Algebra en Coalgebra: bespiegelingen in de logica

Algebra en Coalgebra: bespiegelingen in de logica

Rede

uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van
hoogleraar in de logica,
in het bijzonder de wiskundige logica en de grondslagen van de informatica,
aan de Universiteit van Amsterdam
op vrijdag 28 oktober 2011

door

Yde Venema

Mevrouw de rector magnificus,
Mijnheer de decaan,
zeer gewaardeerde toehoorders

Het uitspreken van een oratie of inaugurele rede is een mooie Nederlandse traditie waarin een nieuwe hoogleraar in het openbaar aan een breed publiek uitlegt wat het vakgebied inhoudt, en welke richting de kersverse professor van plan is om binnen dat vakgebied in te slaan. Afhankelijk van de discipline kunnen deze twee doelen van de oratie beter of minder met elkaar sporen, en voor een leeropdracht op het grensvlak van de wiskundige logica en de theoretische informatica, vereist het op de rails houden van het verhaal acrobatische vaardigheden. De kern van dit probleem is dat het buitengewoon moeilijk is om op een zinnige manier over een wiskundig onderwerp te praten zonder daadwerkelijk aan wiskunde te gaan *doen*.

Het liefste wil ik u natuurlijk vertellen wat mijn hart werkelijk sneller doet kloppen, en dat is bijvoorbeeld de wondere wereld van de coalgebraïsche logica, en meer in het bijzonder hoe de modale distributieve wetten zich manifesteren in de algebraïsche logica, in de theorie van eindige automaten die opereren op oneindige structuren, en in de topologie. Kortom, ik zou eigenlijk de komende veertig minuten willen besteden aan de zogeheten Carioca axioma's:

$$(\nabla 1) \qquad \frac{\{a \leq b \mid (a,b) \in Z\}}{\nabla\alpha \leq \nabla\beta}(\alpha,\beta) \in \overline{T}Z$$

$$(\nabla 2_f) \qquad \bigwedge\left\{\nabla\alpha \mid \alpha \in A\right\} \leq \bigvee\left\{\nabla(T{\textstyle\bigwedge})\Phi \mid \Phi \in SRD(A)\right\}$$

$$(\nabla 3_f) \qquad \nabla(T{\textstyle\bigvee})\Phi \leq \bigvee\left\{\nabla\beta \mid \beta\,\overline{T}\,(\in)\Phi\right\}$$

Nu zijn deze axioma's, zoals de Engelsen het noemen, een *acquired taste*, en wellicht is het onderwerp ook iets te specialistich van aard om een oratie aan te wijden. Ik vrees dat ik u geen plezier doe, en mijn vakgebied geen dienst bewijs als ik op deze voet doorga.

Desalniettemin wil ik een poging wagen om u uit te leggen waar mijn onderzoek over gaat, en wat ik van plan ben om de komende jaren te gaan doen. Om dan maar met mijn leeropdracht te beginnen, deze behelst de

> *Logica,*
> *in het bijzonder de wiskundige logica en de grondslagen van de informatica,*

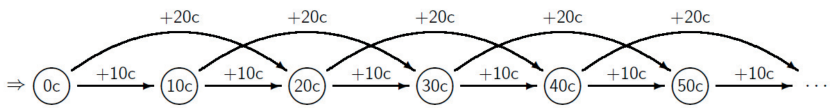
en ik wil in deze rede in ieder geval mijn best doen om mijn positie te beschrijven met betrekking tot de logica, de wiskunde en de (theoretische) informatica. Voor wie nog steeds vagelijk ongerust is door de titel van deze rede: ik zal proberen alle begrippen te introduceren zonder nodeloos technisch te worden. Helemaal zonder symbolen en formules gaat het helaas niet.

Coalgebra

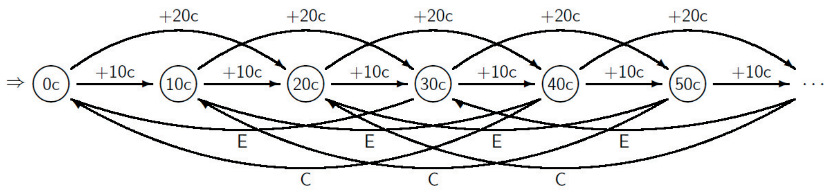
Van de woorden uit de titel van mijn oratie, is *coalgebra* zonder enige twijfel het minst bekende. Toch heeft iedereen *coalgebraïsche ervaringen*.

Neem als voorbeeld maar eens een eenvoudige koffie-automaat die espresso danwel cappuccino schenkt voor de bedragen van respectievelijk 30 en 40 cent, en munten accepteert van 10 en 20 cent. U staat in de rij voor deze machine, en ziet de mensen voor u stuk voor stuk het gewenste bakje troost uit de machine halen. Zelf aan de beurt stopt u twee muntjes van 20 cent in de automaat, u drukt op de \`espresso' knop, en er gebeurt *niets*.

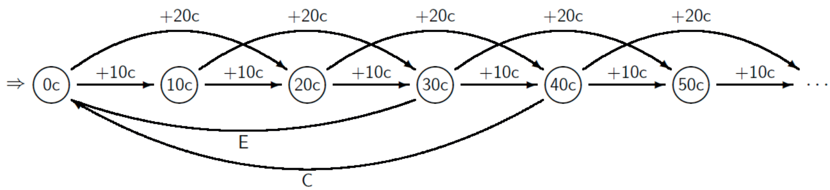
Voordat u begint met verbaal of zelfs fysiek geweld tegen deze arme koffiemachine, wil ik u eerst even met u de coalgebra bedrijven. Wat hier namelijk aan de hand is, is dat uw aanvankelijke modellering van deze machine niet overeenstemt met het daadwerkelijke *gedrag* dat het apparaat vertoont. Wat dat eerste betreft, waarschijnlijk heeft u een soort plaatje van de automaat waarin uw \`tegoed' binnen de machine kan worden opgehoogd door geld in het apparaat te werpen:



en kan worden opgesoupeerd door de espresso dan wel cappuccino te bestellen:



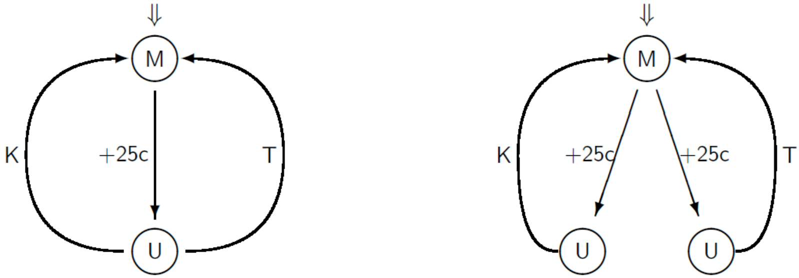
De botte weigering van het apparaat om u de verlangde espresso te verstrekken noodzaakt u tot het bijstellen van uw model. Misschien schenkt het apparaat wel alleen koffie als u er de *precieze* hoeveelheid geld heeft ingestopt:



of misschien werkt het nog heel anders.

