LA PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES
DE
HENRI POINCARÉ

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT
TER VERKRIJGING VAN DE GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIJSBEGEERTE
AAN DE UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM,
OP GEZAG VAN DE RECTOR MAGNIFICUS Mr. J. VAN DER HOEVEN,
HOOGLERAAR IN DE FACULTEIT DER RECHTSGELEERDHEID,
IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN IN DE AULA DER UNIVERSITEIT
(TIJDELIJK IN DE LUTHERSE KERK, INGANG SINGEL 411, HOEK SPUI)
OP VRIJDAG 17 JUNI 1966 DES NAMIDDAGS TE 4 UUR

DOOR

JAN JOHANN ALBINN MOOIJ

Geboren te Gramsbergen

LA PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES

DE

HENRI POINCARÉ

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT
TER VERKRIJGING VAN DE GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIJSBEGEERTE
AAN DE UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM,
OP GEZAG VAN DE RECTOR MAGNIFICUS Mr. J. VAN DER HOEVEN,
HOOGLERAAR IN DE FACULTEIT DER RECHTSGELEERDHEID,
IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN IN DE AULA DER UNIVERSITEIT
(TIJDELIJK IN DE LUTHERSE KERK, INGANG SINGEL 411, HOEK SPUI)
OP VRIJDAG 17 JUNI 1966 DES NAMIDDAGS TE 4 UUR

DOOR

JAN JOHANN ALBINN MOOIJ

Geboren te Gramsbergen

Het tijdstip van de verdediging van dit
proefschrift is verschoven naar vrijdag
24 juni, des namiddags te 4 uur.

PROMOTOR :

Professor Dr. A. HEYTING

De vertaling van dit proefschrift is tot stand gekomen mede dank zij een subsidie van de Nederlandse Organisatie voor Zuiver-Wetenschappelijk Onderzoek

Aan Mijn Ouders.

TABLE DES ABREVIATIONS

SH : POINCARÉ, *La science et l'hypothèse.*
VS : POINCARÉ, *La valeur de la science.*
SM : POINCARÉ, *Science et Méthode.*
SE : POINCARÉ, *Savants et Ecrivains.*
DP : POINCARÉ, *Dernières Pensées.*
PM° : RUSSELL, *The Principles of Mathematics.*
PMq : COUTURAT, *Les Principes des Mathématiques.*
PM : WHITEHEAD-RUSSELL, *Principia Mathematica.*
GlA : FREGE, *Die Grundlagen der Arithmetik.*
GgA : FREGE, *Grundgesetze der Arithmetik.*
FlNl : PEANO (e.a.), *Formulaire de Mathématiques,* t. I, partie 1.
KdrV : KANT, *Kritik der reinen Vernunft.*
Atti : Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino (Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali).
AJM : American Journal of Mathematics.
EM : L'Enseignement Mathématique.
RdM : Rivista di Matematica = Revue de Mathématiques.
RgSpa : Revue générale des Sciences pures et appliquées.
RMM : Revue de Métaphysique et de Morale.
JSL : Journal of Symbolic Logic.
CIM : Congrès international des mathématiciens.
CIP : Congrès international de philosophie.

VOORWOORD

Op deze plaats wil ik allereerst uitdrukking geven aan mijn grote dankbaarheid jegens wijlen Professor Dr. E.W. Beth. In verschillende opzichten heeft hij mij geholpen en mijn levensloop beinvloed. Meer in het bijzonder dank ik hem voor de leiding, die hij mij bij het ontwerpen en het schrijven van dit proefschrift gegeven heeft. Hoewel ik niet bij hem had gestudeerd was hij graag bereid mij als promovendus te aanvaarden, en in september 1963 keurde hij het, in het Nederlands gereed gekomen, manuscript als proefschrift goed. Zijn overlijden op 12 april 1964 had, naast zoveel belangrijker en tragischer consequenties, ook tot gevolg dat Professor Beth niet mijn promotor zou kunnen zijn. De door hem met zoveel vriendelijke bereidwilligheid gegeven steun zal ik niet vergeten.

Professor Dr. A. Heyting, die als co-promotor het manuscript reeds kritisch had doorgelezen en een aantal voorstellen tot verbetering had gedaan, verklaarde zich na het overlijden van Professor Beth bereid diens functie als promotor over te nemen. Ik ben hem voor deze bereidverklaring zeer dankbaar, als ook voor de steun die ik bij de verdere afwikkeling van mijn promotieplannen van hem ondervond.

Erkentelijkheid wil ik hier ook betuigen aan mijn Utrechtse leermeesters in de faculteit van Wiskunde en Natuurwetenschappen. Het zij mij vergund in dit verband afzonderlijk te noemen wijlen Dr. H.B.A. Bockwinkel, Professor Dr. H. Freudenthal, Professor Dr. J. Popken, Professor Dr. M.G.J. Minnaert, Professor Dr. J.M.W. Milatz en Professor Dr. S.R. de Groot.

