OVER DE BETEEKENIS DER WISKUNDIGE LOGICA VOOR DE PHILOSOPHIE

OPENBARE LES, GEHOUDEN DOOR G. MANNOURY OP WOENSDAG 21 JANUARI 1903, TER OPENING VAN ZIJN COLLEGE ALS PRIVAAT-DOCENT IN DE LOGISCHE GRONDSLAGEN DER WISKUNDE AAN DE GEMEENTELIJKE UNIVERSITEIT TE AMSTERDAM

P. VISSER AZN. — UITGEVER. — HAARLEM.

Toehoorderessen en Toehoorders,

De wiskundige logica is een methode, die gedurende de laatste twintig jaren voornamelijk door Italiaansche mathematici ontwikkeld is en die er veel toe heeft bijgedragen om belangrijke wijzigingen te brengen in de inzichten van vele wiskundigen omtrent de grondslagen hunner wetenschap. Vóor ik er toe overga de beteekenis te bespreken, welke deze methode en de resultaten met haar hulp verkregen naar mijn meening ook buiten het terrein der eigenlijke wiskunde hebben kunnen, zal ik trachten U van die methode zelve en van genoemde wijzigingen een beknopte uiteenzetting te geven.

Volgens de oudere beschouwingswijze dan, welke trouwens nog door vele wiskundigen wordt gedeeld, berustte de wiskunde in hoofdzaak op een zeker aantal z.g. grondwaarheden of axioma's, welke, zooals men het gewoonlijk eenigszins paradoxaal uitdrukte, „te eenvoudig waren om bewijsbaar te zijn", doch wier geldigheid niettemin als onomstootelijk moest worden aangenomen.

De aard dezer axioma's, welke bijna alle nagenoeg onveranderd aan EUCLIDES waren ontleend, liep zeer uiteen; sommige hadden een algemeene strekking, zooals het axioma, dat het geheel gelijk is aan de som zijner deelen, een enkel had betrekking op de rekenkunde, de meeste waren van meetkundigen aard. Van de laatste postuleerden sommige de mogelijkheid van het bestaan van de rechte lijn, het platte vlak, enz., andere bevatten minder eenvoudige uitspraken omtrent deze figuren. Hiertoe behoorde inzonderheid het meest bekende, ik zou haast zeggen het meest beruchte axioma, dat zegt, dat indien een rechte lijn en een punt buiten die rechte lijn gegeven zijn, men door dat punt slechts één rechte, evenwijdig aan de eerste, zal kunnen trekken. Dit axioma is gedurende meer dan twee duizend jaar bijna onafgebroken het onderwerp geweest eener zich steeds uitbreidende litteratuur. Niet, dat het ook maar bij iemand opkwam, aan de waarheid ervan te twijfelen, doch telkens en telkens weder stonden er wiskundigen op, die wanhopige en vruchtelooze pogingen aanwendden om het te bewijzen en het dus tot den rang van theorema te verheffen.

Dat deze pogingen, welke menig menschenleven verwoest hebben, uit den aard der zaak vruchteloos *moesten* blijven, is omstreeks de wisseling van 18de en 19de eeuw voor het eerst verdedigd en overtuigend aangetoond door den Rus LOBATCHEFSKI en den Hongaar BOLYAI, welke beiden, geheel onafhankelijk van elkander, een meetkundig systeem ontwikkelden, waarbij van de geldigheid van het axioma werd afgezien, en de mogelijkheid aangenomen, dat door een punt buiten een rechte lijn meer dan een parallel zou kunnen worden getrokken. Aan dit systeem, de niet-euclidische meetkunde, zal beider naam onafscheidelijk verbonden blijven; toch werd hun ontdekking eerst in het rechte licht gesteld door de latere onderzoekingen van RIEMANN (neergelegd in zijn verhandeling „Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen"), waaruit bleek dat de euclidische en de niet-euclidische meetkunde evenveel recht van bestaan hebben.

