INTUITIONISTISCHE AXIOMATIEK DER PROJECTIEVE MEETKUNDE

A. HEYTING

Th. F. C. WESTERHOF

INTUITIONISTISCHE AXIOMATIEK DER PROJECTIEVE MEETKUNDE

INTUITIONISTISCHE AXIOMATIEK DER PROJECTIEVE MEETKUNDE

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS Dr. OTTO LANZ, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE, IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN IN DE AULA DER UNIVERSITEIT OP WOENSDAG 27 MEI 1925, DES NAMIDDAGS TE 4 UUR DOOR

ARDEND HEYTING,

GEBOREN TE AMSTERDAM.

P. NOORDHOFF — 1925 — GRONINGEN

AAN MIJN OUDERS.

Bij de voltooiing van mijn proefschrift betuig ik mijn hartelijken dank aan allen, die tot mijn wetenschappelijke vorming hebben bijgedragen, in het bijzonder aan U, Hoogleeraren in de Wis- en Natuurkunde aan de Universiteit van Amsterdam.

U, Hooggeleerde BROUWER, hooggeachte promotor, dank ik bovendien voor Uw aanmoediging tot het ondernemen van dit onderzoek, waarvan Gij mij het onderwerp aan de hand deedt, en voor de niet genoeg te waardeeren raadgevingen, waardoor Gij mij bij de uitvoering daarvan herhaaldelijk hebt gesteund. Moge mijn arbeid iets bijdragen tot de verbreiding van Uw denkbeelden over de grondslagen der wiskunde.

INHOUD.

INLEIDING.

Het doel van dit werkje is, den opbouw der projectieve meetkunde in overeenstemming te brengen met de intuitionistische opvatting der wiskunde. Voor een nadere uiteenzetting van die opvatting verwijzen wij naar de aan het slot van dit werkje opgegeven litteratuur. Hier beperken wij ons tot eenige algemeene opmerkingen.

Men kan de nieuwe opvatting der wiskunde wel van verschillende wijsgeerige standpunten uit benaderen. Het kan onverschillig zijn of men aanneemt, dat de door de wiskundige intuitie als direct duidelijk gegeven begrippen correspondeeren met objecten in een werkelijkheid buiten ons, dan wel ze uitsluitend beschouwt als producten van onzen geest. Van belang is slechts, dat men over een wiskundig systeem eerst dan kan redeneeren, wanneer men het te voren heeft gedacht, d.w.z. in zijn geest heeft opgebouwd. Pogingen om de wiskunde op de metaphysica te grondvesten moeten schipbreuk lijden omdat de metaphysica, voor zoover ze zich niet bepaalt tot het stellen van min of meer vage symbolen, maar exact formuleerbare resultaten verlangt, een zekere mate van wiskundig denken vooronderstelt. Toch is het feit, dat nieuwe opvattingen zoo langzaam doordringen, voornamelijk te wijten aan metaphysische denkgewoonten. Het geloof in het „principium tertii exclusi" berust meestal op den waan, dat het woord „bestaan" in ontologischen zin zonder meer duidelijk is. Daardoor zien de meeste wiskundigen de mogelijkheid en noodzakelijkheid, een dergelijk „bestaan" als grondslag voor abstracte wiskunde te wraken, niet onmiddellijk in. Zij komen dan licht tot de meening, dat de vraag, of een entiteit met gegeven eigenschappen

„bestaat", een van ons denken onafhankelijke beteekenis heeft. Zoo ontstaat, wat WEYL „naiver Existentialabsolutismus" noemt.

De formalisten hebben het laatst bedoelde standpunt sinds lang overwonnen; bij hen vindt men dan ook soms een zuiver begrip van het intuitionisme (zie bijv. P. BERNAYS, Jahresbericht der D. M. V., 31, blz. 13—15). Daar hun doel is, zoo veel mogelijk van de oude wiskunde te redden, ook al gelukt dat slechts naar den uiterlijken vorm, is een juiste waardeering van hen niet te verwachten.

Voor de nieuwste uitwerking van het formalisme zie men D. HILBERT, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg I, of Math. Ann. 88; W. ACKERMANN, Math. Ann. 93.

De axiomatiek is tot dusver bijna uitsluitend van formalistisch standpunt behandeld; zij dient dan als grondslag voor de wiskunde. Deze beteekenis verliest zij voor den intuitionist geheel; zelfs moet de vraag gesteld worden, of zij niet, evenals bijv. de formalistische machtigheidstheorie, elke beteekenis verliest. WEYL [1]) schijnt geneigd, deze vraag bevestigend te beantwoorden, waar hij betoogt, dat de wiskunde uitsluitend stellingen over bepaalde „functiones" kan bevatten, maar geen „allgemeine Aussagen" over groepen van functies, verzamelingen en soorten, omdat van zulke algemeene stellingen de beteekenis niet duidelijk is. Wellicht stelt een onderzoek als het volgende die beteekenis duidelijker in het licht. Wij stellen ons op het standpunt, dat het door Prof. BROUWER in *„Begründung der Mengenlehre"* I blz. 4 aangegeven beginsel, waardoor uit de soorten der n^e orde een soort A der $(n+1)^e$ orde gevormd wordt, een duidelijken zin heeft. De axiomatiek is een toepassing van dat principe; de definieerende eigenschap der nieuwe

---

[1]) Math. Zeitschr. X blz. 70.,

soort A is, dat tusschen de elementen van haar elementen de door de axioma's gepreciseerde relaties bestaan.

Wij volgen in hoofdzaak den gang van het werkje van A. N. WHITEHEAD, „*The axioms of projective geometry*" (Cambridge University Press 1913), waarvan de axioma's ontleend zijn aan PIERI (Memorie di Torino 1898). Op vele punten is verder gebruik gemaakt van een college over axiomatiek, door Prof. BROUWER in 1919 te Amsterdam gegeven. In het algemeen is dus slechts de aanpassing der bewijzen aan intuitionistische eischen als oorspronkelijk te beschouwen. Daarvoor was echter dikwijls een omwerking der stof noodzakelijk.

In hoofdstuk I bouwen wij de projectieve coördinatenmeetkunde zoover op, dat duidelijk wordt in hoeverre PIERI'S axioma's wijziging behoeven. Deze opbouw is zeer abstract gehouden, zoodat de uitbreiding tot ruimten van meer dimensies gemakkelijk is. De methode voor het opbouwen van een ruimte door voortdurende tusschenvoeging van netpunten, die wij in § 2 en 3 toepassen, is in principe aangeduid door WEYL aan het slot van zijn artikel in Math. Zeitschr. Bd. X; deze bouwt daarbij voort op een gedachte van Prof. BROUWER (*Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. 71).

De grondeigenschappen der hoofdbewerkingen, evenals enkele door directe berekening te verifieeren eigenschappen, bijv. van determinanten, heb ik bekend verondersteld. Men vindt bijv. in WEBER en WELLSTEIN, *Encyclopädie der Elementarmathematik*, I, 3e druk § 26 een afleiding, die gemakkelijk streng te maken is. [1]) Vergelijk ook H. WEYL, l.c. Math. Zeitschr. X.

[1]) Evenwel is de daar onder no. 6 genoemde stelling ook volgens de oude theorie onjuist, zooals uit het voorbeeld $f(x) = x^2 - \pi x$ volgt; immers voor x rationaal is $f(x) > -\frac{\pi^2}{4}$, terwijl $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4}$.

In hoofdstuk II leiden wij die stellingen af, waarvoor het ordeningsbegrip niet noodig is. Deze bewijzen zijn tamelijk uitvoerig gegeven, om de telkens terugkeerende karakteristieke moeilijkheden en bewijsmethoden duidelijk uit te doen komen. Wat de stof betreft, culmineert dit hoofdstuk in de algemeene bewijzen voor de beide stellingen van DESARGUES.

Hoofdstuk III behandelt de begrippen ordening en continuiteit, terwijl in hoofdstuk IV de aansluiting tusschen numerale en axiomatische meetkunde verkregen wordt. Hierbij wijzen wij in het bijzonder op de toepassingen van de stelling, dat iedere volle functie gelijkmatig continu is.

Naar een ontleding der axioma's in hun eenvoudigste bestanddeelen, om den eisch der onafhankelijkheid tot het uiterste door te voeren, heb ik niet gestreefd. De verwikkelingen, die daardoor zouden ontstaan, konden slechts de aandacht van mijn eigenlijk doel afleiden.

HOOFDSTUK I.

Opbouw der Analytische Meetkunde.

§ 1. *Het lineair continuum.*

1. De grondslag voor de leer van het continuum is door Prof. BROUWER gelegd in „*Begründung der Mengenlehre*" II en de mededeeling in „Verslagen der Kon. Akad. v. Wet. te Amsterdam" XXIX (1920), blz. 804 (hiervan in 't bijzonder § 2).

Om de op blz. 3 van het eerste geschrift voorkomende bepaling van punt van het vlak op een punt van de lijn toe te passen, gaan wij uit van de verzameling van alle eindige duaalbreuken en verstaan wij onder een interval λ_ν een gesloten interval met twee duaalbreuken $\frac{a}{2^\nu}$ en $\frac{a+2}{2^\nu}$ tot eindpunten.

Een *punt van het continuum* is een onbepaald voort te zetten reeks van intervallen λ, waarvan ieder binnen de vorige ligt. De definities van *aanvullingselement* en *afsluitingselement* zijn hiervan uitbreidingen, waardoor het mogelijk wordt uit iedere aftelbaar oneindige [1]), in engeren zin overal dicht geordende [2]) soort [3]) H een continuum op te bouwen, ook zonder haar op de verzameling der eindige duaalbreuken af te beelden.

Wij vertalen de volgende definities, die verdienen, klassiek te worden, uit het tweede geciteerde stuk.

„Gegeven zij een aftelbaar oneindige, in engeren zin overal „dicht geordende verzameling H. Laat $g_1, g_2, g_3, \ldots$ de

1) BROUWER, *Begründung der Mengenlehre* I, blz. 7.

2) BROUWER, l. c. I, blz. 16.

3) BROUWER, l. c. I, blz. 3 en 4. Menge = verzameling. Species = soort.

„naar een willekeurige, H als aftelbaar oneindige verzame-„ling karakteriseerende, aftellingswet γ genummerde elemen-„ten van H zijn, en zij $\mathfrak{S}(g_1, g_2, \ldots g_\nu) = s_\nu$. Onder een „$i_\nu$ resp. j_ν, verstaan wij een (eventueel uit één enkel element „bestaand) gesloten interval [1]) van H, waarvan de uiteinden „tot s_ν behooren, maar dat in zijn binnenste hoogstens één, „resp. geen enkel element van s_ν bevat.

„Onder een *aanvullingselement* r van H verstaan wij *ten* „*eerste* een, ten minste één element bevattende, soort van „onbepaald voort te zetten reeksen, $\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha+1}, \varphi_{\alpha+2}, \ldots$ „(α een voor r bepaald positief geheel getal), waarin iedere „φ_ν een i_ν is en iedere $\varphi_{\alpha+\nu+1}$ in $\varphi_{\alpha+\nu}$ bevat is, terwijl φ_ν „voor iedere ν tot een voor r bepaalde soort S_ν behoort, „waarvan elke twee elementen een element van s_ν gemeen „hebben; *ten tweede* een, ten minste één element bevattende, „soort van onbepaald voort te zetten reeksen $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ „van afsplitsbare deelverzamelingen [2]) van H, in ieder waar-„van men ten minste één element kan aanwijzen, mits in „iedere reeks iedere $\zeta_{\nu+1}$ in ζ_ν bevat is en men een funda-„mentaalreeks [3]) $n_1, n_2, n_3, \ldots . (n_{\nu+1} \geqq n_\nu)$ van geheele „positieve getallen benevens een aanvullingselement van de „eerste soort r_0 van H kan bepalen, zoodanig dat bij ieder „element $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ van r een element $\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha+1}$, „$\varphi_{\alpha+2}, \ldots$ van r_0 bestaat, zoodat ζ_{n_ν} tot $\varphi_{\alpha+\nu}$ behoort.

„Onder een *afsluitingselement* r van H verstaan wij *ten* „*eerste* een fundamentaalreeks $\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha+1}, \varphi_{\alpha+2}, \ldots$ (α een „voor r bepaald positief geheel getal), waarin iedere φ_ν een „i_ν is en iedere $\varphi_{\alpha+\nu+1}$ in $\varphi_{\alpha+\nu}$ bevat is; *ten tweede* een „ten minste één element bevattende soort van onbepaald „voort te zetten reeksen $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ van afsplitsbare „deelverzamelingen van H, in ieder waarvan men ten minste

[1]) *„Begründung der Mengenlehre"* I, blz. 13.
[2]) l. c. I blz. 4.
[3]) l. c. I blz. 14. (Noot v. d. vert.).

„één element kan aanwijzen, mits in iedere reeks $\zeta_{\nu+1}$ in „ζ_ν bevat is en men een fundamentaalreeks $n_1, n_2, n_3, \ldots$ „$(n_{\nu+1} \geqq n_\nu)$ van geheele positieve getallen benevens een „afsluitingselement van de eerste soort $\xi_\alpha, \xi_{\alpha+1}, \xi_{\alpha+2}, \ldots$ „van H kan bepalen, zoodanig dat iedere ζ_{n_ν} van r tot „$\xi_{\alpha+\nu}$ behoort.

„Wanneer ${}_1r$ en ${}_2r$ aanvullingselementen van H zijn en „iedere ${}_1\xi_\mu$ met iedere ${}_2\xi_\nu$ een gemeenschappelijk element „heeft, zeggen wij dat ${}_1r$ en ${}_2r$ *in H samenvallen.*"

. . . .

„Wanneer het element g van H tot iedere ξ_ν van het „aanvullingselement r van H behoort, zeggen wij, dat r en *g in H samenvallen.*

„Wanneer ${}_1r$ en ${}_2r$ aanvullingselementen van H zijn en „men een ${}_1\xi_\mu$ en een ${}_2\xi_\nu$ zonder gemeenschappelijke ele-„menten kan aanwijzen, zeggen wij, dat ${}_1r$ en ${}_2r$ *in H* „*plaatselijk verschillen.*

„Wanneer men een ξ_ν van het aanvullingselement r van „H aangeven kan, waartoe het element g van H niet behoort, „zeggen wij, dat r en *g in H plaatselijk verschillen.*"

. . . .

„De voorgaande definities van aanvullingselementen en „afsluitingselementen van H zijn voor gegeven orderelaties „in H natuurlijk onafhankelijk van de aftellingswet γ."

2. Wij merken op, dat in beide definities juist niet met aanvullings- (resp. afsluitings-) elementen der eerste soort kon worden volstaan, omdat zij dan van de nummering der elementen van H afhankelijk waren geweest. Zooals zij er nu staan, is een aanvullingselement der eerste soort bij een nieuwe nummering tegelijk een van de tweede soort bij de oude nummering.

Omtrent de relaties samenvallen en plaatselijk verschillen valt op te merken:

1ᵉ. Beide zijn omkeerbaar.

2ᵉ. Zij sluiten elkander uit, d. w. z. is een van beide vervuld, dan is de andere ongerijmd.

3ᵉ. Als het ongerijmd is, dat twee punten plaatselijk verschillen, vallen zij samen.

4ᵉ. Als twee punten plaatselijk verschillen, verschilt elk derde punt plaatselijk van ten minste één van beide.

5ᵉ. De relatie van samenvallen is transitief.

6ᵉ. Zijn twee aanvullingselementen r en r' van H plaatselijk verschillend in H en valt r'' samen met r', dan zijn r en r'' plaatselijk verschillend in H. Hetzelfde geldt, als men een of meer der aanvullingselementen r, r', r'' door een element van H vervangt.

7ᵉ. Beide relaties zijn onafhankelijk van de nummering van H.

3. De soort der elementen en aanvullingselementen van H noemen wij een *open continuum*. Zij is niet geordend, daar verschillende aanvullingselementen kunnen samenvallen. Wel kan men tusschen elke twee plaatselijk verschillende aanvullingselementen van H een orderelatie vastleggen, n.l. die van de buiten elkaar liggende intervallen, waardoor zij als plaatselijk verschillend zijn herkend. Het geheel van deze orderelaties noemen wij een *pseudo-ordening*. Zij bezit alle eigenschappen van een ordening, maar is slechts voor plaatselijk verschillende elementen van het continuum bepaald.

4. Zij H' een aftelbaar oneindige, t.o.v. H in engeren zin overal dichte soort van onderling plaatselijk verschillende aanvullingselementen van H. De pseudo-ordeningsrelaties leveren een in engeren zin overal dichte ordening van H'. Bij ieder aanvullingselement r van H kan als volgt een aanvullingselement r' van H' bepaald worden. (De intervallen, waarvan de uiteinden tot H' behooren, duiden wij door een accent aan). Zij $\tau_\alpha, \tau_{\alpha+1}, \tau_{\alpha+2}, \ldots$ een element van r; wij kiezen voor τ'_{μ_ν} een i'_{μ_ν}-interval van H', dat $\tau_{\alpha+\nu}$ in zijn binnenste bevat. De index μ_ν kan met ν onbe-

paald stijgen. Immers bepaalt men bij vast gekozen ρ binnen ieder j'_{ρ}-interval, dat uit meer dan één element bestaat, twee verschillende elementen van H en is g_{σ} dat met den hoogsten index, dan ligt iedere i_{σ}, die binnen het geheel der j'_{ρ}-intervallen ligt, binnen een i'_{ρ}. Men kan dus zorgen, dat $z'_{\mu_1}, z'_{\mu_2}, \ldots$ een aanvullingselement r' van H' vormen. Wij definieeren, dat *r' met r samenvalt.* Met samenvallende aanvullingselementen van H vallen slechts samenvallende aanvullingselementen van H' samen; twee aanvullingselementen van H', die met plaatselijk verschillende aanvullingselementen van H samenvallen, zijn plaatselijk verschillend in H' en voldoen aan dezelfde pseudo-orderelatie als die van H.

5. Alle voorgaande definities en stellingen zijn zonder eenige wijziging van toepassing op een cyclisch overal dicht geordende aftelbaar oneindige soort K.[1]) De soort der elementen en aanvullingselementen van K is een *gesloten continuum.* Met de pseudo-ordening van het open continuum correspondeert een cyclische pseudo-ordening van het gesloten continuum.

6. Een *reëel getal* is een aanvullingselement van de verzameling H der eindige duaalbreuken, geordend volgens hun grootte. Plaatselijk verschillende getallen heeten ook numeriek verschillend; samenvallende getallen heeten gelijk. Verstaan wij onder een λ_{ν}-interval een gesloten interval van H met de eindpunten $\frac{a}{2^{\nu}}$ en $\frac{a+2}{2^{\nu}}$ (a en ν positief of negatief geheel of nul), dan is een onbepaald voort te zetten reeks van λ-intervallen, waarvan ieder binnen het voorafgaande ligt, een aanvullingselement van de tweede soort van H, dus een reëel getal. Omgekeerd kan, als μ gegeven is, ρ zoo bepaald worden, dat ieder i_{ρ}-interval, dat binnen zeker van te voren willekeurig aangenomen afgesloten interval a van H ligt, binnen een λ_{μ} ligt; daartoe behoeft men slechts binnen iedere

---

1) Zie voor een uitvoerige behandeling der cyclische ordening hoofdstuk III.

$\varkappa_\mu$ [1]), die met a elementen gemeen heeft, twee verschillende elementen van H te kiezen en voor ρ den hoogsten index van deze elementen in de aftelling van H te nemen. Bij ieder aanvullingselement van H kan dus een daarmee samenvallend, uit λ-intervallen bestaand aanvullingselement van H bepaald worden.

Het aldus opgebouwde getallencontinuüm noemen wij een *meetbaar continuum* [2]). Ieder continuum kan meetbaar gemaakt worden, door de ten grondslag liggende verzameling H, die het ordetype η bezit, met behoud van orderelaties op de verzameling der eindige duaalbreuken af te beelden.

7. Ook de cyclisch overal dicht geordende aftelbaar oneindige verzameling K kan met behoud van orderelaties op die van alle eindige duaalbreuken (al of niet met toevoeging van ∞) afgebeeld worden; bij een aanvullingselement, waarvan niet bekend is of het plaatselijk van ∞ verschilt, kan men echter geen daarmee samenvallend, uit λ-intervallen bestaand aanvullingselement bepalen. Wel verschilt ieder aanvullingselement r van K plaatselijk hetzij van 0, hetzij van ∞; in beide gevallen definieert het de verhouding van twee eindige getallen $\frac{a}{b}$. In het eerste geval kan men n.l. $b = 1$ kiezen en a bepalen evenals bij het open continuum; in het tweede geval neemt men $a = 1$; de omgekeerde waarden van de eindpunten der intervallen, die r bepalen, sluiten intervallen in, die b als reëel getal bepalen [3]). a en b zijn de *coördinaten* van r. Omgekeerd kan bij de verhouding van twee getallen, waarvan tenminste één numeriek van nul verschilt, een aanvullingselement van K gevonden worden,

1) Een $\varkappa_\mu$ is een interval met de eindpunten $\frac{a}{2^\mu}$ en $\frac{a+1}{2^\mu}$, dus een halve λ_μ.

2) Dit woord is ontleend aan BROUWER, Math. Ann. 71.

3) Deze conclusie berust op het feit, dat de transformatie $y = \frac{1}{x}$, op de elementen van K toegepast, de cyclische ordening onveranderd laat.

waarvan die getallen de coördinaten zijn. Het gesloten continuum is dus meetbaar gemaakt.

8. Wij besluiten deze § met eenige opmerkingen over de theorie der verhoudingen, die in het vervolg te pas komen. Een *n-voudige verhouding* wordt bepaald door n getallen $a_1 : \ldots : a_n$, waarvan er tenminste één van nul verschilt. Twee verhoudingen $a_1 : \ldots : a_n$ en $b_1 : \ldots : b_n$ zijn *gelijk* als het getal ρ zoo bepaald kan worden, dat $b_i = \rho a_i$ voor iedere i; hieruit volgt $\rho \mp 0$ [1]).

Uit deze voorwaarde volgt, dat

$$a_i\, b_k - a_k\, b_i = 0 \quad (i,\, k = 1, \ldots n) \quad . \quad . \quad (1)$$

Is omgekeerd aan (1) voldaan en is bijv. $a_m \mp 0$, $b_n \mp 0$, dan moet ook $a_n\, b_m \mp 0$ zijn, dus $a_n \mp 0$ en $b_m \mp 0$. Men kan dus steeds m zoo bepalen, dat $a_m \mp 0$ en $b_m \mp 0$; stelt men nu $b_m = \rho a_m$, dan volgt uit die betrekkingen (1), waarin $i = m$, $b_k = \rho a_k$ voor iedere k.

(1) is ook aequivalent met de voorwaarde, dat de matrix

$$A = \left\| \begin{matrix} a_1 & \ldots & a_n \\ b_1 & \ldots & b_n \end{matrix} \right\| = 0.$$

Twee verhoudingen zijn *aanwijsbaar verschillend*, als bij ieder eindig getal ρ de index i zoo bepaald kan worden dat $b_i \mp \rho a_i$.

Dit is aequivalent met de voorwaarde, dat A aanwijsbaar van nul verschilt. Immers zij $a_k \mp 0$, dan kan men ρ_1 zoo kiezen, dat $b_k = \rho_1 a_k$. Volgens onderstelling is er een index l, waarvoor $b_l \mp \rho_1 a_l$, dus $a_k\, b_l \mp \rho_1 a_k a_l$, of $a_k\, b_l - a_l b_k \mp 0$. Is omgekeerd gegeven $a_i\, b_k - a_k\, b_i \mp 0$, dan volgt uit de identiteit

$$b_k(a_i - \rho b_i) - b_i(a_k - \rho b_k) = a_i\, b_k - a_k b_i,$$

dat òf $a_i \mp \rho b_i$, òf $a_k \mp \rho b_k$.

Zijn $a_1 : a_2$ en $b_1 : b_2$ verschillende verhoudingen en is

---

1) Met $a \mp b$ bedoelen wij, dat de getallen a en b als aanvullingselementen van de verzameling der eindige duaalbreuken plaatselijk verschillen.

bijv. $a_1 \neq 0$, dan kan een positief getal a bepaald worden, zoodat $\frac{a_2}{a_1} < \frac{1}{a}$. Daarna kan uitgemaakt worden, òf dat $b_1 \neq 0$ en $\frac{b_2}{b_1} \neq \frac{a_2}{a_1}$, òf dat $b_2 \neq 0$ en $\frac{b_1}{b_2} < a$. Gaat men nu de aanvullingselementen van K bepalen, waarvan $a_1 : a_2$ en $b_1 : b_2$ de coördinaten zijn, dan vindt men steeds na voldoende benadering buiten elkaar liggende intervallen. In het eerste geval neemt men n.l. $a_1 = b_1 = 1$, waarna $a_2 \neq b_2$; in het tweede neemt men $a_1 = b_2 = 1$, waarna blijkt $a_2 < \frac{1}{a}$, $| b_1 < a$. Verschillende verhoudingen bepalen dus plaatselijk verschillende aanvullingselementen van K. Ook het omgekeerde geldt. De cyclische pseudo-ordening van de aanvullingselementen van K is dezelfde als die van hun coördinaatverhoudingen; beide worden bepaald door orderelaties tusschen buiten elkaar liggende intervallen.

§ 2. *Het numerale projectieve vlak.*

1. Voor den opbouw hiervan gaan wij uit van drie *grondpunten* of *netpunten van de nulde orde*, waaraan wij de coördinaatverhoudingen (100), (010) en (001) toekennen. Deze bepalen de vier *grondelementen*, overeenkomende met de vier wijzen, waarop de coördinaten in twee groepen verdeeld kunnen worden (ook de nulgroep toegelaten). Zulk een verdeeling wordt bepaald, door de coördinaten uit één der groepen negatief te nemen. De vier grondelementen zijn dus:

(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1).
(– 1,0,0), (0,1,0), (0,0,1).
(1,0,0), (0, — 1,0), (0,0,1).
(1,0,0), (0,1,0), (0,0, — 1).

Daar het slechts op coördinaatverhoudingen aankomt, zijn grondpunten met tegengestelde coördinaten identiek; wij zouden nog een gemeenschappelijken factor kunnen toevoegen, maar spreken voorloopig af, de som van de absolute waarden der coördinaten steeds 1 te nemen.

2. De grondpunten van eenzelfde grondelement noemen wij *aangrenzend.* De volgende stap is nu de invoeging tusschen elke twee aangrenzende grondpunten van een *netpunt van de eerste orde,* waarvan de coördinaten de gemiddelden zijn van die van de beide grondpunten.

