Heyting afscheidscollege   V68

A. Heyting

Is de toekomst der wiskunde voorspelbaar?

Geconfronteerd met de vraag, hoe men een afscheidscollege houdt, meende ik
aanvankelijk dat een afscheidscollege een college is, zodat ik een zekere
afgebakende stof duidelijk en uitvoerig zou dienen te behandelen. Deze opva
ting stuitte niet alleen op hevig verzet bij sommige potentiele toehoorders
die meenden dat een zodanig college noodzakelijk zowel vervelend als onbegr
pelijk zou moeten zijn - ik hoop dat degenen die bij mij colleges gevolgd
hebben daar anders over denken - , zij was ook om praktische redenen onuit-
voerbaar. Een wiskundige kan nu eenmaal niet ernstig spreken als hij geen
schrijfmateriaal bij de hand heeft. Toen viel mij een uitspraak in van D.J.
Korteweg, bij wie ik het voorrecht had, nog enkele jaren college te lopen
(Hij trad omstreeks 1918 af), namelijk dat een oratie een wetenschappelijke
geloofsbelijdenis behoort te zijn. Zijn eigen oratie uit 1881 voerde als
titel "De wiskunde als hulpwetenschap". Hij is aan dit programma trouw geble
ven. Een belangrijk deel van het wiskundige werk voor de thermodynamica, die
toen in opkomst was en speciaal in Amsterdam door Van der Waals en later doc
Kohnstamm werd beoefend, is door Korteweg verricht. ~~Zeer veel werk heeft hij
gedaan voor de uitgave van de werken van Christiaan Huygens~~. Laat men nu nie
denken dat hij een bekrompen geest had zonder inzicht in het belang van ab-
stracte wiskunde; het tegendeel blijkt uit het feit, dat hij de promotor was
van L.E.J.Brouwer op zijn proefschrift "Over de grondslagen der wiskunde".
Overigens getuigde zijn pleidooi voor het belang van de dienende taak der
wiskunde wel van een vooruitziende blik. Het is algemeen bekend, dat ~~statis-~~
tische methoden een onmisbaar instrument geworden zijn voor steeds uitgebrei
delen der wetenschap, bijvoorbeeld zowel voor de medicijnen als voor de soci
logie. Ook in de economie en in de taalkunde worden steeds meer wiskundige
methoden toegepast, ook al verzetten sommige beoefenaren vooral van de taal-
kunde zich nog ~~tegen~~ hiertegen, omdat naar hun mening bij de wiskundige be-
handeling essentiele elementen van de taal verwaarloosd worden. Men kan dit
beamen en toch de toepassing van wiskundige methoden bepleiten. Overal waar
wiskunde toegepast wordt, treedt een zekere mate van abstractie op, waardoor
enerzijds problemen kunnen worden aangepakt die in hun concrete vorm te inge
wikkeld zijn, anderzijds voortdurende controle of de resultaten nog wel met
de werkelijkheid corresponderen, noodzakelijk blijft. In principe ligt dit
in de zogenaamde geesteswetenschappen niet anders dan in de natuurwetenschap
pen. Het verschil is hoogstens gradueel in die zin dat de graad van betrouw-
baarheid van langs wiskundige weg verkregen resultaten er geringer is.
Laat ik als voorbeeld van de uitbreiding van de dienende taak der wiskunde
het gebruik dan computers op velerlei terrein niet vergeten.

Is dus enerzijds de dienende taak van de wiskunde steeds belangrijker geworden, anderzijds hebben de wiskundigen steeds dieper gegraven in de richting van de abstractie. Zij zijn hierin zo ver gegaan, dat het ten slotte moeilijk te zien was waarover zij eigenlijk spraken en of zij eigenlijk wel ergens over spraken. Men hoort wel eens beweren, dat de wiskunde juist door deze abstractie zich isoleert, dat de wiskundigen een groep mensen zijn, die alleen voor elkander begrijpelijk zijn en verder buiten de samenleving staan. Ik gel dat dit onjuist is. De drang naar grotere abstractie, het streven naar dieper fundering is in onze tijd niet alleen aan de wiskunde eigen, maar is een kenmerk van alle filosofische richtingen van onze tijd, zowel van de positivistische als van de existentialistische. Wiskundigen zijn zich meer voor filoso gaan interesseren dan in de vorige eeuw het geval was. Omdat wiskunde aan de ene kant steeds nauwer bij de materiele welvaart betrokken wordt, anderzijds tot filosofische problemen aanleiding geeft, is ze naar mijn mening een van de belangrijkste bindende elementen van onze kultuur. Het feit dat de techniek der wiskunde voor de grote meerderheid een gesloten boek blijft, betekent nie dat de wiskunde als geheel geisoleerd zou staan. Vele autorijders hebben geen flauw idee van de werking van hun motor, maar desondanks staat de techniek niet geisoleerd in onze maatschappij.

