\mathfrak{R}$ completeerbaar zij, is TR. 23 noodig en voldoende.*

Bewijs. Dat TR. 23 noodig is, is triviaal. Het zij vervuld. Beschouwt men dan alle fundamentaalrijen als elementen eener nieuwe verzameling $\mathfrak{S}$ met de concurrentie als gelijkheidsrelatie (TR. 19), en definieert men daarin som en product door $\{x_\nu\} + \{y_\nu\} = \{x_\nu + y_\nu\}$, $\{x_\nu\}\{y_\nu\} = \{x_\nu y_\nu\}$, dan zijn deze wegens TR. 17, 18 eenduidig bepaald en $\mathfrak{S}$ is een ring. Definieert men als omgevingen V in $\mathfrak{S}$ die verzamelingen van fundamentaalrijen, die volledig in eene omgeving U van $\mathfrak{R}$ bevat zijn, dan bewijst men gemakkelijk, dat $\mathfrak{S}$ een complete T-ring is. Is $\mathfrak{R}$ een lichaam, dan is $\mathfrak{S}$ wel een ring, maar niet noodzakelijk een lichaam.

Voor lichamen geldt voorts:

TL. 4. Een T-lichaam is tweevoudig homogeen [1]), dwz. ieder tweetal verschillende elementen a en b kan in ieder ander tweetal verschillende elementen a' en b' door eene topologische transformatie worden overgevoerd.

Bewijs. De transformatie is $x' = \{(x - b)\, a' - (x - a)\, b'\} : (a - b)$.

TL. 5. Een T-lichaam is hetzij nuldimensionaal, hetzij samenhangend.

Bewijs. Is dim $(\mathfrak{K}) \geqq 1$, dan bevat $\mathfrak{K}$ eene samenhangende deelverzameling M, die minstens twee verschillende punten a en b bevat. Dan kunnen echter wegens TL. 4 twee *willekeurige* verschillende punten van $\mathfrak{K}$ door een samenhangende deelverzameling verbonden worden, dus $\mathfrak{K}$ is samenhangend.

TL. 6. *Lichaamcompleteeringsaxioma. Is x_ν een fundamentaalrij en geen nulrij, en is $x_\nu y_\nu$ een nulrij, dan is y_ν een nulrij*, dwz. door completeering ontstaan geen nuldeelers.

TL. 7. Is aan TL. 6 voldaan, en is x_ν een fundamentaalrij en geen nulrij, dan ook x_ν^{-1}. Is x_ν behoudens concurrentie bepaald, dan ook x_ν^{-1}.

TL. 8. — *Een T-lichaam is dan en slechts dan completeerbaar, als aan de beide completeeringsaxiomata TR. 23 en TL. 6 voldaan is.*

Bewijs. Dat de voorwaarden noodig zijn is triviaal. Zijn ze vervuld, en definieeren we $\mathfrak{L}$ als $\mathfrak{S}$ in TR. 25, dan is $\mathfrak{L}$ een ring, die wegens TL. 6 geen nuldeelers heeft.

Zijn x_ν en y_ν fundamentaalrijen en geen nulrijen, dan bestaat $x_\nu y_\nu^{-1}$ wegens TL. 7, TR. 24, dus $\mathfrak{L}$ is een lichaam.

TL. 9. De reciproke rij eener nulrij divergeert absoluut.

TL. 10. Een compact lichaam is eindig.

---

1) Vgl. D. van Dantzig, l.c. bldz. 4.

TL. 11. *Perfectiseeringsaxioma. De reciproke rij eener absoluut divergente rij is een nulrij.*

TL. 12. *De completeering $\mathfrak{L}$ van een oneindig lichaam, $\mathfrak{S}$ dat aan TL. 11 voldoet, is mikroperfect.*

Bewijs. Ware $\mathfrak{L}$ niet dicht in zich zelf, dan zou er geen nulrij, dus geen fundamentaalrij bestaan, dus iedere rij ware absoluut divergent. De reciproken zouden dan echter toch een nulrij vormen. Bewezen moet dus nog worden, dat $\mathfrak{L}$ mikrocompact is. Breidt men $\mathfrak{L}$ daartoe uit met een punt ∞, en definieert men als omgevingen van ∞ de reciproke verzamelingen der omgevingen van 0 (tezamen met het punt ∞), dan is de aldus uitgebreide verzameling compact, dus $\mathfrak{L}$ is mikrocompact.

In Hoofdstuk IV zal blijken, dat deze stelling omkeerbaar is, dus dat TL. 11 bij ieder mikroperfect lichaam vervuld is.

Hoofdstuk II.

ABSTRACTE $\mathfrak{d}_\nu$-ADISCHE RINGEN.

§ 1 — *Additieve decompositie.*

Zij $\mathfrak{R}$ een willekeurige aftelbare ring, $\mathfrak{d}_\nu$ eene willekeurige veelvoudenketting van idealen: $\mathfrak{d}_{\nu+1} \equiv 0\,(\mathfrak{d}_\nu)$, waarvan het KGV (de doorsnede) het nulideaal is. Dan geldt:

TR. 26. De restklassen modulo $\mathfrak{d}_\nu$ voldoen aan de omgevingsaxiomata van Hausdorf en definieeren $\mathfrak{R}$ als T-ring. $\mathfrak{R}$ is completeerbaar; de completeering noemen we den *$\mathfrak{d}_\nu$-adischen ring* $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}\,(\mathfrak{d}_\nu)$. Ieder element $x \varepsilon \mathfrak{R}$ bepaalt eenduidig een element van $\mathfrak{S}$, dat we met x geidentificeerd denken.

TR. 27. Iedere fundamentaalrij is concurrent met een *gereduceerde rij*, d.i. eene rij waarvoor $x_{\nu+1} \equiv x_\nu\,(\mathfrak{d}_\nu)$ is.

TR. 28. *Iedere $\mathfrak{d}_\nu$-adische ring is nuldimensionaal. Zijn alle restklassenringen $\mathfrak{R}/\mathfrak{d}_\nu$ eindig, dan is $\mathfrak{S}$ compact en homeomorph met de Cantorsche verzameling.*

TR. 29. *Iedere met de Cantorsche verzameling homeomorphe ring is $\mathfrak{d}_\nu$-adisch.* Bewijs. Volgt uit Hoofdstuk III, TG. 37.

TR. 30. *Isomorphiestelling. Indien* $\mathfrak{d}_\nu \equiv 0\ (\mathfrak{d}_\mu') \equiv 0\ (\mathfrak{d}_\rho)$ *is* $(\nu, \mu, \varrho \to \infty)$, *dan zijn* $\mathfrak{R}\,(\mathfrak{d}_\nu)$ *en* $\mathfrak{R}\,(\mathfrak{d}_\nu')$ *isomorph.*

Opmerking. Indien de doorsnede der $\mathfrak{d}_\nu$ niet het nulideaal, maar een ander ideaal $\mathfrak{d}$ is, dan wordt door topologiseering naar restklassen en completeering een $\mathfrak{d}_\nu$-adische ring verkregen, waarin niet $\mathfrak{R}$ maar $\mathfrak{R}/\mathfrak{d}$ dicht ligt. Dit zij verder toegelaten. Bijzonder geval: alle $\mathfrak{d}_\nu$ zijn gelijk, $\mathfrak{R}\,(\mathfrak{d}_\nu)$ is de restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{d}$.

