

REKENEN MET TAAL

J. F. A. K. van Benthem



MATHEMATISCH INSTITUUT
UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

REKENEN MET TAAL

Oratie

Uitgesproken bij de aanvaarding van
het ambt van gewoon hoogleraar
in de Mathematische Logica
aan de
Universiteit van Amsterdam
op dinsdag 2 december 1986

door

Dr. J. F. A. K. van Benthem

1. Academische Vrijheid?

Dames en Heren,

De leerstoel die ik vandaag mag aanvaarden heeft een veelbewogen verleden. Ze is bekleed door filosofen bezoldigd aan het Mathematisch Instituut, maar evenzeer door mathematici in loondienst van het Filosofisch Instituut - en ze ligt momenteel weer op een raakvlak in de toekomstige Faculteit der Wiskunde en Informatica. Geen wonder dat ik soms moeite heb academische grenslijnen even serieus te nemen als meer beginselvaste collega's. Mijn opdracht, te weten 'Wiskundige Logica, met speciale aandacht voor toepassingen in Taalfilosofie en Informatica' interpreteer ik dan ook gaarne als een academische vrijbrief om te opereren als een 'mathematician at large'. Vandaag wil ik nader uiteenzetten in welk perspectief ik dat werk hoop te verrichten.

2. Grondslagen van de Wiskunde

De Wiskundige Logica wordt doorgaans geassocieerd met het Grondslagenonderzoek van de Wiskunde. En dat gebeurt op goede gronden. Het waren wiskundigen als Frege, Hilbert en Gödel die in luttele gouden decennia de Logica haar moderne vorm hebben gegeven, gedreven door filosofische vragen aangaande aard en reikwijdte van wiskundige kennis, objecten en methoden. Veel van deze vragen betroffen het zoeken naar grondslagen, in de zin van veilige fundamenten voor de consistentie van wiskundige theorieën, alsmede van gegarandeerde effectiviteit der in die theorieën vervatte methoden om alle voorkomende wiskundige vragen te beslechten.

Zoals bekend mag zijn, heeft de logische studie van deze problematiek grosso modo slechts ontkennende antwoorden opgeleverd. Er zijn geen onwrikbare garanties vooraf te geven voor de consistentie van wiskundige theorieën, en er zijn duidelijke grenzen gesteld aan de reikwijdte van effectieve

wiskundige methoden. Met deze uitkomsten is de grondslagenproblematiek niet verdwenen, maar wel verschoven. Tenslotte moeten we ons niet blindstaren op een metafoor: wellicht schuilt de sterkte van de wiskunde niet zozeer in haar fun-dering als wel in de kwaliteit van haar weefsel van begrippen, principes en bewijzen, met telkens nieuwe dwarsverbindingen. Sommige logici richten zich in deze nieuwe situatie op het nader analyseren van wiskundige bewijsvoering: met name, hoeveel abstracte verzamelingstheorie (de bron van de meeste paradoxen die het oorspronkelijke grondslagenonderzoek moti-veerden) is nu eigenlijk echt noodzakelijk? Andere onderzoekers cultiveren niet-verzamelingsgebonden filosofische intuïties aangaande wiskundige objecten en bewijzen, die een zo construc-tieve wiskunde zouden moeten genereren dat deze geen consis-tentiebewijs meer behoeft. En, het dient gezegd, bij wellicht de meerderheid der mathematische logici op deze aarde is de oorspronkelijke grondslagenmotivering geheel gedoofd - en heb-ben wij meer van doen met wiskundige vlijt dan wijsgerig vuur.

Zonder enig waardeoordeel over bovengenoemde ontwikkeling uit te spreken, wil ik thans een andere richting met U inslaan. Kenmerkend aan het logisch grondslagenonderzoek is dat uitkom-sten worden gezocht die zelf wiskundig kunnen worden gefor-muleerd en bewezen. Daartoe was het nodig een logisch-wiskundig begrippenapparaat te ontwikkelen **aangaande definities, stellin-gen, theorieën en structuren dat zelf weer strenge wiskundige bewijsvoering toelaat.** En het is nu juist dit resulterende fonds van begrippen, technieken en in het algemeen 'wiskundig-logische mentaliteit' dat een veel ruimer bereik heeft dan de oorspronkelijke grondslagenproblemen. Die ruimte zal in deze voordracht thans nader worden geëxploreerd.

3. Logica als Wetenschap van het Redeneren

De Logica in algemene zin kan worden omschreven als de stelselmatige studie van redeneren in al zijn aspecten. Zo'n studie omvat in elk geval:

- het opsporen en efficiënt organiseren van gevolgtrekkingsregels (het bewijstheoretisch, en computationele aspect),
- het bestuderen van de talen die de uitdrukkingen leveren waarop die regels opereren (het aspect van kennisrepresentatie), inclusief de manier waarop zulke talen aan hun betekenis komen.

Zonder dit laatste semantische aspect zouden we immers geen geldigheid van bewijsregels kunnen thematizeren (in de zin van: 'waarheid van de premissen in een situatie impliceert waarheid van de conclusie in die situatie'). In een korte leuze samengevat: de Logica omvat zowel de taalkundige als de rekenkundige aspecten van het redeneren.

Het is deze eerwaardige discipline - in de Oudheid in gang gezet door Aristoteles en de Stoici, in de Middeleeuwen bloeiend bij de Scholastici - die in deze eeuw haar lot zo zeer verbond met dat van de wiskunde, en daarmee een heilzame mathematizering onderging. Niettemin is er, vanuit de algemene Logica gezien, ondanks de aldus ontstane intieme familierelatie, meer werk te doen dan schutten en schragen van de wiskunde. Voor een logicus zijn de bovengenoemde taalkundige en rekenkundige aspecten aanwezig, niet alleen in de wiskunde, met haar formele talen en abstracte structuren, maar ook in de informatica, met haar programmeertalen en machinemodellen, en evenzeer in de taalkunde, met haar natuurlijke talen en de vertrouwde wereld die daarin beschreven wordt. En het is juist in deze driehoek dat momenteel een nieuw intellectueel krachtenveld aan het groeien is.