Een netpunt van de eerste orde wordt gezegd te grenzen 1ᵉ aan de beide netpunten waartusschen het ingevoegd is; 2ᵉ aan alle tegelijk er mee in hetzelfde element ingevoegde netpunten. Deze regel blijft ook voor netpunten van hoogere orde gelden. De coördinaatverschillen tusschen twee aangrenzende netpunten van de eerste orde zijn niet grooter dan $\frac{1}{2}$. Laat men op de netpunten elke coördinaat twee waarden aannemen, die $\frac{1}{2}$ verschillen, dan verkrijgt men drie, twee aan twee aangrenzende netpunten, die een *element van de eerste orde* vormen. De elementen van de eerste orde, die een bepaald netpunt gemeen hebben, vormen een *cel van de eerste orde;* het gemeenschappelijke netpunt heet het *middelpunt,* de overige netpunten de *hoekpunten* van de cel. Op analoge wijze als die van de eerste orde worden netpunten, elementen en cellen van de tweede en hoogere orde gedefinieerd. Een cel kan wel netpunten uit verschillende grondelementen bevatten: daar slechts netpunten uit hetzelfde grondelement aan elkaar grenzen, moet dan haar middelpunt tot beide grondelementen hooren. Dit punt kan in die grondelementen tegengestelde coördinaten hebben. In dat geval keeren wij het teeken van de coördinaten der hoekpunten uit één der grondelementen om. Is dit gebeurd, dan is de maximumcoördinaatvariatie voor de hoekpunten van een cel van de n^e orde $\frac{1}{2^{n-1}}$.

3. Een netpunt ligt *binnen* een cel, als het óf met haar

middelpunt identiek is, óf door tusschenvoegingen uit haar netpunten, maar niet uitsluitend uit haar hoekpunten, ontstaan is. De coördinaten van een netpunt binnen een cel liggen binnen de variatie-intervallen voor de coördinaten van de hoekpunten. Daar uit de coördinaten van een netpunt volgt, door welke tusschenvoegingen het is ontstaan, geldt ook het omgekeerde.

Een netpunt ligt *buiten* een cel, als het niet door tusschenvoegingen uit haar netpunten ontstaat. Ten minste één van zijn coördinaten ligt dan buiten het variatiegebied van die coördinaat voor de hoekpunten.

Een netpunt ligt *op den rand van* een cel, als het door tusschenvoegingen uit twee aan elkander grenzende hoekpunten ontstaat.

4. Een cel ligt *binnen* een andere, als al haar hoekpunten daarbinnen liggen. Het variatiegebied van elke coördinaat voor de hoekpunten der eerste cel ligt dan binnen dat voor de hoekpunten der tweede cel en ieder netpunt binnen de eerste cel ligt binnen de tweede.

Twee cellen liggen *buiten* elkander, als elk hoekpunt van die van de hoogste orde buiten de andere ligt. Een netpunt, dat binnen of op den rand van de eerste cel ligt, is door tusschenvoegingen uit haar netpunten ontstaan, dus niet uitsluitend uit die van de tweede cel; het ligt dus buiten deze. Daaruit volgt, dat een netpunt binnen de tweede cel niet binnen of op den rand van de eerste ligt, dus er buiten. Om aan te toonen, dat voor ten minste één coördinaat de variatiegebieden buiten elkaar liggen, moeten wij iets dieper op de ligging daarvan ingaan. Laat de cellen van de orden m en n zijn ($m > n$) en de coördinaten van de middelpunten (a_1, a_2, a_3) resp. (b_1, b_2, b_3). $\Sigma a_i = \Sigma b_i = 1$; wij mogen dus zonder beperking aannemen $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, $a_3 > b_3$. Nu beschouwen wij de intervallen $p_i = \left(a_i - \frac{1}{2^m}, a_i + \frac{1}{2^m}\right)$ en

$q_i = \left(b_i - \frac{1}{2^n}, b_i + \frac{1}{2^n}\right)$. Ligt iedere a_i buiten of op den rand van q_i, dan is $a_3 - b_3 = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) \geqq 2 \times \frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m}$, dus p_3 ligt buiten q_3. Ligt daarentegen a_2 binnen q_2, dan is òf $b_1 - a_1 > \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^n}$, òf $b_1 - a_1 \leqq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m}$ en $a_3 - b_3 \leqq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m}$, òf $a_3 - b_3 > \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m}$. In het eerste geval ligt p_1 buiten q_1, in het derde p_3 buiten q_3; in het tweede zou het hoekpunt van de kleine cel $\left(a_1 + \frac{1}{2^m}, a_2, a_3 - \frac{1}{2^m}\right)$ binnen of op den rand der groote cel liggen, wat onmogelijk is.

5. Een *punt p van het projectieve vlak* is een, ten minste één element bevattende, soort van onbepaald voort te zetten reeksen van cellen, waarvan ieder binnen de vorige ligt, terwijl twee cellen van verschillende reeksen niet buiten elkaar kunnen vallen.

Twee punten *vallen samen*, als men, nadat uit een element van ieder punt een cel willekeurig is aangenomen, steeds een binnen beide cellen gelegen netpunt kan aanwijzen.

Twee punten zijn *plaatselijk verschillend*, als men van ieder een cel kan aangeven, zoodanig dat die cellen buiten elkaar liggen.

Men verifieert gemakkelijk, met behulp van de hierboven over de onderlinge ligging van cellen bewezen eigenschappen, dat de relaties van samenvallen en plaatselijk verschillen voldoen aan de eigenschappen 1^e tot 6^e van § 1 n^0 2. Als voorbeeld diene het bewijs van 4^e. Zijn a en b twee plaatselijk verschillende punten en α en β cellen opv. van a en b, die buiten elkaar liggen, dan liggen voor ten minste één coördinaat de variatie-intervallen buiten elkaar; zij s hun afstand. Van ieder punt ligt dan een cel van zoodanige orde k, dat $\frac{1}{2^{k-1}} < s$, òf buiten α, òf buiten β.

6. De variatie-intervallen van eenzelfde coördinaat binnen de opvolgende cellen van een punt vormen een aanvullingselement van de verzameling der eindige duaalbreuken, dus een reëel getal. De drie zoo bepaalde getallen heeten de *coördinaten* van het punt. De som van hun absolute waarden is 1. Omgekeerd bepalen drie getallen, waarvan de som der absolute waarden 1 is, een punt. Immers neemt men van elk der aanvullingselementen, die de absolute waarden der drie getallen bepalen, een λ_{n+1}, dan kan men steeds uit ieder daarvan een eind- of middelpunt kiezen, zoodat de som der absolute waarden 1 is. Doet men dit op alle mogelijke manieren, en neemt men daarna ook de teekens der coördinaten in aanmerking, dan vindt òf een cel van de $(n+1)^e$ orde, òf een element van de n^e orde, dat nog tot een cel van de n^e orde aangevuld moet worden. Deze onbepaald voort te zetten reeks van cellen is het gezochte punt.

Samenvallende punten hebben gelijke coördinaten. Plaatselijk verschillende punten hebben numeriek verschillende coördinaten.

Voegt men aan de coördinaten van elk punt een willekeurigen factor toe, dan zijn de punten van het projectieve vlak zoodanig op de drievoudige verhoudingen afgebeeld, dat relaties van samenvallen met gelijkheidsrelaties en relaties van plaatselijk verschillen met die van aanwijsbaar verschillen correspondeeren. Wij zullen zulk een afbeelding *een-eenduidig* noemen.

§ 3. *De numerale projectieve ruimte.*

1. Voor den opbouw der projectieve ruimte gaan wij uit van vier *grondpunten* met coördinaten (1000), (0100), (0010) en (0001) en van de acht *grondelementen*, die ontstaan, door de coördinaten op alle wijzen in twee groepen te verdeelen en die van één groep negatief te nemen

2. Tusschen elke twee grondpunten voegen wij een *netpunt van de 1e orde* in, met als coördinaten de gemiddelden van die der beide grondpunten. Onder een *element van de eerste orde* verstaan wij een zoo groot mogelijke verzameling van netpunten der nulde of eerste orde, waarbinnen elke coördinaat twee waarden aanneemt, die $\frac{1}{2}$ verschillen. De elementen der eerste orde vallen in twee groepen uiteen:

1e een coördinaat is in absolute waarde $\frac{1}{2}$ of 1, alle andere 0 of $\frac{1}{2}$.

2e alle coördinaten zijn in absolute waarde 0 of $\frac{1}{2}$.

Onder een zijvlak van een element verstaan wij de verzameling der netpunten van het element, waarin een coördinaat constant is; zoo zijn op een „ribbe" twee coördinaten constant. De aaneensluiting der ribben en zijvlakken verandert niet, als men in geval 1e de eerste coördinaat van elk netpunt met $\frac{1}{2}$ vermindert; dan zijn alle coördinaten 0 of $\frac{1}{2}$, maar hun som is $\frac{1}{2}$. De netpunten correspondeeren dus met de verdeelingen (1, 3) der 4 coördinaten, waaruit volgt, dat zij evenzoo aaneensluiten als die van een grondelement. In geval 2e correspondeeren de netpunten met de 6 verdeelingen (2, 2) van de coördinaten en men gaat gemakkelijk na, dat zij aaneensluiten als de hoekpunten van een octaëder.

Wij zeggen, dat twee netpunten van eenzelfde element van de eerste orde *aan elkaar grenzen*. Tusschen elke twee aangrenzende netpunten voegen wij een *netpunt van de tweede orde* in met gemiddelde coördinaten en definieeren *elementen van de tweede orde* analoog met die van de eerste orde. Door zoo noodig een of meer coördinaten in elk netpunt van een element met eenzelfde bedrag te verminderen, bereikt men, dat in elk element elke coördinaat tusschen 0 en $\frac{1}{4}$ schommelt; dan is voor alle hoekpunten de som der coördinaten òf $\frac{3}{4}$ (dus drie $= \frac{1}{4}$ en een $= 0$), òf $\frac{1}{2}$ (dus twee $= \frac{1}{4}$ en twee $= 0$,) of $\frac{1}{4}$ (dus één $= \frac{1}{4}$ en drie $= 0$); de netpunten van een element correspondeeren dus met de verdeelingen (1, 3) of (2, 2) der coördinaten. Er komen dus hier (en ook verder) geen nieuwe typen van elementen, wat de aaneensluiting der punten betreft.

Netpunten en elementen van hoogere orde worden op overeenkomstige wijze ingevoerd.

3. Alle verdere definities en stellingen zijn bijna woordelijk gelijk aan die in het projectieve vlak. Slechts het bewijs van de stelling, dat bij twee buiten elkaar liggende cellen voor ten minste één coördinaat de variatieintervallen buiten elkaar liggen, eischt een aanvulling voor het geval, dat van de 4 getallen a_i er 2 grooter en 2 kleiner zijn dan de correspondeerende b_i. Wij kunnen deze aan den lezer overlaten.

§ 4. *Invoering van lijnen en vlakken.*

1. *Bepalingen.* Zijn A $(x_1 \ldots x_4)$ en B $(y_1 \ldots y_4)$ plaatselijk verschillende punten der projectieve ruimte, dan is de *lijn* AB de soort der punten, wier coördinaten van den vorm zijn $z_i = \lambda x_i + \mu y_i$ (1).

Een punt ligt *buiten* een lijn, als het plaatselijk verschilt van elk punt van die lijn.

Opmerkingen. Opdat ten minste één der getallen z_i uit (1) van nul verschilt, zoodat zij de coördinaten van een punt C zijn, is noodig en voldoende, dat λ of μ van nul verschilt. Immers is $z_i \neq 0$, dan verschilt ten minste één der termen λx_i of μy_i van nul en verschilt een product van nul, dan verschilt ieder der factoren van nul. Omgekeerd: is $\lambda \neq 0$ en $x_i y_k - x_k y_i \neq 0$ (verg. blz. 11, (1)), dan is $y_i z_k - y_k z_i = - \lambda (x_i y_k - x_k y_i) \neq 0$, dus òf z_i, òf z_k verschilt van nul. Uit de laatste identiteit volgt meteen, dat $\lambda \neq 0$ de noodige en voldoende voorwaarde is opdat C en B plaatselijk verschillen; evenzoo $\mu \neq 0$ opdat C en A plaatselijk verschillen.

2. De voorwaarde, opdat $P\,(p_1 \ldots p_4)$ buiten AB ligt, luidt, dat voor alle waarden van λ en μ voor ten minste één

index i, $z_i \neq \lambda x_i + \mu y_i$. Om deze op een anderen vorm te brengen, gebruiken wij twee bekende algebra-stellingen, waarvan het bewijs echter verscherping behoeft.

Stelling I. Is van een stelsel homogene lineaire vergelijkingen, waarvan het aantal minstens gelijk is aan dat der onbekenden, de coëfficientenmatrix verschillend van nul, dan is voor elk van nul verschillend waardensysteem der onbekenden aan ten minste één der vergelijkingen niet voldaan, d. w. z. het eerste lid verschilt van nul.

Bewijs. Laat gegeven zijn de vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l} {}_1a_1x_1 + \dots {}_1a_nx_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ {}_ka_1x_1 + \dots {}_ka_nx_n = 0 \end{array}\right\} (k \geqq n)\ (A).$$

Men mag aannemen, dat de eerste hoofddeterminant

$$\varDelta = \begin{vmatrix} {}_1a_1 & \dots & {}_1a_n \\ \dots & \dots & \dots \\ {}_na_1 & \dots & {}_na_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Zij $\varDelta_i$ de minor van ${}_na_i$ in $\varDelta$ en ${}_mA_i$ de minor van ${}_ma_1$ in $\varDelta_i (i \neq 1)$. Vermenigvuldigen wij de eerste $n - 1$ vergelijkingen achtereenvolgens met ${}_1A_i, \dots {}_{n-1}A_i$ en tellen wij ze daarna op, dan komt er: $-\varDelta_i\ x_1 + \varDelta_1\ x_i = 0$.

Daar wij zonder beperking mogen aannemen, dat $\varDelta_1 \neq 0$, is de oplossing der eerste $n - 1$ vergelijkingen

$$x_1 : \dots : x_n = \varDelta_1 : \dots : \varDelta_n\ (1).$$

Zij nu $x_1' \dots x_n'$ een willekeurig stel waarden der onbekenden en $x_i' \neq 0$. Is $\varDelta_i x'_1 - \varDelta_1 x_i' \neq 0$, dan krijgt men, door $x_1' \dots x_n'$ in de eerste $n - 1$ vergelijkingen te substitueeren en daarna de eerste leden, vermenigvuldigd met ${}_1A_i, \dots {}_{n-1}A_i$, samen te tellen, een van nul verschillend resultaat, waaruit volgt dat ten minste één van de eerste leden van nul verschilt. Nu kan men steeds uitmaken, òf dat $\varDelta_i x_1' - \varDelta_1 x_i' \neq 0$, òf dat $x_1' \neq 0$ en $x_i \neq 0$ (is $i = 1$, dan is dit reeds vanzelf waar). In het laatste geval substitueeren wij in de n^e vergelijking eerst $\Delta_1 \ldots \Delta_n$, dan $x_1' \ldots x_n'$. Het eerste geeft Δ, het tweede resultaat noemen wij P.

$$x_1'\Delta - \Delta_1 P = {}_n a_2 \, (x_1'\Delta_2 - \Delta_1 x_2') + \ldots + {}_n a_n \, (x_1'\Delta_n - \Delta_1 x_n').$$

Men kan nu uitmaken, òf dat $\Delta_1 P \neq 0$, òf dat $x_1'\Delta - \Delta_1 P \neq 0$; in het eerste geval is $P \neq 0$, dus $x_1' \ldots x_n'$ voldoen niet aan de n^e vergelijking en in het tweede geval is ten minste één der termen rechts van nul verschillend en is volgens het voorgaande aan een der eerste n — 1 vergelijkingen niet voldaan.

Stelling II. Is voor ieder stel waarden der onbekenden aan ten minste één der vergelijkingen (A) niet voldaan, dan verschilt de coëfficientenmatrix van nul.

Bewijs. De stelling is juist voor k vergelijkingen met 1 onbekende en kan door volledige inductie verder bewezen worden. Is voor zeker stel waarden $x_1 \ldots x_n$ niet voldaan aan de eerste vergelijking van (A), dan is ten minste één der coëfficienten daarvan, bijv. ${}_1a_1$, verschillend van nul. Men kan nu x_1 uit deze vergelijking oplossen en in de overige vergelijkingen substitueeren; hierdoor ontstaat het stelsel

$$\left.\begin{array}{l} \left({}_2a_2 - \dfrac{{}_2a_1}{{}_1a_1}\,{}_1a_2\right)x_2 + \ldots + \left({}_2a_n - \dfrac{{}_2a_1}{{}_1a_1}\,{}_1a_n\right)x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left({}_ka_2 - \dfrac{{}_ka_1}{{}_1a_1}\,{}_1a_2\right)x_2 + \ldots + \left({}_ka_n - \dfrac{{}_ka_1}{{}_1a_1}\,{}_1a_n\right)x_n = 0 \end{array}\right\} (B).$$

Kiest men $x_2 \ldots x_n$ willekeurig en berekent men x_1 uit de eerste vergelijking van (A), dan is aan deze voldaan, dus aan één der volgende niet; hieruit volgt, dat voor ieder waardensysteem $x_2 \ldots x_n$ aan één der vergelijkingen (B) niet voldaan is; volgens de te bewijzen stelling verschilt dus hun coëfficientenmatrix van nul; wij nemen aan, dat de determinant van de eerste n — 1 vergelijkingen van (B) van nul verschilt; deze is $\dfrac{\Delta}{{}_1a_1}$, zoodat ook Δ van nul verschilt.

3. Uit deze beide stellingen volgt, dat de noodige en

voldoende voorwaarde opdat C buiten AB ligt, luidt, dat de coördinatenmatrix van die punten van nul verschilt. Daar deze voorwaarde symmetrisch is, ligt dan ook B buiten AC en C buiten AB. Wij zeggen in dit geval, dat de punten *in driehoeksligging verkeeren.*

4. *Bepalingen* Zijn $A(x_1 \ldots x_4)$, $B(y_1 \ldots y_4)$ en $C(z_1 \ldots z_4)$ drie punten in driehoeksligging, dan is *vlak* ABC de soort der punten $D(p_1 \ldots p_4)$ met coördinaten van den vorm $p_i = \lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i$.

Uit de betrekkingen

$$\left\| \begin{matrix} p_1 & \ldots & p_4 \\ y_1 & \ldots & y_4 \\ z_1 & \ldots & z_4 \end{matrix} \right\| = \lambda \left\| \begin{matrix} x_1 & \ldots & x_4 \\ y_1 & \ldots & y_4 \\ z_1 & \ldots & z_4 \end{matrix} \right\|$$

en analoge volgt, daar de matrix rechts van nul verschilt, dat de noodige en voldoende voorwaarde, opdat één der coördinaten p_i van nul verschilt, luidt, dat λ, μ of ν van nul verschilt. Tevens blijkt, dat de voorwaarde, dat D buiten BC ligt, is $\lambda \neq 0$.

5. *Bepaling.* Een punt P ligt ***buiten*** vlak ABC, als het plaatselijk verschilt van ieder punt van het vlak.

Evenals boven blijkt, dat de voorwaarde hiervoor is, dat de coördinatendeterminant van A, B, C en P van nul verschilt; de vier punten verkeeren dan *in tetraëderligging.*

§ 5. *Onderzoek van* PIERI'S *axioma's.*

Wij gaan nu na, in hoeverre de hierboven opgebouwde projectieve meetkunde aan de axioma's van PIERI voldoet.

Allereerst valt op te merken, dat overal voor „identieke punten" „samenvallende punten" en voor „niet-identieke punten" of „verschillende punten" „plaatselijk verschillende punten" moet worden gelezen. Doen wij dit en voeren wij ook verder de hierboven gebruikte terminologie in, dan luiden de axioma's bij WHITEHEAD, l.c. Chapter II, aldus:

I. Punten vormen een wiskundige soort.

II. Er is tenminste één punt.

III. Is A een punt, dan is er een plaatselijk van A verschillend punt.

IV en V. Zijn A en B plaatselijk verschillende punten, dan is lijn AB een puntsoort.

VI. Zijn A en B plaatselijk verschillende punten, dan is lijn AB bevat in lijn BA.

VII. Zijn A en B plaatselijk verschillende punten, dan behoort A tot lijn AB.

VIII. Zijn A en B plaatselijk verschillende punten, dan bevat lijn AB ten minste één punt, dat plaatselijk van A en B verschilt.

IX. Zijn A en B plaatselijk verschillende punten, en is C een punt, dat plaatselijk van A verschilt en op lijn AB ligt, dan ligt B op lijn AC.

X. Zijn A en B plaatselijk verschillende punten en is C een punt, dat plaatselijk van A verschilt en op lijn AB ligt, dan is lijn AC bevat in lijn AB.

XI. Zijn A en B plaatselijk verschillende punten, dan is er ten minste een punt, dat buiten lijn AB ligt.

XII. Zijn A, B, C punten in driehoeksligging, en is A' een punt op BC, dat plaatselijk van B en C verschilt en B' een punt op CA, dat plaatselijk van C en A verschilt, dan hebben de lijnen AA' en BB' een punt gemeen.

Bepaling. Zijn A, B, C punten in driehoeksligging, dan is vlak ABC de soort der punten, die liggen op de verbindingslijnen van A met de punten van BC.

XIII. Zijn A, B, C punten in driehoeksligging, dan is er ten minste een punt, dat buiten vlak ABC ligt.

XIV. („FANO'S axioma") kunnen wij, doordat wij de ordening anders behandelen dan WHITEHEAD, missen.

XV. Er bestaan een vlak α en een punt A buiten α, zoodanig dat ieder punt ligt op de verbindingslijn van A met een punt van α.

Aan I tot en met VIII is natuurlijk voldaan. IX wordt aldus aangetoond: Zijn gegeven $A(x_1 \ldots x_4)$, $B(y_1 \ldots y_4)$, $C(z_1 \ldots z_4)$ en is $z_i = \lambda x_i + \mu y_i$ en $\mu \neq 0$, dan is $y_i = \frac{1}{\mu} z_i - \frac{\lambda}{\mu} x_i$, dus B ligt op CA. Dat ook X geldt, blijkt uit het feit, dat, met dezelfde notaties, $\rho x_i + \sigma z_i = (\rho + \lambda\sigma) x_i + \mu\sigma y_i$, dus ieder punt van AC behoort tot AB.

Verder kan men steeds $p_1 \ldots p_4$ zoo bepalen, dat

$$\begin{Vmatrix} p_1 \ldots p_4 \\ x_1 \ldots x_4 \\ y_1 \ldots y_4 \end{Vmatrix} \neq 0;$$

immers uit de twee onderste rijen verschilt een determinant van nul. Ook XI geldt dus.

XII hangt nauw samen met de bepaling van het vlak en de laatste kan niet gehandhaafd blijven.

Laat n.l. x_i, y_i, $z_i (i = 1, \ldots 4)$ de coördinaten van A, B, C zijn, dan zijn de coördinaten van een willekeurig punt D van vlak ABC: $p_i = \lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i$. Opdat D op de verbindingslijn van A met een punt van BC ligt, is noodig, dat α, β, ξ en η (α of β en ξ of $\eta \neq 0$) zoo bepaald kunnen worden, dat

$$p_i = \lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i = \xi x_i + \eta(\alpha y_i + \beta z_i) \; . \; . \; . \quad (1)$$

of

$$(\xi - \lambda) x_i + (\eta\alpha - \mu) y_i + (\eta\beta - \nu) z_i = 0 \; . \; . \quad (2)$$

Daar de coëfficientenmatrix van deze 4 vergelijkingen in de veranderlijken

$$\xi - \lambda, \quad \eta\alpha - \mu, \quad \eta\beta - \nu$$

van nul verschilt (§ 4), is door elk van nul verschillend waardensysteem van deze grootheden aan één der vergelijkingen niet voldaan; van een waardensysteem, dat voldoet, kan dus geen dier grootheden van nul verschillen, waaruit volgt;

$$\xi - \lambda = 0, \quad \eta\alpha - \mu = 0, \quad \eta\beta - \nu = 0 \; . \; . \; . \quad (3)$$

Zijn nu μ en ν geen van beide aanwijsbaar verschillend van, nul, dan gelukt het niet, uit (3) α en β zoo te bepalen, dat een van beide van nul verschilt.

Meetkundig uitgedrukt komt dit bezwaar hierop neer, dat punten, die niet plaatselijk van A verschillen, geen bepaalde verbindingslijn met A hebben en dus niet onder de onderzochte definitie vallen. Wij vervangen ze daarom door de volgende:

Zijn A, B en C punten in driehoeksligging, dan is vlak ABC de soort der punten P met de eigenschap, dat een punt Q op AB en een van Q plaatselijk verschillend punt R op AC gevonden kunnen worden, zoodat P, Q en R collineair zijn.

Dat dit in onze meetkunde geldt, blijkt als volgt. Als x_i, y_i, z_i dezelfde beteekenis hebben als boven en weer $p_i = \lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i$, zullen de coördinaten van Q zijn $q_i = \alpha x_i + \beta y_i$; die van R: $r_i = \gamma x_i + \delta z_i$. Q verschilt plaatselijk van R, als óf β, óf δ van nul verschilt. Immers is bijv. $\beta \neq 0$, dan volgt uit

$$\left\|\begin{matrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{matrix}\right\| \neq 0 \text{ ook } \left\|\begin{matrix} x_i \\ q_i \\ z_i \end{matrix}\right\| \neq 0,$$

dus Q ligt buiten AC en verschilt plaatselijk van R. Zijn verder P, Q, R collineair, dan moet $p_i = \xi q_i + \eta r_i$ zijn. Men moet dus α, β, γ, δ, ξ, η (α of β, γ of δ en ξ of $\eta \neq 0$, β of $\delta \neq 0$) zoo kunnen bepalen, dat

$$\lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i = \xi(\alpha x_i + \beta y_i) + \eta(\gamma x_i + \delta y_i).$$

Evenals boven blijkt, dat hieruit volgt

$$\alpha\xi + \gamma\eta = \lambda; \quad \beta\xi = \mu; \quad \delta\eta = \nu.$$

Om hieraan te voldoen, kiezen wij β en η willekeurig van nul verschillend. $\xi = \frac{\mu}{\beta}$. $\delta = \frac{\nu}{\eta}$. $\gamma = \frac{\lambda - \alpha\xi}{\eta}$. Hierin mag α willekeurig gekozen worden. Nu is óf $\lambda \neq 0$; dan kunnen wij zorgen dat $\gamma \neq 0$; óf $\mu \neq 0$, dan is $\xi \neq 0$, dus weer te zorgen dat $\gamma \neq 0$; óf $\nu \neq 0$, dan is $\delta \neq 0$. Hiermee is aan alle voorwaarden voldaan.