In bijzondere mate geldt mijn dank Prof. Dr. H. Freudenthal, die ik tijdens mijn studie op meer dan één terrein ontmoette, en met wie ik enkele jaren later een korte, maar voor mij leerzame briefwisseling mocht voeren met betrekking tot enkele kwesties die in het proefschrift aan de orde komen.

Aan de Franse Regering betuig ik mijn dankbaarheid voor de studiebeurs die zij mij heeft verleend. Ik was daardoor in de gelegenheid om gedurende de maanden januari-juli 1958 in Parijs te studeren. Tijdens die periode is een groot deel van het materiaal voor dit proefschrift verzameld.

De Nederlandse Organisatie voor Zuiver-Wetenschappelijk Onderzoek dank ik voor de subsidie, die zij mij verleend heeft, en die grotendeels bestemd was voor een vertaling van het manuscript in het Frans.

De vertaalster, Mevrouw H. Heldring, dank ik voor de animo waarmee zij dit werk heeft verricht, en voor de volharding waarmee zij zich in het voor haar onbekende onderwerp heeft verdiept.

Tenslotte gaat mijn dank uit naar de Uitgeefster voor het feit, dat zij dit proefschrift heeft willen uitgeven, en naar Madame P. Février voor de opname ervan in de Collection de Logique Mathématique, série A.

SAMENVATTING

Het doel van dit proefschrift is : Poincaré's denkbeelden op het terrein van de filosofie van de wiskunde gedetailleerd te beschrijven en waar nodig te verduidelijken. Daarbij wordt aandacht besteed aan een confrontatie met overeenkomstige zowel als concurrerende denkbeelden bij tijdgenoten en voorgangers. Dit leek gewenst met het oog op de polemische inslag van Poincaré's filosofie.

Met betrekking tot de meetkunde verdedigde Poincaré het conventionele karakter van verscheidene axioma's. Deze visie sluit nauw aan bij zijn opvattingen over de natuurwetenschappen en zij betreft dan ook bij uitstek de fysische meetkunde. De kwestie wordt in hoofdstuk I besproken.

Hoofdstuk II geeft een overzicht van de voornaamste resultaten in het grondslagenonderzoek van de wiskunde in de jaren 1875-1910 voorzover dit niet op de meetkunde betrekking heeft. Speciaal G. Frege, R. Dedekind, G. Peano en B. Russell worden behandeld.

Hoofdstuk III bevat een bespreking van het vroegere werk van Poincaré, evenals van dat van L. Couturat.

De artikelen, die laatstgenoemde schreef naar aanleiding van *The Principles of Mathematics* door Betrand Russell en die in boekvorm verschenen onder de titel *Les Principes des Mathématiques,* waren voor Poincaré aanleiding tot een aanval op het logicisme. In een reeks artikelen beklemtoont hij het grote belang, voor de wiskunde in het algemeen en de rekenkunde in het bijzonder, van de intuitie als tegenhanger van de logica. Volgens Poincaré is het onmogelijk op grond van de logica alleen een bevredigende verklaring van het wezen en de ontwikkeling van de wiskunde te geven ; deze wetenschap voert tot ontdekkingen en generalisaties, die volgens hem geen afdoende logische rechtvaardiging toelaten. Het meningverschil leidde tot uitgebreide en veelal interessante polemieken, waarin door toedoen van Poincaré de problematiek van de volledige inductie een centrale rol speelde.

Aan deze fase is een belangrijk deel van deze studie gewijd. De meer algemene aspecten worden behandeld in hoofdstuk IV. Enkele meer specifieke onderwerpen, te weten Poincaré's verhouding tot het formalisme van D. Hilbert en tot de verzamelingenleer van G. Cantor en E. Zermelo, komen aan de orde in de hoofdstukken V en VI.

Ondanks zijn verdediging van de rechten van de intuitie, zou het onjuist zijn Poincaré uitsluitend als intuitionist te kenschetsen. Naast intuitionistische koesterde hij ook formalistische denkbeelden, zoals bijv. blijkt uit zijn opvatting over de wiskundige existentie. Het grondslagenonderzoek van Hilbert, zowel op het gebied van de meetkunde als op dat van de getallenleer, werd door hem met grote belangstelling gevolgd. De door hem geuite kritiek is hier vaak vruchtbaar geweest.

Minder succesvol waren zijn aanvallen op het werk van Russell en enkele nauw met hem verwante onderzoekers. Zijn kennis van de mathematische (symbolische) logica was klaarblijkelijk gering; logica was voor hem in wezen aristotelische logica. Zijn argumenten zijn daardoor soms minder overtuigend dan men zou wensen; ook zijn ze meer dan eens emotioneel gekleurd.

Wel kan gezegd worden, dat hij in verband met het probleem van de paradoxen nuttig werk heeft verricht, terwijl hij ook wel zekere overdreven verwachtingen bij sommige van zijn tegenstanders heeft aangetoond. En uiteraard is het vanuit historisch standpunt belangwekkend wanneer iemand van Poincaré's kwaliteiten zich rekenschap tracht te geven van de voornaamste stromingen en ontwikkelingen op het gebied van het wiskundig grondslagenonderzoek, in een periode die men met een term van Karl Jaspers (zij het hier in iets andere zin gebruikt) als « Achsenzeit » zou kunnen kenschetsen.