Waar het mij nu om gaat is dat bovenstaande plaatjes voorbeelden zijn van coalgebra's, en dat we het al gehad hebben over het sleutelbegrip uit de coalgebra, namelijk: *gedrag*. Het zal duidelijk zijn dat het hier een sterk vereenvoudigde definitie van dit begrip betreft: coalgebra gaat (nog) niet over de biologie, de grondslagen van de psychologie of andere gedragswetenschappen. Dat betekent niet dat er niets interessants te zeggen valt over zo'n ogenschijnlijk eenvoudig begrip. Per slot van rekening kun je de informatica zelf zien als de wetenschap die het genereren, sturen en beheersen van het gedrag van computersystemen als één van haar voornaamste onderwerpen heeft. Als u zich realiseert dat het daarbij in mogelijke toepassingen niet zozeer gaat om koffieautomaten, maar om besturingssystemen van kerncentrales, satellieten, of om de software die de communicatie regelt tussen u en uw bank, zal het bovendien duidelijk zijn dat we het hier hebben over een vitaal belang voor onze huidige gedigitaliseerde maatschappij. Eén van de belangrijkste doelen van de theoretische informatica is het ontwerpen van wiskundige theorieën die kunnen bijdragen aan correct gedrag van programmatuur.

Laten we nog eens een ander voorbeeld bekijken, nu een simpeler automaat die alleen muntjes van 20 cent accepteert, en de keuze biedt tussen koffie en thee. De letters binnen de cirkels geven aan wie bepaalt wat de volgende actie is: U of de machine (M). Vertonen de onderstaande twee automaten `eigenlijk hetzefde' gedrag?



Op het eerste gezicht lijken ze hetzelfde gedrag te kunnen vertonen, namelijk een oneindige reeks van rondes waarin de automaat steeds eerst een muntje accepteert, om vervolgens koffie danwel thee te schenken:

$$(25c)\frac{\mathsf{K}}{\mathsf{T}}(25c)\frac{\mathsf{K}}{\mathsf{T}}(25c)\frac{\mathsf{K}}{\mathsf{T}}\dots$$

Toch is er een essentieel verschil: links kiest u zelf, rechts kiest de machine.

De bovenstaande voorbeelden brengen ons bij de kern van de zaak, namelijk dat we veel automaten, programma's, computersystemen, ... kunnen modelleren als

- een verzameling *toestanden*,
- die verbonden worden door een collectie van *transities*.

Dergelijke evoluerende systemen noemen we ook wel coalgebra's, en het doel van Coalgebra als onderzoeksgebied is dat men het *gedrag* van dergelijke systemen precies wil definiëren, begrijpen, beschrijven, bewaken en (be-)sturen.

Om te verduidelijken wat Coalgebra is, moeten we even iets beter kijken naar de transities van zo'n coalgebra. Binnen de theoretische informatica hebben wetenschappers allerlei formele wiskundige theorieën ontwikkeld, waarin evoluerende systemen heel verschillende aspecten van een softwaresysteem incorporeren. U kunt hierbij denken aan voorbeelden als input/output, niet-deterministische keuzes, interactie (tussen de machine en zijn omgeving, of tussen verschillende machines in een multi-agent setting), onzekerheid en waarschijnlijkheid, enzovoort.

Het doel van de *Universele Coalgebra* is om zo veel mogelijk van deze evoluerende systemen te definiëren en te bestuderen op een manier die zowel algemeen als uniform is. Als onderzoeksgebied is Coalgebra pas in de jaren 90 van de vorige eeuw opgekomen, met als voortrekkers onderzoekers als Peter Aczel en onze landgenoot Jan Rutten. Formeel wordt een coalgebra gedefinieerd op een verrassend eenvoudige manier, namelijk als een transitiefunctie van de vorm

$$f : S \to T(S),$$

waarbij S de verzameling toestanden van het systeem is, en T een operatie op verzamelingen die corrrespondeert met het *type* van de coalgebra. Voor de kenners: T is een functor op de categorie Set van verzamelingen en afbeeldingen, en de bovenstaande definite verklaart ook de *naam* \`Coalgebra', die niets anders wil zeggen dan: algebra andersom. De transitiefunctie van een coalgebra geeft aan hoe de verschillende toestanden van de coalgebra zich kunnen *ontvouwen*, en welke *observaties* wij daarbij van buiten het systeem kunnen doen. Alle bovengenoemde mogelijke features van een evoluerend systeem kunnen op de één of andere wijze in de functor T worden opgeborgen, en op deze wijze combineert de theorie wiskundige eenvoud met weidse toepasbaarheid.

Dit uitgangspunt laat meteen zien wat de kracht, maar ook wat de beperking van de Universele Coalgebra is. De bijdrage van deze theorie schuilt er niet in om snellere algoritmes op te leveren voor een concreet probleem, ook niet om direct de correctheid te bewijzen van zo'n algoritme, en zelfs niet om diepe wiskundige stellingen te bewijzen over bijvoorbeeld probabilistische automaten of andere coalgebra's van een specifiek type. De kracht van de Universele Coalgebra ligt in het analyseren van de *fundamentele* eigenschappen van evoluerende systemen, op een *uniforme* manier. Vanuit dit unificerende, coalgebraïsche perspectief kunnen algemene methoden en technieken worden ontwikkeld, die overigens in specifieke situaties wel degelijk tot nieuwe inzichten en resultaten kunnen leiden.

Zoals gezegd, als één van de belangrijkste doelstellingen van theoretisch onderzoek binnen de informatica zie ik het ontwerpren van formele methoden en technieken die garanderen dat soft- en hardware precies werkt zoals wij willen. In vaktaal komt dit onder andere neer op de volgende taken:

specificatie het eenduidig en volledig beschrijven van de werking van een te ontwerpen programma of algoritme, en

verificatie het leveren van een systematisch en sluitend bewijs van de correctheid van een gegeven programma of algoritme.

Op het moment dat we voor deze taken *formele talen* willen gebruiken, betreden we het onderzoeksterrein van de logica. Vanuit het paradigma van de universele coalgebra is dan de vraag: wat zijn geschikte logische formalismes, waarmee we op een uniforme manier over het gedrag van coalgebra's kunnen spreken?

Logica

Wiskunde, Informatica en Logica, tussen deze drie disciplines beweegt zich mijn werk; doch de belangrijkste van deze drie is voor mij de Logica. Als wetenschapper benoem ik me zelf in eerste instantie als logicus, en waar ik op bruiloften en partijen de vraag wat dat dan precies inhoudt nog wel eens probeer te ontwijken, is dit toch wel het uitgelezen moment om deze vraag te beantwoorden.

Traditioneel wordt onder logica de leer verstaan die zich bezighoudt met de formele regels van het redeneren, en wordt deze leer als vakgebied gerekend tot zowel de wijsbegeerte als de wiskunde. In principe is het in de logica niet van belang is waar dat redeneren over gaat, en in de *symbolische* logica wordt dat benadrukt door te abstraheren van concrete beweringen naar een formele representatie daarvan. Bijvoorbeeld: de (correcte) redenering

als de wereld plat is, ligt de maan bedekt met euro's;
<u>de maan ligt niet bedekt met euro's</u>
dus is de wereld niet plat

kan symbolisch worden weergegeven als

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \end{array}}{\neg p}$$

In deze klassieke benadering van de logica is het dus een kernvraag op welke gronden we uit een aantal aannames $A_1, \ldots, A_n$ de conclusie C mogen trekken. Grofweg kunnen we daarin twee verschillende methodes aanwijzen: een syntactische en een semantische.