XII moet vervangen worden door:

Zijn A, B, C punten in driehoeksligging en heeft lijn l met AB en AC twee plaatselijk verschillende punten X en Y gemeen, waarvan het eerste plaatselijk van B verschilt, dan heeft l met BC een punt gemeen.

Dat hieraan voldaan is, blijkt aldus:

Hebben x_i, y_i, z_i weer dezelfde beteekenis als boven en zijn de coördinaten van X: $p_i = \alpha x_i + \beta y_i$ $(\alpha \neq 0)$, die van Y: $q_i = \gamma x_i + \delta z_i$ (γ of $\delta \neq 0$, β of $\delta \neq 0$), dan moet bewezen worden, dat λ, μ, ξ, η (λ of $\mu \neq 0$, ξ of $\eta \neq 0$) zoo bepaald kunnen worden, dat

$$u_i = \lambda p_i + \mu q_i = \xi y_i + \eta z_i.$$

$$(\alpha\lambda + \mu\gamma)\, x_i + \beta\lambda y_i + \mu\delta z_i = \xi y_i + \eta z_i.$$

$$\alpha\lambda + \mu\gamma = 0, \text{ dus } \frac{\lambda}{\mu} = -\frac{\gamma}{\alpha}, \text{ dus } \mu \neq 0, \text{ verder willekeurig.}$$

$\xi = \beta\lambda$. $\eta = \delta\mu$.

Uit $\mu \neq 0$ volgt, dat (u_i) de coördinaten van een punt zijn en daaruit, dat ξ of $\eta \neq 0$ (blz. 18).

XIII blijft ongewijzigd. Immers zijn de punten $A(x_i)$, $B(y_i)$, $C(z_i)$ in driehoeksligging gegeven, dan verschilt hun coördinatenmatrix van nul, dus men kan $p_1 \ldots p_4$ zoo bepalen, dat

$$\begin{vmatrix} x_1 & \ldots & x_4 \\ y_1 & \ldots & y_4 \\ z_1 & \ldots & z_4 \\ p_1 & \ldots & p_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

XV moet, om analoge redenen als de definitie van het vlak, gewijzigd worden in:

Er bestaan vier punten A, B, C, D met de eigenschap, dat door ieder punt der ruimte een lijn gaat, die met ABC en BCD twee plaatselijk verschillende punten gemeen heeft.

Bewijs. Wij kunnen de punten $A(x_i)$, $B(y_i)$, $C(z_i)$, $D(u_i)$ willekeurig, mits in tetraëderligging, kiezen. Is $P(p_i)$ een punt, dan hebben de vergelijkingen $p_i = \lambda_1 x_i + \ldots + \lambda_4 u_i$

$(i = 1, \ldots 4)$ de oplossing (op gebruikelijke wijze af te leiden):
$\lambda_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$, waarin Δ de coördinatendeterminant van A, B, C, D is en Δ_k uit Δ ontstaat, door de k^e kolom door $p_1 \ldots p_4$ te vervangen.

Daar één der getallen p_i van nul verschilt, verschilt één der getallen λ_i van nul, dus óf een der getallen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, is $\neq 0$, óf een der getallen $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ is $\neq 0$. Wij onderstellen het eerste; dan kan men μ willekeurig $\neq 0$ kiezen en

$$\lambda_1 = \mu\alpha_1,\ \lambda_2 = \mu\alpha_2,\ \lambda_3 = \mu\alpha_3 \text{ stellen, zoodat}$$
$$p_i = \mu(\alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i + \alpha_3 z_i) + \lambda_4 u_i$$
$$(\alpha_1,\ \alpha_2 \text{ of } a_3 \neq 0,\ \mu \neq 0.)$$

P ligt dus op de lijn, die met ABC het punt Q $(\alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i + \alpha_3 z_i)$ en met BCD het punt D gemeen heeft.

HOOFDSTUK II.

Relaties van dragen en afwijken.

§ 6. *De axioma's.*

In overeenstemming met de resultaten uit de vorige paragraaf stellen wij de volgende axioma's en definities op.

I. *De ruimte is een wiskundige soort.*

Bepaling. De elementen der ruimte heeten *punten.*

II. $A \omega B$ (*A wijkt af van B*) en $A \sigma B$ *(A valt samen met B) zijn relaties tusschen de punten A en B met de volgende eigenschappen:*

a. Beide zijn omkeerbaar.

b. Zij sluiten elkander uit, d.w.z. als $A \sigma B$ *geldt, is* $A \omega B$ *ongerijmd; als* $A \omega B$ *geldt, is* $A \sigma B$ *ongerijmd.*

c. Als $A \omega B$ *ongerijmd is, geldt* $A \sigma B$.

d. Uit $A \omega B$ *volgt voor ieder punt C ten minste één der relaties* $A \omega C$ *of* $B \omega C$. [1]

Door dit axioma zijn de relaties van afwijken (overeenkomende met „plaatselijk verschillen" in de analytische meetkunde) en samenvallen axiomatisch ingevoerd. Wij leiden er dadelijk uit af de

Stelling. De relatie σ is transitief, d.w.z. uit $A \sigma B$ en $B \sigma C$ volgt $A \sigma C$.

Bewijs. Volgens II*d* zou uit $A \omega C$ volgen òf $A \omega B$, òf $C \omega B$; volgens II*b* zijn deze relaties beide ongerijmd, dus volgens II*c* geldt $A \sigma C$.

Stelling. Uit $A \omega B$ en $B \sigma C$ volgt $A \omega C$.

Bewijs. Volgens II*d* volgt uit $A \omega B$ òf $B \omega C$, òf $A \omega C$; daar het eerste ongerijmd is, geldt het tweede.

---

[1] Wij drukken dit voortaan kort uit, door te zeggen: òf $A \omega C$, òf $B \omega C$.

III. *Er kunnen ten minste twee van elkander afwijkende punten bepaald worden.* [1])

IV. [2]) *(Axioma van de lijn). Lijnen zijn puntsoorten met de volgende eigenschappen:*

a. Behoort punt P tot lijn l, dan behoort ieder met P samenvallend punt tot l.

b. Twee van elkander afwijkende punten bepalen een lijn, die beide bevat [3]) *(hun „verbindingslijn”).*

c. Elke lijn bevat ten minste drie van elkander afwijkende punten.

Bepaling. Een punt *wijkt af van* een puntsoort (*ligt buiten* die puntsoort), als het van ieder punt van die puntsoort afwijkt. [4])

V. *Buiten elke lijn kan nog een punt bepaald worden.*

VI. *Ligt van drie van elkander afwijkende punten A, B en C het punt A buiten BC, dan ligt B buiten AC.*

Bepaling. Drie punten *verkeeren in driehoeksligging*, wanneer zij van elkander afwijken en één er van buiten de verbindingslijn der beide andere ligt.

Volgens VI ligt dan ieder buiten de verbindingslijn der andere.

Bepaling. Zijn *A, B, C* drie punten in driehoeksligging dan is *vlak ABC* (kort aangeduid als *ABC*) de soort der punten *P* met de eigenschap, dat een punt *Q* van *AB* en een van *Q* afwijkend punt *R* van *AC* gevonden kunnen worden, zoodat *P, Q* en *R* collineair zijn. (verg. blz. 24).

VII. *Zijn A, B, C drie punten in driehoeksligging en heeft lijn l met AB en AC twee van elkander afwijkende*

1) Dit axioma zegt minder dan axioma II en III van Pieri.

2) Wij volgen hier niet Pieri's splitsing in axioma's van minder omvang, daar deze met ons onderwerp weinig heeft uit te staan.

3) Uitvoeriger: Men kan een lijn *l* bepalen, die beide punten bevat en iedere lijn, die beide bevat, is identiek met *l*.

4) Brouwer (Versl. K. Ak. v. Wet. 32, blz. 879) noemt deze relatie „verwijdering”.

punten gemeen, waarvan het eerste van B afwijkt, dan heeft l met BC een punt gemeen.

VIII. *Buiten elk vlak kan nog een punt bepaald worden.*

IX. *Ligt van vier van elkander afwijkende punten A, B, C, D, het punt A buiten BC en D buiten ABC, dan ligt A buiten DBC.*

Opmerking. Opdat *DBC* bepaald is, is noodig, dat *D* buiten *BC* ligt. Dit volgt uit het feit, dat *BC* geheel tot *ABC* behoort, wat onmiddellijk uit de bepaling van het vlak volgt.

Bepaling. Vier punten *A, B, C, D verkeeren in tetraëderligging,* als zij van elkander afwijken, *A* buiten *BC* en *D* buiten *ABC* ligt.

X. *Er bestaan vier punten A, B, C, D in tetraëderligging met de eigenschap, dat door ieder punt een lijn gebracht kan worden, die met ABC en BCD twee van elkander afwijkende punten gemeen heeft.*

Dat axioma II in de numerale projectieve meetkunde geldt, is reeds in § 2 bewezen; voor de overige axioma's, behalve VI en IX, vindt men dit bewijs in § 5. VI en IX volgen uit de symmetrie der voorwaarden, die in § 5 voor de driehoeks-, resp. tetraederligging van drie, resp. vier punten werden afgeleid.

§ 7. *Eigenschappen van het vlak.*

Eerst toonen wij drie voorbereidende stellingen aan.

1. *Stelling.* Wanneer op een lijn *l* twee punten *P* en *Q* gegeven zijn, [1]) kan op *l* een punt bepaald worden, dat van *P* en *Q* afwijkt.

Bewijs. Volgens IV*c* kunnen wij op *l* drie van elkander afwijkende punten bepalen. Volgens II*d* wijkt *P* af van ten

[1]) Tenzij het uitdrukkelijk vermeld is, wordt niet ondersteld, dat de in de gegevens van een stelling voorkomende elementen van elkander afwijken.

minste twee daarvan; evenzoo Q, dus tenminste één der drie punten wijkt van P en Q af.

2. *Stelling.* Gaan door eenzelfde punt S twee lijnen SA en SB, terwijl A buiten SB ligt, dan ligt ieder punt van één der lijnen, dat van S afwijkt, buiten de andere.

Dit volgt onmiddellijk uit VI.

3. *Lemma.* Axioma VII kan als volgt uitgebreid worden: Zijn drie punten A, B, C zoodanig gelegen, dat A en B tot een lijn a behooren en C buiten a ligt, dan heeft iedere lijn, die met a en AC twee van elkander afwijkende punten gemeen heeft, waarvan het eerste van B afwijkt, ook met BC een punt gemeen.

Bewijs. Zij X het gemeenschappelijke punt van l en a. Wij kiezen op a het punt P, dat van X en A afwijkt, (n^0 1), dan is òf $B \omega A$, òf $B \omega P$. In het eerste geval hebben wij

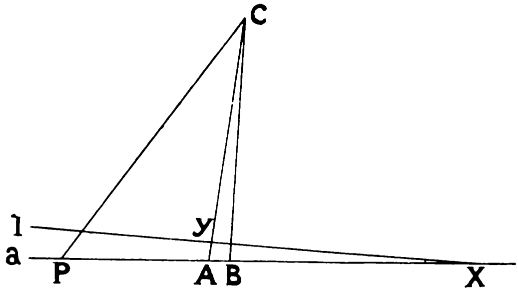

Fig. 1.

VII terug; in het tweede geval is $PA \equiv PB \equiv a$, dus C, P, A liggen in driehoeksligging, evenals C, P, B. l heeft met AP en AC twee van elkander afwijkende punten gemeen, waarvan X van P afwijkt, dus volgens VII, toegepast op CAP, heeft l met PC een punt gemeen. Dan heeft l met PB en PC twee van elkander afwijkende punten gemeen, want volgens n^0 2 ligt X buiten PC, en $X \omega B$, dus volgens VII, toegepast op PBC, heeft l met BC een punt gemeen.

De volgende stellingen voeren tot het bepalen van een vlak door drie willekeurige punten in driehoeksligging (n^0 8).

4. *Stelling.* Zijn A, B, C drie punten in driehoeksligging en is A' een punt van AB, dat van B afwijkt, dan is $A'BC$ identiek met ABC.

Bewijs. Wij nemen eerst aan $A' \omega A$. Aangetoond moet worden, dat ieder punt P van ABC ook tot $A'BC$ behoort. Volgens de bepaling van ABC gaat door P een lijn l, die met AB een punt X en met AC een punt Y gemeen heeft, terwijl $X \omega Y$. Men heeft steeds één van de volgende drie gevallen:

a. $X \omega A'$. *b.* $X \omega A$ en $P \omega Y$. *c.* $X \omega A$ en $P \omega X$.

Geval a. Volgens n^0 2 liggen A, A', C in driehoeksligging; l heeft met AC en AA' de punten Y en X gemeen en $X \omega A'$, dus l heeft volgens VII met $A'C$ een punt Z gemeen; daar volgens n^0 2, X buiten $A'C$ ligt, is $X \omega Z$ en P ligt in $A'BC$.

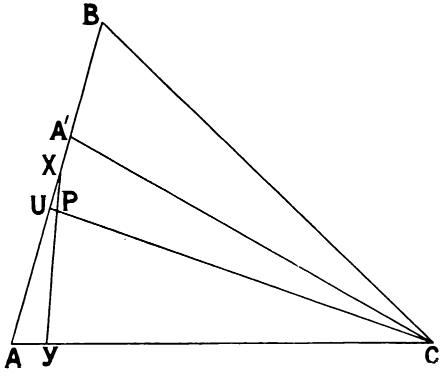

Fig. 2*a*.

Geval b. Nu ligt volgens n^0 2 eerst X en dan ook P buiten AC. CP heeft met CA het punt C en met XY het punt P gemeen; daar $C \omega A$ kan men n^0 3 toepassen, dus CP heeft met XA een punt U gemeen. $C \omega U$ en $C \omega A'$, dus CU karakteriseert P als punt van $A'BC$.

Geval c. Wij kiezen op AC een punt Y', dat van A en Y afwijkt; volgens n^0 2 ligt Y' buiten XY en X buiten $Y'P$. $Y'P$ heeft met AC het punt Y' en met XY het punt P gemeen; $Y' \omega P$ en $Y' \omega A$, dus volgens n^0 3 heeft $Y'P$ met AX een punt X' gemeen. $X \omega X'$, dus $A' \omega X$ of $A' \omega X'$, d. w. z. òf XY, of

$X'Y'$ verkeert in geval a, waarin de stelling reeds bewezen is.

Op dezelfde wijze kan aangetoond worden, dat ieder punt van $A'BC$ tot ABC behoort.

Is niet bekend, of A' van A afwijkt, dan kieze men op AB het punt D, dat van A en B afwijkt. $A' \omega A$ of $A' \omega D$; in het laatste geval is ABC $DBC = A'BC$.

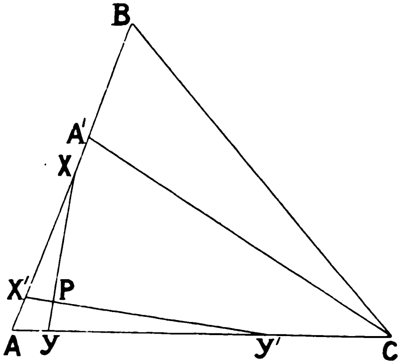

Fig. 2*b*.

5. *Stelling.* Zijn A, B, C als in n^0 4, dan is ABC identiek met BAC.

Bewijs. Wij kiezen op AB een punt A', dat van A en B afwijkt; dan is ABC $A'BC$ (n^0 4) $=$ $A'AC$ (volgens definitie) BAC (n^0 4).

6 *Lemma.* Zijn A, B, C als in n^0 4, dan ligt ieder punt van ABC, dat van A afwijkt, óf buiten AB, óf buiten AC.

Bewijs. Beteekenen P, X, Y hetzelfde als in 't bewijs van n^0 4, dan mogen wij aannemen $Y \omega A$. Uit $P \omega A$ volgt óf $P \omega X$ óf $A \omega X$ en uit $X \omega Y$ volgt óf $P \omega X$, óf $P \omega Y$. Als $P \omega X$ ligt (n^0 2) P buiten AB, en als tegelijk $A \omega X$ en $P \omega Y$ ligt P buiten AC (n^0 2).

7. *Stelling.* Zijn A, B, C als in n^0 4 en ligt D in ABC buiten AB, dan is $ABC = ABD$.

Bewijs. Door D gaat lijn XY, waarvan X op AB en Y op AC ligt; $X \omega Y$, dus Y ligt buiten AB (n^0 2). Daar B verplaatst kan worden (n^0 4), mogen wij aannemen $X \omega B$. Dan is ABC $ABY = XBY$ (n^0 4) YXB (n^0 5) DXB (n^0 4) $=$ XDB (n^0 5) $=$ ADB (n^0 4) $=$ ABD (n^0 5).

8. *Stelling.* Zijn A, B, C als in n^0 4 en D, E, F drie punten in driehoeksligging in ABC, dan is $ABC = DEF$.

Bewijs. Volgens n^0 6 ligt D buiten ten minste twee der lijnen AB, AC, BC, bijv. buiten AB; dan is $ABC \equiv ABD$ (n⁰ 7). E ligt buiten AD of BD (n⁰ 6), bijv. buiten AD, dan is $ABD \equiv ABE$. F ligt buiten DE, dus $DEA \equiv DEF$.

Drie punten in driehoeksligging bepalen dus een vlak, dat ze alle bevat.

9. *Stelling.* Een lijn, die van een vlak twee van elkander afwijkende punten bevat, behoort geheel tot dat vlak.

Bewijs. Zijn A, B, C als in n⁰ 4 en bevat lijn l de punten D en E van ABC, terwijl $D \circ E$, dan mogen wij aannemen $D \circ A$, en D buiten AB (n⁰ 6), dus $ABC \equiv ABD$. E ligt buiten DA of buiten DB, bijv. buiten DA; dan is $ABD \equiv ADE$. Dat ADE ieder punt van DE bevat, volgt uit de definitie van vlak.

Gevolg. Een lijn en een punt buiten die lijn bepalen een vlak, dat beide bevat.

Bewijs: uit IVc, n⁰ 8, n⁰ 9.

10. *Stelling.* Behoort P tot ABC, dan behoort ieder met P samenvallend punt tot ABC.

Dit volgt uit de definitie van vlak.

11. *Stelling.* Twee lijnen in eenzelfde vlak, waarvan de eene een buiten de andere gelegen punt bevat, bepalen één punt, dat tot beide behoort [1]). (hun „snijpunt”).

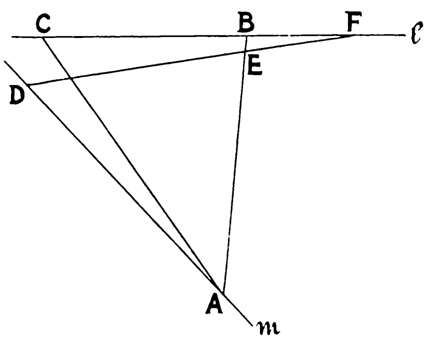

Fig. 3.

Bewijs. Zijn l en m de gegeven lijnen, die in vlak α liggen, en ligt op m het punt A buiten l, dan kiezen wij twee van elkander afwijkende punten B en C op l en het punt D, dat van A afwijkt, op m.

[1]) D.w.z.: Zij hebben een punt S gemeen en ieder gemeenschappelijk punt valt met S samen.

$ABC \equiv \alpha$, dus D behoort tot ABC, en $D \omega A$, dus D ligt buiten AB of buiten AC (n^0 6); wij nemen het eerste aan. Volgens de definitie van vlak gaat door D een lijn, die met AB het punt E en met BC het punt F gemeen heeft; $E \omega F$, dus F ligt buiten AB (n^0 2). l heeft nu met AB het punt B en met DE het punt F gemeen; $B \omega F$ en $B \omega A$, dus l heeft met DA een punt S gemeen (n^0 3).

Een gemeenschappelijk punt T van l en m kan niet van S afwijken, omdat l en m dan identiek zouden zijn, dus T valt met S samen.

12. *Lemma.* Zijn A, B, C drie punten in driehoeksligging, dan kan men in ABC een buiten AB en AC gelegen punt bepalen.

Bewijs. Een punt van BC, dat van B en C afwijkt, voldoet.

13. *Lemma.* Zijn A, B, C punten in driehoeksligging en is l een lijn van ABC, dan ligt ten minste één der punten A, B, C buiten l.

Bewijs. Op l ligt een punt D, dat van A afwijkt; volgens n^0. 6 ligt D óf buiten AB, óf buiten AC, stel buiten AB. Dan wijkt het snijpunt van l met AB óf van A, óf van B af, waaruit volgt, dat óf A, óf B buiten l ligt (n^0 2).

14. *Bepaling.* De puntsoort α *wijkt* van de puntsoort β *af*, als α een punt bevat, dat van β afwijkt. Uit VI volgt, dat de relatie van afwijken tusschen twee lijnen door eenzelfde punt omkeerbaar is. Twee puntsoorten *vallen samen*, als elk punt van de eerste met een punt van de tweede samenvalt en omgekeerd. Volgens IV*a* en n^0 10 zijn twee samenvallende lijnen of vlakken identiek.

15. Uit IX en n^0 5 volgt, dat vier punten, die in tetraëderligging verkeeren, ook in elke andere volgorde in tetraëderligging verkeeren. Tevens volgt hieruit de

Stelling. Liggen A, B, C, D in tetraëderligging, dan ligt elk punt E van AB, dat van B afwijkt, buiten BCD.

Immers D ligt buiten ABC en $ABC = EBC$, dus D ligt buiten EBC, dus E buiten DBC.

Een andere formuleering van deze stelling is:

Bevat lijn l het punt P, dat in vlak α ligt en het punt Q, dat buiten α ligt, dan ligt ieder punt van l, dat van P afwijkt, buiten α, en ieder punt van α, dat van P afwijkt, buiten l.

Immers bepaalt men in α een punt R, dat van P afwijkt, en S buiten PR (n^0 13), dan liggen Q, P, R, S in tetraëderligging.

§ 8. *Eigenschappen van de ruimte.*

Wij laten voorloopig axioma X, dat het aantal dimensies der ruimte tot drie beperkt, buiten beschouwing.

1. *Bepaling.* Zijn A, B, C, D vier punten in tetraëderligging, dan is $R_3(ABCD)$ de soort der punten, die liggen op een lijn, welke met ABC en BCD twee van elkander afwijkende punten gemeen heeft.

De volgende stellingen voeren tot het bepalen van een R_3 door vier punten in tetraëderligging (n^0 7).

2. *Lemma.* Zijn A, B, C, D als in n^0 1, dan gaat door ieder punt van $R_3(ABCD)$ een lijn, die met ABC en BCD twee van elkander afwijkende punten X' en Y' gemeen heeft, waarvan Y' ligt buiten BC en buiten een in BCD getrokken lijn BC', die van BC afwijkt.

Bewijs. Laten X en Y de punten zijn, welke de lijn, die P als punt van $R_3(ABCD)$ kenmerkt, met ABC en BCD gemeen heeft. Wij kiezen Y' in BCD buiten BC en BC' zoo, dat $Y \omega Y'$. (Volgens § 7 n^0 12 vinden wij Z buiten BC en BC'; op BZ ligt H, dat van B en Z afwijkt; $Y \omega Z$ of $Y \omega H$, dus men kan òf Z, òf H voor Y' kiezen). YY' snijdt BC in S (§ 7 n^0 11).

Wij onderscheiden nu de gevallen:

a. $X \omega S$. *b.* $Y \omega S$.

Geval a. Y' ligt buiten ABC (IX), dus buiten XS, dus X buiten $Y'S$ of $Y'Y$, dus Y' buiten XY, dus $Y' \omega P$. PY'

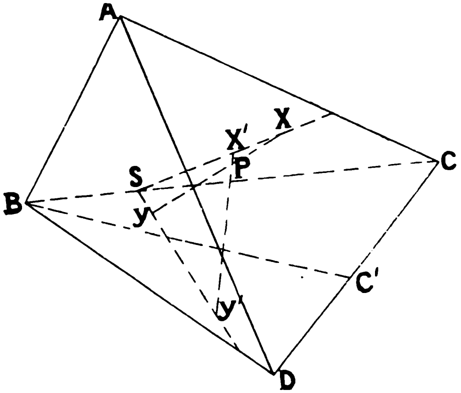

Fig. 4*a*.

en XS liggen in XSY', dus snijden elkaar, waaruit volgt, dat PY' aan de vraag voldoet.

Geval b. Nu ligt Y buiten BC; wij kiezen een van B

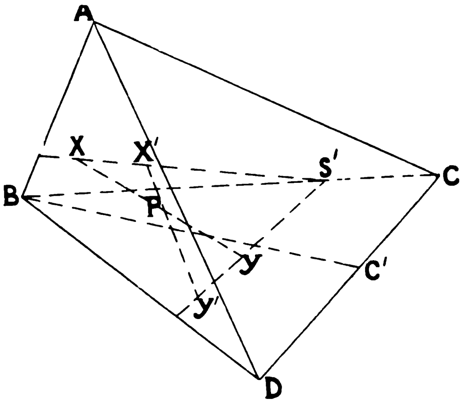

Fig. 4*b*.

en X afwijkend punt S' op BC[1]), en op $S'Y$ een punt Y'', dat van Y en S' afwijkt. $S'Y$ snijdt BC' in M; $M \omega Y$ of

---

[1]) Men kan twee punten op BC vinden, die van elkander en van B afwijken X wijkt van tenminste één daarvan af.

$M \backsim Y''$, dus òf Y òf Y'' ligt buiten BC'. In het eerste geval voldoet XY aan de vraag; in het tweede geval blijkt evenals in geval *a*, dat PY'' aan de vraag voldoet.

3. *Stelling.* Zijn A, B, C, D als in n⁰ 1, en is C' een punt in BCD buiten BD, dan is $R_3(ABCD) \equiv R_3(ABC'D)$.

Bewijs. Wij onderstellen eerst, dat C' buiten BC ligt.

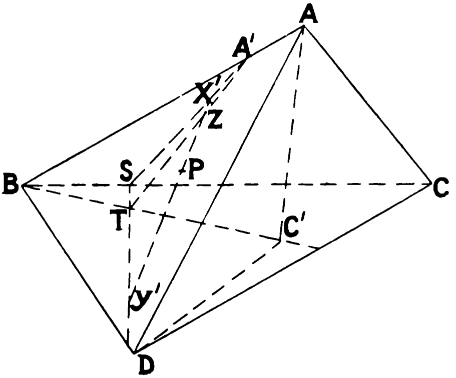

Fig. 5.