Ik heb de vraag, wat een afscheidscollege moet zijn, niet beantwoord en ik zal dat ook niet doen. Ik kom niet verder dan een antwoord op de vraag, wat het niet kan zijn. Hieraan zal het vervolg van mijn betoog grotendeels gewijd zijn. Als een oratie een wetenschappelijke geloofsbelijdenis moet zijn dient dan een afscheid het tegengestelde in te houden, een soort biecht, waar in men nagaat, in hoeverre men zich aan het gestelde doel heeft gehouden? Ik voel niet de minste behoefte aan een zelfrechtvaardiging, nog minder aan een zelfbeschuldiging. Anderen, mijn leerlingen, de latere ontwikkeling van de wetenschap zullen beoordelen in hoeverre mijn werk waardevol is geweest. Een testament dan, een programma voor de voortzetting van mijn werk zoals ik mij die voorstel? Ik mag, vind ik, mijn leerlingen en opvolgers niet trachten te binden, en zij zouden zich met recht van een dergelijk testament niets aantrekken.

Trouwens, de ontwikkeling van de wetenschap laat zich niet voorspellen. Zij gedraagt zich als een organisme, dat zijn toekomstige toestand wel in de kiem met zich meedraagt, maar niet zodanig dat de toekomst daaruit voor ons te voorspellen zou zijn. Uit het zaad is de plant die eruit zal groeien allee te voorspellen voor degeen die de plant al eens heeft gezien. Naar de biologe beweren, zijn onze oren ontstaan uit dd kieuwen van een vis, maar die vis ka niet weten, dat zijn ademhalingsorganen eens zullen dienen om geluid waarnee baar te maken. Om een voorbeeld uit ander gebied te noemen, de kapiteins van de schepen, die negers uit Afrika naar Amerika vervoerden, beseften niet welk problemen die negerbevolking later zou oproepen. Welnu, de wetenschap ontwik kelt zich op even onvoorspelbare wijze als een levend wezen of een maatschapp lijke struktuur. Haar voortgang heeft daardoor soms het karakter van een spa nende film. Ik wil enkele voorbeelden geven van dergelijke "spannende momente uit de wiskunde, vooral uit die van de laatste tijd. Een bekend voorbeeld is de ontwikkeling van de niet-euclidische meetkunde. Eeuwenlang heeft men getra het zogenaamde parallelenpostulaat, dat zegt:"Door een punt buiten een lijn gaat een en slechts een lijn ~~k~~ evenwijdig miet die lijn", uit de overige axioma's te bewijzen. In de negentiende eeuw kwamen verschillende wiskundige waaronde Gauss, Lobatsjefski en ~~Bli-Bolixy-Blyai~~ Bolyai tot de overtuiging dat dit niet kon, met andere woorden, dat men de ontkenning van het parallele axioma kan aannemen zonder tot een tegenspraak te komen. Lobatsjefski was he dichtste bij een bewijs hiervan; volledig overtuigend werd het gegeven door Felix Klein. Het merkwaardige is, dat de wiskundigen, die trachtten, het para

Saccheri

lelenpostulaat te bewijzen, meestal zo te werk gingen, dat zij trachtten uit de ontkenning er van een tegenspraak af te leiden. Het effect van hun werk was precies het tegendeel van hetgeen zij nastreefden; toen eenmaal de moge- lijkheid van de niet-euclidische meetkunde was gebleken, bleken hun beschou- wingen een belangrijk stuk van die nieuwe meetkunde te bevatten. Wel verre va de onmogelijkheid van niet-euklidische meetkunde te bewijzen, hadden zij die voor een belangrijk deel ontwikkeld.