Blijven op dit niveau van abstractie - waar algebraïsche vergelijkingen evenzeer een taal vormen als Oekraïens of Gotisch, en waar burenruzies even goed interpretatiedomein kunnen zijn als Lie-groepen - dan nog substantiële inzichten over?

Ja.

4. Terreinverkenning

Om dit antwoord te onderbouwen, begin ik met een ronde langs de drie genoemde wetenschapsgebieden - waarbij het talige aspect centraal staat. Het rekenkundige motief zal daar dan telkenmale doorheen spelen.

4.1 Taal in Wiskunde

Men heeft de Wiskundige Logica wel eens omschreven als de 'linguïstiek van de wiskunde'. Kenmerkend aan de logische beschouwingwijze, óók in het grondslagenonderzoek, is namelijk dat een wiskundige theorie allereerst geanalyseerd wordt via een expliciete formele taal waarin haar beweringen zijn te formuleren - een taal die vervolgens bewijstheoretisch en semantisch wordt onderzocht. Men kan deze werkwijze opvatten als een extrapolatie van de wiskundige praktijk, met haar strategisch gebruik van notaties en formules (en gestyleerde schablonen in bewijsritueel). Aldus is een precieze logische syntaxis gegeven van diverse formele talen voor algemeen wiskundig gebruik, met als bekendste voorbeeld de gangbare 'predicaatlogica'.

De grote kracht van de wiskunde ligt nu daarin dat dergelijke formele talen meerdere interpretaties toestaan, in uiteenlopende structuren - en daarmee tussen die structuren weer allerlei analogieën suggereren. We kennen dit verschijnsel uit de algebra - maar historisch wellicht het meest dramatische voorbeeld is de pluralisering van het meetkundig taalgebruik: van de unieke beschrijving van De Ruimte naar een algemene studie van ruimten in meervoud. Het heeft overigens nog lang geduurd eer tegen deze achtergrond in de moderne logica een systematisch semantisch gezichtspunt rijpte, dat algemeen verklaart hoe formele talen geïnterpreteerd kunnen worden in geschikte structuren (modellen), via een stapsgewijze recursieve procedure. Een werkelijk doordachte logische semantiek treffen we pas aan het eind der vijftiger jaren.

Dieper inzicht in logische syntaxis en semantiek is overigens pas verkregen in hun gebruik bij de studie van velerlei

vragen omtrent de wiskundige activiteit. Eén bron van zulke vragen is de zg Bewijstheorie, waarin de bewijsstructuur van formele wiskundige theorieën wordt onderzocht - om beter zicht te krijgen op, bijvoorbeeld, hun constructieve gehalte, of de verhouding tussen 'hogere' en 'elementaire' argumenten. Een andere bron is de zg Modeltheorie, waarin juist het samenspel tussen talige formulering en bijbehorende modelklassen centraal staat. Een representatief thema hier is 'transfer'. Gegeven een structurele operatie die modellen in modellen overvoert, zeg het nemen van producten of continue beelden, welke beweringen over de oorspronkelijke structuur zullen dan nog steeds opgaan in het beeld onder de betreffende operatie? Antwoorden vindt men in 'transfer-stellingen', zoals de volgende: een bewering blijft bewaard onder uitbreidingen van modellen juist dan als zij definieerbaar is met een zuiver existentiële predicaatlogische formule. (Een ander sprekend voorbeeld is de zg ultraproduct-constructie, die alle predicaatlogische beweringen bewaart. Ultraproducten van de reële rechte vormen zg 'niet-standaard modellen' voor de Analyse: een wiskundige theorie die voorheen juist werd beschouwd als zeer eenkennig in zijn modellen.)

Werkende wiskundigen zullen deze taalgebondenheid overigens niet altijd voelen, evenmin als gewone taalgebruikers dat doen. Maar het een zomin als het ander ondergraaft de waarde van een systematisch linguïstisch gezichtspunt.

4.2 Talen in Informatica

In het gebied van de informatica daarentegen, behoeft de centrale rol van taal geen betoog. Een wezenlijk onderdeel van programmeren is nu juist het omzetten van intuïtieve algoritmen in een precies gedefinieerde programmeertaal. Daarenboven worden ook vaak specificatie van doelen voor, en mededelingen over de werking van programma's in vaste formalismen gegoten - niet zelden dat van de eerder genoemde predicaatlogica. Dit laatste is overigens één voorbeeld van diverse historische

lijnen, uitgaande van binnen de wiskunde ontwikkelde logische formalismen naar de informatica. Meer recentelijk betreft dit ook programmeertalen zelf, getuige het verschijnsel van 'logic programming'.

Ook op dit terrein zijn weer vele logische vragen aan te wijzen betreffende de koppeling van taal aan beoogde modellen. Zo is een goede semantiek onontbeerlijk voor het definiëren van correctheid van programma's voor gestelde doelen, terwijl een passende bewijstheorie die correctheid ook concreet moet aantonen. Een rekenkundig aspect dat in de informatica bij dit alles sterk op de voorgrond treedt is dat van complexiteit. Om te beginnen: hoe lang doet een programma over een gegeven taak, en hoeveel rekencapaciteit wordt in beslag genomen? Maar vervolgens ook: hoe snel kan een bewijssysteem in dit verband resultaten opleveren? Zo gesteld, zou dit gezichtspunt louter uit haastige spoed geboren kunnen zijn. Maar er zijn naast praktische ook principiële logische kanten aan zo'n interesse. Wij mensen maken berekeningen en redeneringen binnen menselijke grenzen aan tijd en ruimte, en zijn daar redelijk succesvol mee. Dat legt als randvoorwaarde op logische bewijstheorieën dat deze een verklaring voor dat verschijnsel nastreven, of althans een zeker complexiteitsbewustzijn vertonen.