Wij trekken door een willekeurig punt van $R_3(ABCD)$ de lijn $X'Y'$, in n^0 2 bedoeld. Verder bepalen wij A' op BA, dat van B en X' afwijkt (zie de noot bij n^0 2). $A'X'$ snijdt BC in S. $Y'S$ snijdt BC' in T. PY' ligt in $A'Y'T$ en Y' ligt buiten $A'T$ (want buiten ABC'), dus PY' snijdt $A'T$ en karakteriseert P als punt van R_3 $(ABC'D)$.

Evenzoo bewijst men, dat ieder punt van $R_3(ABC'D)$ in $R_3(ABCD)$ ligt.

Laten wij de onderstelling, dat C' buiten BC ligt, vallen, dan kunnen wij de stelling aantoonen, door C'' buiten BC, BC' en BD in BCD te kiezen (C'' kan een van C en D afwijkend punt op CD zijn; dan is, als E het snijpunt van BC' en CD is, óf $E \backsim C$, dus C' buiten BC, óf $E \backsim C''$, dus C'' buiten BC'). $R_3(ABCD) \equiv R_3(ABC''D) \equiv R_3(ABC'D)$.

4. *Stelling.* $R_3(ABCD) \equiv R_3(ABDC)$.

Bewijs. Bepaalt men C' in BCD buiten BC en BD (§ 7 n^0 12), dan is $R_3(ABCD) \equiv R_3(ABC'D) \equiv R_3(ABC'C) \equiv R_3(ABDC)$.

Hieruit volgt gemakkelijk, dat alle permutaties der vier letters geoorloofd zijn.

5. *Stelling.* Ieder punt E van $R_3(ABCD)$ ligt buiten ten minste één der vlakken ABC en analoge.

Bewijs. Wij bepalen volgens n^0 2 door E een lijn, die met ABC en BCD de van elkander afwijkende punten X en Y gemeen heeft, waarvan Y buiten BC ligt. $E \omega X$ of $E \omega Y$; in het eerste geval ligt E buiten ABC (§ 7 n^0 15). In het tweede geval merken wij op, dat òf $X \omega B$, òf $X \omega C$; wij nemen het eerste aan en moeten nu de gevallen onderscheiden:

a. X ligt buiten AB; *b.* X ligt buiten BC.

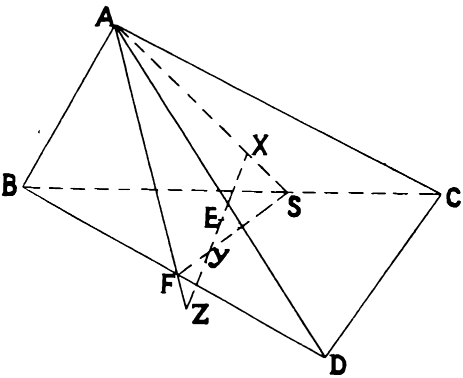

Fig. 6.

Geval a. X ligt buiten ABD. XA snijdt BC in S; $S \omega A$, dus S ligt buiten AB, dus $S \omega B$, dus S ligt buiten BD. (§ 7 n^0 2). SY snijdt BD in F (buiten BC) en AF snijdt XY in Z (§ 7 n^0 11). $Z \omega X$, dus $E \omega X$ of $E \omega Z$. Daar X buiten ABD en Z buiten ABC ligt (§ 7 n^0 15), volgt uit $E \omega X$, dat E buiten ABC, en uit $E \omega Z$, dat E buiten ABD ligt.

Geval b. Hier volgt uit $E \omega Y$ direct, dat E buiten BCD ligt.

Stelling. Ieder punt van R_3 $(ABCD)$, dat van B afwijkt, ligt buiten ten minste één der vlakken BAC, BAD en BCD.

Bewijs. Met de notaties van het vorige bewijs is $E \omega X$ of $B \omega X$; in beide gevallen is het gestelde zooeven aangetoond.

Stelling. Ieder punt van R_3 $(ABCD)$, dat buiten BC ligt, ligt buiten ABC of BCD.

Bewijs. Met dezelfde notaties heeft men $E \omega X$ of $E \omega Y$.

Uit $E \omega X$ volgt, dat E buiten ABC ligt (§ 7 n⁰ 15).

Als $E \omega Y$, kiezen wij X' in ABC buiten BC, zoodat $X' \omega X$ (bijv. door op AB twee van elkander en van B afwijkende punten te bepalen; een daarvan wijkt van X af). $E \omega X$ (dit is reeds behandeld) of $E \omega X'$; in het laatste geval snijden XX' en BC elkander in S' en $X'E$ snijdt YS' in Y'. Daar E buiten BC ligt, wijkt E van S' af, dus $E \omega Y'$ of $S' \omega Y'$. In 't eerste geval ligt E buiten BCD (§ 7 n⁰ 15)

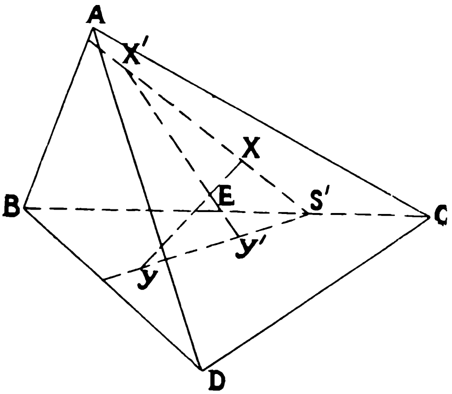

Fig. 7.

en in 't tweede geval ligt Y' buiten BC, dus uit $E \omega X'$ volgt, dat E buiten ABC ligt.

6. *Stelling.* Zijn A, B, C, D als in n⁰ 1 en is E een punt van $R_3(ABCD)$, dat buiten BCD ligt, dan is $R_3(EBCD) = R_3(ABCD)$.

Bewijs. Brengen we door E dezelfde lijn als in het eerste bewijs van n⁰ 5, dan ligt X buiten BCD, dus $R_3(ABCD) = R_3(XBCY)$ (volgens definitie) $= R_3(EBCY)$ (n⁰ 3, 4) $= R_3(EBCD)$.

7. *Stelling.* Zijn A, B, C, D als in n⁰ 1 en E, F, G, H vier punten in tetraëderligging van $R_3(ABCD)$, dan is $R_3(EFGH) = R_3(ABCD)$.

Bewijs. Volgens n⁰ 5 ligt E buiten één der vlakken ABC enz., bijv. BCD, dus $R_3(ABCD) = R_3(EBCD)$ (n⁰ 6). F wijkt van E af, dus ligt buiten een der vlakken EBC, EBD, ECD, bijv. ECD, dus $R_3(EBCD) = R_3(BECD)$ (n⁰ 4) $= R_3(FECD)$. G ligt buiten EF, dus buiten EFC of EFD, bijv. EFD, dus $R_3(FECD) = R_3(CEFD) = R_3(GEFD)$. H ligt buiten GEF, dus $R_3(GEFD) = R_3(DGEF) = R_3(HGEF) = R_3(EFGH)$.

Anders uitgedrukt: vier punten in tetraëderligging bepalen één R_3, die ze alle bevat.

8. *Stelling.* Zijn A, B, C, D als in n⁰ 1 en heeft vlak α drie punten in driehoeksligging met $R_3(ABCD)$ gemeen, dan behoort α geheel tot die R_3.

Bewijs. Zijn E, F, G de drie bedoelde punten en ligt E b.v. buiten ABC (n^0 5), dan ligt, wegens $F \omega E$, F buiten één der vlakken EAB, EAC, EBC, bijv. buiten EAB. G ligt buiten EF, dus buiten EFA of EFB, bijv. buiten EFA. Dan is $R_3(ABCD)$ $R_3(AEFG)$ (n^0 7). Dat EFG tot $R_3(AEFG)$ behoort, volgt uit de bepalingen. Immers een lijn, die met EF en EG twee van elkander afwijkende punten gemeen heeft, heeft die ook met AEF en EFG gemeen.

9. *Stelling.* Een vlak en een van dat vlak afwijkende lijn bepalen, als zij in eenzelfde R_3 liggen, één punt, dat tot beide behoort.

Bewijs. Is op lijn l punt A buiten vlak α gegeven, dan kiezen wij B, C, D in driehoeksligging in α en denken de R_3 bepaald door A, B, C, D. Verder kiezen wij op l het punt E, dat van A afwijkt, en brengen de lijn XY door E als in n^0 5. $X \omega B$ of $X \omega C$. Is $X \omega B$, dan ligt X buiten BA of buiten BC; wij onderscheiden de gevallen:

a. $X \omega A$. *b.* X ligt buiten BC.

Ditzelfde alternatief volgt uit $X \omega C$, dus men heeft steeds geval *a* of geval *b*.

Geval a. AX snijdt BC in P en AE snijdt PY in Q, dus l snijdt α in Q.

Geval b. $A \omega X$ (dan heeft men geval *a*) of $E \omega X$; in 't laatste geval ligt E buiten ABC. Nu kiezen wij X', dat van A en X afwijkt, buiten BC in ABC (men kan op AB een punt bepalen, dat van A en B afwijkt en op AC een punt, dat van A en C afwijkt; een van deze wijkt van X af). XX' snijdt BC in S. $X'E$ snijdt SY in Y'. Daar E buiten ABC ligt en $Y' \omega X'$, ligt volgens § 7 n^0 15 Y' buiten ABC.

Wij kunnen dus $X'Y'$ i.p.v XY gebruiken; $X'Y'$ verkeert in het reeds behandelde geval *a*.

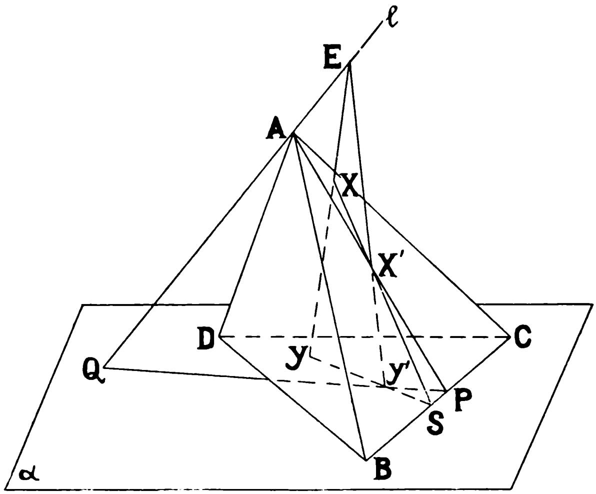

Fig. 8.

Een gemeenschappelijk punt van l en α kan niet van Q afwijken, want dan zou l in α liggen (§ 7 n^0 9); het valt dus met Q samen.

Volgens § 7 n^0 15 ligt ieder punt van l, dat van Q afwijkt, buiten α.

10. *Stelling*. Twee vlakken, waarvan het eerste van het tweede afwijkt, bepalen, als zij in eenzelfde R_3 liggen, één lijn, die tot beide behoort (hun „snijlijn").

Bewijs. Laat α en β de gegeven vlakken zijn; in α ligt P buiten β. In α kiezen wij de punten A, B, C in driehoeksligging, waarbij wij mogen aannemen $P)(B$. PA snijdt BC in Q (§ 7 n^0 11); Q wijkt óf van B, óf van C af, bijv. van B. Dan ligt B buiten PA, dus PB wijkt van PA af. Volgens n^0 9 wordt β door PA en PB gesneden in twee punten R en S, die beide van P, dus ook van elkander afwijken (§ 7 n^0 2). De lijn RS behoort volgens § 7 n^0 9 tot α en β.

Is M een punt van β buiten RS, dan liggen P, R, S, M

in tetraëderligging, dus M buiten α. De relatie van afwijken tusschen twee vlakken in eenzelfde R_3 is dus omkeerbaar.

Een punt X van β, dat tegelijk in α ligt, kan volgens de vorige alinea niet buiten RS liggen. Het ligt dus op RS; immers een lijn door X en een willekeurig van X afwijkend punt buiten RS (bijv. een punt van MR, dat van X en R afwijkt), snijdt RS in Y; X kan niet van Y afwijken, want dan zou X buiten RS liggen, dus X valt met Y samen. (In § 9 n^0 8 wordt het laatste meer in 't algemeen bewezen).

11. *Stelling.* Liggen in een R_3 drie van elkander afwijkende vlakken zoodanig, dat twee van hun snijlijnen van elkander afwijken, dan wijkt elke snijlijn van het overstaande vlak af en de vlakken bepalen één punt, dat tot alle behoort.

Bewijs. Gegeven zijn de vlakken α, β, γ; de snijlijn van β en γ is l, die van α en γ is m, die van α en β is n; l wijkt van m af. Het snijpunt S van l en m ligt in al de vlakken, dus op n. Ieder punt van l, dat van S afwijkt, ligt buiten m, dus buiten α (n^0 10), dus buiten n. Bijgevolg wijkt l van α en van n af. Evenzoo blijkt, dat m van β en van n afwijkt. Ieder punt van n, dat van S afwijkt, ligt buiten l, dus buiten γ (n^0 10), dus n wijkt van γ af.

Een gemeenschappelijk punt van α, β en γ behoort tot n en tot γ, dus valt met S samen (n^0 10).

12. Axioma X zegt, dat de ruimte een R_3 is. Bijgevolg gelden de stellingen uit n^0 2, 5, 9, 10 en 11 voor willekeurige punten, lijnen en vlakken. Verder gaat n^0 7 over in het volgende:

Stelling. Zijn E, F, G, H vier punten in tetraëderligging, dan gaat door ieder punt een lijn, die met EFG en FGH twee van elkander afwijkende punten gemeen heeft. Volgens n^0 2 kan men nog zorgen, dat het gemeenschappelijke punt met FGH buiten FG ligt.

13. *Opmerking.* Wij zeggen alleen, dat twee lijnen elkaar snijden en spreken alleen dan van een snijpunt, wanneer zij een punt gemeen hebben *en van elkander afwijken*. Een

analoge opmerking geldt voor snijding van een lijn en een vlak of van twee vlakken en voor de verbindingslijn van twee punten.

§ 9. *Stellingen, noodig voor het bewijs van de stellingen van* DESARGUES.

1. *Stelling.* Buiten elk vlak kan men twee van elkander afwijkende punten bepalen.

Bewijs. Wij kiezen in vlak α het punt Q en buiten α het punt P (VIII). Op PQ ligt een punt R, dat van P en Q afwijkt (§ 7 n⁰ 1), dus buiten α ligt (§ 7 n⁰ 15).

Gevolg. Is een punt A buiten α gegeven, dan wijkt óf P, óf Q van A af. Men kan dus steeds een van A afwijkend, buiten α liggend punt vinden.

2. *Stelling.* Buiten elke twee vlakken kan nog een punt bepaald worden.

Bewijs. Zijn α en β de gegeven vlakken, dan kiezen wij twee van elkander afwijkende punten A en B buiten α en een punt C buiten β. C wijkt van A of van B af, bijv. van A. AC snijdt α in P, β in Q (§ 8 n⁰ 9), en bevat een punt D, dat van P en Q afwijkt. D ligt buiten α en β (§ 7 n⁰ 15).

3. *Stelling.* Zijn drie vlakken α, β, γ zoodanig gelegen, dat een tot α en β behoorende lijn [1]) l en een van l afwijkende, tot α en γ behoorende lijn m bestaan, dan kan een buiten die vlakken gelegen punt bepaald worden.

Bewijs. Wij kiezen A buiten α en β (n⁰ 2) en een van A afwijkend punt B buiten γ (n⁰ 1). AB snijdt α, β en γ in P, Q en R. Kiezen wij verder drie van elkander afwijkende punten op AB, dan volgt uit axioma II, dat óf één van deze punten van P, Q en R afwijkt, óf P, Q en R van elkander afwijken. In het eerste geval ligt het bedoelde punt buiten α, β en γ. In het tweede geval ligt P buiten β en

[1]) l is niet de snijlijn van α en β, omdat α niet van β behoeft af te wijken.

γ, Q buiten α en γ, R buiten α en β, dus de vlakken liggen als ondersteld in § 8 n^0 11. Zij n de snijlijn van β en γ en S het snijpunt der drie vlakken; wij kiezen N op n buiten α en D in α buiten l en m (§ 7 n^0 12), dus buiten β en γ (§ 7 n^0 15). Op ND ligt een punt, dat van N en D afwijkt, dus buiten α, β en γ ligt (§ 7 n^0 15).

Opmerking. Uit de axioma's volgt niet, dat buiten elke drie vlakken een punt bepaald kan worden. Dit blijkt uit het door FANO gegeven voorbeeld van een meetkunde, waarin alle punten tot drie, door één lijn gaande, vlakken behooren (zie WHITEHEAD, l.c. blz. 14).

4. *Stelling.* Wanneer twee vlakken van elkander afwijken, wijkt elk vlak van ten minste één van beide af.

Bewijs. Laat α en β de gegeven vlakken zijn en in α punt D buiten β liggen; zij γ een derde vlak. Men kan Q bepalen buiten α en γ (n^0 2); DQ snijdt α, β, γ in D, Y, X. $D \omega Y$, dus $X \omega D$ of $X \omega Y$; in het eerste geval ligt X buiten α, dus γ wijkt van α af, en in het tweede geval ligt X buiten β, dus γ wijkt van β af.

5. *Stelling.* Ligt punt A buiten een vlak α, dan zal ieder punt óf van A afwijken, óf buiten α liggen.

Bewijs. We kiezen P buiten α, dat van A afwijkt (n^0 1). Voor een willekeurig punt B geldt óf $B \omega A$, óf $B \omega P$. In het laatste geval snijdt PB vlak α in Q (§ 8 n^0 9) en men heeft óf $B \omega A$, óf $B \omega Q$; uit het laatste volgt, dat B buiten α ligt (§ 7 n^0 15).

6. *Stelling.* Wanneer twee punten gegeven zijn, kan een vlak gevonden worden, waar beide buiten liggen.

Bewijs. Zijn A en B de gegeven punten, dan kiezen wij een punt P, dat van A afwijkt, verder Q buiten AP en R buiten APQ; dan ligt A buiten PQR (IX).

Volgens n^0 5 ligt óf B buiten PQR (dan voldoet PQR aan de vraag), óf $B \omega A$. In het laatste geval kiezen wij op AB een punt C, dat van A en B afwijkt, verder D buiten

AB en E buiten ABD. A en B liggen buiten CDE (§ 7 n⁰ 15).

7. *Stelling*. Een punt P, dat niet buiten een vlak α kan liggen, ligt in dat vlak.

Bewijs. Wij kiezen twee van elkander afwijkende punten Q en R buiten α (n⁰ 1). $P \omega Q$ of $P \omega R$, bijv. $P \omega Q$. PQ snijdt α in S (§ 8 n⁰ 9). $P \omega S$ is ongerijmd, want dan lag P buiten α (§ 7 n⁰ 15), dus $P \sigma S$ (IIc), dus P ligt in α (§ 7 n⁰ 10).

8. *Stelling*. Een punt P, dat niet buiten lijn l kan liggen, ligt op die lijn.

Bewijs. Wij kiezen punt A buiten l (V); P kan niet buiten vlak Al liggen, dus ligt er in (n⁰ 7). Zij B een punt in dit vlak, dat buiten l ligt en van P afwijkt. (Als Q een willekeurig punt van l is en R een van A en Q afwijkend punt van AQ, heeft men $P \omega A$ of $P \omega R$). BP snijdt l in S (§ 7 n⁰ 11). $P \omega S$ is ongerijmd, want dan lag P buiten l (§ 7 n⁰ 2), dus $P \sigma S$, dus P ligt op l (IVa).

9. *Stelling*. Gaan door een punt S twee van elkander afwijkende lijnen l en m, dan wijkt iedere lijn òf van l, òf van m af.

Bewijs. Een willekeurige lijn n bevat zeker een punt P, dat van S afwijkt. Door P brengen wij een vlak, waar S buiten ligt (n⁰ 6); dit snijdt l en m in Q en R; $Q \omega R$, want $Q \omega S$ en $R \omega S$. Bijgevolg heeft men òf $P \omega Q$, dan wijkt n van l af, òf $P \omega R$, dan wijkt n van m af (§ 7 n⁰ 2).

§ 10. *De eerste stelling van* DESARGUES.

Wij formuleeren deze stelling aldus:

Wanneer van twee driehoeken homologe hoekpunten van elkander afwijken en de verbindingslijnen van homologe hoekpunten wijken van elkander af en gaan door één punt, dan snijden de homologe zijden elkander in punten van eenzelfde lijn.

Wijken de vlakken der driehoeken van elkander af of vallen zij samen, dan kan de stelling ongeveer op de gebruikelijke wijze bewezen worden. Wij moeten evenwel ook het geval behandelen, dat hieromtrent niets bekend is; het bewijs voor dit geval geldt natuurlijk ook voor de beide andere.

Gegeven. $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$. $A \omega A'$. $B \omega B'$. $C \omega C'$. AA', BB', CC' wijken van elkander af en gaan door een punt O.

Te bewijzen. De homologe zijden snijden elkander in punten van eenzelfde lijn.

Bewijs. 1. Uit de onderstelling volgt, dat van elken driehoek twee hoekpunten en van elk paar homologe hoekpunten er één van O afwijkt, dus bijv. A, B, A', C' wijken van O af. Dan ligt B buiten AA' en CC' (§ 7 n⁰ 2), dus A' buiten AB en C' buiten BC, dus $A'B'$ wijkt van AB en $B'C'$ van BC af. A ligt buiten CC', dus C' buiten AC, dus $A'C'$ wijkt van AC af. Elke twee homologe zijden wijken dus van elkander af.

2. Wij kiezen een punt S buiten de vlakken $ABA'B'O$ en analoge (§ 9 n⁰ 3) en op OS een punt S', dat van O en S afwijkt; dan ligt ook S' buiten de genoemde vlakken (§ 7 n⁰ 15). Nu projecteeren wij $\triangle ABC$ uit S en $\triangle A'B'C'$ uit S'. $O \omega A$ of $O \omega A'$; onderstellen wij het eerste, dan wijkt SA van SO af (want S ligt buiten vlak $AA'O$, dus buiten AO), dus S' ligt buiten SA en $S'A'$ snijdt SA in A'' (§ 7 n⁰ 11). De laatste conclusie geldt ook ingeval $O \omega A'$; men kan ze dan net zoo afleiden. Analoog met A'' bepalen wij B'' en C''.

3. Uit $S \omega S'$ volgt óf $A'' \omega S$, óf $A'' \omega S'$; hetzelfde geldt voor B'' en C'', zoodat óf S, óf S' van twee der punten A'', B'', C'' afwijkt. Laten wij een oogenblik aannemen $A'' \omega S$ en $B'' \omega S$. SA wijkt van SB af, (want S ligt buiten ABO, dus buiten AB), zoodat uit de zooeven gemaakte onderstelling volgt, dat A'' buiten SB en SC ligt en B'' buiten SA en SC. De drie punten A'', B'', C'' wijken dus van elkander af. Dit resultaat is onafhankelijk van de tijdelijk gemaakte onderstelling.

4. $A'' \omega A$ of $A'' \omega A'$; daar S en S' beide buiten vlak

$ABA'B'$ liggen, volgt uit beide aannamen, dat A'' buiten dit vlak ligt (§ 7 n^0 15). Bijgevolg snijdt $A''B''$ dit vlak in P, maar $A''B''$ moet zoowel AB als $A'B'$

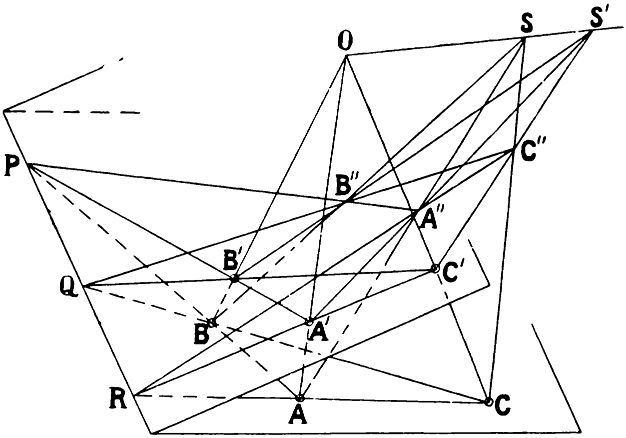

Fig. 9.

snijden; deze gaan dus door P. Evenzoo vinden wij een snijpunt Q van BC met $B'C'$ en een snijpunt R van AC met $A'C'$.

5. $P{\scriptstyle(,)}A$ of $P{\scriptstyle(,)}B$; nemen wij aan $P{\scriptstyle(,)}B$, dan volgt daaruit $P{\scriptstyle(,)}Q$ (§ 7 n^0 2); wij mogen dit zonder beperking aannemen. Lag nu R buiten PQ, dan viel vlak PQR samen met ABC en $A'B'C'$, evenals met de vlakken $AB\ A'B'$ enz. De redeneering uit alinea 3 kan nu zoo worden aangevuld: S ligt buiten ABC, dus A buiten SBC, zoodat uit $A''{\scriptstyle(,)}S$ volgt, dat A'' buiten SBC ligt (§ 7 n^0 15), dus ook buiten $B''C''$. A'', B'' en C'' liggen dus in driehoeksligging; deze conclusie is onafhankelijk van de tijdelijke aanname $A''{\scriptstyle(,)}S$. Vlak $A''B''C''$ snijdt ABC volgens PQ (A'' ligt buiten dat vlak, zie alinea 4; § 8 n^0 10); R ligt in beide vlakken, dus op PQ, wat tegen de onderstelling is.