TR. 31. Zijn alle idealen $\mathfrak{d}_\nu = \mathfrak{q}_\nu$ primair [1]) en behooren ze bij

---

1) Een ideaal $\mathfrak{q}$ is *primair*, als uit $xy \equiv 0\ (\mathfrak{q})$, $x \not\equiv 0\ (\mathfrak{q})$ volgt, dat voor een geschikt gekozen natuurlijk getal n $y^n \equiv 0\ (\mathfrak{q})$ is. Is steeds $n = 1$, dan heet het ideaal *priem*.

hetzelfde priemideaal, dan noemen we den Ring $\mathfrak{R}\,(\mathfrak{q}_\nu)$ *primitief.*

TR. 32. Zijn de $\mathfrak{b}_\nu$ machten van een priemideaal $\mathfrak{p}$, zijn twee willekeurige verschillende machten van $\mathfrak{p}$ verschillend, en vormen de $\mathfrak{p}^\nu$ eene compositiereeks, dan noemen we $\mathfrak{R}\,(\mathfrak{b}_\nu) = \mathfrak{R}\,(\mathfrak{p}^\nu)$ $\mathfrak{p}$-*adisch.* Is in het bijzonder $\mathfrak{p} = (\pi)$ een hoofdideaal, dan noemen we $\mathfrak{R}\,(\mathfrak{p}^\nu) = \mathfrak{R}\,(\pi^\nu)$ ook π-*adisch.*

TR. 33. Is ieder ideaal van $\mathfrak{R}$ op minstens een $\mathfrak{b}_n$ deelbaar, dan noemen we $\mathfrak{R}\,(\mathfrak{b}_\nu)$ *universeel* (met betrekking tot $\mathfrak{R}$). Zijn $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots$ de aftelbaar vele idealen van $\mathfrak{R}$, dan krijgt men den universeelen ring over $\mathfrak{R}$ door $\mathfrak{b}_\nu = [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu]$ te stellen. Voorbeeld: de „ideale" getallen van Prüfer [1]) en von Neumann [2]). Volgens TR. 30 kan men deze verkrijgen, door (b.v. in den ring der geheele rationale getallen) $\mathfrak{b}_\nu = \nu!$ te stellen.

Hulpstelling I. Is $\mathfrak{R}$ een ring met eenheidselement, en hebben de idealen $\mathfrak{a}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ twee aan twee geen gemeenen deeler, dan is het systeem van congruenties $x \equiv c_i\ (\mathfrak{a}_i)$ steeds en modulo $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$ eenduidig op te lossen.

We veronderstellen verder dat in $\mathfrak{R}$ de eindigheidsconditie (deelerkettingstelling) vervuld is. Ieder ideaal is dan als KGV van eindig vele grootste primaire componenten te schrijven [3]). Dan geldt:

Hulpstelling 2. *Is* $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k] \neq (0)$ *een ideaal in* $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{b} = [\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_l]$ *een veelvoud van* $\mathfrak{a}$, *zijn de* $\mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{s}_j$ *grootste primaire componenten en is van de bijbehoorende priemidealen* $\mathfrak{p}_i$ *resp.* $\mathfrak{r}_j$ *geen een echt veelvoud van een ander, dan kan door herrangschikking der* $\mathfrak{s}_j$ *bereikt worden, dat* $\mathfrak{s}_i \equiv 0\ (\mathfrak{q}_i)$, $(1 \leq i \leqq k)$ *is, zoodat* $k \leq l$ *is.* Bewijs. Het priemideaal $\mathfrak{r}_j$ kan met hoogstens één $\mathfrak{p}_i$ identiek zijn; *indien* zulk een $\mathfrak{p}_i$ bestaat, brengt men $\mathfrak{s}_j$ op de i-de plaats. Aan het gestelde is dan voldaan.

We onderstellen verder: $\mathfrak{R}$ is een ring met eenheidselement en eindigheidsconditie; de bij de grootste primaire componenten der $\mathfrak{b}_\nu$ behoorende priemidealen hebben twee aan twee geen gemeenen deeler. Dan geldt:

---

1) H. Prüfer, Neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie, Math. Ann., **94** (1925) 198—243.

2) Vgl. J. von Neumann, Zur Prüferschen Theorie der idealen Zahlen, Acta Szégéd, **2** (1927) 193—227.

3) Vgl. E. Noether. Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Ann., **83** (1921) 25—66.

TR. 34. $\mathfrak{R}(\mathfrak{d}_\nu)$ *is directe som van eindig of aftelbaar oneindig veel primitieve ringen* [1]).

Bewijs. Zij $\mathfrak{d}_\nu = [\mathfrak{q}_{1\nu}, \ldots, \mathfrak{q}_{k\nu}] = \mathfrak{q}_{1\nu} \ldots \mathfrak{q}_{k\nu}$, $k = k_\nu$. Wegens hulpstelling 2 kan men aannemen, dat $\mathfrak{q}_{r,\nu+i} \equiv 0\ (\mathfrak{q}_{r\nu})$ is. Formaliter stellen we $\mathfrak{q}_{r\nu} = (1)$ voor $r > k_\nu$. Verder zij $\mathfrak{c}_{r\nu} = \mathfrak{d}_\nu : \mathfrak{q}_{r\nu}$. Dan is het systeem van congruenties $e_{r\nu} \equiv 1\ (\mathfrak{q}_{r\nu})$, $e_{r\nu} \equiv 0\ (\mathfrak{c}_{r\nu})$ wegens hulpstelling 1 voor iedere ν oplosbaar, en wel modulo $[\mathfrak{q}_{r\nu}, \mathfrak{c}_{r\nu}] = \mathfrak{d}_\nu$ eenduidig. De $e_{r\nu}$ vormen (voor vaste r) eene fundamentaalrij en bepalen dus een element $e_r \varepsilon \mathfrak{R}(\mathfrak{d}_\nu)$. Dan is $e_r \equiv 1\ (\mathfrak{q}_{r\nu})$, $e_r \equiv 0$ $(\mathfrak{q}_{s\nu})$, $e_r\, e_r = e_r$, $e_r\, e_s = 0$ voor $s \neq r$, dus $\sum_{\rho=1}^{\infty} e_\rho = 1$.

Stelt men voor een willekeurig element $x \varepsilon \mathfrak{S}$ $x_r = x . e_r$, dan is dus $x = \sum_{1}^{\infty} x_\rho$; $\mathfrak{S}$ is dus directe som der idealen $\mathfrak{e}_r = (e_r) = [\mathfrak{q}_{r1}, \mathfrak{q}_{r2}, \ldots]$.

Elk ideaal is echter isomorph met den primitieven ring $\mathfrak{R}(\mathfrak{q}_{r\nu})$, waarmede de stelling bewezen is.

§ 2 — *Primitieve en $\mathfrak{p}$-adische ringen.*

Onderstelling: Eindigheidsconditie.

We beschouwen een der ringen $\mathfrak{R}(\mathfrak{q}_{r\nu})$ en laten den index r weg. Zonder beperking kunnen we aannemen, dat de $\mathfrak{q}_\nu$ eene compositiereeks [2]) vormen ($\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{R}$, $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}$).

TR. 35. Een element $x \varepsilon \mathfrak{S}$ is *van de n-de orde*, als $x \equiv 0\ (\mathfrak{q}_n)$ $\not\equiv 0\ (\mathfrak{q}_{n+1})$ is.

TR. 36. Is q_n een willekeurig element van de n-de orde uit $\mathfrak{R}$, dan is $\mathfrak{q}_n = (q_n, \mathfrak{q}_{n+1})$.

TR. 37. *Ieder element kan in eene convergente reeks* $x = \sum_{0}^{\infty} \xi_\nu q_\nu$ *ontwikkeld worden, waarbij de* ξ_ν *onafhankelijk van elkaar een re-*

1) Hieronder kunnen ook restklassenringen naar primaire idealen voorkomen. Dit geval wordt verder niet explicite behandeld; de stellingen en bewijzen zijn geheel analoog met het algemeene geval, alleen gaan de oneindige sommen en producten in eindige over.