Een verschijnsel dat in deze situatie evenzeer opvalt is het samenspel tussen bewijzen en berekenen. Er is een nauw verband tussen correctheidsbewijzen voor en ontwikkeling van algorithmen - een verband overigens dat grondslagenonderzoekers in de constructieve traditie reeds lang voor de wiskunde zelf hebben nagestreefd. En, bevat niet reeds Euclides zelf naast theorema's zg 'constructies', die de meetkundige objecten waarvan het bestaan is bewezen ook metterdaad moeten produceren? Het 'computationele' gezichtspunt is in de informatica wellicht meer urgent, maar in de wiskunde zeker geen wezensvreemde mode.

4.3 Natuurlijke Talen

Wellicht een grotere gedachtensprong is voor velen van U gemoeid bij de derde en laatste overgang, naar de taalkunde. Daar is het object van studie immers gegeven in plaats van geconstrueerde talen - en zijn bewijzen en berekenen slechts gespecialiseerde taalhandelingen naast zovele andere: dichten, schelden, debatteren ... Natuurlijk zijn er verschillen, evenals tussen de eerder genoemde vakgebieden. Maar er zijn ook overeenkomsten met het voorgaande, logisch beschouwd. Om te beginnen is de huidige systematische studie van de syntaxis, en met name de semantiek van natuurlijke talen methodisch geïnspireerd door de logische syntaxis en semantiek voor formele talen. Daarbij is overigens het klassieke filosofische vooroordeel dat althans de semantiek van natuurlijke talen wezenlijk onsystematisch (ja zelfs 'misleidend') zou zijn, allengs onhoudbaar gebleken.

Bovendien blijkt een expliciete vergelijking van formele en natuurlijke taalgenres vaak verhelderend. Bijvoorbeeld, wanneer we iets willen begrijpen van de uitdrukkingskracht van de natuurlijke taal op een gegeven gebied, dan is een nuttig gedachtenexperiment het volgende. We stellen ons wiskundig voor wat de relevante structuren zijn, sommen de mogelijkheden op in een of andere formele taal, en bestuderen dan de eventuele spanning tussen wat wiskundig mogelijk en wat taalkundig gerealiseerd is. Een recente illustratie vormen de zg 'kwantificerende uitdrukkingen' als elke, geen, sommige, vijf, de meeste. In de natuurlijke taal fungeren deze als 'determinatoren', in het fundamentele zinspatroon $D X Y$ ("elke (vogel) (zingt zijn lied)"). De mogelijke mathematische structuren zijn hier alle binaire relaties tussen verzamelingen objecten (de extensies van de predicaten X, Y). Empirisch blijken nu in alle menselijke talen zulke determinatoren aan beperkingen onderhevig: ze leunen op hun eerste argument, in de zin dat $D X Y$ geldt dan en slechts dan als $D X (Y \cap X)$. (Vergelijk: "elke vogel is een eigen-lied-zingende vogel".) Daarenboven kenmerken zich de kwantificerende determinatoren door een verdere wiskundige eigenschap: ze zijn, in een technische zin des woords, 'permutatie-invariant'.

Binnen deze twee beperkingen echter, realiceert de natuurlijke taal (althans op eindige modellen) inderdaad alle mogelijke kwantificerende uitdrukkingen.

Maar ook het computationele gezichtspunt heeft voor de taalkunde een intrinsiek belang, in het verlengde van wat eerder over menselijk redeneren werd opgemerkt. Relatieve complexiteit van grammatica's, maar ook van semantische modellen, is een onontkoombaar onderwerp van studie voor wie meer wil begrijpen van de ontegenzeggelijke efficiëntie van linguïstische communicatie, en de verheugende leerbaarheid van menselijke talen.

5. Rondreizen

Wat het voorafgaande overzicht op zijn best zal hebben aangetoond is het bestaan van enkele algemene integrerende gezichtspunten die op de drie genoemde gebieden een belangrijke rol spelen - te weten, taalbewustzijn, het belang van semantiek, en een computationele mentaliteit. Maar langs deze lijnen kunnen we ook meer specifieke thema's met elkaar in verband brengen, waarbij verrassende dwarsverbanden aan de dag treden. Ten bewijze hiervan wil ik een greep doen uit de vele voorbeelden waarop ik in mijn eigen onderzoek ben gestuit: voorbeelden overigens die mijzelf eerst langzamerhand tot de boven uiteengezette algemene positie hebben gebracht. (Een uitvoeriger behandeling is te vinden in mijn boek Essays in Logical Semantics, Reidel, Dordrecht, 1986, *Studies in Linguistics and Philosophy* 29.)

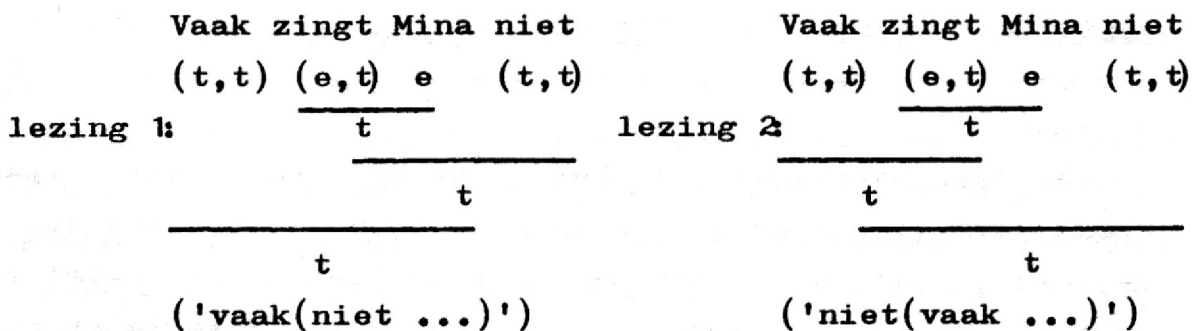
5.1 Categorieën en Typen

De eerste illustratie betreft het mechanisme van semantische interpretatie. Het was reeds Frege die opmerkte dat een fundamenteel wiskundig patroon te bespeuren valt in de betekenisopbouw van talige uitdrukkingen, te weten functie/argument structuren. We zien dit bij het toekennen van een predicaat aan objecten ("(Mina) haat (Dora)", " $(2) < (3)$ "), maar evenzo bij het modificeren van een predicaat ("hevig (haten)", " $(f)^2$ "),