6. Het is dus ongerijmd, dat R buiten PQ ligt; R ligt dus op PQ (§ 9 n^0 8). Hiermee is het bewijs voltooid.

Opmerking. Zooals bekend is, gaat de stelling ook door, als van de verbindingslijnen van homologe hoekpunten er eenige samenvallen; zij is dan triviaal. Het gelukt echter niet, haar te bewijzen voor alle gevallen, waarin twijfel bestaat omtrent het al of niet samenvallen van hoekpunten of verbindingslijnen van hoekpunten; wij zullen dit door een voorbeeld duidelijk maken. Daartoe kiezen wij in een Cartesische ruimte op elk der coördinatenassen twee punten, die plaatselijk van den oorsprong, maar niet noodzakelijk van elkander verschillen. Deze vormen twee driehoeken, waarvan de verbindingslijnen van homologe hoekpunten („verbindingslijn" genomen in den zin van „de beide punten bevattende lijn", welke beteekenis iets ruimer is dan de overal elders door ons gebruikte, daar niet zeker is, dat alle verbindingslijnen van twee niet noodzakelijk plaatselijk verschillende punten identiek zijn) de coördinatenassen zijn. Ging nu de stelling van DESARGUES door, dan hadden de vlakken der driehoeken steeds een lijn gemeen, terwijl de analytische meetkunde leert, dat slechts bij twee plaatselijk verschillende vlakken met zekerheid een snijlijn kan worden aangewezen. — Neemt men de punten op één der assen plaatselijk verschillend, dan bestaat de snijlijn der vlakken, maar van één paar homologe zijden is onbekend, of zij van die snijlijn afwijken, zoodat zij met deze en met elkander geen bepaald punt gemeen behoeven te hebben. Neemt men eindelijk op twee assen de punten plaatselijk verschillend, dan gaat de stelling door. Voor ons doel is de stelling in den vorm, waarin wij haar bewezen hebben, voldoende. Het onderzoek naar de ruimste grens van haar geldigheid behoort tot de taak der analytische meetkunde.

§ 11. *De tweede stelling van* DESARGUES.

Wanneer van twee driehoeken elke twee homologe zijden van elkander afwijken en zij elkander in drie van elkander *afwijkende punten van eenzelfde lijn snijden, bestaan de verbindingslijnen der homologe hoekpunten; zij gaan door één punt.*

Bewijs. Als de vlakken der driehoeken van elkander afwijken of samenvallen, gaat ongeveer het gebruikelijke bewijs door; wij geven het voor deze gevallen (alinea 2 en 3), omdat wij daarvan bij het algemeene bewijs gebruik maken (alinea 4 vlg.).

1. Laat ABC en $A'B'C'$ de driehoeken zijn. AB wijkt van $A'B'$ af en snijdt deze zijde in P; evenzoo is Q het snijpunt van AC met $A'C'$ en R van BC met $B'C'$. P, Q en R wijken van elkander af en liggen op lijn l.

$A \omega P$ of $A \omega Q$; nemen wij het eerste aan, dan ligt A buiten $A'B'$ (§ 7 n^0 2), dus $A \omega A'$; dezelfde conclusie volgt uit $A \omega Q$. Evenzoo blijkt $B \omega B'$ en $C \omega C'$.

2. Wij nemen eerst aan, dat vlak ABC en vlak $A'B'C'$ van elkander afwijken. Zij α het vlak door AB en $A'B'$, β dat door AC en $A'C'$, γ dat door BC en $B'C'$. α wijkt van één van de vlakken der driehoeken, bijv. van ABC, af (§ 9 n^0 4); volgens § 8 n^0 10 (voorlaatste alinea) ligt dan C buiten α, dus β en γ wijken van α af; evenzoo blijkt, dat β van γ afwijkt. Ook wijkt CC' van α, dus van AA' en BB' af. Er is dus aan de voorwaarden van § 8 n^0 11 voldaan, zoodat α, β en γ een gemeenschappelijk punt M bepalen, waar ook AA', BB' en CC' door gaan.

3. [1]) Nu beschouwen wij het geval, dat beide driehoeken in hetzelfde vlak π liggen; l ligt dus in π. Wij kiezen punt X buiten π en brengen vlak ρ door l en X. Daarna kiezen wij S' buiten π en ρ (§ 9 n^0 2) en projecteeren $A'B'C'$ uit S' op ρ, waardoor drie punten in driehoeksligging ontstaan, n.l. A'', B'', C''. Immers $S'A'B'C'$ liggen in tetraëderligging;

[1]) Men kan bij deze alinea de figuur van al. 4 gebruiken, mits men daarin geaccentueerde met dubbel geaccentueerde letters verwisselt.

in het bijzonder ligt A' buiten $S'B'C'$; $A'' \infty S'$, dus A'' ligt buiten $S'B'C'$, dus buiten $B''C''$ (§ 7 n^0 15). l wijkt òf van BC, òf van $B'C'$ af (§ 9 n^0 9). In het eerste geval ligt ieder punt van BC, dat van het snijpunt met l afwijkt, buiten ρ, dus buiten $B''C''$; in het tweede geval ligt ieder punt D' van $B'C'$, dat van het snijpunt met l afwijkt, buiten ρ en het snijpunt D'' van $S'D'$ met ρ ligt buiten π (§ 7 n^0 15), dus buiten BC, dus $B''C''$ (die D'' bevat) wijkt van BC af. De laatste conclusie geldt dus steeds. Evenzoo blijkt, dat de andere homologe zijden van $\triangle\ ABC$ en $\triangle\ A''B''C''$ van elkander afwijken. Zij snijden elkander in P, Q en R, dus volgens alinea 2 gaan AA'', BB'' en CC'' door een punt S. — Van $\triangle\ A'B'C'$ ligt een hoekpunt, bijv. A', buiten l (§ 7 n^0 13); dan ligt A'' buiten π, dus $A''A'$ wijkt van $A''A$ af. Nu heeft men $S \infty S'$ of $S \infty A''$; in het laatste geval ligt S buiten $A''A'$ (§ 7 n^0 2), dus geldt weer $S \infty S'$. — SS' snijdt π in O. Vlak $S'BB'$ bevat B'', dus BB'', dus S. BB' snijdt dus SS' in O. Evenzoo blijkt, dat AA' en CC' door O gaan.

4. Om nu de stelling in het algemeen te bewijzen, kiezen wij O buiten de vlakken ABC en $A'B'C'$, en projecteeren $\triangle\ A'B'C'$ uit O op vlak ABC. Evenals in alinea 3 blijkt, dat hierbij een driehoek $A''B''C''$ ontstaat, d. w. z. de punten wijken van elkander af en C'' ligt buiten $A''B''$.

5. $A''B''$ wijkt òf van AB, òf van $A'B'$ af (§ 9 n^0 9); in het laatste geval is P het snijpunt van $A''B''$ en $A'B'$; daar òf $B' \infty P$, òf $A' \infty P$, ligt B' of A' buiten $A''B''$, dus òf $A'' \infty A'$, òf $B'' \infty B'$, d. w. z. òf A'', òf B'' ligt buiten vlak $A'B'C'$. In beide gevallen wijkt vlak ABC van vlak $A'B'C'$ af; voor dit geval is de stelling al bewezen (al. 2).

6. Wij houden nu slechts het geval over, dat alle zijden van $\triangle\ ABC$ van de homologe zijden van $\triangle\ A''B''C''$ afwijken; die homologe zijden snijden elkander twee aan twee in P, Q, R, dus volgens al. 3 gaan AA'', BB'' en CC'' door een punt S.

7. $A\,(\cdot)\,P$ of $B\,(\cdot)\,P$; nemen wij het eerste aan, dan ligt A buiten $A''B''$, dus A buiten $OA''B''$, dus O buiten $AA'B'$ (IX), zoodat OS dit vlak snijdt in S' (§ 8 n° 9); AA' en OS liggen in $OA''A$, dus AA' snijdt OS en gaat door S'. Evenzoo

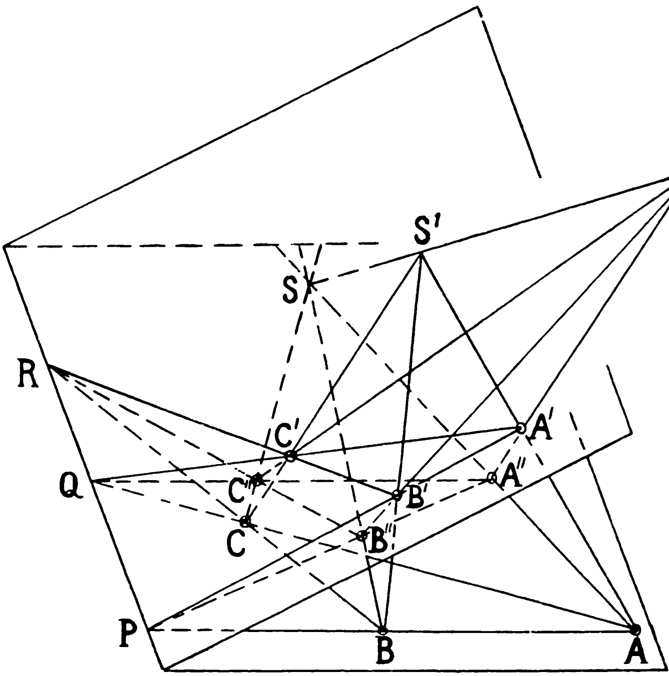

Fig. 10.

blijkt, dat BB' door S' gaat. Ten slotte moet OS, even goed als $AA'B'$, ook $AA'C'$ snijden en dit snijpunt moet met dat van OS en AA' samenvallen; ook CC' gaat dus door S.

§ 12. *Het vierde harmonische punt.*

1. *Bepaling.* Een *volledige vierhoek* bestaat uit vier coplanaire punten, waarvan elk drietal in driehoeksligging verkeert, met hun verbindingslijnen.

2. *Stelling.* Zijn bij twee volledige vierhoeken vijf punten van eenzelfde lijn bekend, door elk waarvan twee homologe

zijden gaan, en wijken van deze punten elke twee, die bij niet-overstaande zijden behooren, van elkander af, dan gaan ook de zijden van het zesde paar door een punt van dezelfde lijn.

Bewijs. Wij noemen de vierhoeken $ABCD$ en $A'B'C'D'$ AB en $A'B'$ gaan door P_1, CD en $C'D'$ door P_2, AC en $A'C'$ door Q_1, BD en $B'D'$ door Q_2, AD en $A'D'$ door R_1. Deze snijpunten liggen op l; diegene die niet bij overstaande zijden hooren, wijken van elkaar af.

Wij onderstellen eerst, dat zoowel homologe zijden als homologe hoekpunten van elkander afwijken; dan gaat het gebruikelijke bewijs door. Immers $\triangle\ ABD$ en $\triangle\ A'B'D'$ voldoen aan de onderstelling van § 11, dus AA', BB' en DD' gaan door één punt S. Deze lijnen wijken van elkander af; dit blijkt voor AA' en BB' aldus: $A \omega P_1$ of $B \omega P_1$, bijv. $A \omega P_1$; dan ligt A buiten $A'B'$, dus B' buiten AA'. Evenzoo blijkt, dat AA', CC' en DD' van elkander afwijken en door één punt gaan, dat met S samenvalt. BB' en CC' liggen dus in één vlak, dus BC snijdt $B'C'$; dan blijkt evenals voor AA' en BB', dat BB' van CC' afwijkt. Volgens § 10, toegepast op $\triangle\ BCD$ en $\triangle\ B'C'D'$, gaan BC en $B'C'$ door een punt van l.

Is niet bekend, of alle homologe zijden en hoekpunten van elkander afwijken, dan kan men door l een vlak brengen, dat van de vlakken der beide vierhoeken afwijkt (§ 9 n^0 2) en daarin een vierhoek construeeren, waarvan vijf zijden door P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1 gaan. De zesde zijde moet dan zoowel BC als $B'C'$ in een punt van l snijden.

3. Een bijzonder geval van de voorgaande is de

Stelling. Het vierde harmonische punt bij drie van elkander afwijkende punten is ondubbelzinnig bepaald.

§ 13. *Kruisende lijnen. Perspectieve betrekkingen.*

1. *Bepaling.* Twee lijnen, die zoo gelegen zijn, dat ieder punt van de eene buiten de andere ligt, heeten *kruisende lijnen.*

Om een lijn te vinden, die een gegeven lijn l kruist, kiezen wij P buiten l en Q buiten vlak Pl; PQ kruist l, want ieder punt van l ligt buiten PQ (§ 7 n^0 15).

2. *Stelling.* Zijn twee lijnen gegeven, dan kan een lijn gevonden worden, die beide kruist.

Bewijs. Op elk der lijnen l en m kiezen wij een punt; daarna brengen wij vlak α aan, waar die punten buiten liggen (§ 9 n^0 6); l en m snijden α in P en Q. Een vlak β, waar P en Q buiten liggen, snijdt α volgens een lijn, die l en m kruist (n^0 1).

3. *Stelling.* Zijn l en m kruisende lijnen, dan wijkt elk vlak door l van elk vlak door m af.

Bewijs. Wij kiezen P op m en brengen vlak α door P en l; daarna kiezen wij R buiten α en brengen vlak β door R en l. P ligt buiten β (§ 8 n^0 10, 2e al.), dus m snijdt β in Q; $Q \omega P$. Elk vlak γ door l wijkt òf van β, òf van α af (§ 9 n^0 4), dus òf Q, òf P ligt er buiten (§ 8 n^0 10), dus ieder vlak door m wijkt van γ af.

Uit het bewijs volgt ook, dat m van ieder vlak door l afwijkt.

4. *Bepalingen.* Onder *projecteeren* van een figuur uit een punt P verstaan wij de vervanging van elk punt (elke lijn) van de figuur door zijn verbindingslijn (verbindingsvlak) met P.

Analoge bepalingen gelden voor projecteeren uit een lijn en snijden met een lijn of een vlak.

Tusschen twee figuren f_1 en f_2 bestaat een *projectieve betrekking,* als een reeks figuren $f_1 f' \ldots f^{(\nu)} f_2$ bepaald kan worden, waarvan elke volgende uit de voorgaande verkregen wordt door een projecteering of snijding, die uit van elkander afwijkende elementen weer van elkander afwijkende elementen levert en welker omkeering een snijding of projecteering is.

Een perspectieve betrekking heet *van de 1^e orde,* als zij door hoogstens één projecteering en één snijding verkregen wordt, en *van de n^{de} orde,* als zij door n achtereenvolgende perspectieve betrekkingen van de 1^e orde ontstaat.

5. *Stelling.* Twee uit van elkander afwijkende punten bestaande puntendrietallen op kruisende lijnen zijn perspectief van de 1^e orde.

Bewijs. Gegeven zijn de kruisende lijnen l en m en de punten A, B, C op l en A', B', C' op m. Volgens n^0 3 wijkt l van vlak Am af, dus B ligt daarbuiten; B' ligt buiten AA' (VI), dus BB' kruist AA' (n^0 1); hetzelfde geldt voor AA' en CC' en voor BB' en CC'. Wij kiezen op AA' een punt P, dat van A en A' afwijkt; vlak PBB' wijkt van PCC' af (n^0 3), dus zij snijden elkander volgens een lijn n, die AA', BB' en CC' snijdt in P, Q, R. Omdat AA' en CC' elkaar kruisen, wijkt AA' van vlak PCC' af (n^0 3), dus A' ligt buiten dit vlak; m wijkt dus van dit vlak af en B' ligt er buiten (§ 7 n^0 15) en wijkt van Q af. B ligt buiten vlak Am, dus ook Q ligt daar buiten (§ 7 n^0 15), zoodat m en n elkaar kruisen (n^0 1). Hetzelfde geldt voor l en n. Door projecteeren uit n en snijden met m vindt men een perspectieve betrekking tusschen de punten van l en die van m, waarbij A met A', B met B' en C met C' correspondeert.

6. *Stelling.* Elke twee uit van elkander afwijkende punten bestaande puntendrietallen op willekeurige lijnen zijn perspectief.

Bewijs. Dit volgt uit n^0 2 en 5 en IVc.

7. *Stelling.* De in n^0 5 en 6 geconstrueerde perspectieve betrekkingen kunnen ook verkregen worden, door eenige malen de punten van een lijn uit een punt te projecteeren of de lijnen van een waaier met een lijn van haar vlak te snijden.

Bewijs. In de figuur van n^0 5 kiezen wij S op AA', zoodat $S)(P$. Nu projecteeren wij een punt D van l uit P op CS, daarna uit R op $C'S$ en eindelijk uit P op m. Al de gebruikte projecteerende lijnen, dus ook het beeldpunt D' op m liggen

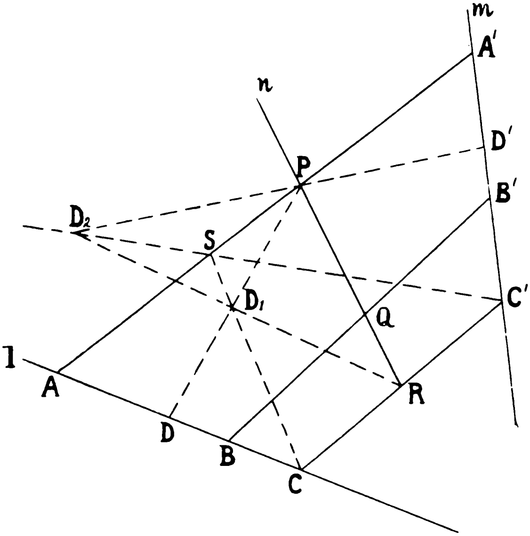

Fig. 11.

in vlak Dn, waaruit volgt, dat D' met het volgens n^0 5 geconstrueerde beeldpunt van D samenvalt.

HOOFDSTUK III.

Ordening.

§ 14. *De ordeningsaxioma's. Harmonische paren.*

Zooals reeds in § 1 werd opgemerkt, is het continuum als zoodanig niet geordend, maar bestaat daarop slechts een pseudo-ordening, d.w.z. een orderelatie, die slechts voor plaatselijk verschillende punten vastgelegd is. Wij moeten hiermee bij het opstellen van onze ordeningsaxioma's rekening houden.

De definitie der ordening op grond van het al of niet bestaan van het gemeenschappelijk harmonisch paar bij twee puntenparen, zooals die bij PIERI en WHITEHEAD voorkomt, is reeds daarom voor ons minder geschikt, omdat wij als afzonderlijk axioma zouden moeten invoeren, dat steeds uitgemaakt kan worden, of dit gemeenschappelijk harmonisch paar bestaat of niet, terwijl de wijze waarop dat uitgemaakt moet worden voorloopig geheel in het duister zou blijven. Wij volgen daarom liever de schrijvers, die de orderelatie als een nieuw begrip axiomatisch invoeren. [1])

Op grond van onderzoekingen van VAILATI [2]) voeren wij de pseudo-ordening door de volgende axioma's in.

XI. *Elk viertal van elkander afwijkende punten van een lijn kan op één en slechts één wijze in twee „elkander scheidende" paren verdeeld worden; zulk een verdeeling is uitsluitend bij vier van elkander afwijkende punten van eenzelfde lijn mogelijk.*

---

[1]) Bijv.: K. TH. VAHLEN, *Abstrakte Geometrie.*

F. ENRIQUES, *Vorlesungen über Projektive Geometrie* (geciteerd naar de 2e Duitsche uitgave, Leipzig 1915).

[2]) Rivista di matematica V (1895).

XII. *Zijn AB en CD scheidende paren, en vallen de punten A′, B′, C′, D′ achtereenvolgens met A, B, C, D samen, dan zijn A′B′ en C′D′ scheidende paren.*

XIII. *Scheiden elkaar de paren AB en CE, evenals AC en BD, dan scheiden de paren AB en DE elkaar.*

Bovendien moet de pseudo-ordening projectief zijn; wij nemen dus nog aan:

XIV. *Projecteert men de punten van een lijn l uit een buiten l gelegen punt P op een lijn l′ in vlak Pl, dan gaan scheidende paren op l over in scheidende paren op l′.*

Opdat de ordening niet illusoir wordt, is noodig:

XV. *Ten minste één lijn bevat vier van elkander afwijkende punten.*

Door de projectieve betrekking te construeeren, die aan drie van deze punten drie punten van een willekeurige andere lijn toevoegt, vindt men ook hierop vier van elkander afwijkende punten.

XII is een gevolg van XIV, zooals blijkt, als men l' met l laat samenvallen. XI, XII en XIII hebben echter het voordeel, een stel axioma's voor de pseudo-ordening op een lijn te vormen, waarin geen elementen buiten die lijn gebruikt worden.

In de in hoofdstuk I opgebouwde numerale meetkunde werd de verbindingslijn van de punten $A(x_1 \;.\;.\; x_4)$ en B $(y_1 \;.\;.\; y_4)$ gevormd door de punten C $(z_i = \lambda x_i + \mu y_i;\ \lambda$ of $\mu \neq 0)$. Deze kunnen cyclisch geordend worden evenals $\frac{\lambda}{\mu}$.

Vervangt men B door D $(u_i = \rho x_i + \sigma y_i;\ \ \sigma \neq 0)$, dan is

$$\xi x_i + \eta u_i = (\xi + \rho\eta) x_i + \sigma\eta y_i = \lambda x_i + \mu y_i,$$

$$\text{dus } \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\xi + \eta\rho}{\sigma\eta} = \frac{1}{\sigma}\frac{\xi}{\eta} + \frac{\rho}{\sigma}.$$

$\frac{\xi}{\eta}$ is dus geordend evenals $\frac{\lambda}{\mu}$, waaruit volgt, dat de pseudo-ordening van de punten niet afhangt van de keuze van A en B. Voor deze pseudo-ordening gelden XI, XII en XIII, maar XIV moet nog aangetoond worden. Nemen wij AB voor l, wordt l' op dezelfde wijze bepaald door $E\ (u_1 \ldots u_4)$ en $F(v_1 \ldots v_4)$ en zijn de coördinaten van $P(p_1 \ldots p_4)$, dan worden de coördinaten van een punt op de projecteerende lijn van $C(z_i = \lambda x_i + \mu y_i)$ voorgesteld door $\alpha p_i + \beta(\lambda x_i + \mu y_i)$.

Voor het beeldpunt van C op l' geldt dus

$$\alpha p_i + \beta(\lambda x_i + \mu y_i) = \gamma u_i + \delta v_i \quad . \qquad . \quad (1)$$

Nu is
$$|\, p_i \quad x_i \quad y_i \quad u_i \quad v_i \,| = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Immers zou één der determinanten uit deze matrix van 0 verschillen, dan zouden volgens § 4 n⁰ 5 vier der punten A, B, E, F, P in tetraëderligging verkeeren, wat onmogelijk is. Bijgevolg is de coëfficientendeterminant

$$|\, p_i \quad \lambda x_i + \mu y_i \quad u_i \quad v_i \,| = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Verder ligt òf E, òf F buiten PC, bijv. E; dan is

$$|\, p_i \quad z_i \quad u_i \,| \neq 0 \ (\S\ 4\ \mathrm{n}^0\ 3),$$

dus men kan den index k drie waarden laten aannemen, zoodanig dat $|\, p_k \ z_k \ u_k \,| \neq 0$. Dan kan men uit de 3 overeenkomstige vergelijkingen (1) de onbekenden oplossen:

$$\gamma : \delta = |\, p_k \quad \lambda x_k + \mu y_k \quad v_k \,| : - |\, p_k \quad \lambda x_k + \mu y_k \quad u_k \,| =$$
$$= (\lambda\, |\, p_k \ x_k \ v_k \,| + \mu\, |\, p_k \ y_k \ v_k \,|) : -(\lambda\, |\, p_k \ x_k \ u_k \,| + \mu\, |\, p_k \ y_k \ u_k \,|). \quad (4)$$

(4) voldoet ook aan de vierde vergelijking, want PC moet l' snijden, dus er is een oplossing van (1).

Schrijft men voor (4) $\gamma : \delta = (A\lambda + B\mu) : -(C\lambda + D\mu)$, dan is

$$q_i = \gamma u_i + \delta v_i = (A\lambda + B\mu)u_i - (C\lambda + D\mu)v_i =$$
$$= (Au_i - Cv_i)\lambda + (Bu_i - Dv_i)\mu.$$

Wij hebben aangenomen, dat

$$|\, p_k \quad \lambda x_k + \mu y_k \quad u_k \,| \neq 0,$$

dus $C\lambda + D\mu \neq 0$; voor iedere waarde $\dfrac{\lambda}{\mu}$ heeft men òf $A\lambda + B\mu \neq 0$, òf $C\lambda + D\mu \neq 0$. Hieruit volgt 1⁰, voor $\lambda = 0$, B of $D \neq 0$; 2⁰, voor $\mu = 0$, A of $C \neq 0$; 3⁰, voor $\lambda = B$, $\mu = -A$, [1]) $BC - AD \neq 0$. De punten $A'(x_i' = Au_i - Cv_i)$

[1]) Dit kan alleen, als A of $B \neq 0$ wat niet bekend is. Wel is bekend, dat A of B of C of $D \neq 0$; is C of $D \neq 0$, dan kieze men $\lambda = D$, $\mu = -C$.

en $B'(y_i' = Bu_i - Dv_i)$ zijn dus plaatselijk verschillende punten van l', en voor de coördinaten van C' vindt men $(\lambda x_i' + \mu y_i')$, waaruit volgt dat de pseudo-ordening van de punten C dezelfde is als die van hun beeldpunten C'.

Stelling. Twee harmonische puntenparen scheiden elkaar.

Bewijs. Laat $LMNK$ een volledige vierhoek zijn, zoodanig dat de lijn l door LM en NK in A, door MN en LK in B, door MK in C en door LN in D gesneden wordt; hierbij onderstellen wij, dat alle hoekpunten van den vierhoek buiten l vallen; daar alle zijden van den vierhoek van elkander afwijken (§ 12 n^0 1), volgt hieruit, dat A, B, C en D van elkander afwijken (§ 7 n^0 2). AB en CD zijn har-

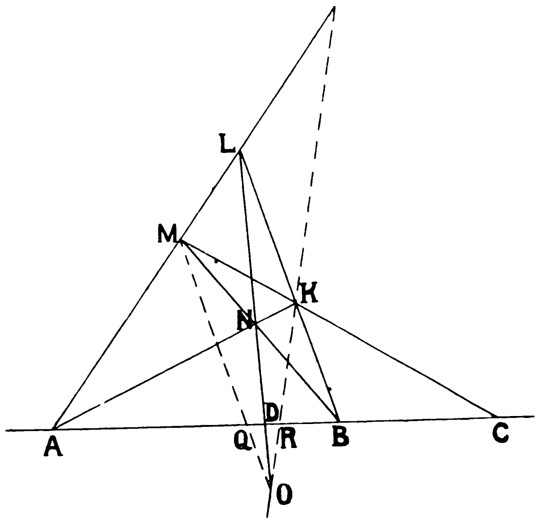

Fig. 12.

monische paren en bij elk stel harmonische paren kan een vierhoek als $LMNK$ gevonden worden. L, N en D wijken van elkander af; wij bepalen op LN het punt O zoo, dat LD en NO elkaar scheiden. (Daartoe kiezen wij op een willekeurige lijn m vier van elkander afwijkende punten X, *Y*, *Z*, *U*, waarvan de paren *XZ* en *YU* elkander scheiden, en construeeren de projectieve betrekking tusschen de punten van *l* en *m*, die *X* in *L*, *Y* in *N*, *Z* in *D* overvoert; het beeldpunt van *U* is *O*). *O* ligt nu buiten *AB*.