2) Een compositiereeks is een veelvoudenketting van primaire idealen, die bij een zelfde priemideaal behooren, en alle verschillende zijn, terwijl er geen ideaal tusschen twee opeenvolgende kan worden gevoegd, zonder dat een dezer eigenschappen verloren gaat.

presentantensysteem modulo $\mathfrak{p}$ *doorloopen, terwijl de* q_ν *willekeurige elementen van de orde* ν *zijn.*

Bewijs. Is x gegeven door middel van de gereduceerde fundamentaalrij (TR. 28) x_ν, dan kan men de ξ_ν successievelijk bepalen door $x_{n+1} - \sum_{i=0}^{n} \xi_i q_i \equiv \xi_{n+1} q_{n+1} \ (\mathfrak{q}_{n+1})$.

Onderstellingen: $\mathfrak{R}$ is een geheel afgesloten ring zonder nuldeelers, met deelerkettingstelling en (beperkte) veelvoudenkettingstelling.

Uit de onderstelling volgt, dat een eenheidselement bestaat, dat twee verschillende priemidealen geen gemeenen deeler hebben, dat ieder primair ideaal macht van een priemideaal is, en dat de exponent dier macht eenduidig bepaald is. De reeksontwikkelingen van de vorige paragraaf zijn dus zeker geldig. We stellen derhalve $\mathfrak{q}_\nu = \mathfrak{p}^\nu$, terwijl de q_ν dezelfde beteekenis als boven hebben. Dan geldt:

TR. 38. (Verscherping van TR. 36). $\mathfrak{p}^n = (q_n, \mathfrak{p}^\nu)$, $\nu \geqq n$.

TR. 39. Het product van twee elementen van de orde m resp. n heeft de orde $m + n$.

TR. 40. Is $\pi \equiv 0 \ (\mathfrak{p}) \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^2)$, dan is voor alle ν $\pi^\nu \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^\nu) \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{\nu+1})$. In de reeksontwikkeling van TR. 37 kan dus eenvoudig $q_n = \pi^n$ gesteld worden.

TR. 41. *Ieder element van een* $\mathfrak{p}$*-adische ring kan in een convergente machtreeks* $x = \sum_{0}^{\infty} \xi_\nu \pi^\nu$ *ontwikkeld worden, waar* π *een willekeurig element van de orde 1 is, terwijl de* ξ_ν *onafhankelijk van elkaar een representantensysteem modulo* $\mathfrak{p}$ *doorloopen.*

TR. 42. Een $\mathfrak{p}$-adische ring $\mathfrak{S}$ heeft geen nuldeelers; zijn quotientenring is dus een lichaam $\mathfrak{L}$. Is $\mathfrak{S}$ compact, dan is $\mathfrak{L}$ mikroperfect. Omgekeerd leert de theorie der T-lichamen (Hoofdstuk IV), dat ieder mikroperfect nuldimensionaal lichaam quotientenlichaam van een $\mathfrak{p}$-adischen ring is.

TR. 43. Ieder element van de orde nul is een eenheid. Twee willekeurige elementen van gelijke orde zijn geassocieerd.

TR. 44. *Iedere* $\mathfrak{p}$*-adische ring is een hoofdideaalring* [1].

1) Eén *hoofdideaalring* is een ring zonder nuldeelers met eenheidselement, waarin ieder ideaal hoofdideaal is (dwz. door één element voortgebracht wordt). Vgl. B. L. van der Waerden. l.c. § 16.

Bewijs. Bewezen moet slechts worden, dat ieder ideaal in $\mathfrak{S}$ hoofdideaal is. Dit volgt uit het feit, dat iedere verzameling van elementen een GGD heeft, welke lineair er van afhangt, nl. π^n als n het kleinste der ordegetallen (vgl. TR. 35) van de elementen der verzameling is.

TR. 45. *Iedere* $\mathfrak{p}$*-adische ring is* π*-adisch.*

Bewijs. Volgt onmiddellijk uit TR. 41 of 44.

TR. 46. Omkeering van TR. 44. *Iedere* $\mathfrak{b}_\nu$*-adische hoofdideaalring is* $\mathfrak{p}$*-adisch.*

Bewijs. Daar $\mathfrak{S}$ geen nuldeelers heeft, is $\mathfrak{S}$ primitief: $\mathfrak{b}_\nu = \mathfrak{q}_\nu$. Voorts is $\mathfrak{R}\,(\mathfrak{q}_\nu) = (1)$, $\mathfrak{q}_\nu = (q_\nu)$, $\mathfrak{p} = (\pi)$. Wegens $q_{\nu+1} \equiv 0\ (q_\nu)$ is $q_{\nu+1} = u_\nu q_\nu$, dus $u_\nu \equiv 0\ (\mathfrak{p})$, dus $u_\nu = v_\nu \pi$. Dan moet echter v_ν een eenheid zijn, dus is ook $q_\nu : \pi^\nu$ een eenheid, dwz. $\mathfrak{R}\,(\mathfrak{q}_\nu) = \mathfrak{R}\,(\pi^\nu)$.

§ 3 — *Multiplicatieve decompositie.*

Onderstelling: als op bldz. 15.

TR. 47. Stelt men $e'_r = 1 - e_r$, dan is $e'_r \equiv 0\ (\mathfrak{q}_{r\nu})$, $e'_r \equiv 1\ (\mathfrak{q}_{s\nu})$; $e'_r\, e'_r = e'_r$, $e'_r\, e'_s = e'_r + e'_s - 1$, $e'_r\, e_r = 0$, $e'_r\, e_s = e_s$ voor $s \neq r$.

TR. 48. Stelt men $x'_r = x_r + e'_r$, dan is $x'_r\, x'_s = x_r + x_s + 1 - e_r - e_s$ $(r \neq s)$.

TR. 49. *Voor ieder element* x *van* $\mathfrak{S}$ *is* $x = \prod\limits_{\rho=1}^{\infty} x'_\rho$, *waar het oneindige product steeds convergeert.*

TR. 50. De factoren x'_ρ zijn eenduidig bepaald, in het algemeen echter niet primair.

TR. 57. $x'_r\, y'_r = x_r y_r + e'_r$.

TR. 52. De factoren x'_ρ in TR. 49 zijn dan en slechts dan priem resp. primair, als de bijbehoorende „coordinaten" x_r het zijn.

TR. 53. *In* $\mathfrak{R}\,(\mathfrak{b}_\nu)$ *bestaat dan en slechts dan een behoudens eenheden eenduidige ontbinding in factoren, als dit met elk der primitieve ringen* $\mathfrak{R}\,(\mathfrak{q}_{r\nu})$ *het geval is.*

Wegens TR. 44, 45 geldt dus:

TR. 54. *In den* $\mathfrak{b}_\nu$*-adischen ring* $\mathfrak{S}$ *bestaat dan en slechts dan een steeds uitvoerbare ontbinding in priemfactoren, als al zijn primitieve componenten* $\mathfrak{p}$*-adisch zijn. In dit geval zijn de factoren* x_r *behoudens eenheden machten der priemfactoren* π_r*; de factoren* x'_r *zijn behoudens eenheden machten van de priemfactoren* $\pi'_r = 1 - e_r + \pi_r$.

HOOFDSTUK III.

EENIGE STELLINGEN OVER TOPOLOGISCHE, IN HET BIJZONDER CANTORSCHE GROEPEN.