of het gebruik van een determinator ("elke (vroedvrouw)(zwoegt " $\forall x(Px)$ "). In de grondslagen van de wiskunde vinden we Frege's idee doorgevoerd bij Russell, die in zijn Typentheorie een formele taal ontwierp waarin alle uitdrukkingen zijn onderverdeeld naar hun wiskundige niveau's: individuele objecten, functies, functionalen (d.w.z. functies opererend op functies), etcetera. Deze gelaagdheid weerspiegelt dan precies de opbouw van het wiskundig universum, althans volgens Russell. In de verdere ontwikkeling van de wiskundige logica zijn over dit soort getypeerde talen en semantiek veel technische resultaten geboekt.

Een andere historische lijn echter voert ons van Frege naar de taalkunde - via de Poolse logicus Ajdukiewicz, die de bovenstaande analogie uitwerkte tussen functionele typen en grammaticale categorieën. Bijvoorbeeld, als de eigennamen "Dora", "Mina" individuen aanduiden, dan wordt het werkwoord "haten" een functie van individuen naar waarheidswaarden, en is het bijwoord "hevig" reeds een functionaal van werkwoordelijke uitdrukkingen/predicaten naar werkwoordelijke uitdrukkingen/predicaten. Uit deze observaties ontstond de zgn. Categoriale Grammatica, die natuurlijke talen tracht te beschrijven door middel van geschikte typentoeckenningen aan al hun syntactische categorieën. Correcte uitdrukkingen zullen dan precies diegene zijn waarvan de typen der samenstellende woorden zich door herhaalde functietoepassing laten combineren tot één enkel eindtype.

Voorbeeld. Zij e het type der individuen, t der waarheidswaarden. Laat (a, b) staan voor het functionele type 'van type a naar type b '. Hier zijn twee categoriale zinsontledingen:



Het aantrekkelijke aan deze optiek is dat we twee vliegen in

een klap slaan: we beschrijven syntactische combinatie-mogelijkheden, parallel met een wiskundige semantiek.

In de laatste jaren, met name ook in Nederland, komen de twee genoemde tradities tezamen - en deze toenadering heeft tot verrassende verbanden geleid tussen wiskundige logica en taalkundige vragen. Hier is één voorbeeld, dat meteen aantoonst hoe weinig orthodox we moeten zijn in onze verwachtingen over wat waar toepasbaar zal blijken. Het eerste praktische probleem waarvoor de taalkundige staat, wanneer hij eenmaal over een grammatica beschikt, is dat van ontleden van een gegeven reeks woorden ('parsing', in het huidige jargon). In de categoriale grammatica heeft deze vraag de volgende vorm. Hoe bepalen we, bij een gegeven rij van grammaticale typen, of deze te combineren valt tot zeker gewenst eindtype? De centrale stap hierbij is, zoals eerder gezegd, herhaalde functietoepassing:

functietype (a,b) met argumenttype a geeft beeldtype b .

Nu hadden wiskundige logici reeds in de vijftiger jaren de volgende analogie opgemerkt: in vele opzichten correspondeert een functioneel type (a,b) met een implicatie 'als A , dan B '. En daarmee wordt functietoepassing tot een fundamentele logische gevolgtrekkingsregel, te weten 'Modus Ponens':

uit A en als A , dan B volgt B .

En dat betekent weer dat het ontleedprobleem opgevat kan worden als een bewijsprobleem: leid, uit typen opgevat als implicaties, het eindtype af met logische gevolgtrekkingsregels. Ere wie ere toekomt: scherp gesteld is deze analogie pas door informatici in de zeventiger jaren; die er, gewoontegetrouw, meteen een slogan van maakten: 'Parsing as Deduction'. Langs deze weg blijken vervolgens vele methoden uit de logische bewijstheorie toepasbaar in de theorie van grammatica's - een ongedacht emploti.

Met deze beschouwing is het onderwerp 'toegepaste typentheorie' overigens geenszins uitgeput. Er moge verwezen zijn naar de vele connecties tussen de logische 'lambda calculus' en de syntaxis en semantiek van programmeertalen. Resultaten en discussies die hier spelen duiken de laatste tijd eveneens op

in de semantiek van natuurlijke talen.

5.2 Gevolgtrekken en Minimalizeren

Voor de tweede illustratie ligt het vertrekpunt in de informatica. Op het gebied van de Artificiële Intelligentie, méér dan in de officiële logica, zijn de laatste jaren onderzoekers te vinden geweest die feitelijke redeneerpatronen van mensen analyseren - als leidraad bij het opstellen van intelligente plannings- en beslissingssystemen. Een opmerkelijk computationeel aspect aan dat feitelijk redeneren is al eerder gememoreerd: het speelt zich af binnen strenge beperkingen van complexiteit. Wij hebben slechts partiële informatie over de wereld, en beperkte rekenvermogens, en moeten niettemin conclusies trekken - al zijn het maar voorlopige.