Afleidbaarheid

In de syntactische of deductieve benadering rechtvaardigen we het trekken van conclusies op basis van *afleidingen*. Een afleiding is een rij formules waarvan elk nieuw element volgens de heel nauw gedefinieerde regels van een zogeheten *formeel systeem* kan worden verkregen uit één of meer eerdere formules uit de rij. Als voorbeeld van zo'n formeel systeem nemen we de MU-puzzel van Douglas Hofstadter.

Het MU-spel wordt als volgt gespeeld. U krijgt van mij de streng MI cadeau. Daarnaast kunt u nieuwe strengen vormen uit de strengen die al in uw bezit zijn, door naar believen de volgende regels toe te passen:

regel 1	regel 2	regel 3	regel 4
$\dfrac{x\mathtt{I}}{x\mathtt{IU}}$	$\dfrac{\mathtt{M}x}{\mathtt{M}xx}$	$\dfrac{x\mathtt{III}y}{x\mathtt{U}y}$	$\dfrac{x\mathtt{UU}y}{xy}$

Regel 1 zegt dat u, als u al een streng bezit die eindigt op een I, een nieuwe streng kunt maken door als laatste symbool een U toe te voegen. Regel 2 zegt dat u van een streng die met een M begint, het deel ná de M mag verdubbelen, etc.

Als voorbeeld van een afleiding geven we aan hoe de streng MUIIU geproduceerd kan worden uit MI; bij elke stap geven we het nummer van de toegepaste regel aan.

$$\mathtt{MI} \xrightarrow{2} \mathtt{MII} \xrightarrow{2} \mathtt{MIIII} \xrightarrow{1} \mathtt{MIIIIU} \xrightarrow{3} \mathtt{MUIU} \xrightarrow{2} \mathtt{MUIUUIU} \xrightarrow{4} \mathtt{MUIIU}$$

Hier is ten slotte de MU-puzzel:

> Kun je met deze regels, uitgaande van de streng MI, die gegeven was, de streng MU produceren? Met andere woorden: is MU afleidbaar uit MI in dit formele systeem?

Zoals dit eenvoudige voorbeeld al laat zien, zijn kenmerkende eigenschappen van een formeel systeem dat het eenvoudig is om te checken dat een gegeven afleiding aan de regels voldoet, maar vaak moeilijk om een voorgestelde doelwitstreng daadwerkelijk af te leiden. En om te laten zien dat er voor een bepaalde streng geen afleiding *bestaat*, moeten we buiten het systeem treden.

Semantisch gevolg

In de tweede benadering zeggen we dat C een *semantisch gevolg* is van $A_1,\ldots,A_n$ als we ons geen situatie voor kunnen stellen waarin de aannames $A_1,\ldots,A_n$ allemaal waar zijn, en de conclusie C niet. Een roemrucht voorbeeld betreft het parallellenpostulaat van Euclides.

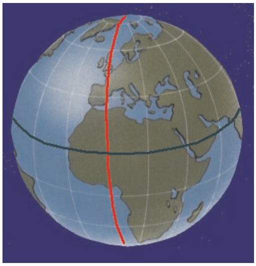
De Griekse wiskundige Euclides, die leefde van 323-283 v.Chr. in Alexandrië, geldt als de grondlegger van de axiomatische methode in de wiskunde. In zijn werk *De Elementen*, waarschijnlijk het meest invloedrijke wiskundige werk ooit geschreven, leidt hij op systematische wijze de theorie van de meetkunde af van de vijf postulaten of axioma's in Tabel 1 (waarbij ik me voor het gemak even tot de vlakke, twee-dimensionale meetkunde beperk).

(A1)	Elk tweetal punten kan worden verbonden door een rechte lijn.
(A2)	Elk recht lijnstuk kan oneindig worden verlengd tot een rechte lijn.
(A3)	Gegeven een recht lijnstuk, kan men een cirkel tekenen met dit lijnstuk als straal en een eindpunt van dit lijnstuk als het middelpunt van de cirkel.
(A4)	Alle rechte hoeken zijn gelijk (in de zin van congruent).
(P)	Door een punt, dat niet op een gegeven rechte lijn ligt, gaat precies één rechte lijn die de gegeven lijn nooit zal kruisen.

Tabel 1 Euclides' axioma's voor de vlakke meetkunde

Het vijfde axioma (P) is de geschiedenis ingegaan als het *parallellenpostulaat*; denkt u over de beide lijnen die elkaar nooit kruisen als de twee rails van een oneindig lange spoorweg. Dit parallellenpostulaat heeft vanaf het allereerste begin een andere status gehad dan de andere vier. Eeuwenlang is door wiskundigen geprobeerd om te laten zien dat het parallellenpostulaat afleidbaar is uit de andere vier axioma's, op een vergelijkbare manier als we in het bovenstaande MU-spel zagen. Pas in de 19e eeuw bleek dat al zulke bewijzen verborgen aannames moeten gebruiken die zelf equivalent zijn aan het parallellenpostulaat: cirkelredeneringen dus.

Het parallellenpostulaat volgt namelijk *niet* uit de andere axioma's! Over cirkelredeneringen gesproken, beschouw maar eens een interpretatie waarin we als lijnen de zogenaamde grootcirkels van onze wereldbol nemen: die cirkels op het aardoppervlak waarvan het middelpunt samenvalt met dat van de globe, zoals de meridianen en de evenaar (maar niet de andere breedtecirkels). In deze situatie snijden *alle* lijnen elkaar, zodat onmogelijk aan het parallelpostulaat kan worden voldaan. Met wat kleine aanpassingen kan onze wereldbol worden omgeturnd tot een niet-euclidische meetkunde die wel aan de axioma's A1–A4 voldoet, maar niet aan P.



Logica in de 21e eeuw

Voor de definitie van logica als de studie naar correct redeneren gebruikte ik zojuist het woord `traditioneel', en niet zonder reden. In de afgelopen eeuw heeft de logica zich ontwikkeld tot een veel breder, rijker, dieper en voller vakgebied. Breder is de logica geworden door haar dwarsverbanden met andere vakgebieden dan de wijsbegeerte en de wiskunde. Naast de informatica, die door sommigen wel de voorzetting van logica met andere middelen wordt genoemd, en deelgebieden daarvan zoals de kunstmatige intelligentie, zijn dat bijvoorbeeld de taalkunde, de economie en de cognitiewetenschappen. Deze connecties hebben de logica verrijkt met vele nieuwe vragen en thema's. Als voorbeeld noem ik de perspectiefverbreding van het hoofdonderwerp van de logica, van redeneren als solitaire activiteit van een volmaakte wiskundige naar interactieve processen van informatie-uitwisseling tussen meerdere zogeheten agents wier cognitieve vaardigheden aan allerlei beperkingen onderworpen kunnen zijn. Verdieping heeft de logica ondergaan als gevolg van soms dramatische ontwikkelingen binnen het vak zelf, zoals Gödel's Onvolledigheidsstellingen. Maar ook is de Logica verdiept door haar steeds nauwere vervlechting met andere wiskundige disciplines, zoals de algebra en de topologie. Voller, ten slotte, is de logica geworden doordat, onder invloed van haar uitdijende toepassingsgebied, er een explosie is opgetreden van nieuwe logische formalismes, elk met zijn eigen taal, beoogde interpretatie, en afleidingssystemen.