§ 1 — *Samenhang.*

TG. 31. Een open ondergroep eener T-groep is tevens afgesloten [1]).

TG. 32. Een samenhangende groep wordt door een willekeurige omgeving van *1* voortgebracht.

TG. 33. *Een compacte groep* $\mathfrak{G}$, *die door iedere omgeving van 1 voortgebracht wordt, is samenhangend.*

Bewijs. Ware $\mathfrak{G}$ vereeniging van twee afgesloten en open echte deelverzamelingen F_1 en F_2, $1 \varepsilon F_1$, dan was er voor iedere omgeving U van *1* een grootste getal n met $U^n \subset F_1$. Er was dus een product $x = ab \ldots . d \varepsilon F_1$ van $n + 1$ factoren uit U. Stelt men $y = b \ldots . d$, dan ware $y \varepsilon F_1$ en $x = ay$. Laat men dan U willekeurig klein worden, dan vindt men een rij $x_\nu = a_\nu y_\nu$ met $a_\nu \to 0$. Overgang tot eene convergente deelrij der x_ν, voert dan tot een contradictie.

TG. 34. *De vorige stelling geldt ook voor mikrocompacte groepen.*

Bewijs. Is $\mathfrak{H}$ de component van *1*, dan is $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ een T-groep (TG. 12, 16), die ook mikrocompact, maar nuldimensionaal is. Neemt men in $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ voor F_1 eene compacte omgeving van $\mathfrak{H}$ met leege begrenzing, dan blijft het bewijs van TG. 33 geldig. Dus $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ bestaat uit slechts één punt, dwz. $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}$. Is $\mathfrak{G}$ niet mikrocompact, dan geldt de stelling in het algemeen niet; voorbeeld: groep der rationale getallen met natuurlijke limesrelaties.

TG. 35. Een (gesloten) *Cantorsche groep* is een T-groep, die met

1) Vgl. R. Baer, l.c. Bldz. 6.

de Cantorsche (nuldimensionale compacte in zich dichte) verzameling homeomorph is.

TG. 36. Een open Cantorsche groep is een groep die met een mikroperfecte nuldimensionale verzameling (complement van een punt in eene Cantorsche verzameling, of ook vereeniging van aftelbaar vele van elkaar geïsoleerde Cantorsche verzamelingen) homeomorph is.

TG. 37. *Een open of gesloten Cantorsche groep bevat willekeurig kleine open ondergroepen.*

Bewijs. Is F_1 een willekeurig kleine compacte omgeving van 1 met leege begrenzing, dan is het bewijs van TG. 33. toepasselijk. Er kan dus niet voor iedere U een getal n bestaan, dwz. voor een U zijn alle $U^\nu \subset F_1$, dwz. de door U voortgebrachte groep is in F_1 bevat.

TG. 38. *Een* (gesloten) *Cantorsche groep bevat willekeurig kleine open normaaldeelers.*

Bewijs. Volgens TG. 37 bestaan er open ondergroepen $\mathfrak{H}_\nu$, die 1 defineeren. Zij $H_{\nu n}$ de vereeniging van alle producten van n met $\mathfrak{H}_\nu$ geconjugeerde ondergroepen $x^{-1}\mathfrak{H}_\nu x$, dan is ook $H_{\nu n}$ eene omgeving van 1 met leege begrenzing. De door $\mathfrak{H}_\nu$ voortgebrachte normaaldeeler $\mathfrak{L}_\nu$ is de vereeniging $\mathfrak{S}\,(H_{\nu 1}, H_{\nu 2}, \ldots.)$. Ware de stelling niet juist, dan was er voor iedere ν een grootste n met $H_{\nu n} \subset U$. Er waren dus elementen $y_\nu = x_\nu^{-1} h_\nu x_\nu z_\nu$, $x_\nu \varepsilon \mathfrak{G}$, $h_\nu \varepsilon \mathfrak{H}_\nu$, $z_\nu \varepsilon H_{\nu n}$, die niet in U lagen. Neemt men eene convergente deelrij $x_\nu \rightarrow x$, $z_\nu \rightarrow z$, dan ware $\lim\, y_\nu = z$ wegens $h_\nu \rightarrow 1$, wat niet mogelijk is.

§ 2 — *Monothetische groepen en radiceerbaarheid.*

TG. 39. Een *monothetische* groep is een complete groep, waarin een oneindige cyklische groep dicht ligt.

Voorbeelden:

1. de draaiïngsgroep in het platte vlak (cirkelgroep).
2. de n-dimensionale torus-groep, dwz. het directe product van n cirkelgroepen.
3. de additieve groep der geheele n-adische getallen.
4. de n-adische solenoide [1].
5. de directe producten van eindig vele solenoiden of cirkelgroepen.

1) Vgl. D. van Dantzig, bldz. 4.

TG 40. Iedere monothetische groep is Abelsch.

TG. 41. Vermoeden: iedere in zich dichte monothetische groep is compact.

TG. 42. Een element $x \varepsilon \mathfrak{G}$ heet *n-radiceerbaar*, als (minstens) een element $z \varepsilon \mathfrak{G}$ met $z^n = x$ bestaat.

TG. 43. Een element $x \varepsilon \mathfrak{G}$ heet *onbepaald radiceerbaar*, als het voor iedere n n-radiceerbaar is.

TG. 44. Een groep $\mathfrak{G}$ heet *n-radiceerbaar*, resp. *onbepaald radiceerbaar*, als ieder element van $\mathfrak{G}$ het is.

TG. 45. *Een compacte samenhangende monothetische groep is onbepaald radiceerbaar.*

Bewijs. Volgens TG. 32 wordt $\mathfrak{G}$ door een willekeurig kleine omgeving U van 1 voortgebracht. Zij x het voortbrengende element van $\mathfrak{G}$ en d de GGD der exponenten van alle machten van x die in U liggen. De door $y = x^d$ voortgebrachte monothetische groep is dus $= \mathfrak{G}$. Speciaal is $x = \lim y^{a_\nu}$. Is nu $d \equiv 0\ (p)$, b.v. $d = rp$, en stelt men $z = \lim x^{ra_\nu}$, dan is $x = z^p$. Is echter $d \not\equiv 0\ (p)$ voor alle omgevingen U, dan ligt in iedere U minstens een x^k met $k \not\equiv 0\ (p)$. Dan is $k = r + lp$, $ru + pv = 1$. Stelt men dan $t = x^{v-lu}$ en laat men U willekeurig klein worden, dan convergeert een deelrij der t naar een element z met $z^p = 1$, daar x^r een 1-rij doorloopt. In beide gevallen is x dus p-de macht. Dan is echter iedere macht van x, dus ook ieder element van $\mathfrak{G}$ p-radiceerbaar. Daar dit voor ieder priemgetal, dus voor ieder geheel getal geldt, is $\mathfrak{G}$ onbepaald radiceerbaar.

TG. 46. Vermoeden: Iedere compacte samenhangende groep is onbepaald radiceerbaar.

TG. 47. *Een compacte onbepaald radiceerbare groep $\mathfrak{G}$ is samenhangend.*

Bewijs. Zij $\mathfrak{H}$ de componente van 1; $\mathfrak{H}$ is een afgesloten normaaldeeler (TG. 12) en de factorgroep $\mathfrak{G}/\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$ is compact, onbepaald radiceerbaar en nuldimensionaal. Zij $\mathfrak{y}_1 = y\mathfrak{H}$ een element der factorgroep. Indien $\mathfrak{y}_n$ reeds gedefinieerd is, zij $\mathfrak{y}_{n+1}$ een willekeurig maar vast gekozen p-de machtswortel uit $\mathfrak{y}_n$. Zij $\mathfrak{K}$ de afsluiting der door de $\mathfrak{y}_\nu$ voortgebrachte groep. Men bewijst dan, dat in iedere omgeving van $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{K}$ een element $\mathfrak{y}_1{}^q$ ligt, waarin $q = p^d - 1$ is. Daaruit volgt dan gemakkelijk, dat $\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{H}$, dus $\mathfrak{G}$ samenhangend is.