Eén belangrijke strategie hierbij is wat men zou kunnen omschrijven als minimalizeren: we nemen aan dat de situatie waarom het gaat alleen onze positieve informatie waar maakt, terwijl datgene wat we niet weten onwaar is. Bijvoorbeeld, als een regel uitzonderingen heeft, en we hebben een geval dat eronder zou kunnen vallen, dan nemen we dit tot nader order aan, tenzij het een gebleken uitzondering is. In de Artificiële Intelligentie literatuur wordt dit vaak technisch verantwoord door van een verzameling gegevens niet alle modellen te bekijken, maar alleen de 'minimale', in een geschikte wiskundige zin. Men voert dan de hoeveelheid gevolgtrekkingen als volgt op: B 'volgt' uit A als B waar is, niet in alle, maar in alle minimale modellen van A. Bijvoorbeeld, zolang we alleen witte zwanen kennen geldt tot nader order in de minimale modellen voor die kennis dat alle zwanen wit zijn.

Er is natuurlijk een keerzijde. Verdere informatie kan leiden tot meer uitgebreide gegevens, met andere minimale modellen, waarvoor niet alle eerdere conclusies nog gelden. Bijvoorbeeld, de eerste waargenomen zwarte zwaan ontkracht de eerder genoemde generalizatie. Dit verschijnsel staat bekend als niet-cumulatie of non-monotonie. Redeneren wordt daarmee een kwestie van twee

vermogens: snel momentaan gevolgtrekken, in combinatie met snelle herziening bij gebleken voorbarigheid.

Bij nadere beschouwing blijkt deze minimalizerende analyse, inclusief non-monotone effecten, toch reeds in de bestaande logica aan te treffen - en wel in de studie van conditionele zinnen. "Als ik de laatste trein haal, dan kom ik nog op tijd thuis" verwijst naar normale omstandigheden: geen explosies, faillissement van de Nederlandse Spoorwegen, of plotse omkering der natuurwetten. Technisch is dit te modelleren met een ordening op situaties, waarvan sommige dicht bij elkaar liggen dan andere. De conditionele zin wil dan zeggen dat de consequent opgaat in die situaties waar de antecedent geldt die het dichtst liggen bij de situatie van waaruit wordt geëvalueerd. Met deze uitleg verliest de implicatie enkele van zijn klassieke eigenschappen, zoals de volgende twee:

<u>als A dan B</u>	<u>als A dan B</u>	<u>als B dan C</u>
als A en C dan B	als A dan C	
('monotonie')	('transitiviteit')	

Niettemin resteert een logica, waarvan de principes volledig zijn bepaald - met zulke meer subtiele vervangingen als

<u>als A dan B</u>	<u>als A en B dan C</u>
als A dan C.	

Aldus levert de bestaande logica een gemeenschappelijke ondergrond voor de genoemde variaties binnen de Artificiële Intelligentie.

Bij verder doordenken blijkt minimalisering echter nog ruimer verbreed. Bijvoorbeeld figureert het op diverse plaatsen in de semantiek van de natuurlijke taal. Zo wordt betoogd dat antwoorden op vragen doorgaans een extra betekenis hebben die boven hun directe informatieve inhoud uitgaat. "Wie doet er mee?" "Dora en Mina" impliceert dat alleen Dora en Mina meedoen. Dat wil zeggen: weer wordt het bevraagde predicaat geminimaliseerd tot de direct gegeven feiten. Iets soortgelijks geldt voor de dialoog: "Hoe wordt ik beter, dokter?" "Als U doet wat ik zeg". De extra suggestie is hier, naast de expliciete implicatie,

ook de omkering: niet doen wat de dokter zegt leidt tot niet beter worden. En met dit laatste voorbeeld naderen we weer de informatica. Bijvoorbeeld, Prolog programma's, met conditionele clausules van de vorm 'als conditie C dan doel D', worden ook vaak geïnterpreteerd in een sterkere zin, met omkeringen als 'om D te bereiken is C noodzakelijk'. (Technisch spreekt men dan van de 'completion' van het programma.) En deze handelwijze wordt verantwoord door middel van, het zal niet verbazen, zg. 'minimale Herbrand modellen'.

Tenslotte kunnen we zelfs naar de wiskunde terugkeren. Minimalizeren heeft twee facetten:

- postuleer niet meer objecten dan expliciet in de taal genoemd zijn,
- postuleer over die objecten niet meer feiten dan door de directe informatie wordt afgedwongen.

Welnu, met name het eerste treffen we aan, telkens wanneer we inductieve definities hanteren, zoals in het schoolvoorbeeld: '0 is een natuurlijk getal. Als n een natuurlijk getal is, dan is n+1 een natuurlijk getal'. Er is hier een verzwegen clause 'en verder niets', waaraan voldaan is in het minimale model, te weten de standaard IN. ('Niet-standaard modellen' van de rekenkunde zijn niet-minimaal, en dragen een staart van boven-natuurlijke getallen.) Het minimalizeren van predicaten lijkt in de wiskunde daarentegen minder frequent - maar niets verhindert ons natuurlijk ook dat nu voortaan juist eens te gaan uitproberen.

5.3 Stabilizatie en Monotonie

Voor een derde, en laatste unificerend thema keren we terug naar het eerdere Prolog voorbeeld. Programmeren in Prolog kan worden beschouwd als bevragen van een gegevensstructuur. Een geliefd geval is dat waarbij gegevens over familierelaties liggen opgeslagen, en we geïnteresseerd zijn in de 'voorouder' relatie. Programmaregels hiervoor zouden als volgt kunnen luiden

$Oxy \rightarrow Vxy$ ('ouders zijn voorouders')

$Oxy \ \& \ Vyz \ \rightarrow \ Vxz$ ('ouders van voorouders zijn voorouders').
 (Wiskundig gezien vragen we dus naar een transitieve afsluiting.)
 Opvragen van de relatie V houdt nu in te onderzoeken welke paren x, y via deze regels en de ouderschapsgegevens in deze voorouderbetrekking moeten staan.