Heden ten dage kunnen we de logica karakteriseren als een volwassen, zelfstandige, wetenschappelijke discipline, die zich bezighoudt met de symbolische *representatie* van informatie, en de formele processen waarin het *gebruik* van die informatie centraal staat. Desalniettemin staat de dualiteit tussen de symbolische vorm waarin informatie wordt gerepresenteerd, en de semantische betekenis van die representatie, als logisch kernbeginsel onverminderd overeind.

Modale Logica

De meest succesvolle tak van de logica, als we het over toepassingen in andere vakgebieden hebben, is de *modale* logica. Karakteristiek aan de modale logica is dat aan een bestaande basislogica zogeheten modaliteiten worden toegevoegd: operatoren die beweringen kwalificeren. Voorbeelden van zulke operatoren, met hun bedoelde interpretatie, zijn:

$\Box B$	het is noodzakelijk dat bewering *B* waar is
$\Box_{Alice} B$	Alice weet dat bewering *B* waar is
$\Box_D B$	bewering *B* is bewijsbaar in formeel systeem *D*
$\Box_\pi B$	na uitvoering van programma π is *B* waar.

Wat maakt deze modale logica's nu zo aantrekkelijk voor toepassingen? Stelt u zich voor dat we in een bepaald toepassingsgebied op zoek zijn naar een geschikte logica. Deze logica moet aan een aantal onderling tegenstrijdige criteria voldoen: aan de ene kant willen we dat het formalisme voldoende uitdrukkingskracht heeft om de essentiële aspecten van het toepassingsdomein te kunnen formaliseren. Aan de andere kant komt expressiviteit met een computationeel prijskaartje; hoe rijker de taal, hoe ingewikkelder het is om met deze taal te werken. Het is precies in dit spanningsveld tussen expressiviteit en computationele complexiteit dat de modale logica, vergeleken met andere formalismes, een uitstekende balans laat zien.

Dit laatste geldt in het bijzonder voor toepassingen in de coalgebra. Op zich is dat geen wonder: de relationele structuren die ons sinds het werk van Kripke en anderen in het midden van de 20e eeuw de standaard semantische interpretatie voor de klassieke modale logica verschaffen, zijn zelf standaardvoorbeelden van coalgebra's.

Uit het werk van Larry Moss en vele anderen is in de laatste jaren gebleken dat we voor ieder type coalgebra geschikte varianten van de klassieke modale logica kunnen vinden, die bijna alle goede eigenschappen van het originele systeem erven. Er bestaat inmiddels een redelijke consensus dat modale logica de natuurlijke coalgebraïsche logica is, vergelijkbaar met de rol van de equationele logica in de algebra.

Logica's of Logica?

De bovengenoemde verbreding van het vakgebied heeft een duizelingwekkende hoeveelheid formele systemen gebaard die onder de verzamelnaam \`logica' te boek staan. Als ik me even beperk tot de modale logica en aanverwante formalismes: Er zijn alethische, deontische, dynamische, epistemische, probabilistische en temporele logica's; intuïtionistische, substructurele en hybride logica's. Van al deze systemen bestaan propositionele en predicatenlogische varianten, versies met of zonder dekpuntoperatoren of dekpunkconnectieven, en ten slotte zijn er dan ook nog allerlei combinaties van deze systemen. Sommige buitenstaanders zien deze explosie van logica's als een zorgwekkende wildgroei, en vele insiders trekken zich terug in het bastion van hun Uitverkoren Systeem, en bekommeren zich niet of nauwelijks om het wijdere landschap.

Waar binnen de modale logica zulke middelpuntvliedende krachten waar te nemen zijn, is de vraag zeker gerechtvaardigd of er door de bomen van al deze systemen nog wel een bos valt waar te nemen. Met andere woorden, bestaat er nog wel zoiets als \`Logica', of zelfs maar \`Modale Logica'? En als het antwoord bevestigend is, heeft het dan wel zin om deze noties als zodanig te bestuderen? Ik zou hier niet staan om op dit moment deze rede uit te spreken als mijn antwoord op deze vragen niet een volmondig \`ja' was. Het heeft geen enkele zin om voor elk formalisme afzonderlijk het wiel uit te vinden, en er is juist een wereld te winnen als we het volledige landschap van de logica in kaart brengen door het identificeren en bestuderen van fundamentele principes en patronen. Correspondentie, canoniciteit, modale distributieaxioma's: zonder dit soort abstracte, unificerende concepten is ons begrip van individuele logische systemen slechts fragmentarisch en daarmee ontoereikend. Dit is een pleidooi om de dreigende versplintering van ons vakgebied met man en macht tegen te gaan door het frontaal inzetten van de wiskunde in de logica. Voor het doel van deze rede gaat mijn aandacht hierbij in eerste instantie uit naar de *algebra*.

Logica als Algebra

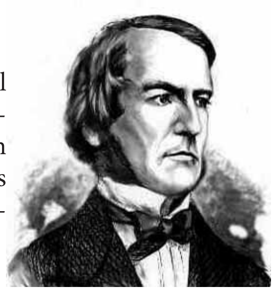
Toen ik zoëven sprak over formele systemen, het manipuleren van betekenisloze strengen met symbolen, heb ik velen van u wellicht een aha-erlebnis bezorgd, misschien wel een onaangename. Jaren geleden gaf ik eens, in een enthousiaste bui, een soortgelijke uitleg van mijn dagelijkse bezigheden, wat mijn toehoorder tot de verzuchting bracht \`\`voor mij is het algebra''. Ik was met stomheid geslagen vanwege zijn diepe inzicht, want hij sloeg de spijker op zijn kop!

Logica en algebra, althans de middelbare-school algebra, hebben veel gemeen. Op de middelbare school hebben wij allemaal geleerd hoe we bepaalde vergelijkingen, zoals $x^2 - 2x - 3 = 0$ kunnen oplossen. Dat lukte vaak volgens een redelijk vast stramien:

$$
\begin{aligned}
& x^2 - 2x - 3 = 0 \\
\Longleftrightarrow & (x+1)(x-3) = 0 \\
\Longleftrightarrow & x = -1 \quad of \quad x = 3
\end{aligned}
$$

Dit is een voorbeeld van *algebra als logica*: de zogeheten equationele logica behelst het manipuleren van termen en vergelijkingen, waarbij u algebraïsche wetten (axioma's) en regels mag gebruiken. Inderdaad: de equationele logica is een formeel systeem.