RIEMANN maakte daarbij gebruik van de theorie der ruimten van meer dan drie afmetingen, welke zich intusschen had ontwikkeld. In zulk een ruimte n.m. is plaats voor verschillende *vormen* van ruimten van drie afmetingen, zoowel ruimten, waarin de niet-euclidische, als ruimten, waarin de euclidische meetkunde geldig is.

Toch zou het zeer goed mogelijk zijn, dat als wij ons in beide ruimtevormen konden verplaatsen, het onderscheid voor ons niet waarneembaar zou zijn. Door deze theorie der ruimte „van *n* dimensies", welke zich door en na RIEMANN zoodanig ontwikkeld heeft, dat zij in alle deelen der wiskunde is doorgedrongen, wordt trouwens ons ruimtebegrip ook in andere opzichten veel algemeener; nieuwe mogelijkheden doen zich aan ons voor, waaraan wij anders waarschijnlijk niet gedacht zouden hebben. Zoo b.v. zijn er in de ruimte van *n* afmetingen zoowel eindige als oneindige ruimten (van drie afmetingen) mogelijk; ik bedoel daarmede dit: indien wij ons een kubus voorstellen, en daarop een tweede plaatsen, en daarop een derde, enz., dan is de mogelijkheid volstrekt niet uitgesloten, dat men, ook al waren de kuben volmaakt zuiver, na den millioensten of den milliardsten kubus weder het grondvlak van den eersten kubus bereikte, al zou men oppervlakkig meenen, dat dit onmogelijk is. Een ander voorbeeld: het onderscheid tusschen rechts en links, tusschen een rechter- en een linkerhand, tusschen een rechtsdraaiend en een linksdraaiend kristal, blijkt in het licht van bovengenoemde theorie een verschil in *stand* te zijn. M. a. w. er zijn ruimten van drie afmetingen mogelijk, die zoodanig zijn gevormd, dat als wij ons erin konden verplaatsen en een van ons legde in die ruimte een bepaalden omweg af, bij zijn terugkomst de rechterhelft van zijn lichaam, of liever wat eerst de rechterhelft was, nu aan den linkerkant was geplaatst. Doch om op het axioma der parallellen terug te komen: het was gebleken, dat men tot nu toe steeds in verkeerde richting had gezocht: men had gepoogd het tot een theorema te verheffen en het bleek een definieerende eigenschap der ruimte te zijn, die men even willekeurig kan aannemen of verwerpen, als men, van een vierhoek sprekende, kan aannemen, dat die vierhoek recht- of scheefhoekig is. Door den „val" van dit axioma nu was aan het geheele systeem een krachtige stoot toegebracht: de menschheid had een lesje in bescheidenheid gekregen; het bleek, dat men wat vlug geweest was met te beweren: dit of dat laat zich onmogelijk denken of dat andere weder is „eine nothwendige Vorstellung", en dat de gevolgtrekkingen, die men uit die onmogelijkheid of noodwendigheid had gemaakt, te gewaagd waren geweest. De eerstvolgende stap, die op den nieuwen weg werd gezet, was dan ook een zeer belangrijke: in 1881 verscheen in het 4de deel van het American Journal of Mathematics een artikel van PEIRCE, getiteld: On the Logic of Number, waarin aangetoond werd, dat ook het axioma, dat aan de rekenkunde ten grondslag lag, het lot van het 13de postulaat van EUCLIDES moest deelen en tot de definieerende eigenschappen gerekend worden. Over dat axioma zelf, en de oplossing, die PEIRCE van deze moeilijkheid heeft gegeven, wil ik nu niet uitweiden, maar wel wil ik op een merkwaardig verschijnsel wijzen, dat zich bij deze ontdekking evenals bij die der niet-euclidische meetkunde voordeed: ook hier n.l. kwam hetzelfde denkbeeld bij verschillende wiskundigen ongeveer gelijktijdig op. Terwijl toch de ontdekking van PEIRCE, waarschijnlijk tengevolge van zijn hoogst onduidelijke inkleeding, geheel onopgemerkt bleef, verscheen in 1888 een werkje van DEDEKIND: „Was sind und was sollen die Zahlen", waarin nagenoeg dezelfde oplossing der kwestie werd gegeven. Toch is het werkje van DEDEKIND, dat algemeen de aandacht trok, onafhankelijk van den arbeid van PEIRCE ontstaan; dit blijkt o.a. hieruit, dat DEDEKIND in 1879 in een voetnoot van een werk van LEJEUNE-DIRICHLET, dat hij uitgaf, op zijn ontdekking zinspeelde.