Opmerkelijk aan deze definitie van V is haar 'recursieve' of zelf-referente karakter: in de omschrijving van V komt dit predicaat zelf weer voor. In formule:

$$Vxy \leftrightarrow Oxy \vee \exists z (Oxz \ \& \ Vzy).$$

Wat garandeert ons eigenlijk dat zulke definities, in wezen toch circulair, tot zinvolle antwoorden leiden? We kunnen ons de zoekprocedure voorstellen als een iteratief proces. Eerst weten we niets over V: het is vooralsnog het lege predicaat (V_0). Opererend met die voorlopige omschrijving, evalueren we weer de definitie: met als resultaat $V_1xy \leftrightarrow Oxy$. Vullen we dit weer in, dan ontstaat een nieuwe V_2 , enzovoorts. Dit proces stabilizeert steeds (met een aantal rondes afhankelijk van de gegevensstructuur).

Wat is de reden van deze stabilizatie? De definitie gaf ons een operatie van V_i naar V_{i+1} die in technische zin monotoon is: als een argument een ander omvat, dan geldt hetzelfde voor de corresponderende waarden. (Er is hier een verband met het begrip 'monotonie' uit de vorige illustratie - maar dit is voor het volgende niet essentieel.) Deze monotonie impliceert dat alles wat in zekere ronde in de extensie van V is opgenomen nooit meer hoeft te worden weggegooid. Deze stabiliteit garandeert de uiteindelijke voltooiing van het proces. Maar, niet elke definitie heeft dit effect. Beschouw bij wijze van contrast de vorm

$$Vxy \leftrightarrow Oxy \vee \neg Vxy.$$

Deze zal, beginnend met de lege V, eindeloos alterneren:

V is leeg, V is alles, V is 0, V is alles, V is 0,

Hier komt nu weer een typisch logisch gezichtspunt naar voren. De kneep zit in de taalvorm: de 'goede' definities verschillen syntactisch daarin van de 'slechte' dat het predicaat V zelf alleen positief voorkomt, buiten het bereik van negaties. (Een precieze syntactische definitie blijft hier achterwege.)

Dit inzicht danken wij reeds aan de klassieke wiskundige logica. In de vijftiger jaren bewees Lyndon de transferstelling dat de monotone predicaatlogische definities voor een predicaat P juist diegene zijn die in een positieve P-vorm gebracht kunnen worden. En sedertdien zijn vele andere technische resultaten over deze begrippen in de literatuur te vinden.

Ook dit onderwerp blijft niet binnen de oorspronkelijke grenzen, maar loopt ditmaal over in kwesties van natuurlijk taalgebruik. Taalkundigen hebben geregeld opgemerkt dat zinnen 'positieve' of 'negatieve' contexten kunnen bevatten, met diverse interessante linguïstische effecten. Aanwijzingen voor zulke contexten zijn 'positief polaire uitdrukkingen' als "reeds", "sommige", die alleen binnen positieve contexten passen, of ook negatief polaire uitdrukkingen, zoals "hoeven", "ooit". De semantische duiding van deze verschijnselen is weer de bovengenoemde monotonie. Bijvoorbeeld een positieve context is er één waarin men een predicaat kan vervangen door een ander met een grotere extensie zonder de waarheid van de hele bewering aan te tasten. (Bij negatieve contexten ligt dit verband andersom.)

Een belangrijke bron van dit verschijnsel zijn de eerder besproken determinatoren en kwantoren. Zo is sommige X Y positief in het rechter predicaat Y:

als sommige X Y en $Y \subseteq Y'$, dan sommige X Y'.

En hetzelfde geldt voor alle of de meeste. Daarnaast is sommige ook positief in het linker argument:

als sommige X Y en $X \subseteq X'$, dan sommige X' Y.

Alle is daarentegen negatief in deze positie:

als alle X Y en $X' \subseteq X$, dan alle X' Y.

En de meeste vertoont voor X geen enkel speciaal gedrag.

Het basisvocabulaire aan determinatoren vertoont dus, door alle talen heen, een interessant stabiliteitsgedrag. Over deze observaties zijn weer vele logische vragen te stellen. Zo blijken de 'dubbelmonotone' kwantoren in bovenstaande zin alle te classificeren binnen de predicaatlogica. Voorts kan men taalkundige monotonie, opgevat als geldige vorm van redeneren, volstrekt systematisch verantwoorden in de logische typentheorie van onze

eerste illustratie. Aldus ontstaan categoriale grammatica's die, met de syntactische zinsbouw mee, meteen ook de toegestane monotone-gevolgtrekkingen van zinnen aangeven - een verstrengeling van grammatica en logica (die op zich weer precedenter heeft in de klassieke bewijstheorie).

Daarmee zijn overigens nog lang niet alle mogelijke thema's uitgeput. Zo suggereert de aanvankelijke kwestie van recursieve vragen in gegevensbestanden een mogelijk belang van taalkundige monotonie voor vragen in het algemeen.

6. Programmatische Conclusies

De hier gepresenteerde voorbeelden zijn slechts een greep. Men zou gemakkelijk evenzovele andere kunnen voorschotelen. Heel vaak hoeven we maar met een willekeurige semantische kwestie op één van onze gebieden te beginnen om, zonder voorbedachten rade, in één der andere aan te landen. Wat betekent dit nu? Uiteraard niet dat wiskunde, informatica en taalkunde eigenlijk een en dezelfde wetenschap zouden zijn: hun verschillen zijn immers onloochenbaar. Maar het betekent wel dat zij, vanuit een logisch gezichtspunt vele overeenkomsten vertonen, die een gemeenschappelijke studie wettigen. Men zou dit een logisch eenheidsstreven kunnen noemen, onder meer verwoord door Montague rond 1970 voor wiskunde en taalkunde, en sindsdien gaandeweg ook op informatica betrokken door de moderne semantici.