Omgekeerd kunnen we de logica op een algebraïsche manier bedrijven. In de woorden van de grondlegger van deze aanpak, de 19e eeuwse wiskundige George Boole (1815-1864):



> The design [...] is to investigate the fundamental laws of the operations of the mind by which reasoning is performed; to give expressions to them in the symbolic language of a calculus, and upon this foundation to establish the science of logic and construct its methods.

Twee fundamentele principes schragen de algebraïsche logica. Om te beginnen kunnen we complexe proposities of uitspraken weergeven als algebraïsche termen, om daar vervolgens mee te gaan *rekenen*. Net zoals we de waarde van de rekenkundige expressie $x^2 - 2x - 3$ kunnen uitrekenen als we weten waar de variabele x voor staat, zo kunnen we de betekenis van de formule $(p \vee q) \to p$ bepalen zodra we de waarde van p en q kennen. Het domein van deze rekenpartij bestaat natuurlijk niet uit getallen, maar uit zogeheten *waarheidswaarden*. In het geval van de klassieke propositielogica zijn dat er twee: 0 voor *waar* en 1 voor *onwaar*. Precies: de digitale nulletjes en ééntjes waar de informatica op is gebaseerd. Om te rekenen met deze waarheidswaarden interpreteren we de logische connectieven als bewerkingen op de waarheidswaarden die gegeven worden door zogeheten *waarheidstafels*, bijvoorbeeld:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

Zo kunnen we nu uitrekenen dat de formule $(p \vee q) \rightarrow p$ onwaar is als p onwaar is en q waar:

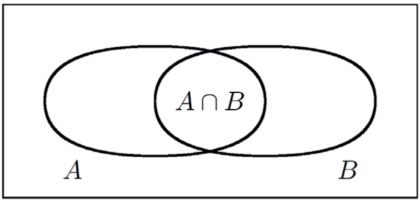
$$(p \vee q) \rightarrow p) = (0 \vee 1) \rightarrow 0 = 1 \rightarrow 0 = 0.$$

Veel dieper gaat het tweede principe van de algebraïsche logica. Nu kijken we niet meer alleen naar de klassieke propositielogica, maar naar een willekeurig logisch formalisme, met een arsenaal aan connectieven (manieren om uitspraken aan elkaar te plakken), en een gevolgtrekkingsrelatie. Het idee is nu dat we met zo'n logica een klasse van algebra's kunnen associëren, en eigenschappen van de logica terugvinden als eigenschappen van de corresponderende klasse van algebra's. Van dit principe zijn onnoemelijk veel voorbeelden te geven. Zo correponderen Boolese algebra's met de klassieke propositielogica, Heyting algebra's met de intutionistische logica, geresidueerde tralies met verschillende substructurele logica's, en voor de modale logica hebben we de modale algebra's. Wat we hier nu mee gewonnen hebben is dat we al die verschillende logica's in een overzichtelijk wiskundig kader hebben ondergebracht, zodat we niet langer elk resultaat voor elke logica afzonderlijk hoeven te bewijzen, maar op een systematische manier hele families van logica's kunnen analyseren. Je kunt bijvoorbeeld laten zien dat een logica de zogeheten interpolatie-eigenschap heeft als je de corresponderende algebra's op een bepaalde manier kunt amalgameren, en zo zijn er veel meer voorbeelden van equivalenties tussen logische en algebraïsche eigenschappen. Daarbij, en dat is een tweede grote voordeel, kunnen we nu gebruik maken van de krachtige machinerie van de universele algebra waarin veel methoden en technieken zijn ontwikkeld om algebra's te classificeren.

Deze algebraïsche benadering kent een lange traditie binnen de moderne logica. Sterker nog: in de 19e eeuw *was* er eigenlijk geen andere symbolische logica dan de algebraïsche. In de eerste helft van de 20e eeuw verloor de algebraïsche logica echter haar centrale positie binnen de wiskundige logica. Dit kwam deels doordat andere kwesties zoals de grondslagenstrijd de aandacht opeisten, deels doordat spectaculaire resultaten zoals Gödels onvolledigheidsstellingen de logica verrijkten met heel nieuwe deelgebieden. Maar misschien de belangrijkste reden was dat na Frege's introductie van kwantoren en gebonden variabelen, de predicatenlogica snel terrein won als het voornaamste formalisme binnen de logica. Met name het fenomeen *binding* maakt dat de predicatenlogica zich veel moeilijker bleek te lenen voor een algebraïsering dan de propositionele logica's waar ik tot dusver over heb gesproken. Dat wil niet zeggen dat de algebraïsche logica op een dood spoor raakte; in het werk van Tarski en vele anderen kende en kent het vakgebied vele hoogtepunten.

Een belangrijk voorbeeld dat ik hier niet ongenoemd kan laten is de representatiestelling van Marshall Stone (1903-1989). Laten we eerst nog even kijken naar het verband met de logica: zoals we hiervoor al zagen zijn er eigenlijk *twee* klassieke propositielogica's, een semantische en een deductieve. Deze twee logica's corresponderen met *drie* klassen algebra's:

De semantische logica met de specifieke algebra van de waarheidswaarden 0 en 1, en ook met de concrete algebra's van verzamelingen die u misschien nog kent van de Venn diagrammen. De deductieve logica correspondeert met de Boolese algebra's, een klasse van structuren die wordt gedefinieerd door het formuleren van een aantal abstracte equationele condities.



De vraag is nu wat die twee soorten algebra's, de abstracte en de concrete, met elkaar te maken hebben. Het is niet zo moeilijk om na te gaan dat de concrete algebra's voldoen aan alle wetten van de abstracte algebra's, en daarmee Boolese algebra's zijn: in het bovenstaande plaatje ziet u bijvoorbeeld meteen dat $A \cap B = B \cap A$. Omgekeerd was het een prestatie van formaat om te zien dat in elke abstracte Boolese algebra een concrete algebra van verzamelingen verstopt zit. Stone's resultaat, dat een bepaalde klasse van concrete structuren volledig wordt beschreven door een aantal abstracte principes, is hiermee een klassiek voorbeeld van een wiskundige representatiestelling.

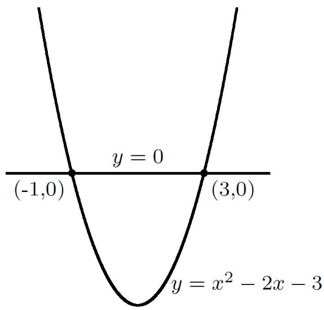
Als onmiddellijk gevolg van deze stelling kunnen we nu laten zien dat de deductieve en de semantische propositielogica met elkaar overeenstemmen:

$$\begin{array}{ccc} \text{deductieve propositielogica} & & \text{semantische propositielogica} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \text{Boolese algebra's} & = & \text{verzamelingalgebra's} \end{array}$$

Dualiteit

Stone's werk gaat veel dieper dan alleen deze representatiestelling, een onuitwisbare indruk in de wiskunde van de 20e eeuw hebben zijn dualiteitsstellingen gemaakt. Anders dan in het gewone taalgebruik wordt in de wiskunde het woord dualiteit gebruikt om uit te drukken dat twee op het oog verschillende gebieden van de wiskunde, op een dieper, abstract niveau toch wezenlijk overeenstemmen.