Een dergelijk lot was de analytische meetkunde beschoren. Hoewel reeds d Grieken incidenteel coordinaten hadden gebruikt, hebben Fermat en Descartes ze systematisch als hulpmiddel in de meetkunde ingevoerd. Op den duur heeft de algebra, in plaats van als dienares van de meetkunde op te treden, de hele meetkunde opgeslokt. De eerstejaars student in de wiskunde krijgt dadelijk de zuiver algebraische theorie van de vektorruimten voorgeschoteld, waarbij de toepassing op de driedimensionale euklidische ruimte de rol van een vraag stukje speelt. Zelfs de toegepast wiskundigen trachten hun ruimtelijke besch wingen zo snel mogelijk in abstrakte vorm te gieten, om van de algemene theori

[illegible]

te kunnen profiteren.

Verdere voorbeelden ontleen ik aan de grondslagen der wiskunde. Tussen ongeveer 1880 en 1900 heeft de wiskunde een gedaanteverwisseling doorgemaakt. Voor die tijd was ze de wetenschap van getal en maat. Nu kan men ze misschien het beste karakteriseren als de wetenschap van de abstracte entiteiten, hoewel een dergelijke definitie van een wetenschap, welke ook, altijd onvolkomen blijft. Tot de belangrijkste geleerden, die deze ommezwaai inleidden, behoorden Georg Cantor en Gottlob Frege. Cantor is bekend als de schepper van de verzamelingsleer. Frege stelde zich ten doel, de wiskunde op de logica als op een onwrikbaar fundament te grondvesten. Voortbouwend op het pionierswerk van Boole en andere logici, stelde hij een zuiver formeel systeem voor de logica op, d.w.z. hij voerde symbolen in voor alle fundamentele begrippen uit de logica en gaf nauwkeurige regels voor het werken met de symbolen. Daarna bracht hij op geniale wijze de gehele rekenkunde tot die formele logica terug. Hoe dat in zijn werk gaat, wil ik aan het allereenvoudigste voorbeeld, het getal 1, toelichten. Laat ik een logisch predicaat P unair noemen, als het de volgende twee eigenschappen heeft: 1. Er is iets dat aan P voldoet 2. Als A en B aan P voldoen, dan is A = B. Het getal 1 wordt nu gedefinieerd als de omvang van het begrip "unair predicaat". Bij deze definitie zijn inderdaad alleen logische begrippen gebruikt. Wij zien ook het nauwe verband tussen logica en verzamelingsleer. De omvang van een begrip is niets anders dan een verzameling. Het feit dat Frege het woord "Menge" niet gebruikt, wijst er reeds op, dat hij het werk van Cantor slecht kend Was er meer contact tussen de beide geleerden geweest, dan zou Frege niet zo geschokt zijn door de paradox van Russell. Cantor wist, dat zijn verzamelingsleer tot tegenspraak leidde, maar hij vatte dit feit niet tra-
1899 gisch op. In een brief aan Dedekind spreekt hij van inconsistente of
? "absolut unendliche" verzamelingen, die tot tegenstrijdigheden voeren; hij bedoelt blijkbaar dat dergelijke verzamelingen voor ons niet toegankelijk zijn en daarom uitgesloten moeten worden. Deze gedachte is later door Von Neumann tot een axiomatisch systeem van de verzamelingsleer uitgewerkt. In 1903, toen het tweede deel van Frege's hoofdwerk de "Grundgesetze der Arithmetik" juist ter perse was, publiceerde Russell zijn beroe de paradox. Men kan die paradox als volgt formuleren. Een predicaat kan o zichzelf van toepassing zijn: bijv. het predicaat "abstract" is abstract. Beschouw nu het predicaat "niet op zichzelf van toepassing". Is dit op zichzelf van toepassing, dan is het ~~op~~ niet opzichzelf van toepassing, maar

b 4a

is het niet op zichzelf van toepassing, dan is het wel op zichzelf van toepassing. Zo ontstaat een tegenspraak. Deze paradox trof Frege als een slag, die zijn levenswerk in gevaar bracht.

Blijkbaar ligt de oorzaak van dergelijke paradoxen, zoals Cantor reeds inzag, in het toelaten van te algemene predicaten of van te omvangrijke verzamelingen, maar de vraag hoe deze buiten te sluiten en hoever men daarmee moet gaan, was geenszins gemakkelijk te beantwoorden. Er zij axiomatische systemen voor de verzamelingsleer opgesteld, waarin de paradoxen niet optraden. Er zijn ook formele systemen voor de logica opgeste waarin de te algemene predicaten automatisch worden vermeden. Maar al de systemen hebben iets willekeurigs. In ieder geval heeft het werk van Fre geleid tot het tegengestelde van hetgeen hij zich ten doel stelde. In plaats van een fundering van de wiskunde op de onwrikbare logica ontstcn een onderzoek naar de fundering van de logica en een fundamentele herziening van haar principes. Op grond van de nieuwe logica heeft Russell het programma van Frege uitgevoerd, de wiskundige begrippen tot logische te herleiden. Zijn methode komt in grote trekken met die van Frege overeen.