Maar dat is niet zo verwonderlijk, kan een criticus tegenwerpen. Wij wetenschappers hebben maar een beperkt logisch/methodologisch repertoire: en we vinden dus gewoon onze vaste wijzen van benaderen van onderwerpen in al die gebieden terug. Meer poëtisch gezegd, ligt de 'logical beauty' die we om ons heen zien 'in the eye of the beholder', eerder dan in de werkelijkheid. Zo gesteld, heeft de tegenwerping geen kracht. Als dit het beste is wat wij intellectueel kunnen bereiken, waarom zou de logica dan gehouden zijn dieper te kijken dan dat? Maar misschien betreft de kritiek veeleer het niveau van algemeenheid waarop de beweerde eenheid zich zou uiten. Inderdaad

kan men tegen Montague's oorspronkelijke programma aanvoeren dat dit weinig meer leek in te houden dan een gemeenschappelijk formalisme voor de vergeleken wetenschapsgebieden. Maar inmiddels, zo zal uit de voorafgaande voorbeelden zijn duidelijk geworden, is ook een levendige onderlinge commercie ontstaan in concrete begrippen, problemen en resultaten.

Toch bevatten dergelijke kritische tegenwerpingen vaak een serieus te nemen uitdaging. Er lijken immers soms centrale aspecten te zijn in de diverse gebieden die niet goed gedijen in de aanpalende streken. Zo wordt wel beweerd dat althans één essentieel verschil de informatica scheidt van de taalkunde. De natuurlijke taal is hoofdzakelijk gericht op communicatie tussen mensen, terwijl in de informatica mens-machine communicatie slechts een middel is voor een anders gericht doel, te weten het geven van opdrachten voor het effectief uitvoeren van taken. Dus rijst de vraag of er werkelijk een intrinsiek 'imperatief', computationeel motief valt aan te treffen in de natuurlijke taal. (Er zijn natuurlijk wel toegepaste motieven van deze aard, getuige het verschijnsel 'natural language processing'.) En bij nadere beschouwing zijn die er wel degelijk. Veel taalgebruik kan worden opgevat als instructies, zo niet voor 'echt' handelen, dan toch wel voor 'taalhandelen': het opbouwen van informatieve representaties voor hetgeen wordt vernomen. En daarbij fungeren talloze woorden inderdaad als opdrachten tot bijstellen van zulke representaties - hetzij impliciet, als onderdeel van hun betekenis (bijvoorbeeld, een determinator zal een zekere structuur in een representatie aanbrengen), hetzij zelfs expliciet, zoals in wiskundige bewijstaal: "stel", "zij", "neem".

Sterker nog, zo'n 'procedureel' perspectief wordt zelfs onontbeerlijk wanneer we de eerder genoemde taalkundige interesse in complexiteit van grammaticale structuren willen uitbreiden tot de semantiek. Hoe complex precies zijn betekenissen voor natuurlijke taal, en wat verklaart ook hun snelle leerbaarheid? Deze vraag is bijvoorbeeld geëxploreerd voor ons standaardvoorbeeld der determinatoren, nu eens niet vanuit het oogpunt van

de verschijnselen stabiliteit en monotonie, maar vanuit de relatieve complexiteit der procedures om na te gaan of ze van toepassing zijn in gegeven situaties. Hiertoe blijkt de wiskundige Automatentheorie ons middelen in handen te geven - met uitkomsten als de volgende. Ruwweg zijn de predicaatlogische basis-determinatoren berekenbaar met simpele eindige automaten, terwijl hogere-orde kwantoren ons kunnen nopen tot het gebruik van stapelautomaten met werkgeheugen. De volle kracht van Turing machines lijkt echter niet nodig - hetgeen ons weer enig inzicht verschaft in de manier waarop de natuurlijke taal uitdrukkingskracht tracht te paren aan relatief bescheiden rekenvermogens.

Deze laatste excursie moge aantonen dat de Eenheidsthese ook een programmatische waarde heeft. Ze noodt ons tot creëren van wetenschappelijke verbanden waar die er momenteel nog niet zijn.

7. Het Lot van de Logica

Wil dit alles nu beduiden dat juist de Logica de wijsheid in pacht heeft op het raakvlak van wiskunde, informatica en taalkunde? Er is mij persoonlijk weinig aan gelegen hoe we de zaken hier benoemen ... als het werk maar gebeurt. Niettemin zal men mij vergeven als ik de zaken heb gerangschikt vanuit mijn eigen vakgebied. Ik besluit bovendien met enkele gedachten over de consequenties van deze ontwikkelingen voor de logica zelf.

Om te beginnen blijkt dat men toepassingen van het vak moet nemen zoals ze komen, zonder al te veel vooropgezette bedoelingen. Toen ik in deze branche begon, stak ik boordevol ideeën over welke resultaten uit de logica intrinsiek belangrijk waren, en derhalve belangrijk hoorden te zijn voor de buitenwacht. Zo heb ik lang, en vergeefs, gezocht naar een centrale semantische rol voor de zg 'compactheidsstelling': een favoriet onder professionele logici. (Minsky heeft ook wel eens gewezen op een verwant gevaar voor de informatica: dat men zich zou laten aanpraten dat alle fundamentele problemen van dat vak, reeds vóór zijn ontstaan in de logica zouden zijn opgelost.) Dit neemt

natuurlijk niet weg dat wij mogen zoeken naar toepassingen van onze geliefkoosde logische inzichten. En wie zoekt, zal soms vinden. Een voorbeeld zijn de genoemde transferstellingen uit de modeltheorie. De oorspronkelijke wiskundige vraagstelling, over bewaard blijven onder veranderingen van structuren, heeft uiteindelijk ook een concreet analoog in de semantiek van de natuurlijke taal. Wij spreken voortdurend over wisselende situaties, die elastisch kunnen krimpen of groeien, al naar gelang het gesprek zich verplaatst. Ook hier rijst de vraag welke beweringen bestand zijn tegen zulke veranderingen - en de daarover gedane observaties liggen inderdaad in het verlengde van bekende vormen van wiskundige transfer.