Door projecteeren van *LNDO* uit *M* op *AB* ontstaat *ABDQ*. Door projecteeren van *LNDO* uit *K* op *AB* ontstaat *BADR*. Dus *AD* scheidt *BQ* en *AR* scheidt *BD* (XIV), dus *AD* scheidt *QR* (XIII).

Door projecteeren van *AQDR* uit *O* op *AL* en daarna uit *K* op *AB* ontstaat *ACBR*. Dus *AB* scheidt *CR* en *AR* scheidt *BD*, dus *AB* scheidt *CD* (XIII).

Een dergelijk bewijs geeft ENRIQUES (l.c. § 12). Hij neemt stilzwijgend aan, dat *O* buiten *AB* ligt, wat hij kan doen, omdat, wanneer *O* op *AB* valt, zijn bewijs slechts vereenvoudigd wordt. Wij moesten deze voor ons ontoelaatbare splitsing in twee gevallen ontgaan.

§ 15. *De enkelvoudige ordening op een segment.*

Reeds VAILATI gaf een weg aan, om uit de cyclische ordening een enkelvoudige ordening af te leiden voor die punten, die van een bepaald punt afwijken. WHITEHEAD (l.c. § 15) volgt een hiervan slechts weinig verschillende methode. Deze enkelvoudige ordeningen hebben echter voor ons het nadeel, dat zij slechts gelden voor de punten, die van eenige te voren aangenomen punten afwijken, en dat het vrij lastig is ze tot punten, waarvan dat niet bekend is, uit te breiden. De volgende methode, die een wijziging van die van VAILATI is, lijdt in mindere mate aan dat euvel. Wij zullen in de bewijzen de zuiver formeele ontwikkelingen slechts aanduiden en alleen die punten uitvoeren, die ten gevolge van ons standpunt moeilijkheden opleveren.

1. *Bepaling.* Zijn *A*, *P*, *Q* drie van elkander afwijkende punten van een lijn, dan is *segment* (*PAQ*) de soort der van *A*, *P* en *Q* afwijkende punten *B* van die lijn met de

eigenschap, dat AB en PQ elkaar scheiden. *Segment* (PAQ) is de soort der punten, die van P en Q afwijken en niet tot (PAQ) kunnen behooren.

2. *Stelling.* Ieder punt van de lijn, dat van P en Q afwijkt, behoort òf tot $(P\bar{A}Q)$, òf tot (PAQ).

Bewijs. Voor de punten, die van A afwijken, volgt dit uit XI. Zij X een punt, waarvan niet bekend is, of het van A afwijkt. Het vierde harmonische punt C van A t.o.v. PQ behoort tot (PAQ). Nu is $X \omega A$ of $X \omega C$; het eerste geval is al behandeld en in het tweede geval behoort X òf tot (PCQ), òf tot (PCQ). Behoort X tot (PCQ), dan bewijst men zuiver formeel met behulp van XIII, dat X tot (PAQ) behoort, en behoort X tot $(P\bar{C}Q)$, dan leert een dergelijke beschouwing, dat X tot (PAQ) behoort. (Voor het laatste neme men een oogenblik aan dat AX en PQ elkaar scheiden; dan voert ieder van de scheidingsrelaties, die men tusschen de punten P, A, C, X kan aannemen, tot een ongerijmdheid).

3. *Stelling.* Behoort B tot (PAQ), dan is (PBQ) identiek met $(P\bar{A}Q)$ en (PBQ) met (PAQ).

Bewijs. Ter bekorting schrijven wij $PAQB$ om aan te geven, dat PQ en AB elkaar scheiden. Behoort C tot (PBQ), dan heeft men $PBQC$. Neemt men nu aan, dat C tot (PAQ) behoort, dan voert $PABC$ tot een ongerijmdheid; door cyclische verwisseling volgt hieruit hetzelfde voor $PBAC$ en $PACB$. $PAQC$ is dus onmogelijk en C behoort tot (PAQ). Evenzoo blijkt, dat ieder punt van (PAQ) tot (PBQ) behoort. Een punt van (PBQ) behoort tot (PAQ); dit volgt volgens XIII zoowel uit $PBCQ$ als uit $PCQB$; een punt van (PBQ), dat tot (PAQ) zou behooren, zou dus niet van B kunnen afwijken, en bijgevolg met B samenvallen, wat ongerijmd is. Evenzoo blijkt, dat ieder punt van (PAQ) tot (PBQ) behoort.

4. *Stelling.* Behoort B tot (PAQ), dan is (PBQ) identiek met (PAQ) en (PBQ) met (PAQ).

Bewijs. Is C een punt (PAQ), (bijv. het vierde harmonische punt van A t.o.v. PQ) dan volgt zoowel uit $PBAQ$ als uit $PABQ$, dat C tot $(P\bar{B}Q)$ behoort; zou C tot (PBQ) behooren, dan zou dus $A \omega B$ onmogelijk zijn, dus A zou met B samenvallen, wat tot een ongerijmdheid voert. (PCQ) is dus volgens n^0 3 identiek met (PAQ) en met $(P\bar{B}Q)$; (PCQ) is identiek met (PAQ) en met (PBQ).

Zijn dus op een lijn twee van elkander afwijkende punten P en Q gegeven, dan is de soort der punten van de lijn, die van P en Q afwijken, in twee segmenten *gesplitst* [1]).

5. Door de volgende bepaling wordt een pseudo-ordening van de punten van een segment PQ gedefinieerd.

Bepaling. Zijn A en B twee van elkander afwijkende punten van segment PQ en scheiden elkaar de paren PB en QA, dan *ligt A voor B* in de *enkelvoudige pseudo-ordening* PQ.

Volgens XI ligt òf A voor B, òf B voor A. Ligt A voor B in de pseudo-ordening PQ, dan ligt B voor A in de pseudo-ordening QP.

Met behulp van XIII bewijst men, dat uit A voor B, B voor C volgt A voor C.

6. *Stelling.* Uit A voor B, B voor C, C voor D in de pseudo-ordening PQ van segment (PAQ) volgt, dat AC en BD scheidende paren zijn.

Het bewijs is zuiver formeel.

Stelling. Zijn A, B, C, D vier van elkander afwijkende punten van segment PQ en gaat A vóór alle andere in de pseudo-ordening PQ, terwijl AC en BD scheidende paren zijn, dan ligt òf A voor B voor C voor D, òf A voor D voor C voor B.

Bewijs. Alle andere volgorden voeren door de vorige stelling tot een ongerijmdheid.

Men kan beide stellingen samen zoo formuleeren: De scheidende paren uit de enkelvoudige pseudo-ordening PQ

---

[1]) BROUWER, „*Begründung der Mengenlehre*" I blz. 4, „zerlegt".

zijn dezelfde als die uit de cyclische pseudo-ordening.

7. Behoort R tot $(P\bar{A}Q)$, dan is (PAQ), naar eenvoudig blijkt, bevat in (PAR). Ligt op (PAQ) A voor B in de pseudo-ordening PQ, dan ligt op (PAR) A voor B in de pseudo-ordening PR. Deze pseudo-ordeningen vallen dus voor de aan beide segmenten gemeenschappelijke punten samen.

8. Om een pseudo-ordening te construeeren voor alle punten van een lijn, die van een punt A afwijken, kiezen wij op die lijn een willekeurig van A afwijkend punt P en nemen op één der segmenten AP de pseudo-ordening AP, op het andere PA; verder rekenen wij elk punt van het eerste segment voor elk punt van het tweede. Is B een punt van het eerste segment, dan duiden wij de zoo geconstrueerde pseudo-ordening aan door ABP; zij is bepaald voor alle van A en P afwijkende punten. Om haar verder uit te breiden, kiezen wij Q op $(A\bar{B}P)$; dan behoort (ABP) tot (ABQ) (no 7), dus (ABP) bevat $(A\bar{B}Q)$. De pseudo-ordeningen ABP en ABQ vallen dus samen in (ABP) en in $(Q\bar{B}A)$ (no 7); in $(P\bar{B}Q)$ vallen beide samen met de pseudo-ordening PQ. Ieder punt C, dat van A, P en Q afwijkt, behoort òf tot (ABP), òf tot $(P\bar{B}Q)$, òf tot $(Q\bar{B}A)$. Immers ieder punt behoort òf tot (ABP), òf tot $(A\bar{B}P)$ (no 2); in het laatste geval behoort het tot (PQB) (no 3), dus men heeft òf $PCQB$, òf $PQCB$; in verband met $ABPQ$ levert het eerste $BPCQ$ en het laatste $ABQC$. De pseudo-ordeningen ABP en ABQ vallen dus samen voor alle punten, die van A, P en Q afwijken. Wij kunnen nu de pseudo-ordening ABP uitbreiden tot punten, waarvan niet bekend is of zij van P afwijken, door ze ook voor deze met ABQ te laten samenvallen. Aldus krijgen wij een enkelvoudige pseudo-ordening van alle punten van de lijn, die van A afwijken, met dezelfde scheidingsrelaties als de cyclische pseudo-ordening. Uit het voorgaande volgt, dat zij onafhankelijk is van de keuze van P; er zijn dus twee tegengestelde pseudo-ordeningen voor de van A afwijkende punten.

§ 16. *Het continuïteitsaxioma.*

De voorgaande axioma's zijn niet voldoende om de geheele meetkunde op te bouwen; in het bijzonder volgt de z.g.n. fundamentaalstelling der projectieve meetkunde er niet uit (WHITEHEAD, l.c. § 44—48 of HILBERT, *Grundlagen* § 31—35). Wij onderzoeken hier verder de methode, die nog een continuïteitsaxioma invoert; dit splitsen wij in XVI en XVII.

XVI. *Op ten minste een lijnsegment a kan een aftelbaar oneindige* [1]), *op dat segment in engeren zin overal dichte* [2]) *deelsoort H worden aangewezen.*

Hieruit volgt, in verband met II, dat bij ieder punt *P* van dat segment een aanvullingselement van *H* bepaald kan worden, dat t.o.v. de punten van *H* dezelfde orderelaties bezit als *P*, en verder, dat deze aanvullingselementen bij samenvallende punten samenvallen en bij van elkander afwijkende punten plaatselijk verschillen.

XVII. *Ieder aanvullingselement van de in* XVI *bedoelde soort H bepaalt een punt van het segment, dat t.o.v. de punten van H dezelfde orderelaties bezit als dat aanvullingselement.*

De punten, bepaald door samenvallende aanvullingselementen, kunnen niet van elkaar afwijken en vallen dus samen. Tusschen twee punten, bepaald door plaatselijk verschillende aanvullingselementen, liggen punten van *H*; zij wijken dus van elkander af. Men kan dus op *a* een getallencoördinaat invoeren door het continuum, gevormd door de aanvullingselementen van *H*, volgens de methode van § 1 n^0 6 meetbaar te maken. De ordening van deze coördinaat is dezelfde als die van de punten van de lijn. Hieruit volgt reeds, dat XVI en XVII samen meer zeggen dan het

---

[1]) BROUWER, *Begründung der Mengenlehre* I, blz. 7.

[2]) BROUWER, l.c. I, blz. 16.

axioma van DEDEKIND; daaruit alleen volgt zeker niet dat de lijn het ordetype van het continuum bezit. De vraag of ook minder eischende axioma's dan XVI en XVII bruikbaar zouden zijn, laten wij onbeantwoord.

Uit XIV volgt dat een aftelbaar oneindige, in engeren zin overal dichte puntsoort op een segment door een perspectieve betrekking in een dergelijke soort op het beeldsegment overgaat, en dat een aanvullingselement van de eerste correspondeert met een aanvullingselement van de laatste. Daar volgens § 13 n^0 6 tusschen elke twee segmenten een perspectieve betrekking bestaat, gelden XVI en XVII voor ieder segment. Zij gelden dus voor de segmenten, die op een lijn door twee punten bepaald worden, en voor twee willekeurige segmenten, die P en Q insluiten. Voegt men de verzamelingen H van deze segmenten bij elkaar, dan krijgt men een aftelbaar oneindige, op de heele lijn overal dichte soort K, met de eigenschap, dat ieder aanvullingselement van K een punt bepaalt, dat t.o.v. de elementen van K dezelfde scheidingsrelaties bezit als dat aanvullingselement. Dit volgt hieruit, dat op die segmenten, die P niet bevatten, de scheidingsrelaties van de cyclische ordening dezelfde zijn als die van de volgens § 15 n^0 8 geconstrueerde enkelvoudige ordening. Door het gesloten continuum, gevormd door de aanvullingselementen van K, volgens de methode van § 1 n^0 7 meetbaar te maken, voert men coördinaten op de lijn in.

Is H' een tweede op het segment in engeren zin overal dichte, aftelbaar oneindige puntsoort, dan kan H' volgens § 1 n^0 4 geheel de rol van H overnemen.

HOOFDSTUK IV.

Projectieve coördinaten.

§ 17. *Overzicht.*

In dit hoofdstuk geven wij het bewijs van de stelling, die het eigenlijke doel van de axiomatiek vormt, n.l.:

Men kan een zoodanige toewijzing tot stand brengen tusschen de punten der ruimte R en de punten der in hoofdstuk I opgebouwde getallenruimte G, dat

1. met samenvallende punten van R samenvallende punten van G en met van elkander afwijkende punten van R plaatselijk verschillende punten van G correspondeeren, en omgekeerd,

2. met een lijn van R een lijn van G en met een vlak van R een vlak van G correspondeert,

3. de ordening van de punten van een lijn van R dezelfde is als die van de beeldpunten in G.

Anders uitgedrukt:

Men kan aan ieder punt van R op zoodanige wijze eeneenduidig de verhouding van vier coördinaten toevoegen, dat na vervanging van ieder punt door zijn coördinatenverhouding een projectieve meetkunde in den zin van hoofdstuk I ontstaat.

Een coördinatenstelsel, dat aan dezen eisch voldoet, noemen wij *projectief.*

Bij de invoering van projectieve coördinaten volgen wij den gang van WHITEHEAD, chapter VI en VII. Voor de projectieve coördinaat op een lijn moet de groep der parabolische projectiviteiten met gegeven dubbelpunt als optelgroep gelezen kunnen worden, zoodat zij in homogene coördinaten voorgesteld wordt door $\frac{y^1}{x^1} = \frac{y}{x} + a$.

a is de groepparameter.

Wij volgen ook hier WHITEHEAD, door eerst een stel postulaten [1]) voor een getallenstelsel (d.w.z. een geordende optelgroep) op te stellen, (§ 18) en daarna aan te toonen, dat de groep der parabolische projectiviteiten met gegeven dubbelpunt daaraan voldoet (§ 19). De bedoelde postulaten ontleenen wij niet, als WHITEHEAD, aan BURALI-FORTI, maar aan E. V. HUNTINGTON (Transact. Am. Math. Soc. vol. 6, 1905, blz. 17), daar diens systeem zich gemakkelijker zoo laat wijzigen, dat het voor ons bruikbaar wordt. Ook het bewijs, dat Prof. BROUWER in Math. Ann. Bd. 67 (1909), blz. 254 vlg. gaf voor de stelling, dat iedere eenledige groep van een eendimensionaal continuum in ieder transformatiedomein als optelgroep kan worden beschouwd, had hier gebruikt kunnen worden.

In § 20 en 21 beschouwen wij de moeilijkheden, waartoe de uitbreiding van de projectieve coördinaten tot het vlak en de ruimte aanleiding geeft.

§ 18. *Postulaten voor een reëel getallenstelsel.*

1. Hier volgt eerst het door ons gewijzigde systeem van HUNTINGTON.

1. Voor de elementen van de soort Σ zijn relaties van samenvallen en afwijken gedefinieerd, die voldoen aan axioma II (blz. 27).

2. Σ bevat ten minste twee van elkander afwijkende elementen.

Ordeningspostulaten.

$R1$—$R3$. Tusschen elke twee van elkander afwijkende elementen a en b van Σ bestaat óf de relatie $a < b$, óf $b < a$; deze relaties kunnen uitsluitend tusschen van elkander afwijkende elementen van Σ bestaan.

---

[1]) Den term „postulaten" voor een getallenstelsel gebruiken wij ter onderscheiding van de „axioma's" der meetkunde.

$R4$. Zijn a, b en c elementen van Σ, dan volgt uit $a < b$ en $b < c$, dat $a < c$.

$R5$ en 6. Hier geeft HUNTINGTON het postulaat, dat Σ overal dicht geordend is, en het postulaat van DEDEKIND. Wij vervangen deze beide postulaten door de volgende, die correspondeeren met axioma XVI en XVII (§ 16).

$R5$. Σ bevat een aftelbaar oneindige, in Σ in engeren zin overal dichte deelsoort H.

$R6$. Ieder aanvullingselement van H bepaalt een element van Σ, dat t.o.v. de elementen van H dezelfde orderelaties bezit als dat aanvullingselement.

Uit de postulaten 1, 2 en $R1$—$R6$ volgt reeds, dat Σ met behoud van de relaties van samenvallen en afwijken en van de orderelaties op een continuum afgebeeld kan worden; immers de aanvullingselementen van H vormen een continuum. Door dit continuum meetbaar te maken, voert men op Σ een getallencoördinaat in.

Optellingspostulaten.

$A1$. Zijn a en b elementen van Σ, dan is $a + b$ een element van Σ.

$A2$. Zijn a en b elementen van Σ, dan is $a + b = b + a$ [1]).

$A3$. Zijn a, b en c elementen van Σ, dan is

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

$A4$. Zijn a, x en y elementen van Σ, dan volgt uit

$$a + x = a + y, \text{ dat } x = y.$$

$A5$. Σ bevat een element 0 met de eigenschap $0 + 0 = 0$.

$A6$. Bij ieder element a van Σ kan een element $(-a)$ bepaald worden, zoodat $a + (-a) = 0$.

$RA1$. Zijn a en b elementen van Σ, en is $a > 0$ en $b > 0$, dan is $a + b > a$.

$RA2$. Zijn a en b elementen van Σ en is $a < 0$ en $b < 0$, dan is $a + b < a$.

---

1) Het teeken $=$ staat voor de relatie van samenvallen; $\neq$ voor afwijken.

2. Zonder moeite wordt nu bewezen, dat alle nulelementen samenvallen, verder dat $a + 0 = 0 + a = a$; daaruit volgt weer de mogelijkheid en ondubbelzinnigheid van de aftrekking en de stellingen over het teeken van het verschil.

Verder worden de veelvouden pa (p geheel) ingevoerd door de bepalingen:

$$1\, a = a; \qquad (p + 1)\, a = pa + a,$$

en bewezen, dat hiervoor de gewone rekenregels gelden, verder breukdeelen door de bepaling:

$$m\left(\frac{a}{m}\right) = a.$$

Het bewijs voor de stelling, dat het element $b = \frac{a}{m}$ steeds bepaald kan worden, heeft herziening noodig. Wij gebruiken dezelfde lemma's als HUNTINGTON.

Lemma 1. Als $a > 0$ en m is een willekeurig geheel getal, dan kan $x > 0$ bepaald worden, zoodat $mx < a$.

Bewijs door volledige inductie (zie HUNTINGTON).

Lemma 2. Als $ma < mb$, is $a < b$.

HUNTINGTON bewijst dit uit het ongerijmde (Theorem 21); wij kunnen het als volgt uit lemma 1 afleiden:

Stel $mb = ma + c$, dan is $c > 0$, dus men kan $d > 0$ zoo bepalen, dat $md < c$.

$m(a + d) = ma + md < ma + c = mb$, dus $a + d > b$ is onmogelijk.

Kies nu e zoo, dat $0 < e < d$; dan is $a + e < a + d$, dus $a + e < b$, en $a + e > a$, dus $a < b$.

Stelling. Is a een element van Σ en m een positief geheel getal, dan is een element $\frac{a}{m}$ van Σ bepaald, zoodanig dat $m\left(\frac{a}{m}\right) = a$.

Bewijs. Is $a > 0$, dan kan men een element $x_1 > 0$ van H bepalen, zoodat $mx_1 < a$ en een element x_2 van H, zoodat $mx_2 > a$ (bijv. door $x_2 > a$ te nemen). $x_1 x_2$ is het eerste interval van een aanvullingselement, dat $\frac{a}{m}$ bepaalt. Om het volgende interval te vinden gaan wij de elementen van H (die volgens zekere wet zijn afgeteld) na, tot wij een element x_3 vinden, dat binnen x_1x_2 ligt. Is nu $mx_3 > a$, dan is x_1x_3 het tweede interval van $\frac{a}{m}$; is $mx_3 < a$, dan x_3x_2. Op analoge wijze worden de verdere intervallen gevonden. Daarbij kan het voorkomen, dat van een element x_i niet bekend is, of $mx_i < a$, dan wel $mx_i > a$; dit element geeft dan geen aanleiding tot verkleining van het interval en blijft in de volgende intervallen opgesloten. Deze moeilijkheid kan nooit voor twee elementen x_i en x_k tegelijk optreden, zoodat ieder interval uit de reeks een i_ν [1]) blijft. Blijkt na verdere voortzetting van de intervallenreeks toch een beslissing mogelijk, dan moet zij vanaf x_i opnieuw vastgesteld worden. De reeks is dus niet ondubbelzinnig bepaald, want de vraag of de bedoelde beslissing mogelijk is, is in 't algemeen niet te beantwoorden. Dit is echter in de definitie van aanvullingselement (§ 1 n^0 1), die uitdrukkelijk van een soort van onbepaald voort te zetten reeksen spreekt, voorzien.

Wij hebben dus een aanvullingselement van H, dat een element b van Σ bepaalt. Was nu $mb < a$, dan was $a = mb + c$ en $c > 0$, dus men zou $d > 0$ kunnen bepalen, zoodat $md < c$.

Dan was: $\quad m(b + d) = mb + md < mb + c = a.$

Tusschen b en $b + d$ ligt een element x_i van H, waarvoor geldt $mx_i > a$, dus $mx_i > m(b + d)$, in strijd met $x_i < b + d$. $mb < a$ is dus ongerijmd; evenzoo blijkt dit van $mb > a$, dus $mb \neq a$ is ongerijmd, dus $mb = a$ is juist.

Is f een element van Σ, waarvoor $mf = a$, dan zou uit $f \neq b$ volgen $mf \neq mb$, wat ongerijmd is, dus $f = b$.

---

[1]) Zie blz. 6.

Is $a < 0$, dan geldt een analoge afleiding.

Men kan nu willekeurige rationeele veelvouden van a definieeren; hiervoor gelden de gewone reken- en vereenvoudingsregels.

3. *Stelling.* Voor Σ geldt het *„principe van* ARCHIMEDES": Zijn a en b beide > 0, dan kan een geheel getal m bepaald worden, zoodat $ma > b$.

Bewijs. Voor het gemak voeren wij op Σ een getallencoördinaat in, en wel zoodanig, dat het element 0 het getal 0 als coördinaat heeft, en de elementen, die > 0 zijn, positieve coördinaten krijgen. Zij ξ de coördinaat van een willekeurig element x en $\xi + \alpha$ de coördinaat van $x + a$. $x + a > x$, dus $\xi + \alpha > \xi$, dus $\alpha > 0$. α is dus een overal positieve functie van ξ. Een functie, die voor iedere waarde van een afgesloten interval bepaald is, heet een in dat interval volle functie. Wij maken nu gebruik van de volgende hulpstellingen over volle functies.

Hulpstelling 1. Iedere volle functie is gelijkmatig continu.

Deze stelling is door Prof. BROUWER bewezen in „Verhandelingen der Kon. Akad. v. Wet. te Amsterdam" deel XIII n⁰ 2 (1924), *„Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten"*, § 1 en nader toegelicht in de „Verslagen" van dezelfde Akademie, deel XXXIII (1924) blz. 189 en 646. Het bewijs berust op het volgende principe. Men kan het interval eerst vervangen door de daarmee samenvallende gelijkmatige getallenverzameling π; deze is een finite verzameling [1]. Aan ieder element ξ van π is een functiewaarde $\eta = f(\xi)$ toegevoegd. Elk interval van η, waarvan de lengte ε van te voren willekeurig klein gekozen kan worden, moet door een eindig beginsegment ξ_1 van ξ bepaald zijn.

Nu bestaat de volgende stelling: Is aan ieder element ξ

[1] Zie het eerste geciteerde stuk, blz. 4 en „Begründung der Mengenlehre", II, blz. 5.

van een finite verzameling een natuurlijk getal β_ξ toegeordend, dan kan een zoodanig natuurlijk getal z worden bepaald, dat β_ξ door de eerste z van de ξ voortbrengende keuzen volledig bepaald is. Voor het bewijs hiervan verwijzen wij naar de zooeven geciteerde publicaties van Prof. BROUWER. In ons geval volgt uit deze stelling, dat een getal z_ε bestaat, zoodanig dat de lengte van iedere ξ_1 door z_ε van haar voortbrengende keuzen bepaald is. Men heeft dus voor de lengte van ξ_1 een eindig aantal mogelijkheden, en bijgevolg een maximum. Daaruit volgt, dat $f(x)$ gelijkmatig continu is.

Hulpstelling 2. Elke overal positieve functie heeft een positieve minimumwaarde.

Bewijs. Volgens onderstelling is aan ieder element ξ van π een positieve waarde $\eta = f(\xi)$ toegevoegd, d. w. z. in de ontwikkeling van η is een λ-interval aan te wijzen, waarvan beide uiteinden positief zijn. Dit interval is bekend na het opmaken van zeker beginsegment ξ_1 van ξ. Evenals in het vorige bewijs blijkt de lengte van ξ_1 een maximum te hebben. Men kan dus op de Y-as een reeks λ-intervallen aanwijzen, die alle positief zijn en waar alle functiewaarden binnen liggen; deze vormen samen een aaneengesloten interval. De onderrand daarvan benadert een positieve minimumwaarde μ voor $f(\xi)$.

Men merke op, dat er geen waarde $\xi = \xi_m$ behoeft te zijn, zoodat $f(\xi_m) = \mu$. Immers aan het onderste interval der reeks op de Y-as kunnen verschillende intervallen op de X-as toegevoegd zijn, zonder dat bekend behoeft te zijn, of in ieder daarvan een waarde ξ_m ligt.

Wij keeren nu terug tot de functie $\alpha = f(\xi)$. Zij β de coördinaat van b, i een interval, waar 0 en β binnen liggen en $\mu(i)$ de minimumwaarde van $f(\xi)$ in i. Wij definieeren $f_p(\xi)$ door de betrekking $f_p(\xi) = f(f_{p-1}(\xi))$; $f_1(\xi) = f(\xi)$.