§ 3 — *$\mathfrak{L}_\nu$-adische groepen.*

Zij $\mathfrak{G} = \mathfrak{L}_0$ een aftelbare groep, $\mathfrak{L}_{\nu+1}$ een normaaldeeler van $\mathfrak{L}_\nu$; de doorsnede aller $\mathfrak{L}_\nu$ zij de eenheid.

Dan geldt:

TG. 48. De nevenklassen naar de $\mathfrak{L}_\nu$ voldoen aan de omgevingsaximata van HAUSDORF en definieeren $\mathfrak{G}$ als T-groep.

TG. 49. $\mathfrak{G}$ is completeerbaar; de completeering $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}\,(\mathfrak{L}_\nu)$ is nuldimensionaal en heet de *$\mathfrak{L}_\nu$-adische groep* van $\mathfrak{G}$ [1]).

TG. 50. Zijn de factorgroepen $\mathfrak{L}_{\nu+1}/\mathfrak{L}_\nu$ eindig (naar we verder aannemen), dan is $\mathfrak{G}\,(\mathfrak{L}_\nu)$ een (gesloten) Cantorsche groep.

TG. 51. Iedere (gesloten) Cantorsche groep is $\mathfrak{L}_\nu$-adisch t.o.v. iedere aftelbare overal dichte ondergroep. (vgl. TG. 38).

TG. 52. *Isomorphiestelling. Is $\mathfrak{L}'_\mu$ een tweede rij van normaaldeelers, en is $\mathfrak{L}_\nu \subset \mathfrak{L}'_\mu \subset \mathfrak{L}_\rho$, dan zijn $\mathfrak{G}\,(\mathfrak{L}_\nu)$ en $\mathfrak{G}\,(\mathfrak{L}'_\nu)$ isomeomorph.*

TG. 53. *Stelling van Jordan-Hölder. Vormen de $\mathfrak{L}_\nu$ een compositiereeks* [2]) (wat men wegens TG. 52 steeds onderstellen kan), *dan zijn de priemfactoren $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}_\nu$ behoudens isomorphie op de volgorde na bepaald.*

Indien meerdere isomorphe priemfactoren voorkomen, zijn de multipliciteiten in dien zin bepaald, dat in twee verschillende compositiereeksen hetzij gelijke eindige aantallen hetzij in beide oneindig veel dezer isomorphe priemfactoren voorkomen.

TG. 54. Is $b_\nu = o\,(\mathfrak{G}/\mathfrak{L}_\nu)$ de orde van $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}_\nu$ ($= i\,(\mathfrak{L}_\nu)$ = de index van $\mathfrak{L}_\nu$), dan vormen de b_ν een veelvoudenketting. Bij overgang op een andere normaaldeelerrij is $b_\nu \equiv 0\ (b'_\mu) \equiv 0\ (b_\rho)$.

TG. 55. De *orde* van $\mathfrak{G}\,(\mathfrak{L}_\nu)$ is een symbolisch product $o\,(\mathfrak{F}) = {}$ $= p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots,\ p_\nu =$ priem, waarin $\lambda_i = n$ is als bijna alle b_ν door p^n maar niet door p^{n+1} deelbaar zijn en $\lambda_i = \infty$ als de b_ν door willekeurig hooge machten van p_i deelbaar zijn; $o\,(\mathfrak{F})$ is onafhankelijk van de keuze der $\mathfrak{L}_\nu$ (vgl. TG. 52, 54).

TG. 56. Stelt men de orde en den index van een ondergroep $\mathfrak{H}$

---

1) Deze groepen komen in principe met de S-groepen van Baer overeen Voor Abelsche groepen reeds bij H. Prüfer, Theorie der Abelschen Gruppen, II. Ideale Gruppen, Math. Zeitschr. **22** (1925) 222—249.

2) Een *compositiereeks* is een rij van groepen $\mathfrak{H}_\nu$, waarbij $\mathfrak{H}_{\nu+1}$ normaaldeeler in $\mathfrak{H}_\nu$ is, terwijl tusschen $\mathfrak{H}_\nu$ en $\mathfrak{H}_{\nu+1}$ geen groep gevoegd kan worden zonder dat deze eigenschap verloren gaat.

door analoge formeele producten voor, dan geldt: $o(\mathfrak{H}) \cdot i(\mathfrak{H}) =$
$= o(\mathfrak{G})$.

TG. 57. Een *Sylowondergroep* van $\mathfrak{G}(\mathfrak{L}_\nu)$ is een ondergroep, waarvan de orde een (eindige of oneindige) macht van een priemgetal is, terwijl de index dat priemgetal niet als factor bevat.

TG. 58. *Een $\mathfrak{L}_\nu$-adische groep bevat voor iederen priemfactor p van hare orde een Sylowondergroep* [1]).

Bewijs. We beperken ons tot het geval, dat $o(\mathfrak{G}) = p^{\infty} \cdot \eta$ is. Wegens TG. 52., 38 kan men aannemen, dat de $\mathfrak{L}_\nu$ normaaldeelers *in* $\mathfrak{G}$ zijn. Voor iedere ν is er een ondergroep $\mathfrak{H}_\nu \supset \mathfrak{L}_\nu$, zoo dat $\mathfrak{H}_\nu/\mathfrak{L}_\nu$ een Sylowondergroep van $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}_\nu$ is. Dan is ook $(\mathfrak{H}_\nu, \mathfrak{L}_i)/\mathfrak{L}_i$, $i \leqq \nu$ een Sylowondergroep van $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}_i$. Onder de groepen $(\mathfrak{H}_\nu, \mathfrak{L}_1)/\mathfrak{L}_1$ moet minstens één oneindig vaak voorkomen. Laat alle andere $\mathfrak{H}_\nu$ weg. Van de overblijvende moet minstens één $(\mathfrak{H}_\nu, \mathfrak{L}_2)/\mathfrak{L}_2$ oneindig vaak voorkomen. Laat alle andere weg, enz. Er ontstaat dan een deelrij van ondergroepen $\mathfrak{H}_\nu$, waarvoor $(\mathfrak{H}_\nu, \mathfrak{L}_i)/\mathfrak{L}_i$ Sylowgroepen zijn. De doorsnede dezer groepen $\mathfrak{H}_\nu$ is de gezochte Sylowgroep.

TG. 59. *Twee Sylowondergroepen van $\mathfrak{G}(\mathfrak{L}_\nu)$ (voor gelijke p) zijn geconjugeerd.*

Bewijs. Volgt onmiddellijk uit de geldigheid der stelling voor eindige groepen en de compactheid van $\mathfrak{G}(\mathfrak{L}_\nu)$.

---

1) Voor de overeenkomstige stelling voor eindige groepen (evenals voor de definitie van „orde" van een groep, Sylowgroepen, enz.) vgl. A. Speiser, Theorie der Gruppen endlicher Ordnung, Springer, 1923.

HOOFDSTUK IV.

MIKROPERFECTE LICHAMEN.