Weldra werden nu meerdere wiskundigen door deze en dergelijke kwesties aangetrokken, en vormde zich in Italië een school, waarvan Prof. PEANO de ziel was en is, die de grondslagen der wiskunde aan een nauwkeurige herziening onderwierp, en een nieuwere beschouwingswijze daaromtrent ontwikkelde.

Volgens deze beschouwingswijze worden de wiskundige termen, zooals rechte lijn, plat vlak, getal, geheel afgescheiden beschouwd van de voorstellingen die er mede verbonden kunnen worden, en onderworpen aan geheel willekeurig aangenòmen wetten, die de rol van definieerende eigenschappen vervullen. Het best laat zich de wiskunde, aldus opgevat, vergelijken bij een schaakspel: de stukken stellen dan de wiskundige termen, door PEANO „enti primitive" genoemd voor en de regels van het spel komen overeen met de wetten („proposizione primitive"), waaraan die termen worden onderworpen.

Bij hunne onderzoekingen hebben PEANO en zijn volgelingen gebruik gemaakt van een belangrijk hulpmiddel, waarvan ik met een enkel woord melding wil maken. Ik bedoel het logisch teekenschrift, d. i. een systeem van teekens of symbolen, waardoor alle wiskundige definities, stellingen en bewijzen kunnen worden uitgedrukt, zonder een enkele maal van gewone woorden gebruik te maken, wat als vanzelve tot een streng logische redeneering dwingt. Het denkbeeld van zulk een teekenschrift was niet nieuw; reeds ARISTOTELES stelde begrippen door letters voor, en LEIBNITZ heeft de mogelijkheid en het voordeel van zulk een symbolensysteem reeds uiteengezet, en zijn denkbeeld ook gedeeltelijk ten uitvoer gelegd, zooals inzonderheid gebleken is uit zijn onuitgegeven handschriften, die in de bibliotheek te Hannover door VACCA worden onderzocht. Eerst in den laatsten tijd echter zijn er verschillende volledige systemen van teekenschrift ontworpen, waarvan dat van PEANO zelve wel het meest bruikbare is; met behulp van zijn stelsel is hij er zelfs, daarin bijgestaan door verscheidene medewerkers, in geslaagd, de voornaamste takken der wiskunde in symboolvorm te brengen. Deze encyclopaedische uitgaaf (de „Formulaire des mathématiques") wordt nog steeds voortgezet.

Alvorens tot het tweede gedeelte mijner rede over te gaan, wensch ik even terug te komen op een opmerking, welke ik zoo even gemaakt heb. Wij hebben gezien, zoowel bij de ontdekking der niet-euclidische meetkunde als bij de grondvesting der rekenkunde en bij het ontwerpen van het logisch teekenschrift, hoe telkens dezelfde of overeenkomstige denkbeelden in een bepaald tijdperk in veler hoofden rijpten, een verschijnsel, dat trouwens ook bij andere gelegenheden vaak is opgemerkt. Dit doet ons vermoeden, dat daarbij uitwendige oorzaken zich hebben doen gelden, dat dus ook de meest abstracte der wetenschappen niet aan den invloed ontkomen kan, van wat de een de sociale verhoudingen, de ander de productievormen der maatschappij noemt.