Niettemin is de omgekeerde richting, vanuit een toepassingsprobleem zoeken naar relevante logische theorie, veel waardevoller, getuige het groeiende recente werk in de hier beschreven wetenschappelijke driehoek. Bovendien heeft de logica uiteindelijk zelf meer belang bij mogelijke nieuwe vraagstellingen, te ontleen aan zulke toepassingen. (Polemischer gezegd, het vak is, zelfs volgens vele vakbroeders, aan een verjongingskuur toe.) Van de vele stimuli die aldus op ons afkomen wil ik er één speciaal noemen.

In de informatica doet momenteel de leuze opgeld van een scheiding tussen 'logic' en 'control'. Het eerste is de nauwkeurige beschrijving van doelen en daartoe nuttige informatie, het tweede de administratie van opdrachten en 'procesbewaking' die tot uitvoering van taken, en bereiken van die doelen leidt. Dit tweede zou men, aldus de ideologie van logic programming, uiteindelijk aan het computersysteem zelf willen overlaten. Dit nu lijkt een misvatting in te houden over redeneren, in de zin van onze eerdere beschouwing daaromtrent. Juist die imperatieve en controle-aspecten vormen een vitaal onderdeel van onze logische competentie, in gespreksvoering en argumentatie. En het is eerder een zwakte dat de logica dienaangaande tot nu toe zo weinig systematisch heeft weten te zeggen (op enkele pogingen tot 'pragmatizing' na).

Deze kwestie laat zich ook plaatsen in een breder kader.

In het geding is de wisselwerking tussen redeneren en handelen: zoals we zagen in de correctheidsproblematiek van programma's, of ook in de motivering van niet-monotone logica's. Dit is een richting waarin de logica zich verder zou kunnen ontplooien - en ik vermoed dat daarbij weer een ouder grondslagenperspectief ruimer relevant zal blijken, te weten diverse vormen van constructieve wiskunde.

Tenslotte dient een mogelijk misverstand bestreden te worden. Ik heb een pleidooi gehouden voor intensieve logische activiteiten op de grens met wiskunde, informatica en taalkunde. Hieruit dient U niet te concluderen, op de minimale manier van illustratie 5.2, dat andere vormen van vakbeoefening voor mij niet bestaan. Integendeel, ik respecteer het logische grondslagenonderzoek ook op zichzelf; en draag eveneens die logici een goed hart toe die zich in dienst stellen van andere wiskundevakken, zoals algebra of mathematische fysica (vaak met groot technisch vernuft). Laat honderd bloemen bloeien, ook hier in Amsterdam!

8. Tenslotte

Deze leerstoel ontstond aan het eind der veertiger jaren, speciaal gecreëerd voor Evert Willem Beth - een onbekrompen wiskundige en filosoof, die eromheen het Instituut bouwde voor Grondslagenonderzoek en Wijsbegeerte der Exacte Wetenschappen. Beth's ideaal was een ruime wetenschappelijke en wijsgerige doorwerking van de moderne logica; en hij heeft met de kracht van zijn ideeën en zijn persoonlijkheid dat ideaal uitgedragen, zoals collega's in de meest uiteenlopende academische disciplines nog kunnen getuigen. Het Instituut voor Grondslagenonderzoek is na Beth's overlijden blijven voortbestaan, als brandpunt van logica-beoefening van hoge kwaliteit, onder de leiding van zulke vooraanstaande geleerden als Haskell Curry en Martin Löb, de laatste mijn leermeester. Niettemin is de ruime pretentie en uitstraling langzamerhand verkwijnd. Momenteel is echter een nieuwe beweging gaande ruimere idealen gestalte te geven -

in het Instituut voor Taal, Logica en Informatie, tezamen met collega's uit de Faculteiten voor Wiskunde en Informatica, en Wijsbegeerte.

Mij dunkt dat deze ontwikkeling goed past bij de betrokken faculteiten. Immers, zij vertegenwoordigen alle disciplines die bij uitstek verstrekkende universitaire, en zelfs culturele functies te vervullen hebben, naast hun interne specialistische voortgang. Met name geldt dat ook voor de wiskunde, die mij zo gastvrij heeft opgenomen - en ik hoop dan ook de waarde van de wiskundige denktrant wijd uit te dragen.

Resteert de aangename plicht persoonlijke dank te betuigen. In 1977 ben ik uit Amsterdam vertrokken, op zoek naar het avontuur, als lector in de Symbolische Logica aan de Rijksuniversiteit te Groningen. Ik trof daar een plezierig en intellectueel vruchtbaar milieu, waaraan ik slechts de aangenaamste herinneringen bewaar. Tien jaar later bleken mijn voormalige Amsterdamse collega's bereid deze wegloper weer in hun midden op te nemen. Deze beslissing is des te opmerkelijker wanneer men bedenkt dat Nederland, zoals bekend, een niet-euclidische geometrie heeft, gelijkend op de Klein cirkel. Amsterdam ligt in het middelpunt, en reizend naar de periferie worden euclidisch kleine afstanden als astronomisch gemeten - zodat ik ongetwijfeld van hier uit niet meer met het blote oog waarneembaar kan zijn geweest. Ik mag hier niet voor mij houden dat de bewoners zelf van dergelijke randstreken de wereld in geheel andere proporties zien. Erger nog, ook ik ben daarvan niet vrij gebleven, en prijs me gelukkig in de afgelopen jaren ontdekt te hebben dat er zoiets als een wetenschappelijk staats- of zelfs wereldburgerschap bestaat, voorbij de gemeentegrenzen van Amsterdam. Maar ook met die geestesgesteldheid, hoop ik deze Universiteit van harte te dienen.

Ik dank U.