§ 1 — *De hoofdstelling.*

In dit hoofdstuk zullen de mikrocompacte T-lichamen volledig geclassificeerd worden. In de eerste plaats behooren hiertoe alle (aftelbare) discrete lichamen. Laten we dit triviale geval, waar dus eigenlijk in het geheel geen limesrelaties bestaan, buiten beschouwing, dwz. (TG. 10) beperken we ons tot mikroperfecte lichamen, dan kan het resultaat worden samengevat in de volgende te bewijzen

Hoofdstelling:

A. *Het eenige algebraisch afgeslotene onder de mikroperfecte topologische lichamen is het lichaam der complexe getallen.*

B. *De eenige positief-dimensionale onder de mikroperfecte T-lichamen zijn: het lichaam der reeele getallen en het lichaam der complexe getallen.*

C. *Alle nuldimensionale mikroperfecte T-lichamen zijn quotientenlichamen van $\mathfrak{p}$-adische ringen.*

D. *Ieder mikroperfect T-lichaam van de karakteristiek $\chi(\mathfrak{R}) = p$ is nuldimensionaal en ontstaat uit het priemlichaam door adjunctie van een $(p^k - 1)$-de eenheidswortel ε en van een transcendente π en door daaropvolgende completeering.*

E. *Ieder mikroperfect nuldimensionaal T-lichaam van de karakteristiek $\chi(\mathfrak{R}) = 0$ is een eindige (algebraische) uitbreiding van het lichaam $\mathfrak{R}(p^\nu)$ der (rationale) p-adische getallen, en omgekeerd. Het ontstaat uit $\mathfrak{R}(p^\nu)$ door adjunctie van een primitieve $(p^k - 1)$-de eenheidswortel ε en van een wortel π eener Eisensteinsche vergelijking*

$$\pi^r = p\,(a_0 + a_1\pi + \ldots + a_{r-1}\pi^{r-1}),$$

waarin de a_i geheele elementen uit $\mathfrak{R}(p^\nu, \varepsilon)$ zijn en $a_0 \not\equiv 0\ (p)$ is.

§ 2 — *Inleidende stellingen.*

Onderstelling: $\mathfrak{K}$ is een mikroperfect T-lichaam. Het perfectiseeringsaxioma TL. 11 wordt *niet* ondersteld. $\mathfrak{K}'$ is de multiplicatieve groep van alle elementen $\neq 0$ uit $\mathfrak{K}$. K ontstaat uit $\mathfrak{K}$ door compactiseering met een punt ∞, als limes van alle in $\mathfrak{K}$ absoluut divergente rijen.

TL. 13. *Er is eene zoodanige compacte omgeving U van 0, dat voor alle $x \varepsilon U$ $x^\nu \rightarrow 0$ geldt.*

Bewijs. Zij U^1 een zoo kleine compacte omgeving van 0, dat 1 niet in U^1 ligt, U de verzameling van alle $x \varepsilon U$ waarvoor $x\overline{U}^1 \subset U^1$ is. Dan is U de gezochte omgeving.

TL. 14. Convergeert een deelrij van x^ν naar 0, dan convergeert de heele rij naar 0.

TL. 15. Alle elementen van $\mathfrak{K}$ welker (positieve) machten naar 0 convergeeren, vormen een omgeving V van 0.

TL. 16. Alle elementen van $\mathfrak{K}$ welker (positieve) machten naar ∞ convergeeren, vormen een omgeving W van ∞.

TL. 17. $V^{-1} \subset W$ Geldt het perfectiseeringsaxioma (hetgeen zal blijken het geval te zijn), dan is $V^{-1} = W$.

LL. 18. Alle elementen van $\mathfrak{K}$ welker machten een 1-rij bevatten, vormen een afgesloten verzameling $\mathfrak{J}$.

Bewijs $\mathfrak{J}$ is het complement van de vereeniging der open verzamelingen V en W.

TL. 19. Tusschen $\mathfrak{J}$, V, W bestaan de volgende betrekkingen: $V^{-1} \subset W$, $V\mathfrak{J} = V$, $W\mathfrak{J} = W$, $V^\nu \subset V$.

TL. 20. $\mathfrak{J}$ is een (multiplicatieve) groep.

§ 2 — *Nuldimensionale lichamen.*

Volgens TL. 5 hebben we twee gevallen te onderscheiden: $\mathfrak{K}$ is nuldimensionaal, dus open Cantorsch (daar $\mathfrak{K}$ mikroperfect is) of $\mathfrak{K}$ is samenhangend. We onderstellen hier het eerste. Voorts zij R de vereeniging van V en $\mathfrak{J}$, en $\mathfrak{R}$ de door R voort gebrachte (additieve) groep.

TL. 21. $\mathfrak{R}$ is een ring.

Bewijs. Wegens TL. 19 is $R^2 \subset R$, dus $\mathfrak{R}^2 \subset \mathfrak{R}$.

TL. 22. $\mathfrak{R}$ is een $\mathfrak{b}_\nu$-adische ring.

Bewijs. Zij $\mathfrak{b}_\nu$ de door V^ν voortgebrachte additieve groep, dan ligt $\mathfrak{b}_\nu$ voor voldoende groote ν in V (wegens TG. 21). Daaruit volgt echter $\mathfrak{b}_\nu \mathfrak{R} \subset \mathfrak{b}_\nu$, dus $\mathfrak{b}_\nu$ is een open ideaal in $\mathfrak{R}$.

TL. 23. $\mathfrak{J}$ is open.

Bewijs. $(1 + \mathfrak{b}_n)^\nu \subset 1 + \mathfrak{b}_n$, dus $1 + \mathfrak{b}_n \subset \mathfrak{J}$.

TL. 24. Is $\chi\,(\mathfrak{K}) = p$, dan is $\mathfrak{R} = R$.

Bewijs. Zijn x en y elementen van R, dan is ook $(x \pm y)^{p^\nu} = x^{p^\nu} \pm y^{p^\nu} \varepsilon R$ dus $x \pm y \,\varepsilon\, R$.

Zij thans $\chi\,(\mathfrak{K}) = 0$, $\mathfrak{b}$ een volgens TL. 22 gedefinieerd open ideaal in $\mathfrak{R}$, dat in V ligt, $\mathfrak{G}$ de groep der geheele rationale getallen uit $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{F}$ hare afsluiting, dan geldt:

TL. 25. $\mathfrak{F}$ is Cantorsch.

Bewijs. Bewezen moet slechts worden, dat $\mathfrak{G}$ niet discreet is.

Zij $x \neq 0 \,\varepsilon \mathfrak{b}$, dan is ook $\nu x \,\varepsilon \mathfrak{b}$, dus $n_\nu x \to 0$, dus $n_\nu \to 0$, dus $\mathfrak{G}$ is dicht in zich zelf. Slechts hier wordt de onderstelling gebruikt, dat $\mathfrak{K}$ dicht in zich zelf is.

TL. 26. $\mathfrak{F}$ is compact en p-adisch.

Bewijs. Wegens TC. 51 is $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{L}_\nu$-adisch, dus (wegens TR. 42) p-adisch, daar $\mathfrak{F}$ in een lichaam ligt. Daar $\mathfrak{G}/(p^m)$ eindig is, is $\mathfrak{F}$ compact, dus $\mathfrak{F} \subset R$. Er is dus één en slechts één priemgetal $p \,\varepsilon\, V$.

TL. 27. $\mathfrak{R} = R$.

Bewijs. Het is voldoende te bewijzen, dat $1 + x$ in R ligt voor $x \varepsilon R$. Wegens TL. 12, 24 is $p^k \varepsilon \mathfrak{b}$ voor voldoend groote k. Nu is $(1 + xp^\nu)\, p^{k+1} = (1 + x)\, p^{k+1} + p^k \varphi(x)$, waar $\varphi(x)$ in $\mathfrak{R}$, dus $p^k \varphi(x)$ in $\mathfrak{b}$ ligt. Ware nu $1 + x \,\varepsilon\, W$, dus $(1 + x)p^{k+\nu+1}$ divergent, dan ware ook $1 + xp^\nu$ divergent, in strijd met $x \,\varepsilon\, R$.