formele systemen voor de logica werden ontwikkeld, waarbij de te algemene predikaten automatisch werden uitgesloten. Maar al deze systemen hebben iets willekeurigs. Om de opgelegde beperkingen te motiveren, moet men op de filosofie van de wiskunde steunen. Wel verre van een betrouwbare basis voor de wiskunde te leveren, werd de logika zo van wiskundige beschouwingen afhankelijk.

De formele systemen voor logika en verzamelingsleer, die zo ontstonden, hadden wel het voordeel, dat de bekende paradoxen er niet in afgeleid konden worden, maar wie garandeert, dat er geen andere tegenstrijdigheden uit volgden. Sommige systemen, die voorgesteld werden, bleken inderdaad later tot een tegenspraak te leiden. Vandaar dat Hilbert de vraag naar de consistentie (niet-tegenstrijdigheid) van een formeel systeem centraal stelde. Zijn programma kwam op het volgende neer. Vang de gehele wiskunde, de logika inbegrepen, in een formeel systeem. Toon aan, met methoden die zo elementair zijn dat geen mens aan hun juistheid kan twijfelen, dat in dat formele systeem geen tegenstrijdigheid kan optreden. Naast de wiskunde, die zuiver formeel is, en in principe niet geinterpreteerd behoeft te worden, treedt zo een metamathematica, waarin alleen zeer elementaire redeneermethoden gebruikt worden. In het bijzonder wordt het bestaan van een getal met zekere eigenschappen alleen als bewezen beschouwd, als men dat getal werkelijk kan aangeven. Dit is een gedachte, die ook door Brouwer als een der belangrijkste grondslagen van het intuitionisme is beschouwd. Het is waarschijnlijk, dat Hilbert bij het vormen van zijn idee van de bewijstheorie door Brouwer is beinvloed; sommige uitingen van Brouwer wijzen hierop, maar met zekerheid valt het uit de litteratuur niet te bewijzen.

finiete methoden

Het consistentiebewijs voor de rekenkunde viel tegen: het bleek veel moeilijker dan verwacht was. Toch wekte het sensatie, dat Gödel bewees, dat het bewijs niet te geven was met de middelen van de rekenkunde zelf. Er is meer voor nodig. Op het eerste gezicht verviel hierdoor het hele programma van Hilbert. Wat voor zin heeft het, de consistentie van een theorie te bewijzen met behulp van een uitgebreidere theorie? Toch is zo'n bewijs geleverd door Gentzen. Hij gebruikte inderdaad bewijsmiddelen, die buiten de gewone rekenkunde vallen, in het bijzonder een beginsegment van de rij der ordinaalgetallen. Deze theorie is elementair genoeg om hier gebruikt te worden. Aan de andere kant gebruikte Gentzen niet de minder elementaire gedeelten van de rekenkunde, o.a. gebruikt hij niet onbeperkt het beginsel van het uitgesloten derde. Deze geschiedenis van de bewijstheorie is een der treffendste voorbeelden van de onvoorspelbaarheid van de toekomst van een theorie en van het feit dat een theorie zich dikwijls ontwikkelt in een richting tegengesteld aan

*

Zinkeling Jongetje Planck

die welke de ontwerpers van de theorie zich hadden voorgesteld.

Een ander voorbeeld ontleen ik aan de modeltheorie. Een model voor een theorie is, populair uitgedrukt, een interpretatie van die theorie met behulp van de verzamelingsleer. Zolang de theorie niet te veel logika gebruikt, precies gezegd, zolang ze met behulp van de elementaire logika beschreven kan worden, heeft een theorie een model dan en slechts dan als zij consistent is. Dit geldt niet meer als logika van hogere orde wordt toegepast. Dan zijn er consistente theorieen zonder model. Het bleek evenwel, dat ook hier de volledigheidsstelling geldt, wanneer men het begrip model ruimer neemt en behalve de gewone ook zogenaamde non-standaard modellen toelaat. Sommige consistente theorieen hebben alleen non-standaard modellen, andere, en daaronder valt de rekenkunde, hebben zowel standaard- als non-standaard modellen. Een non-standaard model voor de rekenkunde was al door Skolem aangegeven. Het werd als iets onaangenaams gevoeld. Men wilde zo graag een stelsel axioma's voor de rekenkunde hebben waaraan alleen de gewone rekenkunde voldoet en niets anders. Verrassend was het daarom, dat Robinson juist die non-standaard modellen gebruikte, om de oneindig kleine grootheden weer in de wiskunde in te voeren, en nu op een volkomen strenge wijze. Hij kon daardoor sommige bewijzen vereenvoudigen en op verschillende theorieen nieuw licht werpen.