Wat oudheid en middeleeuwen aangaat, is de opmerking trouwens reeds vaak gemaakt: dat de meetkunde aan den landbouw der Egyptenaren haren oorsprong, de cijferkunst aan het kastenwezen en de daarmede in verband staande sterrenwichelarij der Indiërs haar eerste ontwikkeling en aan den handel van Babyloniërs en

Phoeniciërs haar voortgang te danken heeft, dat bij de Grieken de bloei der wiskundige wetenschappen, met die der schoone kunsten innig vervlochten (wij denken eraan, dat de meetkunst haar muze deelen moest met den dans en dat de muziek als een der voornaamste onderdeelen der wiskunde werd beschouwd), dat die bloei verband hield met het stelsel van huis- en landbouwslavernij, dat de meesters tot een weelderig en zorgeloos bestaan in staat stelde, dat alles is reeds door meer bevoegden dan ik uiteengezet. Doch wanneer wij dien gedachtengang verder volgen, en in de middeleeuwen — tijdperk van geringen vooruitgang der productiemethoden, die onder den invloed stonden van een star en streng dogmatisch gezag — ook een tijdperk van onvruchtbaarheid op mathematisch gebied waarnemen ; als wij zien, hoe de reformatie der zestiende en zeventiende eeuw gevolgd wordt door den geweldigen sprong vooruit, dien de wiskunde maakt ten gevolge van de opkomst der differentiaal- en integraalrekening, door een Newton en een Leibnitz ontworpen in de eerste plaats als een werktuig tot onderzoek van de geheimen des sterrenhemels, waarop de menschheid sedert GALILEÏ en KEPPLER een vrijeren blik durfde slaan, als wij opmerken dat de machtige ontwikkeling der groot-kapitalistische productiewijze, ontketend door de Fransche revolutie, met zich heeft gebracht de opkomst van een groot-industrie en van de aan die industrie dienstbare natuurwetenschappen, welke zich op wiskundig terrein weerspiegelt in de enorme uitbreiding van de functieleer en van de leer der differentiaalvergelijkingen, zou dan de veronderstelling al te gewaagd zijn, dat ook het zooeven besproken verschijnsel, dat spontaan opkomen van nieuwe denkbeelden en denkmethoden heenwijst naar en verband houdt met het naderen, ook op maatschappelijk gebied, van een „nieuwen tijd" ?

* * *

Doch laat ik mij bepalen tot mijn eigenlijk onderwerp.

Wanneer wij met elkander vergelijken het enge terrein, waartoe de mathematische logica zichzelve beperkt, door de woorden of symbolen geheel afgescheiden te beschouwen van de voorstellingen, die zij wekken en alleen hun samenspel te bestudeeren, en het wijde gebied, waarop de philosophie als op het hare aanspraak maakt, een gebied dat niet minder dan al het menschelijk weten en kennen omvat, dan schijnt het dat de beteekenis dier logica hier al zeer gering moet zijn, hoogstens die van een handig hulpmiddeltje om de resultaten van de overpeinzingen des wijsgeers te verwerken, zonder in staat te zijn ook maar het geringste aan de som zijner kennis toe te voegen.

En dan moet ik beginnen met dit laatste volmondig toe te geven; ja zelfs nog verder gaan door te beweren dat deze methode voor de philosophie, tenminste rechtstreeks, geen ander dan het negatieve nut kan hebben haar te behoeden voor verkeerde gevolgtrekkingen, door haar redeneeringen als het ware met het potlood in de hand na te cijferen.