Hier zullen we het hebben over een dualiteit die u ook van buiten de wiskunde kent, namelijk die tussen een *verbale* en een *visuele* manier om de wereld om ons heen te begrijpen. Binnen de wiskunde komt deze tegenstelling naar boven in het verschil tussen een algebraïsche en een meetkundige benadering. Deze twee hebben echter alles met elkaar te maken. Misschien herinnert u zich nog vagelijk dat het oplossen van een kwadratische vergelijking zoals $x^2 - 2x - 3 = 0$ overeenkomt met het vinden van de snijpunten van de lijn $y = 0$ met de parabool die wordt gegeven als $y = x^2 - 2x - 3$.



Kerngebieden van de moderne wiskunde, zoals de algebraïsche meetkunde, bouwen nog steeds voort op zulke verbanden tussen algebraïsche en meetkundige intuties. De bijdrage van Stone aan deze ontwikkeling was het inzicht dat een ruimtelijk perspectief ook van nut kan zijn op Boolese algebra's, en vergelijkbare structuren waarin andere objecten dan getallen een rol spelen. Het begrip `ruimte' moet u hier overigens niet al te letterlijk nemen, het gaat niet zozeer om meetkundige structuren maar om zogeheten *topologische* ruimtes. De topologie is een tak van de wiskunde die zich bezighoudt met eigenschappen van de ruimte die bewaard blijven onder continue vervormingen; anders dan in de meetkunde draait het in de topologie niet om begrippen zoals de hoek van twee lijnen of de afstand tussen twee punten, maar om zaken als de onderliggende samenhang van verschillende regio's in de ruimte.

Precies geformuleerd, in de taal van de categorieënleer, laat Stone zien dat er een dualiteit of duale equivalentie bestaat tussen de categorie van de Boolese algebra's met bijbehorende homomorfismes aan de ene kant, en de categorie van de nuldimensionale, compacte Hausdorff ruimtes met continue afbeeldingen aan de andere. Dat is een hele mond vol `abstracte nonsens', zult u misschien denken, en dat is precies de geuzenterm van de categorieënleer. Om in lekentaal uit te leggen wat een wiskundige dualiteit behelst is niet eenvoudig, Stone's verbintenis van de wereld van de Boolese algebra's met die van de topologie laat zich misschien het beste via metaforen begrijpen.

U kunt zich de algebra en de topologie bijvoorbeeld indenken als twee verschillende vervoersnetten van één en dezelfde stad. Stelt u zich eens voor dat u zich wilt verplaatsen in Londen; dat kan bovengronds met de algebra-bus of ondergronds met de topologische metro. Toen ik zelf in Londen woonde heeft het mij weken gekost om me te realiseren dat die twee infrastructuren echt door de zelfde stad rijden, maar je kent Londen natuurlijk pas echt als je niet alleen van beide netten gebruikt maakt, maar ook precies weet hoe ze met elkaar verknoopt zijn, en dat is nu precies wat een dualiteit je kan vertellen.

Maar ook kunt u aan een dualiteit denken als aan de spiegel waar Alice door heen stapt, in *Through the Looking-Glass* — inderdaad, hier zijn we aanbeland bij de bespiegelingen uit de titel van deze rede. In de categorieënleer heeft elke ordening van een wiskundig landschap namelijk een bepaalde oriëntatie, en het wezen van een dualiteit is nu juist dat het twee ordeningen spiegelt die *verschillend* georiënteerd zijn.

Stelt u zich nu voor dat voor u als linkshandige weinig klaarspeelt in de rechtsdraaiende wereld van de algebra; u stapt door de dualiteitsspiegel die Marshall Stone u voorhoudt, en belandt in een linksdraaiende topologische wereld waar elk wiskundig zakmes voor u geschapen lijkt.

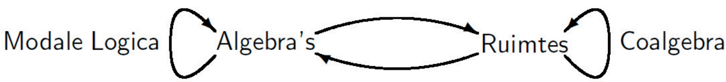
Hoe het ook zij, voor de logica betekent het werk van Stone dat de centrale logische dualiteit tussen een syntactische benadering die bijvoorbeeld gericht is op het geven van formele afleidingen, en de meer semantische aanpak waarin de betekenis van beweringen centraal staat, naadloos past in het bovenstaande plaatje:

verbaal	vs	visueel
algebra	vs	meetkunde/ruimte
axiomatiek	vs	semantiek

Algebra en Coalgebra

Het lijkt misschien dat we inmiddels een heel eind zijn afgedwaald van de coalgebraïsche ervaringen waarmee ik dit verhaal begon. Niets is echter minder waar. Dualiteiten zoals die van Stone kunnen we weergeven met het volgende plaatje:

dat logisch gezien het verband tussen de syntactische en de semantische versie van een basislogica representeert. Als we dit plaatje aan de algebra kant verrijken met modale operatoren, en deze in de dualiteit spiegelen, dan duiken aan de rechter kant als vanzelf opeens coalgebra's op!



Dit zijn dan wel topologische coalgebra's, en u zult het mij vergeven als ik u een andere keer vertel hoe die zich precies verhouden tot de coalgebra's van de koffie-automaat. De moraal van het verhaal, die voortkomt uit het werk van onder andere Leo Esakia, Peter Johnstone, en Samson Abramsky, is dat modale logica, algebra, coalgebra en topologie innig met elkaar verweven zijn, en dat algebra's en coalgebra elkaar weerspiegelen in een wiskundige dualiteit.

Opdracht en invulling

Na deze rondleiding door mijn logische landschap, kan ik de vraag beantwoorden welke invulling ik wens te geven aan mijn leeropdracht:

> *Logica,*
> *in het bijzonder de wiskundige logica en de grondslagen van de informatica*

Mijn invulling van deze leeropdracht is

> *het identificeren en bestuderen van de unificerende structuren en principes die ten grondslag liggen aan de logica, als leer van de symbolische representatie en de verwerking van informatie,*

wat in het kort neerkomt op

> *het bestuderen van wiskundige structurn in de logica.*

Ik zou daar nog aan kunnen toevoegen dat ik deze taak wil uitvoeren *met speciale aandacht voor de dualiteit tussen algebra en coalgebra,* dat ik mij wil blijven concentreren op de verschillende verschijningsvormen van de *modale logica*, of zelfs dat ik mij in het bijzonder wil richten op de wiskundige theorie van de modale *dekpuntlogica's*. Deze details vallen eerder in de categorie *plannen*, en voordat ik in dit soort details treed, zijn drie vragen aan de orde.

Om te beginnen ligt er de vraag hoe mijn benoeming zich verhoudt tot de traditie van de wiskundige logica en het grondslagenonderzoek in Amsterdam, een traditie die teruggaat tot het werk van Luitzen Brouwer (1881–1966).