Wij kiezen het geheele getal m zoo, dat $m\mu(i) > \beta$; dan is de coördinaat γ van ma: $\gamma = f_1(0) + f_2(0) + \ldots. +$ $+ f_m(0) \geqq m\mu(i) > \beta$, $\therefore$ $ma > b$.

Gevolg. Zijn $a > 0$ en $x > 0$ gegeven, dan kan men een geheel getal m zoo bepalen, dat $\frac{a}{m} < x$.

Immers bepaalt men m zoo, dat $mx > a$, dan is volgens lemma 2 hierboven $\frac{a}{m} < x$.

4. *Stelling.* De soort der rationale veelvouden van a ligt overal dicht in Σ.

Bewijs. Zij bc een willekeurig interval van Σ, $c > b > 0$ en $c - b = d$. Wij kiezen m zoo, dat $2e = \frac{2a}{m} < d$. In de reeks ne is een element $n_1 e$, zoodat

$$(n_1 - 2)\, e < c < n_1 e.$$

Verder is $(n_1 - 2)\, e = n_1 e - 2e > c - d = b$.

$(n_1 - 2)e$ ligt dus op bc.

5. De afbeelding van de rationale veelvouden van a op de overeenkomstige rationale getallen levert nu volgens postulaat $R6$ en § 1 n⁰ 4 een afbeelding van Σ op het continuum met behoud van de relaties van samenvallen en afwijken en van die van ordening.

Stelling. Geldt voor de elementen a, b c van Σ, dat $a + b = c$ en zijn aan a, b, c achtereenvolgens de getallen α, β, γ toegevoegd, dan is $\alpha + \beta = \gamma$.

Bewijs. Onderstel, dat $\alpha + \beta = \delta > \gamma$.

Men kan rationale getallen α' en β' vinden, die voldoen aan $\alpha' < \alpha$, $\beta' < \beta$, $\alpha' + \beta' = \delta' > \gamma$. Zijn α', β', δ' toegevoegd aan a', b', d', dan is

$$a' < a,\ b' < b,\ a' + b' = d' > c.$$

Anderzijds is $d' = a' + b' < a + b = c$.

De onderstelling $\alpha + \beta > \gamma$ is dus ongerijmd; evenzoo blijkt dit voor $\alpha + \beta < \gamma$, dus $\alpha + \beta = \gamma$.

§ 19. *Projectieve betrekkingen van de tweede orde.*

1. Projectieve transformaties van de tweede orde komen

bij WHITEHEAD (§ 26) voor als „quadrangular transformations" en worden onderzocht met behulp van de theorie der involuties. Bij de weinige stellingen, die wij noodig hebben, kunnen wij den omweg over de involuties missen, zonder daardoor de bewijzen noemenswaard te veranderen. Wij denken dus de betrekking geconstrueerd, door de punten van een lijn l uit een punt S op een met l in een vlak gelegen lijn l' en daarna uit S' op l terug te projecteeren. S en S' moeten buiten l en l', maar in hun vlak gelegen punten zijn.

Wanneer van één punt van l bekend is, dat het van zijn beeldpunt afwijkt, volgt daaruit gemakkelijk, dat zoowel l' van l als S′ van S afwijkt. Wij zeggen in dit geval, dat de betrekking *van de identiteit afwijkt.* De snijpunten van l' en SS' met l zijn dubbelpunten; ieder punt, dat van de dubbelpunten afwijkt, wijkt van zijn beeldpunt af en ieder punt, dat van zijn beeldpunt afwijkt, wijkt van de dubbelpunten af. De dubbelpunten behoeven niet van elkander af te wijken. Vallen zij samen, dan heet de betrekking een *prospectiviteit.*

2. Bij een projectieve betrekking van de tweede orde, waarvan niet bekend is, of zij van de identiteit afwijkt, behoeft noch l' van l, noch S′ van S af te wijken; er behoeven dus geen dubbelpunten bekend te zijn. Wij noemen de betrekking *normaal,* als hetzij één, hetzij twee (al of niet van elkander afwijkende) dubbelpunten bekend zijn en bovendien vaststaat, óf dat een punt, dat van de bekende dubbelpunten afwijkt, geen dubbelpunt kan zijn, óf dat uit het bestaan van een dubbelpunt, dat van de reeds bekende afwijkt, zou volgen, dat de betrekking de identiteit is. Iedere projectiviteit, waarvan twee van elkander afwijkende dubbelpunten bekend zijn, is dus normaal. De bepaling van prospectiviteit kan nu uitgebreid worden.

Bepaling. Een *prospectiviteit* is een normale projectieve betrekking van de tweede orde, waarvan één dubbelpunt bekend is.

3. *Stelling.* Een normale projectieve betrekking van de tweede orde is door haar dubbelpunten en het beeldpunt A' van een van die dubbelpunten afwijkend punt A volkomen bepaald.

Bewijs. Wij beschouwen eerst het geval $A' \omega A$. Zijn de dubbelpunten O en U, dan kan men l' door O (mits $l' \omega l$) en S (buiten l en l') willekeurig kiezen, waarna S' op US door een eenvoudige constructie gevonden wordt (WHITEHEAD § 24 (β)). Dat de betrekking onafhankelijk is van de keuze van l' en S volgt direct uit § 12 n^0 2 (WHITEHEAD § 24 (α) en § 26 al. 5).

Wij onderstellen nu, dat niet bekend is, of $A' \omega A$. Laat S_1 en S_2 normale projectieve betrekkingen van de tweede orde met dezelfde dubbelpunten zijn, die A in A' overvoeren, B een willekeurig punt, B' zijn beeldpunt door S_1, B'' zijn beeldpunt door S_2. Uit $B' \omega B''$ zou volgen òf $B \omega B'$, òf $B \omega B''$, bijv. $B \omega B'$. S_1 wijkt dus van de identiteit af en A wijkt van de dubbelpunten van S_1 af [1]), dus $A' \omega A$. In dat geval is reeds bewezen $B' \sigma B''$; de aanname $B' \omega B''$ voert dus tot een ongerijmdheid, waarmee bewezen is $B' \sigma B''$.

Stelling. Een prospectiviteit is door haar dubbelpunt en het beeldpunt van een van het dubbelpunt afwijkend punt volkomen bepaald.

Dit is een bijzonder geval van de vorige stelling.

4. *Stelling.* Wijken bij twee normale projectieve betrekkingen van de tweede orde met dezelfde dubbelpunten de beeldpunten van één punt van elkaar af, dan wijken de beeldpunten van ieder punt, dat van de dubbelpunten afwijkt, van elkaar af.

[1]) Er kan geen dubbelpunt zijn, dat van de reeds bekende afwijkt, dus A wijkt van ieder dubbelpunt af.

Bewijs. Men kan voor de betrekkingen S_1 en S_2 zoowel l' als het eerste projectiecentrum S gelijk kiezen. Is S' het tweede projectiecentrum van S_1, S'' dat van S_2, dan volgt uit het geg. $S' \infty S''$ (door herhaalde toepassing van § 7 n⁰ 2) en daaruit het gestelde.

5. De relaties van samenvallen en afwijken tusschen normale projectieve betrekkingen van de tweede orde met gegeven dubbelpunten kunnen dus zoo vastgesteld worden, dat zij overeenstemmen met die tusschen de beeldpunten van eenzelfde punt, dat van de dubbelpunten afwijkt, m. a. w. de soort van die betrekkingen is het een-eenduidige beeld van de soort der punten, die van de dubbelpunten afwijken. In het bijzonder geldt dit voor de soort der prospectiviteiten met gegeven dubbelpunt. Deze soort, die wij door Φ voorstellen, voldoet dus aan de postulaten 1 en 2 van § 18. Wij toonen nu eerst aan, dat ze ook aan de optellingspostulaten $A1$—$A6$ voldoet. Daarbij stellen wij de prospectiviteit met U tot invariant punt, die A in B overvoert, voor door (ABU^2), en verstaan wij onder $(ABU^2) + (CDU^2)$ de betrekking, die ontstaat door deze transformaties achtereenvolgens uit te voeren.

6. *Stelling.* $(A1)$. $(OAU^2) + (OBU^2)$ is weer een prospectiviteit met het dubbelpunt U. (WHITEHEAD § 30α).

Bewijs. De hulplijn l' kan men voor beide prospectiviteiten gelijk kiezen. Zij S het eerste, S_1 het tweede projectiecentrum voor (OAU^2), dan kiezen wij S_1 als eerste centrum voor (OBU^2) en vinden als tweede centrum een punt S_2 van US. Door vanuit S op l' en uit S_2 terug te projecteeren, vindt men een prospectiviteit (OCU^2), die met $(OAU^2) + (OBU^2)$ samenvalt.

7. *Stelling.* $(A2)$. $(OAU^2) + (OBU^2) = (OBU^2) + (OAU^2)$. (WHITEHEAD § 31$\alpha$).

Bewijs. Zij, in de figuur van n⁰ 6, P het snijpunt van OS_1 en S_2B met l'; Q dat van AS en S_2C met l'. (OAU^2)

ontstaat ook, door uit P op SU en uit Q terug te projecteeren; hierdoor gaat B in C over, dus $(OBU^2) + (OAU^2) =$ $= (OBU^2) + (BCU^2) = (OCU^2) = (OAU^2) + (OBU^2)$.

De bewijzen van n⁰ 6 en 7 gelden, onverschillig of (OAU^2) en (OBU^2) van de identiteit afwijken, want men kan steeds zorgen, dat $l' \omega l$ en dat S, S_1 en S_2 buiten l en l' liggen.

8. *Stelling.* (A3). $\{(OAU^2) + (OBU^2)\} + (OCU^2) =$
$$= (OAU^2) + \{(OBU^2) + (OCU^2)\}.$$
(WHITEHEAD § 31β).

Bewijs. Wij stellen, als WHITEHEAD:
$$(OAU^2) + (OBU^2) = (OC_1U^2) \quad . \qquad (1)$$
$$(OBU^2) + (OCU^2) = (OA_1U^2) \qquad (2)$$
$$(OC_1U^2) + (OCU^2) = (ODU^2) \quad . \quad . \quad . \qquad (3)$$
$$(OAU^2) + (OA_1U^2) = (OD'U^2) \quad . \quad . \qquad (4)$$
Dan volgt uit (4):
$$(OA_1U^2) = (AD'U^2) \quad . \qquad (5)$$
en uit (1):
$$(OBU^2) = (AC_1U^2)$$
$$\text{of } (BOU^2) = (C_1AU^2) \quad . \quad . \qquad (6)$$
Door optelling van (6) en (5) vindt men:
$$(BA_1U^2) = (C_1D'U^2).$$
Uit (2) volgt:
$$(OCU^2) = (BA_1U^2);$$
$$\text{dus } (OCU^2) = (C_1D'U^2),$$
en uit (3) volgt:
$$(OCU^2) = (C_1DU^2),$$
$$\text{dus } (C_1D'U^2) = (C_1DU^2), \therefore D' \sigma D. \text{ (n}^0\text{ 3)}.$$

9. *Stelling.* (A4). Uit $(OAU^2) + (OBU^2) = (OAU^2) + (OCU^2)$ volgt $(OBU^2) = (OCU^2)$. (WHITEHEAD § 31γ).

Bewijs. Stelt men $(OAU^2) + (OBU^2) = (OAU^2) + (OCU^2) =$ (ODU^2), dan is $(ADU^2) = (OBU^2)$ en $(ADU^2) = (OCU^2)$, dus $(OBU^2) = (OCU^2)$.

10. *Stelling.* (A 5). De prospectiviteit $(OOU^2) = i$ heeft de eigenschap $i + i = i$.

11. *Stelling* (A 6). Bij de prospectiviteit (OAU^2) kan

men de prospectiviteit (AOU^2) bepalen, waarvoor geldt $(OAU^2) + (AOU^2) = i$.

12. Om te bewijzen, dat ook aan de ordeningspostulaten voldaan is, gaan wij eerst het verband tusschen een prospectiviteit en de ordening na. Als voorbereiding daartoe dient de volgende algemeenere

Stelling. Gaat door een projectieve betrekking van de tweede orde een segment AB over in een deelsegment $A'B'$ van AB, welks eindpunten van A en B afwijken, dan ligt op elk der segmenten AB een invariant punt.

Bewijs. Het invariante snijpunt O van l en l' wijkt van A, B, A' en B' af. Ligt het op $(AA'B)$, dan ligt het op $(A'\bar{A}B')$, waarin $(AA'B)$ overgaat, dus O ligt of op $(A\bar{A}'B)$, of op $(A'AB')$. In het laatste geval verkeert de omgekeerde betrekking in het eerste geval; wij mogen dus aannemen, dat OA' en AB elkaar scheiden. Zij nu (met de notaties van n^0 1) P het snijpunt van SA en $S'A'$ met l'; Q dat van SB en $S'B'$ met l'. Door projecteeren van OA' en AB uit P op QB en daarna uit S' op l vindt men de scheidende paren $B'A'$ en UB. U is het tweede invariante punt en ligt op (AOB).

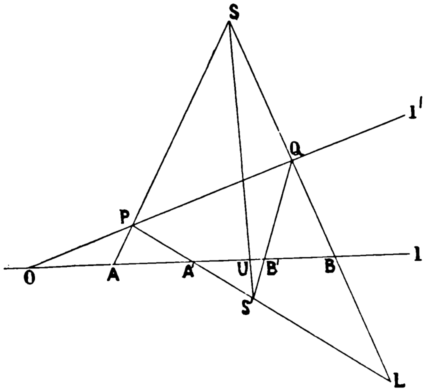

Fig. 13.

13. *Stellingen.* Gaat door de prospectiviteit $(AA'U^2)$, die van de identiteit afwijkt, het punt B, dat van U afwijkt, over in B', dan ligt B voor B' in de pseudo-ordening UAA'.

Gaat door een prospectiviteit $(AA'U^2)$ het punt B, dat van U en A afwijkt, over in B', dan ligt A' voor B' in de pseudo-ordening UAB.

Bewijs. Wij nemen voorloopig aan, dat A, B, A' en B' van elkander afwijken. Is de stelling bewezen voor de omgekeerde betrekking, dan geldt zij ook voor de oorspronkelijke betrekking. Wij kunnen dus zorgen (door zoo noodig hetzij A met B, hetzij geaccentueerde met ongeaccentueerde letters, hetzij beide te verwisselen), dat in de pseudo-ordening UAA', A voor B en B' valt.

Het beeldpunt A'' van A' is het vierde harmonische punt van A t.o.v. UA', dus A' ligt voor A''. $(A\bar{U}A')$ gaat over in $(A'UA'')$, dus als B voor A' ligt, dan ligt A' voor B', dus B voor B'. Ligt daarentegen A' voor B en nemen wij een oogenblik aan, dat B' voor B ligt, dan vinden wij, dat $(A'\bar{U}B')$ een deelsegment van (AUB) is, zoodat er volgens n^0 12 een van U afwijkend dubbelpunt zou zijn. Daar dit ongerijmd is, ligt B voor B', dus A' voor B'.

Beide stellingen zijn dus met de in den aanhef van het bewijs genoemde beperking bewezen.

Wij laten nu voor de eerste stelling de beperking $A \omega B$ vallen en nemen een oogenblik aan, dat B' voor B valt. Dan kan men òf bewijzen $A \omega B$, òf dat B' voor A valt, dus $B' \omega A'$, waaruit ook volgt $B \omega A$. Wij komen dus tot een tegenstrijdigheid.

Ten slotte laten wij voor de tweede stelling de beperking $A \omega A'$ vallen en nemen een oogenblik aan, dat B' voor A' valt. Dan kan men òf bewijzen $A \omega A'$, of dat B' voor A ligt, dus $B' \omega B$, waaruit weer volgt $A \omega A'$. Daar in dit geval de stelling reeds bewezen is, hebben wij weer een tegenstrijdigheid.

14. *Stelling.* Voert de prospectiviteit (AA_1U^2) B over in B_1 en de prospectiviteit (AA_2U^2) B in B_2, en ligt A_1 voor A_2 in de pseudo-ordening UXY, dan ligt B_1 voor B_2.

Bewijs. De verschiltransformatie $(AA_2U^2) - (AA_1U^2) = (A_1A_2U^2)$ voert B_1 in B_2 over, dus de eerste stelling van n^0 13 geeft het gestelde.

15. Uit n^0 14 volgt, dat de prospectiviteiten met U tot invariant punt geordend kunnen worden evenals de beeldpunten van een willekeurig van U afwijkend punt. Deze pseudo-ordening heeft alle eigenschappen van die van de punten en voldoet dus aan de postulaten R 1 — R 6 van § 18. Van de twee dergelijke ordeningen kiezen wij er een uit, die aan het volgende ten grondslag gelegd wordt.

16. *Stelling.* (RA 1). Is $(OAU^2) > (OOU^2)$ en $(OBU^2) > (OOU^2)$, dan is $(OAU^2) + (OBU^2) > (OAU^2)$.

Bewijs. Is $(OAU^2) + (OBU^2) = (OCU^2)$, dan is $(OBU^2) = (ACU^2)$, dus volgens n^0 13 ligt A voor C in de pseudo-ordening UOB.

17. *Stelling.* (RA 2). Is $(OAU^2) < (OOU^2)$ en $(OBU^2) < (OOU^2)$, dan is $(OAU^2) + (OBU^2) < (OAU^2)$.

Dit wordt evenzoo aangetoond.

18. In n^0 5—11, 15—17 is aangetoond, dat de soort der prospectiviteiten met U als invariant punt aan alle postulaten van § 18 voldoet. Zij kan dus volgens § 18 n^0 5 zoodanig op een getallencontinuum worden afgebeeld, dat

1^e alle relaties van samenvallen, afwijken en ordening bij die afbeelding bewaard blijven,

2^e aan (OOU^2) het getal 0 en aan een willekeurig gekozen eenheidstransformatie (OEU^2) het getal 1 is toegewezen,

3^e als aan (OAU^2) en (OBU^2) de getallen α en β zijn toegewezen, aan $(OAU^2) + (OBU^2)$ het getal $\alpha + \beta$ is toegewezen.

Door aan ieder punt P dezelfde coördinaat toe te kennen als aan (OPU^2), krijgen wij een projectieve coördinaat op de lijn (§ 17), die wij voorstellen door $(PEOU)$ of de coördinaat van P in het stelsel (EOU). Hij kan tot de punten, die niet noodzakelijk van U afwijken, uitgebreid worden, door hem als de verhouding van twee getallen te lezen en verder te handelen als in § 1 n^0 7.

§ 20. *Projectieve coördinaten in het platte vlak.*

1. *Stelling.* Zijn x, a, b de coördinaten van P, O', E' in het stelsel (EOU), dan is, als $(PE'O'U) = x'$,

$$x = a + (b-a)\,x'.$$

Bewijs. (WHITEHEAD § 36α).

$$\begin{aligned}(OPU^2) &= (OO'U^2) + (O'PU^2) = \\ &= a\,(OEU^2) + x'\,(O'E'U^2). \\ (O'E'U^2) &= (O'OU^2) + (OE'U^2). \\ &= (OE'U^2) - (OO'U^2). \\ &= b\,(OEU^2) - a\,(OEU^2). \\ (OPU^2) &= x\,(OEU^2).\end{aligned}$$

Dus $x\,(OEU^2) = a\,(OEU^2) + (b-a)\,x'\,(OEU^2)$,

dus $x = a + (b-a)\,x'$.

2. *Stelling.* Projecteert men de punten van l uit een punt P op een lijn m, die in vlak Pl ligt, en gaan daarbij A, O, E, U over in A', O', E', U', dan is $(AEOU) = (A'E'O'U')$.

Bewijs. Brengt men door l vlak α en door m vlak β, die van elkander en van vlak Pl afwijken, dan kan men de coördinaat op l bepalen door uitsluitend constructies in α; door de punten van α uit P op β te projecteeren, wordt tegelijkertijd de coördinaat op m bepaald door overeenkomstige constructies in β. Daar nu de coördinaat van een punt met rationale coördinaat door een eindig aantal constructies gevonden wordt, geldt de stelling, als $(AEOU)$ rationaal is; hieruit volgt verder, dat nooit $(AEOU) \neq (A'E'O'U')$ kan zijn, dus dat steeds $(AEOU) = (A'E'O'U')$.

3. Wij voeren nu evenals WHITEHEAD (§ 37 α) coördinaten in het vlak in, door een fundamentaaldriehoek OUV en een eenheidspunt E buiten de zijden daarvan aan te nemen. Is nu P een punt buiten UV, en zijn E_1, M de projecties van E, P uit V op OU en E_2, N die van dezelfde punten uit U op OV, dan is

$$\frac{x}{z} = (ME_1OU); \qquad \frac{y}{z} = (NE_2OV).$$

Is Q een punt, dat van P afwijkt, M' zijn projectie uit V op OU, N' uit U op OV, dan ligt Q volgens § 7 no 6 òf buiten VP, òf buiten UP, dus $M' \omega M$ òf $N' \omega N$, dus òf $\frac{x_Q}{z_Q} \neq \frac{x_P}{z_P}$, of $\frac{y_Q}{z_Q} \neq \frac{y_P}{z_P}$. Is omgekeerd bijv. $\frac{x_Q}{z_Q} \neq \frac{x_P}{z_P}$, dan vindt men, daar P en Q van V afwijken, $P \omega Q$. De relaties van samenvallen en afwijken blijven dus bij deze toewijzing van coördinaten bewaard.

4. Zij l een lijn, waar U en V buiten liggen, en die UV in T, OV in O_1, OU in O_2, VE_1 in E_1', UE_2 in E_2' snijdt, zij P een punt van l, dat van T afwijkt en bepalen wij M en N als in no 3. Dan is volgens no 2

$$\frac{x}{z} = (PE_1'O_1T);$$

$$\frac{y}{z} = (PE_2'O_2T),$$

dus volgens no 1

$$\frac{y}{z} = a\frac{x}{z} + b, \text{of } y = ax + bz.$$

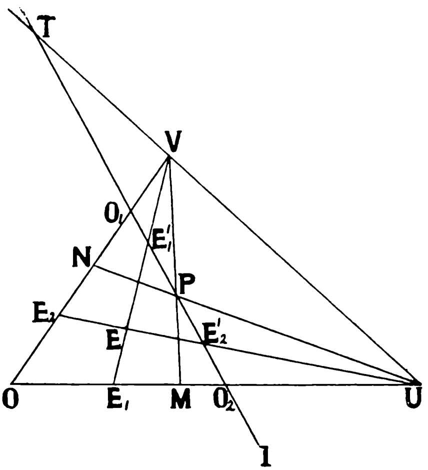

Fig. 14

De coördinaten van ieder punt van de lijn, dat van T afwijkt, voldoen dus aan een vergelijking van den eersten graad.

5. Om nu de aanwijzing van coördinaten en vergelijkingen tot de uitgesloten punten en lijnen uit te breiden, beschouwen wij eerst den bundel lijnen door een punt O_1 $(0, a, b)$, dat van O en V afwijkt. Deze hebben vergelijkingen van den vorm $mx + by - az = 0$. . . . . . (1)

Is $(x', 0, z')$ (x' en $z' \neq 0$) het snijpunt van zulk een lijn met OU, dan is $m = a\frac{z'}{x'}$. De waarden van m zijn dus cyclisch geordend evenals de lijnen van den bundel.

6. *Stelling*. Op iedere lijn, waar O, U en V buiten liggen, zijn de waarden van $\frac{y}{x}$ geordend evenals de punten van de lijn.

Bewijs. Zij de vergelijking van de lijn l: $\xi x + \eta y + \zeta z = 0$, dan vindt men voor 't snijpunt met (1) (n^0 5):

$$\frac{y}{x} = -\frac{m\zeta + a\xi}{b\zeta + a\eta}.$$

Men kan zorgen, dat O_1 buiten l ligt; dan is $b\zeta + a\eta \neq 0$, dus de waarden van $\frac{y}{x}$ zijn geordend evenals m, d. i. evenals de punten van l.

7. De vergelijking van een lijn door O, die van U en V afwijkt, is $\xi x + \eta y = 0$.

Zij p een lijn door O, waarvan niet bekend is, of zij van OV afwijkt, en P een punt van p, dat van O en V afwijkt. Wij trekken door P een lijn l, die van OV afwijkt en beschouwen P als aanvullingselement van een aftelbaar oneindige, op l overal dichte puntsoort H, waarvan alle punten buiten OV liggen. Daar $\frac{y}{x}$ op l geordend is evenals de punten van l, is hierdoor tevens $\frac{y}{x}$ in P bepaald, en wel onafhankelijk van de keuze van H. Is Q een ander punt van $p(Q \omega V, Q \omega O)$, dan projecteeren wij H uit O op een lijn door Q, waarbij $\frac{y}{x}$ gelijk blijft; daaruit volgt $\frac{y_Q}{x_Q} = \frac{y_P}{x_P}$. p krijgt dus een vergelijking van den vorm $\xi x + \eta y = 0$.

Is ten slotte R een punt van p, waarvan niet bekend is, of het van O afwijkt, dan kan niet $\xi x_R + \eta y_R \neq 0$ zijn, omdat daaruit zou volgen $x_R \neq 0$ of $y_R \neq 0$, dus $R \omega O$, waarna we in strijd met het voorgaande komen.

8. Zij nu P een punt, waarvan niet bekend is, of het

buiten UV ligt, en $\xi x + \eta y = 0$ de vergelijking van OP, dan definieeren wij:

$$\frac{y_P}{x_P} = - \frac{\xi}{\eta}.$$

Wijkt P van U en V af, dan zijn $\frac{x_P}{z_P}$ en $\frac{y_P}{z_P}$ bepaald, evenals voor andere punten. Zij kunnen geen verschillende waarden van z_P geven, omdat dan één van die waarden van nul zou verschillen, dus P buiten UV zou liggen, waarna men in strijd met n^0 7 komt.

Zij Q een punt, dat van P afwijkt. Of P, òf Q wijkt van het snijpunt van OP met UV af; in het eerste geval ligt P buiten UV en in het tweede ligt Q òf buiten OP, òf buiten UV. Ligt Q buiten OP, dan volgt uit het voorgaande

$$\frac{y_Q}{x_Q} \neq \frac{y_P}{x_P}.$$

Ligt P of Q, bijv. Q, buiten UV, en wijkt P van U af (dit mag men zonder beperking aannemen), dan wijkt UP òf van UV af, òf van UQ. In beide gevallen blijkt evenals in n^0 3 de ongelijkheid der coördinatenverhoudingen van P en Q.