Euler

Ook de axiomatiek van de verzamelingsleer heeft haar onverwachte resultaten. Het zogenaamde keuze-axioma speelde daar een rol, die enigszins te vergelijken was met die van het parallelenaxioma in de meetkunde. Sommigen beschouwden het als evident, anderen als zeer twijfelachtig. Nu is door Gödel bewezen, dat men het keuze-axioma zonder vrees voor tegenstrijdigheid mag gebruiken; nauwkeuriger gezegd: Als de axioma's van de verzamelingsleer zonder keuze-axioma consistent zijn, dan blijven ze consistent na toevoeging van het keuze-axioma. ~~Men~~ Later bewees Cohen, dat hetzelfde geldt voor de ontkenning van het keuze-axioma. Men is dus vrij, het keuze-axioma aan te nemen of te ontkennen, evenals men in de meetkunde het parallelenaxioma kan aannemen of ontkennen. Analoog met de euklidische en de niet-euklidische kan men zo een Zermelosche ~~cantoriaanse~~ en een niet-Zermelosche ~~cantoriaanse~~ verzamelingsleer opbouwen. Analoog met het keuze-axioma gedraagt zich de zogenaamde continuum-hypothese, waarop ik nu niet verder inga.

Toch is er van filosofisch standpunt uit gezien wel verschil tussen het geval van de meetkunde en dat van de verzamelingsleer. Men kan zowel de euklidische als de niet-euklidische meetkunde opbouwen als zuiver wiskundige theor en zich vervolgens afvragen welke van beide het best de ervaringsruimte beschri Voor de verzamelingsleer ligt dit anders. De onder wiskundigen meest gebruikelijke opvatting is die van het begripsrealisme. Zij stellen zich een actueel bestaande wereld van verzamelingen voor. Men zou zo zeggen, dat in die wereld het keuze-axioma waar is of onwaar, dat wil zeggen slechts een van de twee verzamelingsleren, de zermeliaanse ~~cantoriaanse~~ of de niet-zermeliaanse ~~cantoriaanse~~, is juist en de andere is fout. Men kan aan dit dilemma ontkomen door beide theorieen zuiver formeel op te bouwen en in het midden te laten welke voor de echte verzamelin wereld geldt, maar dan komt die wereld helemaal buiten de wiskunde te liggen is ze voor de wiskunde volkomen irrelevant.

Het intuitionisme is ontstaan als reactie tegen het begripsrealisme en h formalisme. Brouwer definieerde wiskunde als die denkvorm, waarbij in abstrac eenheden gedacht wordt en de aard van die eenheden buiten beschouwing blijft Volgens Brouwer is de taal slechts een begeleidend verschijnsel van de wiskun Hij beschouwde daarom formalisering als voor de wiskunde onvruchtbaar. Toch blijkt het voor het wederzijdse begrip van intuitionistische wiskundigen onmisbaar, sommige onderdelen te formaliseren. Zo laat het begrip "c.l.rij" ~~"keuzenrij"~~ verschillende interpretaties toe en om aan te geven welke men bedoelt, is het nodig zekere eigenschappen van het begrip nader te preciseren, wat neerkomt op een formalisering van de theorie der c.l. ~~keuzen~~rijen. Wij zien weer, hoe de ontwikkeling gaat in een richting, tegengesteld aan diegene die Brouwer zich voorstelde, hoewel Brouwers grondgedachten daarbij onaangetast blijven.

Hoe het intuitionisme zich verder zal ontwikkelen, kan ik dus niet voorspellen. Het geeft mij veel voldoening, dat er intensief aan gewerkt wordt zowel door verscheidene van mijn leerlingen als door anderen. Ik hoop dat uit dit onderzoek resultaten te voorschijn zullen komen, die zowel voor de intuitionistische wiskunde zelf als voor een uitgebreiden gebied van wetenschap waardevol zullen zijn,