Voor wie deze naam voor het eerst hoort: Brouwer was één van de belangrijkste, misschien wel de belangrijkste Nederlandse wiskundige. Vier weken geleden nog haalde Rob Stevenson in zijn oratie over numerieke wiskunde Brouwer's dekpuntresultaat in de topologie aan, dat bijvoorbeeld stelt dat wanneer je een behaarde bol probeert te kammen, er altijd ergens een kruintje opduikt. Meer nog dan als topoloog is Brouwer bekend geworden als de grondlegger van het intutionisme, een stroming in de wiskunde die aan wiskundige objecten pas bestaansrecht toekent als je ze op de één of andere wijze kunt construeren, en waarin dan ook geen plaats is voor bewijzen uit het ongerijmde.

Brouwer's leerling en opvolger Arend Heyting heeft op basis van deze ideeen de intuïtionistische logica ontwikkeld, een stelsel waarin het *tertium non datur* axioma $A \vee A$ uitblinkt door afwezigheid. Na Heyting werden de wiskundige logici in Amsterdam aangevoerd door respectievelijk Anne Troelstra, Dick de Jongh en Jouko Väänänen, allen internationaal vermaarde wetenschappers die zich bezig hielden en/of houden met de constructieve wiskunde, het intuïtionisme, en de grondslagen van de wiskunde.

Is deze erfenis bij mij wel in goede handen? Erger nog, valt mijn invulling van de leeropdracht nog wel onder de wiskundige logica? Ik zou mij hiervan af kunnen maken door te wijzen op het feit dat aan de Universiteit van Amsterdam het idee van vaste leerstoelen met een welomschreven, onveranderlijke leeropdracht sinds enige tijd is afgeschaft, en dat het beheren van erfenissen geen zinnig wetenschappelijk doel is. Voor een beter, inhoudelijk en genuanceerder antwoord, moeten we het eerst hebben over het begrip `wiskundige logica'. Vaak wordt hier een conglomeraat van deelgebieden mee bedoeld, bestaande uit de verzamelingenleer, de bewijstheorie, de modeltheorie, de berekenbaarheidsleer, en ook nog de wat meer filosofische leer der grondslagen van de wiskunde. Ik zal de laatste zijn om het wetenschappelijk belang en de vitaliteit van deze vakgebieden te betwisten, maar wat in deze opvatting van de wiskundige logica nogal eens doorschemert is dat als puntje bij paaltje komt, het succes van logisch onderzoek wordt afgemeten aan de bijdrage die het levert aan wiskundige vakgebieden buiten de logica. Zoals u inmiddels heeft begrepen, beweegt mijn werk zich in tegengestelde richting. Ik zie de logica als een zelfstandige wetenschappelijke discipline die geen rechtvaardiging van buitenaf behoeft, maar die zelf interessante wiskundige vragen opwerpt, diepe verbanden met andere takken van de wiskunde zoekt en vindt, en die alleen kan blijven bloeien door het inzetten van wiskundige methoden en technieken. Ook gezien de inbedding van mijn werk in de algebraïsche logica traditie, kan het geen enkele twijfel lijden dat het overgrote deel van mijn onderzoek onder de wiskundige logica geclassificeerd dient te worden.

Dit alles neemt niet weg dat op dit moment in Amsterdam het onderzoek in bijvoorbeeld de bewijstheorie en de grondslagen van de wiskunde op een laag pitje staat, terwijl deze gebieden toch hele spannende ontwikkelingen doormaken, en essentiële kruiden aan de Amsterdamse logica-curry toevoegen. Is daarmee een roemruchte Amsterdamse traditie verloren? Als het aan mij ligt niet, in mijn ogen is er binnen ons instituut op dit gebied sprake van een *vacature*, en als de financiële constellatie het ook maar enigszins toelaat zal ik mij zeker beijveren om deze vacature op te vullen. Overigens geldt mutatis mutandis een soortgelijk verhaal voor de theoretische informatica aan de Universiteit van Amsterdam, die na het vertrek van Peter van Emde Boas ook zwaar ondervertegenwoordigd is bij het ILLC.

Een tweede kwestie waarin ik hier graag publiekelijk mijn kleur wil bekennen betreft de vraag, of ik nu zuivere dan wel toegepaste logica bedrijf. Dit is natuurlijk een vraag, die men aan wiskundigen in het algemeen kan stellen. Zelf kan ik deze vraag niet loskoppelen van mijn persoonlijke drijfveren als wetenschapper.

Aan de ene kant ben ik dit verhaal begonnen met een voorbeeld van een weliswaar indirect, maar toch buitengewoon concreet toepassingsgebied van mijn onderzoek: de specificatie en verificatie van programmatuur. Ik denk dat niemand in deze zaal zal ontkennen dat het correct functioneren van software van levensbelang is voor essentiële onderdelen van de hedendaagse samenleving. Mijn onderzoek is hiervoor niet direct toepasbaar, in de zin dat bijvoorbeeld de Carioca axioma's geïmplementeerd kunnen worden in algoritmes die software kunnen checken. Patenten zie ik mij de komende jaren niet aanvragen, en spin-off bedrijfjes zijn ook niet aan de orde. Toch hecht ik er persoonlijk wel degelijk waarde aan dat mijn werk, of althans een deel daarvan, onderdeel uitmaakt van een groter onderzoeksprogramma dat wel belangrijke en concrete toepassingen heeft.

In mijn dagelijks bestaan als onderzoeker maak ik me daar toch veel minder druk om. Wiskunde heeft namelijk ook een eigen dynamiek, die eerder voortgestuwd wordt door *nieuwsgierigheid* dan door toepassingen, en waarin *elegantie* minstens zo'n belangrijk criterium is als nut. Wat mij het meest drijft in mijn werk, is de overweldigende ervaring van schoonheid die mij kan bevangen bij het plotselinge zien van een oplossing, het ontdekken van een bepaalde structuur, of het begrijpen van een wiskundig verband. Als zodanig is de wiskunde, waarvan de resultaten niet door experimenten hoeven te worden bevestigd, een diep-menselijke activiteit die meer zegt over onszelf dan over de wereld om ons heen, en meer gemeen heeft met de kunst dan met de empirische wetenschappen. Spreken over wiskunde kan ook even moeilijk en vervreemdend zijn als spreken over kunst, en dat geldt zelfs voor communicatie binnen de wiskunde. Het is geen uitzondering dat tientallen pagina's omslachtige wiskundige uitleg nodig zijn om één zo'n openbaring met vakgenoten te delen.

Wat de wiskunde dan weer onderscheidt van de kunst is dat het, als zuiver creatieve activiteit toch op een wonderlijke, direct verifieerbare manier aansluit bij en toepasbaar is op de werkelijkheid om ons heen. Wonderlijk misschien, maar toch is voor mij de wisselwerking tussen toepassingen, hoe ver weg in tijd en ruimte dan ook, en de zuivere wetenschap, zelfs een *wezenlijk* aspect van de logica, zoals van alle takken van de wiskunde.