En niettemin ben ik van oordeel, al is dit misschien niet zoo heel vleiend voor „die höhere Philosophie", dat dit nut, zij het dan negatief, niet zoo heel gering, dat dit controleursbaantje geen sinecure is. De philosophie toch is m. i. ontstaan door het woord, d. i. het symbool, waardoor wij menschen trachten bij elkander voorstellingen op te wekken, overeenkomstig met die, welke wij zelve aan dat woord koppelen. Die overeenkomst echter is, daargelaten nu in hoeverre de gelijkheid van twee voorstellingen in het algemeen een definiëerbaar begrip is, in ieder geval steeds onvolkomen: de kracht en beteekenis der woorden verschilt van individu tot individu vrij merkbaar — vooral wanneer zij tot begrippen samengevatte voorstellingen vertegenwoordigen. Uit die onvolkomenheid nu van overeenkomst, uit de „dwaling" dus, is m. i. als haar tegendeel het begrip „waarheid" geboren, en ik geloof niet te ver te gaan door te beweren dat de studie van dat begrip, leidend tot het zoeken naar moeilijke definities, naar de ontleding van abstracte begrippen, naar de oplossing van „wereldraadsels", die wij door eigen toedoen ons hebben gesteld, aanleiding is tot en tegelijkertijd wezen van de philosophie. Naar die opvatting kan dus de geheele philosophie, evenmin als haar onderdeel, de logica, iets aan ons weten toevoegen, dat haar niet door de waarnemingswetenschappen, door de physica, de sociologie, de psychologie, is geleverd.

De stelling trouwens, dat de logica der philosophen, tot voor kort door hen steeds aan de spits hunner wetenschap gesteld, op het woord en de woordbetrekkingen berust, is een veel verdedigde opvatting. TRENDELENBURG heeft o.a. aangetoond, dat de tien kategorieën van ARISTOTELES, grondlegger en doopvader der philosophische logica, op taalkundigen grondslag berusten. Nu moet het erkend worden, dat ARISTOTELES' geesteskind tot nu toe niet veel diensten aan de philosophie heeft bewezen, dat het geen groeikracht gehad heeft; en nu moge KANT ons trachten te troosten, door erin te roemen, dat de logica sinds ARISTOTELES evenmin een stap achteruit heeft behoeven, als een stap vooruit heeft vermogen te doen, toch schijnt hier een verjongingskuur niet geheel onnoodig. De gronden, waarop ik meen, dat de wiskundige logica hiertoe het middel zou kunnen zijn, zijn tweeërlei. In de eerste plaats dwingt deze methode tot een strenge onderscheiding van wat in de gestelde praemissen en wat in de voorstellingen ligt opgesloten, — en in dit opzicht is inzonderheid het symbolisch *schrift* nuttig, omdat het onverbiddelijk weigert uitdrukking te geven aan alle onzuivere bijmengsels, die uit het gebied der voorstellingen zoo vaak onder allerlei schoonschijnende voorwendsels in onze redeneering trachten binnen te sluipen, zoodat een redeneerfout bij dit systeem met even groote stelligheid kan worden geconstateerd als een cijferfout in een optelsom, — en in de tweede plaats maakt het spel der symbolen het ons gemakkelijk onze voorstellingen en begrippen te combineeren, nieuwe gezichtspunten te openen, ons te leiden en te steunen bij het doen van gewaagde stappen in het duistere gebied van het onbekende.

Doch liever dan voort te gaan op den gemakkelijken weg van algemeene loftuitingen, wil ik trachten U in eenige voorbeelden duidelijk te maken, op welke wijze ik mij voorstel, dat de mathematische logica op bepaalde vraagstukken van wijsgeerigen aard zou kunnen worden aangewend. Ik doe dit echter niet dan aarzelend, eerstens omdat ik mij daarbij begeef op een terrein, waar ik mij minder veilig gevoel, en in de tweede plaats omdat ik gevaar loop den schijn te wekken, dat ik U van alle vraagstukken, die ik aanroer, een oplossing zou willen opdringen, of tenminste dat ik zou meenen, dat die oplossing door de mathematische logica als door een tooverslag zou kunnen worden geleverd. Dit is toch niet het geval: mijn doel is hoofdzakelijk U voorbeelden te geven van de gedaante, welke de vragen zelf onder den invloed dezer methode aannemen.