Zoowel voor $\chi\,(\mathfrak{K}) = p$ als voor $\chi\,(\mathfrak{K}) = 0$ is dus $\mathfrak{R} = R$ een $\mathfrak{b}_\nu$-adische, dus een $\mathfrak{p}$-adische, dus een π-adische ring. En wel geldt:

TL. 28. $\mathfrak{p} = V$. Ieder element $x \not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$ ligt in $\mathfrak{J}$ en is dus een eenheid; $\mathfrak{p}$ is een ondeelbaar priemideaal.

TL. 29. *$\mathfrak{K}$ is het quotientenlichaam $\mathfrak{R}\mathfrak{R}^{-1}$ van $\mathfrak{R}$. Het perfectiseeringsaxioma TL. 11* is vervuld.

Bewijs. Zij $x \,\varepsilon\, W$, $\pi \,\varepsilon\, V$, dan is $\pi^\nu \to 0$, dus $\pi^\nu x \to 0$, dus $z = \pi^n x \,\varepsilon\, \mathfrak{R}$, dus $x = z\pi^{-n} \,\varepsilon\, \mathfrak{R}\mathfrak{R}^{-1}$. Is n het kleinste getal, waarvoor dit geldt, dan is $z \not\equiv 0\ (\pi)$, dus $z \,\varepsilon\, \mathfrak{J}$, dus $x^{-1} = \pi^n z^{-1} \,\varepsilon\, V$, dus $W^{-1} \subset V$, dwz. $W = V^{-1}$.

Hiermede is tevens onderdeel C van de hoofdstelling bewezen.

TL. 30. *Er bestaat in $\mathfrak{R}$ een primitieve $(p^k - 1)$ -de eenheids-*

wortel ε, *waarvan de machten, tezamen met 0 een volledig representensysteem modulo* $\mathfrak{p}$ *vormen.*

Bewijs. Daar $\mathfrak{R}$ compact is, is het restklassenlichaam $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ eindig, dus een lichaam van de karakteristiek p, dat bv. p^k elementen heeft. Er zijn dus zeker representanten dezer restklassen, die modulo $\mathfrak{p}$ aan het gestelde voldoen. De gezochte eenheidswortel wordt door successieve approximatie bepaald, door (met volledige inductie) een representantensysteem modulo $\mathfrak{p}^\nu$ te bepalen.

TL. 31. *Is* $\chi(\mathfrak{K}) = p$, *dan ontstaat* $\mathfrak{K}$ *uit het priemlichaam* $\mathfrak{K}_p$ *van de karakteristiek* p *door adjunctie van* ε *(volgens TL. 46) en van eene transcendente* π, *gevolgd door completeering.*

Bewijs. Ieder algebraisch element over $\mathfrak{K}_p$ is een eenheidswortel en ligt dus in $\mathfrak{J}$. $\mathfrak{K}$ bevat geen andere algebraische elementen dan de machten van ε en is dus in het bijzonder niet algebraisch afgesloten. Dus moet π een transcendente zijn. $\mathfrak{K}_p(\varepsilon, \pi)$ ligt echter dicht in $\mathfrak{K}$ waaruit het gestelde volgt. *Hiermede is tevens onderdeel D van de hoofdstelling bewezen.*

TL. 32. *Is* $\chi(\mathfrak{K}) = 0$, *dan is* $\mathfrak{K}$ *een eindige algebraische uitbreiding van* $\mathfrak{K}(p^\nu)$.

Bewijs. Voor een geschikt gekozen natuurlijk getal r ligt $\pi^r p^{-1}$ in $\mathfrak{J}$, dwz. $\pi^r = p(\varepsilon_0 + \varepsilon_1\pi + \varepsilon_2\pi^2 + \ldots)$, waar de ε_i machten van ε of 0 zijn. Door successieve approximatie leidt men daaruit een Eisensteinsche vergelijking $\pi^r = p(a_0 + a_1\pi + \ldots + a_{r-1}\pi^{r-1})$ voor π af, waarin de a_i elementen uit $\mathfrak{K}(p^\nu, \varepsilon)$ met $a_0 \not\equiv 0\ (p)$ zijn. Hieruit volgt ook nog, dat $\mathfrak{K}$ niet algebraisch afgesloten zijn kan, terwijl anderzijds volgens Hensel iedere eindige uitbreiding van $\mathfrak{K}(p^\nu)$ door adjunctie van ε en π als boven ontstaat. *Tevens is hiermede onderdeel E van de hoofdstelling bewezen.*

§ 4 — *Samenhangende lichamen.*

We beschouwen thans het geval, dat $\mathfrak{K}$ positieve dimensie bezit, dus samenhangend is.

TL. 33. $\mathfrak{K}$ *voldoet aan het perfectiseeringsaxioma.*

Bewijs. Men bewijst vooreerst, dat de begrenzing $\mathfrak{B}(V)$ van V in $\mathfrak{J}$ ligt, dan is ook $\mathfrak{B}(V^{-1}) \subset \mathfrak{J}$; evenzoo is $\mathfrak{B}(W) \subset \mathfrak{J}$. Beschouwt men dan de factorgroep $\mathfrak{G}$ van de multiplicatieve groep $\mathfrak{K}'$ uit $\mathfrak{K}$ naar de afgesloten ondergroep $\mathfrak{J}$, dan is deze eenduidig continu beeld van $\mathfrak{K}'$, dus ook samenhangend en mikrocompact, terwijl de samenhang van $\mathfrak{G}$ door $\mathfrak{J}$, dus (wegens de homogeniteit) door ieder element verbroken wordt. $\mathfrak{G}$ is dus homeomorph met de getallenrechte. Het complement van $\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{G}$ moet dus uit precies twee componenten bestaan. Daar echter V, V^{-1} (na weglating van 0) en het complement van V^{-1} in W zulke componenten zijn, moet de laatste leeg zijn, dwz. $W = V^{-1}$. Hieruit volgt nog: $\mathfrak{B}(V) = \mathfrak{B}(W) = \mathfrak{J}$.

TL. 34. $\chi(\mathfrak{K}) = 0$.

TL. 35. $\mathfrak{G}$ *is een geordende groep.*

Bewijs. Stelt men voor de nevenklassen $x\mathfrak{J}$ van $\mathfrak{J}$ $x\mathfrak{J} < y\mathfrak{J}$ als $xy^{-1} \varepsilon V$ is, dan is aan de orderelaties voldaan.

TL. 36. $\mathfrak{G}$ *is isomeomorph met de (additieve) groep der reeele getallen, dwz. met de (multiplicatieve) groep der positieve getallen.*

Bewijs. Dit volgt op de bekende wijze uit TL. 35 en de homeomorphie van $\mathfrak{G}$ met de getallenrechte.

TL. 37. $\mathfrak{K}$ *is half-metriseerbaar.*

Bewijs. Met het gestelde bedoelen we, dat men aan ieder element $x \neq 0$ van $\mathfrak{K}$ een positief getal $/x/$ kan toevoegen (terwijl we $/0/ = 0$ stellen), zoodanig dat $/x/$ continu van x afhangt, terwijl algemeen aan de betrekking $/xy/ = /x/\,/y/$ voldaan is. De verdere betrekking $/x + y/ \leqq /x/ + /y/$ uit de theorie der „bewertete" lichamen wordt hierbij niet ondersteld; later zal blijken, dat hieraan ook steeds voldaan kan worden. Voegt men thans aan een willekeurig element $a \varepsilon V$ een willekeurig positief getal $/a/ = \alpha < 1$ toe, dan levert de isomeomorphe afbeelding van TL. 36 de waarde van $/x/$ voor iedere $x \varepsilon \mathfrak{K}$.