De relaties van samenvallen en afwijken blijven dus ook voor de nieuw ingevoerde coördinaten gelden.

9. *Stelling.* De in n^0 4 gevonden vergelijking voor een lijn blijft ook voor de in n^0 8 gedefinieerde coördinaten gelden.

Bewijs. Zij $$\xi x + \eta y + \zeta z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
de vergelijking van een lijn l, die van U en V afwijkt, en P een punt van l, waarvan niet bekend is, of het van het snijpunt T van l met UV afwijkt. Nemen wij een oogenblik aan, dat $\xi x_P + \eta y_P + \zeta z_P \neq 0$, dan kan men ε zoodanig bepalen, dat uit

$$\left| \frac{z}{x} - \frac{z_P}{x_P} \right| < \varepsilon \text{ en } \left| \frac{y}{x} - \frac{y_P}{x_P} \right| < \varepsilon \quad . \quad . \quad (2)$$

volgt: $$\xi x + \eta y + \zeta z \neq 0. \quad . \quad . \quad (3)$$

Daar zoowel $\frac{z}{x}$ als $\frac{y}{x}$ op l geordend is als de punten van l, bepalen beide voorwaarden (2) op l een P bevattend segment, dus l bevat punten, die van T afwijken en aan (2) voldoen, dus ook aan (3), wat ongerijmd is. Bijgevolg voldoet P aan (1).

10. Zij l een lijn, die OV snijdt in O_1 $(0, a, b)$, dat van O en V afwijkt, maar waarvan niet bekend is, of U er buiten ligt. De vergelijkingen van de lijnen door O_1, die van U en V afwijken, zijn van den vorm

$$mx + by - az = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

m is geordend evenals de lijnen van den bundel (n^0 5) dus als men l beschouwt als aanvullingselement van een aftelbaar oneindige soort van lijnen door O_1, overal dicht in den bundel, wordt hierdoor een waarde m_1 van m bepaald. De functie $m_1 x + by - az$ kan voor een punt P van l niet van nul verschillen, want dan kon men ε zoo bepalen, dat uit

$$x = x_P, \; z = z_P, \quad |y - y_P| < \varepsilon, \quad |m - m_1| < \varepsilon \quad . \qquad (2)$$

volgt $$m x + by - az \neq 0,$$

dus op VP wordt door $|y - y_P| < \varepsilon$ een segment bepaald, waarbinnen $|m - m_1| < \varepsilon$ onmogelijk is; dit is ongerijmd, want de waarden van m zijn geordend als de punten van VP (dit blijkt evenals in no 6), dus er is een omgeving van P, waar $|m - m_1| < \varepsilon$.

Is niet bekend, of $O_1 \omega O$, dan toont men gemakkelijk aan, dat niet $m_1 x_P + by_P - az_P \neq 0$, daar zoowel $a \neq 0$ $(O_1 \omega O)$ als $m_1 \neq 0$ (l wijkt van OU af, dus O of U ligt er buiten), als $y_P \neq 0$ (l wijkt weer van OU af, want P ligt buiten OU) tot een ongerijmdheid voert.

Van een lijn, waarvan niet bekend is of zij van UV afwijkt, vindt men nu de vergelijking, door ze te beschouwen als aanvullingselement in den bundel met haar snijpunt met OU tot top, en analoog te redeneeren als boven.

11. *Stelling.* Een punt, dat aan de vergelijking van een lijn voldoet, ligt op die lijn.

Bewijs. Zij $\xi x + \eta y + \zeta z = 0$ . . . . (1)
de vergelijking van een lijn l, waar O buiten ligt, en P (x_1, y_1, z_1) een punt buiten l. $\zeta \neq 0$, dus óf $P \infty O$, óf $\xi x_P + \eta y_P + \zeta z_P \neq 0$. Zij $P \infty O$, en Q (x_2, y_2, z_2) het snijpunt van OP met l. $\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1}$; wij nemen $x_1 = x_2, y_1 = y_2$; dan is z op OP geordend als de punten van OP, dus $z_P \neq z_Q$, dus $\xi x_P + \eta y_P + \zeta z_P \neq 0$.

Een punt, dat aan (1) voldoet kan dus niet buiten l liggen, dus ligt op l.

Voor een lijn, waarvan niet bekend is of O er buiten ligt, kan men in het voorgaande O door U of V vervangen.

12. In dit n⁰ en de volgende werken wij den inhoud van WHITEHEAD'S § 38—41 om.

Stelling. Zijn A_1 (a_1, b_1, c_1) en A_2 (a_2, b_2, c_2) twee van elkander afwijkende punten van een vlak, dan zijn de coördinaten van elk punt P van A_1A_2 $(\vartheta a_1 + \varphi a_2, \vartheta b_1 + \varphi b_2, \vartheta c_1 + \varphi c_2)$.

Het bewijs geeft geen moeilijkheid; P stellen wij voor door (ϑ, φ).

Bepaling. De *dubbelverhouding* in het coördinatenstelsel $(OUVE)$ van vier punten (ϑ_1, φ_1), ... , (ϑ_4, φ_4) van een lijn, waarvan er tenminste drie van elkander afwijken, is

$$\delta = \frac{\vartheta_1\varphi_3 - \vartheta_3\varphi_1}{\vartheta_1\varphi_4 - \vartheta_4\varphi_1} : \frac{\vartheta_2\varphi_3 - \vartheta_3\varphi_2}{\vartheta_2\varphi_4 - \vartheta_4\varphi_2}.$$

Deze dubbelverhouding is onafhankelijk van de keuze van A_1 en A_2; immers vervangt men deze door andere punten, dan ondergaan ϑ en φ een lineaire substitutie, die δ invariant laat.

Projecteert men de punten van A_1A_2 uit een punt van het vlak op een lijn l' in het vlak, dan is de dubbelverhouding van vier punten van A_1A_2 dezelfde als die van hun beeldpunten op l'; immers gaat (ϑ, φ) op A_1A_2 over in (ϑ', φ') op l', dan bestaat een betrekking van den vorm

$$a\vartheta\vartheta' + b\varphi\vartheta' + c\vartheta\varphi' + d\varphi\varphi' = 0.$$

13. Van vier punten $P_1(x_1, 0, z_1), \ldots P_4(x_4, 0, z_4)$ op OU is de dubbelverhouding, wanneer men O en U de rol van A_1 en A_2 uit n⁰ 12 toebedeelt,

$$\delta = \frac{x_1 z_3 - x_3 z_1}{x_1 z_4 - x_4 z_1} : \frac{x_2 z_3 - x_3 z_2}{x_2 z_4 - x_4 z_2}.$$

Deze hangt alleen van het coördinatenstelsel EOU op OU af; we kunnen haar dus voorstellen door $\delta = ((P_1 P_2 P_3 P_4;\ EOU))$.

Zijn nu P_2, P_3, P_4 van elkander afwijkende punten, dan kan men volgens § 13 n⁰ 7 een projectieve betrekking π construeeren, door uitsluitend vlakke projecteeringen, die E, O, U overvoert in P_2, P_3, P_4. Door uit een punt, dat buiten alle gebruikte vlakken ligt, op vlak OUV te projecteeren, voert men elk van de projecteeringen, waaruit π bestaat, over in een projecteering binnen vlak OUV. π kan dus ook door projecteeringen in vlak OUV verkregen worden. Zij nu P het punt, dat door π in P_1 overgaat; dan is volgens n⁰ 2 $(PEOU) = (P_1 P_2 P_3 P_4)$, en volgens n⁰ 12 $((PEOU; EOU)) = ((P_1 P_2 P_3 P_4;\ EOU))$.

Maar $((PEOU;\ EOU)) = (PEOU)$, dus $((P_1 P_2 P_3 P_4;\ EOU)) = (P_1 P_2 P_3 P_4)$.

Nu beschouwen wij vier punten Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 op een willekeurige lijn in het vlak, waarvan de laatste drie van elkander afwijken: wij projecteeren ze uit een punt op OU en noemen de projecties R_1, R_2, R_3, R_4. Dan is volgens n⁰ 2 $(Q_1 Q_2 Q_3 Q_4) = (R_1 R_2 R_3 R_4)$ en volgens n⁰ 12 is de dubbelverhouding van Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 in het stelsel $(OUVE)$ gelijk aan $((R_1 R_2 R_3 R_4;\ EOU))$, dus $(Q_1 Q_2 Q_3 Q_4)$ is gelijk aan die dubbelverhouding. Hieruit blijkt tevens, dat de dubbelverhouding van vier punten niet afhangt van de keuze van het stelsel $(OUVE)$.

Aangezien $(Q_1 Q_2 Q_3 Q_4)$ tegelijk de coördinaat van Q_1 in het stelsel $(Q_2 Q_3 Q_4)$ is, is de dubbelverhouding van Q_1 tot de vaste punten Q_2, Q_3, Q_4 geordend als de punten van de lijn. Hieruit volgt de

Stelling. Bepaalt men op de wijze van n⁰ 12 ieder punt van een lijn door de verhouding (ϑ, φ), dan is $\frac{\vartheta}{\varphi}$ geordend als de punten van de lijn.

14. Wij beschouwen nu in vlak OUV een driehoek ABC en een punt F buiten de zijden daarvan. Zij verder P een punt, dat buiten BC ligt. De projecties van F en P uit B op AC noemen wij F_1, P_1 en uit C op AB, F_2 en P_2. Wij nemen aan, dat op de wijze van n⁰ 12, op AC, A voorgesteld wordt door $(1, 0)$, C door $(0, 1)$, F_1 door (α, β) en P_1 door (λ, μ); evenzoo op AB, A door $(1, 0)$, B door $(0, 1)$, F_2 door (γ, δ), P_2 door (ρ, σ). Dan vindt men de coördinaten van P in het stelsel $(ABCF)$ uit:

$$\frac{\xi}{\zeta} = (P_2F_2AB); \qquad \frac{\eta}{\zeta} = (P_1F_1AC),$$

of, volgens n⁰ 13,

$$\frac{\xi}{\zeta} = \frac{\gamma}{\delta} \times \frac{\sigma}{\rho}; \quad \frac{\eta}{\zeta} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\mu}{\lambda} \quad . \quad . \quad (1)$$

Laat nu de vergelijkingen van de zijden van $\triangle$ ABC zijn:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Van } AC & a_1x + a_2y + a_3z = 0. \\ \text{Van } AB & b_1x + b_2y + b_3z = 0. \\ \text{Van } BC & c_1x + c_2y + c_3z = 0. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wij voeren dan de substitutie uit

$$\left.\begin{array}{l} x' = (a_1\ x + a_2y + a_3z)\ \theta_1. \\ y' = (b_1\ x + b_2y + b_3z)\ \theta_2. \\ z' = (c_1\ x + c_2y + c_3z)\ \theta_3. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Dan is in P_1; $x' = 0$; $y' = \mu y'_C$; $z' = \lambda z'_A$.

Voor ieder punt van BP_1, dus ook voor P geldt dus

$$\frac{y'}{z'} = \frac{y'_C}{z'_A} \times \frac{\mu}{\lambda}.$$

Evenzoo vindt men:

$$\frac{x'}{z'} = \frac{x'_B}{z'_A} \times \frac{\sigma}{\rho}.$$

Bepaalt men dus θ_1, θ_2, θ_3 zoodanig, dat

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{x'_B}{z'_A} \text{ en } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{y'_C}{z'_A}, \text{ dan is}$$

$$\frac{\xi}{\zeta} = \frac{x'}{z'} \text{ en } \frac{\eta}{\zeta} = \frac{y'}{z'}.$$

(3) is dus de algemeene gedaante van een coördinatentransformatie in het platte vlak.

§ 21. *Projectieve coördinaten in de ruimte.*

1. *Stelling.* Projecteert men de punten O, U, V, E, P van vlak α uit een punt op een vlak β in O', U', V', E', P', dan zijn de coördinaten van P in het stelsel $OUVE$ dezelfde als die van P' in het stelsel $O'U'V'E'$.

Het bewijs hiervan laten wij aan den lezer over.

2. Nu voeren wij, als WHITEHEAD (§ 42), coördinaten in de ruimte in door de volgende constructie. Zij $A_1A_2A_3A_4$ een tetraëder, E een eenheidspunt buiten de zijvlakken daarvan. Van een willekeurig punt P buiten de ribben van het tetraëder noemen wij de projectie uit A_i op het overstaande zijvlak P_i en de projectie uit A_iA_k op de overstaande ribbe P_{ik}. Dan is

$$\frac{x}{u} = (P_{23}E_{23}A_4A_1).$$

$$\frac{y}{u} = (P_{31}E_{31}A_4A_2).$$

$$\frac{z}{u} = (P_{12}E_{12}A_4A_3).$$

x, y, u zijn dus de coördinaten van P_3 in het stelsel $A_4A_1A_2E_3$, zoodat volgens § 20 n⁰ 13:

$$\frac{x}{y} = (P_{34}E_{34}A_2A_1).$$

Analoge betrekkingen gelden in de andere zijvlakken door A_4; bijgevolg zijn x, y, z de coördinaten van P_4 in het stelsel $A_3A_1A_2E_4$.

3. Volgens § 8 n⁰ 5 ligt ieder punt buiten ten minste één der zijvlakken van het tetraëder; is dit $A_1A_2A_3$, dan kan men de coördinaten volgens n⁰ 2 bepalen. Is het bijv. $A_1A_2A_4$, dan stelle men

$$\frac{u}{z} = (P_{12}E_{12}A_3A_4).$$

$$\frac{x}{z} = (P_{24}E_{24}A_3A_1).$$

$$\frac{y}{z} = (P_{41}E_{41}A_3A_2).$$

Uit de laatste opmerking van n⁰ 2 volgt, dat men nooit tot een tegenstrijdigheid komt, als projecteeringen, die men eerst niet kon uitvoeren, later toch mogelijk blijken.

Zij Q een punt, dat van P afwijkt; wij denken P weer buiten $A_1A_2A_4$. Dan ligt Q buiten ten minste één der vlakken PA_1A_2, PA_1A_4, PA_2A_4 (§ 8 n⁰ 5), bijv. buiten PA_1A_2; dan is

$$\frac{u_Q}{z_Q} \neq \frac{u_P}{z_P}.$$

Ook bij de toewijzing van coördinaten in de ruimte blijven dus de relaties van samenvallen en afwijken bewaard.

4. Zij α een vlak, waar A_1 en A_2 buiten vallen, en dat A_iA_k snijdt in S_{ik}; alleen S_{34} behoeft niet bepaald te zijn. Zij P een punt in α; dan zijn de coördinaten van P in het stelsel $S_{14}S_{12}S_{13}E'$, waarin E' de projectie van E uit A_1 op α is, dezelfde als die van P_1 in het stelsel $A_4A_2A_3E_1$, dus y, z, u, en de coördinaten van P in het stelsel $S_{24}S_{21}S_{23}E''$ (E'' = projectie van E uit A_2 op α) zijn x, z, u. Volgens § 20 n⁰ 14 heeft men dus een betrekking van den vorm

$$x = ay + bz + cu.$$

5. Zij β een vlak, waarvan slechts bekend is, dat A_1 er buiten ligt; dit snijdt vlak $A_1A_2A_4$ volgens een lijn l, waarvan de vergelijking in het stelsel $A_4A_1A_2E_3$ den vorm heeft

$$ax + by + cu = 0. \quad (a \neq 0) \quad . \quad . \qquad . \quad . \quad (1)$$

De vergelijking van een vlak van den bundel door l, waar A_1 en A_3 buiten liggen, is

$$ax + by + \varphi z + cu = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

en het snijpunt met A_1A_3 volgt uit

$$ax + \varphi z = 0.$$

φ is dus geordend als de snijpunten met A_1A_3. Beschouwt men nu β als aanvullingselement van een aftelbaar oneindige verzameling van vlakken van den bundel, waar A_1 en A_3 buiten liggen, dan vindt men voor β een waarde φ_1 van φ.

Zij P $(x_1 \, . \, . \, u_1)$ een punt van β buiten l; voor elk punt van A_1P kan men $y = y_1$, $z = z_1$, $u = u_1$ nemen.

Was nu $ax_1 + by_1 + \varphi_1 z_1 + cu_1 \neq 0$, ... (3) dan kon men ε zoo bepalen, dat uit

$$y = y_1, \; z = z_1, \; u = u_1, \quad x - x_1 \quad < \varepsilon, \quad \varphi - \varphi_1 \quad < \varepsilon$$

zou volgen $\quad ax + by + \varphi z + cu \neq 0,$

dus op A_1P zou door $\;x - x_1\;$ $< \varepsilon$ een segment bepaald worden, waarbinnen $\;\varphi - \varphi_1\;$ $< \varepsilon$ onmogelijk is. Dit is ongerijmd, omdat φ geordend is als het snijpunt met A_1P.

Is niet bekend, dat P buiten l ligt, dan blijkt de ongerijmdheid van (3) hieruit, dat zoowel $x_1 \neq 0$ (β wijkt van $A_2A_3A_4$ af) als $b \neq 0$ (A_2 ligt buiten β) als $z_1 \neq 0$ (P ligt buiten l) als $c \neq 0$ (A_4 ligt buiten β) tot een ongerijmdheid voert.

6. *Stelling.* Een punt, dat aan de vergelijking van een vlak voldoet, ligt in dat vlak.

Bewijs. Zij $\quad \xi x + \eta y + \zeta z + \varphi u = 0$ . . . . (1) de vergelijking van een vlak α en bijv. $\xi \neq 0$. Zij $P(x_1 \, . \, . \, u_1)$ een punt, dat aan (1) voldoet. De coördinaten van A_1 maken het eerste lid van (1) $\neq 0$, dus verschillen aanwijsbaar van die van P, dus $A_1 \omega P$. Zij $Q(x_2, y_1, z_1, u_1,)$ het snijpunt van A_1P met α. Uit $x_2 \neq x_1$ zou volgen, dat Q niet aan (1) voldeed; dit is ongerijmd, dus $x_2 = x_1$, dus $P \sigma Q$, dus P ligt in α.

7. Zijn drie punten in driehoeksligging $P_1(x_1 \, . \, . \, u_1)$,

$P_2(x_2 \,.\,.\, u_2)$, $P_3(x_3 \,.\,.\, u_3)$ gegeven, dan kan men de coördinaten van een punt van vlak $P_1P_2P_3$ schrijven:

$$x = \lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3,$$
$$y = \lambda y_1 + \mu y_2 + \nu y_3,$$

en analoog voor z en u,
en die van een punt op P_1P_2:

$$x = \vartheta x_1 + \varphi x_2,$$
$$y = \vartheta y_1 + \varphi y_2,$$

en analoog voor z en u.

Ligt bijv. A_4 buiten het vlak, dan zijn x, y, z coördinaten in dit vlak voor een bepaald stelsel (verg. n⁰ 4), dus volgens § 20 n⁰ 13 (slot) is $\frac{\vartheta}{\varphi}$ op P_1P_2 geordend evenals de punten van l.

8. Wij hebben nu een toewijzing tusschen de punten der axiomatische ruimte en de punten der getallenruimte tot stand gebracht en in n⁰ 3 en n⁰ 7 van deze § bewezen, dat deze aan al de in § 17 gestelde eischen voldoet.

LITTERATUUR.

a. Over het intuitionisme in de wiskunde.

Prof. Dr. L. E. J. BROUWER, *Over de grondslagen der wiskunde.* Diss. Amsterdam 1907. Vgl. hierbij vooral:

—, *Addenda en corrigenda over de grondslagen der wiskunde*, Versl. Kon. Akad. v. Wet. XXV blz. 1418 of N. Arch. v. Wisk. (2) 12.

—, *De onbetrouwbaarheid der logische principes,* Tijdschrift v. Wijsbeg. 2 (1908); ook afzonderlijk verschenen bij P. Noordhoff, Groningen.

—, *Intuitionisme en formalisme*, rede, Amsterdam, 1912. P. Noordhoff, Groningen. (Engelsche vertaling in Bull. Amer. Math. Soc. 20 (1913)). De beide laatste stukken komen voor in de verzameling *Wiskunde, waarheid, werkelijkheid.*

—, *Over de rol van het principium tertii exclusi in de wiskunde, in het bijzonder in de functietheorie.* (Meded., gedaan op het XXIIe Vl. Nat. en Gen. Congres, Antwerpen 1923), Wis- en Nat. Tijdschr. II (1923).

—, *Intuitionistische splitsing van mathematische grondbegrippen.* Versl. Kon. Akad. v. Wet. XXXII, of Jahresbericht der D. M. V. 33 (1925).

H. WEYL. *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik*, Math. Zeitschr. X.

Op blz. 49—59 van dit artikel vindt men een als inleiding zeer geschikte uiteenzetting van het intuitionistische standpunt. Als zoodanig zijn ook nog te noemen:

A. FRÄNKEL. *Einleitung in die Mengenlehre*, blz. 164 vlg.[1]).

A. DRESDEN, *Brouwer's Contributions to the foundations of Mathematics*, Bull. Amer. Math. Soc. 30 (1924).

R. BALDUS, *Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik.*

R. WAVRE, *Y a-t-il une Crise des Mathématiques?* Rev. de Métaphys. et de Morale 31 (1924) (bevat eenige fouten en dringt niet geheel tot de kern door).

---

[1]) In de door *Fränkel* aangehaalde dissertatie van *O. Becker* komt het intuitionistische standpunt niet tot zijn recht.

Eenige opmerkingen over de verhouding van intuitionisme en formalisme vindt men nog aan het slot van het artikel van

H. WEYL, *Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik*, Math. Zeitschr. XX (1924), waar ook een intuitionistisch bewijs van de hoofdstelling der algebra voorkomt.

b. Uitwerking van speciale problemen volgens de intuitionistische principes.

Prof. Dr. L. E. J. BROUWER, *Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwickelung?* Versl. Kon. Ak. v. Wet. XXIX (1920), blz. 803, of Math. Ann. 83.

—, *Intuitionistische verzamelingsleer.* Versl. Kon. Ak. v. Wet. XXIX (1920), blz. 797. Refereerende inleiding tot de volgende verhandelingen, ook afgedrukt in Jahresbericht der D. M. V. 28 (1920).

—, *Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten,* I, Verhandelingen der Kon. Ak. van Wet. dl. XII n^0. 5 en II, dl. XII n^0. 7 (1918—'19).

—, *Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten,* I, Verhandelingen der Kon. Ak. v. Wet. dl. XIII n^0. 2 (1923).

In Bd. 93 der Math. Ann. begint Prof. BROUWER onder den titel „*Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik*" een reeks artikelen, waarin hij de beide voorgaande verhandelingen eenigszins aanvult. Uit deze verhandelingen gebruiken wij de eenvoudigste definities en stellingen. Volledig doorwerken er van is voor goed begrip van dit werkje niet noodig.

—, *Bewijs, dat iedere volle functie gelijkmatig continu is.* Versl. Kon. Ak. v. Wet. XXXIII, blz. 189.

—, *Opmerkingen aangaande het bewijs der gelijkmatige continuiteit van volle functies*, id. blz. 646.

B. DE LOOR, *Die Hoofstelling van die algebra van intuïsionistiese standpunt.* Diss. Amst. 1925.

STELLINGEN.

I.

Het consequente formalisme is onweerlegbaar, maar waardeloos.

II.

Bij de opstelling van hun ordeningsaxioma's beperken TSCHETWERUTCHIN en FEIGL (Jahresbericht der D. M. V. 33, blz. 2, 65 en 166) zich in navolging van HILBERT *(Grundlagen der Geometrie)* tot in engeren zin overal dichte soorten. Deze beperking is buiten verband met de meetkunde ongemotiveerd. Men kan haar vermijden, door in FEIGLS stel axioma's (l. c. blz. 168) HILBERTS axioma II 2 te vervangen door: „De soort bevat tenminste 5 van elkander afwijkende elementen."

III.

Bij C. JORDAN, *Cours d'Analyse* I, 3e druk, § 58, zijn de voorwaarden, dat $J(x)$ integrabel is van b tot B en $J_1(\xi)$ van a tot A, overbodig, daar zij uit de overige voorwaarden volgen.

IV.

Bij C. JORDAN, *Cours d'Analyse* III, 3e druk, § 83, ontbreken ten onrechte de voorwaarden, dat $f(x, y, z)$ en $f_1(x, y, z)$ continu zijn.

V.

v. LAUE geeft in *Die Relativitätstheorie* I, 3e druk, blz. 93 en 96, de stellingen:

I. Zijn gegeven een vector P_i en een stelsel van 6 grootheden $\mathfrak{F}_{ik} = - \mathfrak{F}_{ki}$ en is $\Sigma\, P_i\, \mathfrak{F}_{ik}$ een vector, dan is $\mathfrak{F}_{ik}$ een (scheefsymmetrische) tensor.

II. Ieder stelsel van 6 grootheden $\mathfrak{F}_{ik} = - \mathfrak{F}_{ki}$, waarvan de divergentie $\sum \frac{\partial \mathfrak{F}_{ik}}{\partial x_k}$ een vector is, is zelf een tensor.

—

Deze stellingen zijn alleen juist, als men onder $\mathfrak{F}_{ik}$ grootheden verstaat, wier waarden in een willekeurig coördinatenstelsel C_2 alleen afhangen van hun waarden in hetzelfde punt voor een ander willekeurig stelsel C_1 en van de transformatie, waardoor men van C_1 op C_2 overgaat.

De bewijzen van v. LAUE zijn ontoereikend.

VI.

De meening van G. MIE (Ann. d. Physik 62, blz. 49—51), dat de „natuurlijke” rechte lijnen, die men volgens de methoden der practische meetkunde, berustend op de „hypothese van de onveranderlijkheid der atomen”, construeert, met de geodetische lijnen van het ruimtetijdcontinuum samenvallen, is onjuist.

VII.

De aansluiting tusschen het wiskundig systeem der relativiteitstheorie en de ervaring zal steeds moeten geschieden door bemiddeling van een Euclidische coördinatenruimte, waarop de gegevens op de tot dusver gebruikelijke wijze worden betrokken.

VIII.

Hoewel CASSIRER (*Zur Einsteinschen Relativitätstheorie*, blz. 52 vlg.) terecht opmerkt, dat in HUME's kennistheorie een dogmatisch element schuilt, zoekt hij dit ten onrechte in het door HUME als grondslag genomen begrip „gewaarwording” in plaats van in de eischen, die deze aan een natuurwet stelt.

IX.

Door de mechanica onafhankelijk van de natuurkunde op te bouwen, beperkt men kunstmatig haar toepassingsmogelijkheid. Het is mede daarom wenschelijk, in het Middelbaar Onderwijs de mechanica nauw bij de natuurkunde te doen aansluiten.