Het zou voor de hand liggen, als eerste voorbeeld het ruimtebegrip te kiezen, dat wiskunde en philosophie beiden, zij het uit geheel verschillend oogpunt, bestudeeren; ik wil dat echter niet doen, èn om herhalingen te vermijden, èn omdat het toch weinig betoog behoeft, dat wiskundige beschouwingen hier goeden dienst kunnen bewijzen. Liever kies ik als eerste voorbeeld den tijd, die toch, naar den nimmer vertragenden stroom van geschriften te oordeelen, voor de philosofen „eine alte Geschichte die immer neu bleibt" is.

Passen wij onze methode hierop toe, dan hebben wij dus in de eerste plaats te vragen: welke enti primitive hebben wij hier te kiezen, en aan welke propozizione primitive zijn zij onderworpen, — wat zijn de stukken en wat de regels van het spel? Nu zijn alle uitspraken omtrent tijdsbetrekkingen gemakkelijk tot drie praedicaten terug te brengen: „gelijktijdig met", „later dan" en „vroeger dan". De wetten, waaraan het eerste praedicaat is onderworpen, zijn de z.g. identieke, commutatieve en transitieve eigenschappen, d. w. z. de betrekkingen:

1⁰. A is gelijktijdig met A. identiek

2⁰. Als A gelijktijdig is met B, dan is B gelijktijdig met A. commutatief

3⁰. Als A gelijktijdig is met B, en B is gelijktijdig met C, dan is A gelijktijdig met C. transitief

Het praedicaat „later dan" gehoorzaamt alleen aan de laatste dezer betrekkingen: als A later is dan B en B later dan C, dan is A later dan C. Het praedicaat „vroeger dan" is het inverse van „later dan", en als zoodanig voldoende gedefiniëerd. Maar als wij deze wetten beschouwen, en vooral wanneer wij daarbij de drie genoemde praedicaten door symbolen voorstellen, dan valt onmiddellijk in het oog, dat zij volkomen dezelfde zijn als de proposizione primitive, waaraan de praedicaten „gelijk aan", „grooter dan" en „kleiner dan" zijn onderworpen, zoodat de consequentie van onze methode nu eischt, dat dan ook de tijd worde opgevat als in aard niet verschillend van de drie dimensies der ruimte, m. a. w. dat wij het geheel van al het gebeurde, gebeurende en toekomstige hebben samen te vatten tot een ruimte van vier dimensies, waarin „het tegenwoordige" de rol speelt van een ruimte van drie afmetingen, een beschouwing, die elk onderscheid in realiteit tusschen heden, verleden en toekomst uitsluit. Allerlei vragen en mogelijkheden kunnen door zulk een wiskundige opvatting worden gesuggereerd: inplaats van één eeuwigheid, waarom geen twee, geen drie, geen oneindig veel? Waarom geen inzichzelf wederkeerende, en dus eindige tijd? Hoe zou de voorstelling zijn van een mensch, voor wien de praedicaten „vroeger dan" en „later dan" werden verwisseld, die, om zoo te zeggen, „achteruit" leefde? hoe hebben wij ons een tweedimensionalen tijd voor te stellen? enz. enz.