TL. 38. *Bij geschikte keuze van α wordt in het (wegens TL. 34 in $\mathfrak{K}$ liggende) lichaam der rationale getallen de natuurlijke metriek geinduceerd.*

Bewijs. Het door Ostrowski [1]) gegeven bewijs, dat de eenige Archimedische metriseering van het lichaam der rationale getallen de natuurlijke is, geldt met een kleine modificatie ook voor halfmetriseeringen.

---

1) Ostrowski, Ueber einige Fragen der allgemeinen Körpertheorie, Crelle, **143** (1913) 255—284.

TL. 39. *Het lichaam der reeele getallen laat geen andere mikro-perfecte uitbreiding toe dan* ***het*** *lichaam der complexe getallen.*

Bewijs. Door eventueel de complexe eenheid i te adjungeeren, kan men bereiken, dat $\mathfrak{K}$ het lichaam $\mathfrak{K}_c$ der complexe getallen omvat. Het is dan voldoende, te bewijzen, dat $\mathfrak{K}_c$ geen perfectiseerbare enkelvoudige transcendente uitbreiding toelaat. Daartoe nemen we aan, dat $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_c\,(\xi)$ zulk een uitbreiding ware. Stellen we dan voor alle $x \varepsilon \mathfrak{K}_c$ $f\,(x) = \log\,/\xi - x/$, dan is $f\,(x)$ een in het geheele complexe vlak gedefinieerde eenduidige en continue functie, die naar beneden begrensd is. Beschouwt men dan de middelwaarde van $f\,(x)$ over een cirkel met een willekeurig punt a van het complexe vlak als middelpunt en een straal $r < e^{f\,(a)}$, dan is $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,(a + re^{i\phi})\,d\varphi = f\,(a)$, waaruit zou volgen, dat $f\,(x)$ een harmonische functie was. Anderzijds is echter voor $r > e^{f\,(a)}$ deze middelwaarde $= \log r$, waaruit zou volgen, dat $f\,(x)$ geen harmonische functie was. Deze contradictie levert het bewijs van het gestelde. Daarmede zijn dan tevens de onderdeelen A en B van de hoofdstelling bewezen.

STELLINGEN

I

De Cantorsche groepen vormen een natuurlijke generalisatie der eindige discrete groepen.

II

De definitie van algebra als de theorie der lichamen is te eng. (Vgl. diss. B. L. van der Waerden, stelling III).

III

De theorie der projectieve overbrengingen wordt belangrijk vereenvoudigd door de invoering van homogene oervariabelen. (Vgl. J. A. Schouten & St. Golab, Ueber projektive Uebertragungen und Ableitungen, Math. Zeitschr. *32* (1930) 192—214.

IV

De fundamentaalgroep van een knoop kan veel eenvoudiger opgesteld worden dan gewoonlijk gedaan wordt. (Vgl. o.a. K. Reidemeister, Knoten und Gruppen, Abh. Math. Seminar Hamburg, *5* (1926) 7—23; J. W. Alexander, Topological invariants of knots and links, Transactions Am. Math. Soc. *30* (1928) 275—306.

V

De studie der „krakelingenknoopen" (Vgl. K. Reidemeister, l.c.) wordt belangrijk vereenvoudigd door voor de fundamentaalgroep der tweezijdige gesloten oppervlakken van geslacht 2 overtallige kanonische voortbrengende elementen in te voeren, nl. $a_1 = a$, $a_2 = b^{-1}$, $a_3 = a^{-1}dcd^{-1} = ba^{-1}b^{-1}c$, $a_4 = d^{-1}$, $a_5 = dc^{-1}d^{-1}$ $a_6 = db$. De relaties zijn: $a_1a_2a_3a_4a_5a_6 = 1$, $a_1a_3a_5 = 1$, $a_2a_4a_6 = 1$.

VI

De automorphismengroep der fundamentaalgroep van een gesloten tweezijdig oppervlak van geslacht 2 is door J. Nielsen opgesteld. Deze kan behoudens inwendige automorphismen worden voortgebracht door de drie elementen
$H = (a_1^{-1}, a_6^{-1}, a_5^{-1}, a_4^{-1}, a_3^{-1}, a_2^{-1})$, $\Omega = (a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_1)$, $M = (a_1, a_1a_2, a_3, a_4, a_5, a_6a_1^{-1})$. Tusschen deze automorphismen bestaan o.a. de relaties $H^2 = (H\Omega)^2 = (HM)^2 = 1$, $\Omega^6 = 1$. Stelt men $M_i = \Omega^i M \Omega^{-i}$, dan is nog $M_iM_j = M_jM_i$ voor $|i - j| \neq 1$ (i, j mod. 6) en $M_i M_{i+1} M_i^{-1} = M_{i+1}^{-1} M_i M_{i+1}$.

VII

Zoowel de formalistische opvatting van Hilbert als de intuitionistische opvatting van Brouwer omtrent de grondslagen der wiskunde bewegen zich meer en meer in de richting van de door Mannoury verdedigde relativistische opvatting. (Vgl. D. Hilbert, Die Grundlagen der Mathematik, Abh. Math. Seminar Hamburg, *6* (1928) 65—85; L. E. J. Brouwer, Wissenschaft, Mathematik und Sprache, Wiener Monatshefte, *36* (1929) 153—164; G. Mannoury, Wiskunst, filosofie en socialisme, Groningen, P. Noordhoff, 2-de druk, 1924; Mathesis en Mystiek, Wereldbibliotheek, 1924).

VIII

De relativiteitstheorie is geen relativistische theorie.

IX

Het is te betreuren, dat Einstein in zijn „Einheitliche Feldtheorie" (Berliner Berichte, (1928) 217—221; 224—227; (1929) 2—7) het empiristische standpunt dat hij vroeger innam weer goeddeels heeft verlaten.

X

Tegen de wenschelijkheid van didaktische, paedagogische, psychologische, historische en praktische scholing van toekomstige leeraren aan of in nauw verband met de universiteiten kunnen geen steekhoudende principieele argumenten aangevoerd worden.

XI

In het belang van onderwijzers en anderen die een maatschappelijke functie vervullen is het wenschelijk, aan de universiteiten avondcolleges te verbinden, die een even ruime gelegenheid tot wetenschappelijke vorming geven als de dagcolleges.

XII

Het is wenschelijk, aan de onderwijzersacte of aan de hoofdacte (eventueel na het afleggen van een of meer tentamina) het ju s promovendi te verbinden.

XIII

De zoogenaamde vormende waarde van het wiskunde-onderwijs wordt in den regel belangrijk overschat.

XIV

Het is wenschelijk, naast de definitie van het emotioneele element in de beteekenis eener taaldaad als de relatie tot de lust- en onlustgewaarwordingen (van „spreker" of „hoorder") een definitie te stellen van het indicatieve element als de relatie tot de gewaarwordingen van overeenkomst en verschil. Het onderscheiden dezer beide elementen correspondeert met het onderscheiden van het subjectieve en het objectieve bestanddeel. (Vgl. G. Mannoury, Mathesis en Mystiek; Woord en Gedachte, P. Noordhoff, 1930).

XV

Het is wenschelijk en mogelijk, het indicatieve element in een waardeeringsoordeel van het emotioneele element te onderscheiden, de betrekkingsbasis ervoor te onderzoeken en het vervolgens te mathematiseeren.