Mijn laatste opmerking betreft de vraag, of het nu wiskundige logica is, wat ik bedrijf, dan wel theoretische informatica. Wie een inhoudelijke tegenstelling ziet tussen beide onderdelen van de leeropdracht laat zich naar mijn mening tezeer leiden door sociologische ontwikkelingen binnen de academische wereld, waarin wetenschapsgebieden soms nodeloos uit elkaar worden getrokken. In ieder geval prijs ik mij buitengewoon gelukkig dat althans in mijn dagelijkse werkomgeving deze vraag zelden of nooit aan de orde komt. Het is met name om deze reden dat het Institute for Logic, Language and Computation voor mij zo'n plezierige thuisbasis is. Het kortste antwoord dat ik kan geven op de bovenstaande vraag is tevens een samenvatting van deze rede in een slogan:

De logica en de theoretische informatica zijn onlosmakelijk verstrengeld in een wiskundige dualiteit.

Plannen

Hoewel mij vanmiddag niet zoveel tijd meer rest, wil ik toch een aantal van mijn concrete huidige en toekomstige activiteiten noemen.

Onderzoek

Wat betreft mijn onderzoek beperk ik me tot een opsomming van de volgende plannen:

universele automatentheorie: het ontwikkelen van een overkoepelende, coalgebraïsche theorie van eindige automaten die opereren op oneindige structuren;

(co-)algebra en bewijstheorie: het vruchtbaar samenbrengen van inzichten uit de bewijstheorie met onze kennis van (vrije) algebra's en (co-vrije) coalgebra's;

uitgebreide correspondentietheorie: het inzetten van ideeën uit de modale correspondentietheorie in een wijdere algebraïsche context;

dekpuntlogica en dualiteit: het onderbrengen van modale dekpuntlogica's in de discrete en topologische dualiteiten tussen algebra's en coalgebra's.

Onderwijs

In het bovenstaande verhaal heb ik niet veel aandacht besteed aan onderwijs, terwijl dat niet alleen één van de twee kerntaken van de universiteit is, maar mij persoonlijk ook even dierbaar is als het verrichten van onderzoek. Binnen de Universiteit van Amsterdam acht ik mij verantwoordelijk voor het logica-onderwijs binnen de BSc wiskunde opleiding, en het is een heel plezierige taak om onze wiskundestudenten een eerste kennismaking met de logica te bieden, en een venster voor ze open te zetten naar een vervolgstudie in dit prachtige vak. Daarnaast draag ik mijn steentje bij aan onze internationale master opleiding, de MSc Logic. Ieder jaar opnieuw stromen onze collegezalen vol met studenten van over de hele wereld, de één nog enthousiaster dan de andere om in Amsterdam logica te komen studeren. Van de beruchte Nederlandse zesjescultuur is hier geen sprake, en ook de vorige accreditatie toonde aan dat we deze opleiding gerust mogen beschouwen als één van de parels aan de kroon van deze universiteit.

Logica Gemeenschap

Een bloeiende wetenschappelijke gemeenschap kan niet zonder een goede infrastructuur in de vorm van congressen, zomerscholen, tijdschriften, etc. Nationaal werk ik graag mee aan de versterking van de zichtbaarheid en de coherentie van de logica, en met name de wiskundige logica, binnen het wetenschappelijke polderlandschap. Internationaal zal ik mij vooral blijven beijveren dat mijn eigen tak van de logica kan groeien en bloeien, en ik hoop met name dat we de succesvolle congresreeks TACL (Topology, Algebra and Categories in Logic) als basis kunnen gebruiken voor een organisatie met wat meer handen en voeten.

Institute for Logic, Language and Computation

Het is nog maar de vraag hoeveel tijd ik in de komende jaren zal hebben om de bovenstaande plannen tot uitvoering te brengen, want zoals de meesten van u bekend zal zijn is mij per 1 september van dit jaar de grote eer ten deel gevallen te mogen dienen als directeur van ons onderzoeksinstituut, het *Institute for Logic, Language and Computation*. De paradox van het ILLC is dat het bevolkt wordt door onderzoekers die maar niet willen beslissen of ze nu taalkundige zijn of informaticus, musicoloog of cognitiewetenschapper, taalfilosoof of speltheoreticus, terwijl de club intern toch een ijzersterke samenhang vertoont, en met dit grensoverschrijdende onderzoek een enorme internationale reputatie heeft opgebouwd. Hoewel ons instituut maar een klein bootje is, en de zeeën de komende jaren erg hoog zullen gaan, heb ik alle vertrouwen dat de kwaliteit en samenhang van ons instituut niet alleen voldoende garantie biedt voor een behouden vaart, maar ook voor nieuwe avonturen en ontdekkingstochten.

Dankwoord

Een oratie is niet volledig zonder dankbetuiging, en met veel genoegen kwijt ik mij van deze aangename taak.

Allereerst zijn daar natuurlijk het College van Bestuur van de Universiteit van Amsterdam, de decaan van de Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica, en allen die mijn benoeming hebben bevorderd. Ik dank hen voor het in mij gestelde vertrouwen. Ik wil mijn promotor Johan van Benthem bedanken, die mij dertig jaar geleden in Groningen heeft geïnspireerd om voor de logica te kiezen, me vervolgens heeft gestimuleerd om volledig mijn eigen gang te gaan, maar me wel altijd met raad en daad terzijde heeft gestaan. Leen Torenvliet ben ik zeer erkentelijk, om te beginnen voor de vaart en energie die hij achter mijn benoemingsprocedure heeft gezet, maar ook vanwege het uitstel dat hij mij heeft gegund bij het op me nemen van het directoraat van het ILLC. Dan wil ik NWO, de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek, dank zeggen voor het toekennen van een VICI-subsidie aan mijn project *Algebra and Coalgebra; the mathematical environment of modal logic*. Het was een fantastische ervaring om de afgelopen vijf jaar deze onderzoeksgroep te leiden.

In de loop der tijd ben ik er steeds meer van doordrongen geraakt dat de ervaring van schoonheid die wiskundige ontdekkingen teweeg kunnen brengen, veel meer betekent als je het direct kunt delen. Onderzoek is veel leuker als je met anderen samenwerkt, en ik bedank hierbij mijn collega's in het vakgebied, en met name mijn co-auteurs, voor alle leerzame, spannende, en plezierige projecten. Hetzelfde geldt voor het lesgeven en het begeleiden van studenten en junior onderzoekers: het is één van de grootste vreugdes in mijn leven om jonge mensen enthousiast te zien worden voor mijn vakgebied. Mijn directe collega's aan het ILLC wil ik bedanken voor het inspirerende wetenschappeljke klimaat, en de buitengewoon plezierige werkomgeving. Aan dat laatste wordt overigens een essentiële bijdrage geleverd door het onvolprezen niet-wetenschappelijk personeel van het instituut.

Mijn beide ouders kunnen deze feestelijke dag helaas niet meer meemaken; ik besef nu pas hoeveel ze mij in het leven hebben meegegeven; zonder hun niet aflatende liefde had ik het nooit zover geschopt. Algebra, coalgebra of

logica: voor mijn familie en vrienden buiten het vak zal het een worst zijn. Daar ben ik jullie zeer erkentelijk voor, en ik dank jullie voor alle momenten dat jullie mij uit de formules trekken. Als laatste natuurlijk de belangrijkste persoon in mijn leven: Patxi, jouw liefde en steun betekenen meer voor me dan ik ooit in woorden uit kan drukken.

Ik dank u allen hartelijk voor uw aandacht, ik heb gezegd.