Met het tijdsprobleem houden nauw verband de begrippen „beweging" en „kracht", en ook deze leenen zich zeer goed tot een mathematisch-logische behandeling; doch ik wil liever een voorbeeld ter uitwerking kiezen, dat ons wat verder van het eigenlijk wiskundig terrein voert, en wel dat van de tegenstelling tusschen materie en geest. Hoe spreekt de wiskundige logica zich omtrent dit vraagstuk uit? Als enti primitive hebben wij hier de praedicaten „bestaan" en „gewaarworden", het laatste werkwoord natuurlijk in algemeenen zin opgevat als het gemeenschappelijk begrip van „bewust zijn", „leven", „gevoelen" e. d. Van deze praedicaten hebben wij nu de definiëerende eigenschappen op te sporen. Doch als wij een definitie trachten te geven van het praedicaat in den zin „het ding A bestaat", dan kunnen wij voor dat werkwoord geen ander kenmerk vinden, dan dat het op zichzelf een beteekenis heeft, en niet een combinatie is van andere werkwoorden. Maar aan deze definitie voldoet evenzeer het werkwoord gewaarworden in den zin „ik word gewaar" (in bovenomschreven algemeenen zin). Wij worden dus ook hier weder tot de identiteit der beide praedicaten gevoerd, waaruit dan zou volgen, dat het onderscheid tusschen „levende" en „levenlooze" voorwerpen slechts gradueel zou zijn. Ik moet er hier weder opmerkzaam op maken, dat deze redeneering, indien zij juist is, niet een nieuw feit aan onze kennis toevoegt, doch dat zij alleen strekt om te betoogen, dat wij met de beide praedicaten nooit verschillende begrippen hebben kunnen bedoelen, al mag ons dat door „overproductie op de woordenmarkt" wat onduidelijk zijn geworden.

Deze opvatting, die waarschijnlijk voor een Nieuw-Zeelander minder vreemds zou hebben dan voor ons „cultuurmenschen", wordt misschien nog verduidelijkt door de volgende overweging: het eerste praedicaat is de uitdrukking van een hypothese; de mensch, welke die hypothese voor het eerst stelt, moet dus aan het werkwoord „bestaan" een beteekenis hechten, welke hij reeds kende.

Daar hij nu zonder die hypothese slechts één werkwoord, n.m. „gewaarworden" (met zijn synoniemen natuurlijk) bezat, dat een zelfstandige beteekenis heeft, kan het nieuwe werkwoord „bestaan", dat ook aan dat kenmerk voldoen moet, geen essentieel-andere beteekenis hebben.

Om niet te uitvoerig te worden, wil ik enkel nog eenige gevallen aanstippen, waarin dezelfde methode op het onderzoek naar de identiteit van oogenschijnlijk verschillende begrippen m. i. kan worden aangewend: zoo b.v. bij het bestudeeren van de analogie tusschen de herinnering aan onze eigen daden en gedachten en de kennis, die wij hebben omtrent andere personen of omtrent gebeurtenissen in het verleden, een vraagstuk, dat in nauw verband staat met dat omtrent het al of niet bestaan eener ik-heid als mathematische eenheid; verder wijs ik op de overeenkomst of het verschil tusschen „opeenvolging" en „veroorzaking", tusschen „post" en „propter"; een vraag, die o. a. deze tweede met zich brengt: is „willen" iets anders dan „zijn eigen daden, door ondervinding geleerd, zien aankomen", en die ook weder met het tijdsbegrip in verband kan worden gebracht.

Doch ik ben met mijn voorbeelden misschien reeds te ver gegaan om het gevaar te ontwijken van oppervlakkigheid te worden beschuldigd. Mocht dat zoo zijn, laat ik u dan mogen verzoeken die minstens ten deele te willen toeschrijven aan de vrees te veel van uw aandacht en geduld te vergen. Het is trouwens verre van mij te wenschen, dat Gij het met de door mij ontwikkelde beschouwingen in alle deelen eens zoudt zijn, doch ik zal mijn doel bereikt hebben, indien ik U aannemelijk heb gemaakt, dat de wiskundige logica, zij het in bekwamer hand dan de mijne, een bruikbaar werktuig belooft te zijn voor het onderzoek van philosofische vragen in het algemeen en van die wetenschappen in het bijzonder, welke, zij het dan met of zonder gebruikmaking van dogma's of axioma's, min of meer op philosofischen grondslag zijn opgetrokken.

Ik heb gezegd.