In hoofdstuk VII wordt getracht Poincaré's intuitiebegrip iets scherper te omlijnen, en zijn opvattingen omtrent de wiskunde te vergelijken met die van Ernst Cassirer. Beiden beriepen zich op Kant, maar er zijn belangrijke verschillen. Ook wordt hier op het probleem der wiskundige zekerheid ingegaan, zoals dat o.m. door G. Mannoury aan de orde was gesteld.

In hoofdstuk VIII wordt betoogd dat Poincaré's opvattingen in verrassende mate passen in de tradities van de franse filosofie. Ofschoon de deductie door franse filosofen vaak en intensief besproken werd, ging dit veelal met bagatellisering van de formele logica gepaard. Mede onder invloed van Poincaré kwam de beoefening van de mathematische logica in Frankrijk eerst laat tot ontwikkeling.

INTRODUCTION

Jules Henri POINCARÉ (1854-1912), célèbre mathématicien, astronome et physicien, s'est également fait une grande renommée comme philosophe. En tant que philosophe, c'était avant tout la philosophie des sciences qui excitait son intérêt.

L'objet de l'étude suivante est de décrire en détail les idées de POINCARÉ dans le domaine de la philosophie des mathématiques et au besoin de les éclaircir. Ce faisant, je me suis préoccupé d'une comparaison avec les idées analogues ainsi que rivales chez ses contemporains et prédécesseurs. Ceci m'a semblé d'autant plus souhaitable que la philosophie de POINCARÉ a un tour d'esprit nettement polémique.

Il est peut-être à propos de tracer déjà ici une ébauche de son point de vue.

Par rapport à la géométrie, POINCARÉ soutenait le caractère conventionnel de divers axiomes. Cette manière de voir cadre avec ses conceptions des sciences naturelles et a surtout trait à la géométrie physique. Cette question-ci sera discutée dans le premier chapitre.

Pour ce qui est des autres branches des mathématiques, il avait coutume de souligner avec vigueur l'importance de l'intuition en tant que contrepoids à la logique. C'est surtout après 1904 que cette tendance se manifestera. Il rejettera alors les prétentions de RUSSELL et de COUTURAT, qui bâtissent sur l'œuvre de DEDEKIND, CANTOR et PEANO. Selon POINCARÉ, il est impossible de donner une explication satisfaisante de l'essence et de l'évolution des mathématiques en vertu de la logique seule : cette science conduit à des découvertes et des généralisations qui, selon lui, ne permettent pas une justification logique efficace. Cette divergence de vues a donné lieu à des polémiques étendues et souvent intéressantes, où, grâce à l'initiative de POINCARÉ, le problème de l'induction complète a joué un rôle central. Une bonne partie de mon étude est consacrée à cette phase.

Toutefois, il ne serait pas juste de qualifier POINCARÉ sans plus d'intuitionniste. Il nourrissait également, à côté de pensées intuitionnistes, des pensées formalistes, ainsi que le prouve sa conception de l'existence mathématique. Il suivit avec beaucoup d'intérêt la recherche des fondements de HILBERT dans le domaine de la géométrie et dans celui de la théorie des nombres, et sa critique à ce sujet a souvent été féconde.

Il n'en est pas de même de sa critique de l'œuvre de RUSSELL et des savants congénères. Sa connaissance de la logique mathématique était évidemment restreinte ; la logique était pour lui essentiellement la logique d'ARISTOTE. C'est pour cela que ses arguments sont parfois moins convaincants qu'on ne le souhaiterait. En outre, ils ne sont pas toujours exempts d'émotivité.

Il est toutefois justifié de constater que POINCARÉ a accompli un travail utile en ce qui concerne le problème des paradoxes et qu'il a sans doute démontré que certaines espérances étaient exagérées chez ses adversaires. Et de toutes façons, il est intéressant qu'un savant du calibre de POINCARÉ se soit donné la peine de se rendre compte, dans une période si éminemment intéressante, des courants et de l'évolution dans le domaine de la recherche des fondements mathématiques.

CHAPITRE I

LE CONVENTIONALISME DANS LA GÉOMÉTRIE

A. - Kantisme et empirisme dans la philosophie de la géométrie.

Le problème dont POINCARÉ traite dans ses articles sur la philosophie de la géométrie, porte sur la nature des axiomes géométriques. Ce problème, qui depuis des siècles avait été à l'ordre du jour, avait par suite de nouveaux développements atteint une phase critique au 19e siècle.

Pendant longtemps, les discussions s'étaient agitées entre deux extrêmes. D'une part, il y avait la conception aprioriste (souvent rationaliste), selon laquelle les principes de la géométrie sont fondés dans l'esprit de l'homme ou dans la structure de sa faculté de perception, et d'autre part la conception empiriste, selon laquelle ceux-ci reposent sur l'expérience. Le problème se compliquait souvent inutilement du fait que les points de vue logique et psychologique ne furent pas suffisamment distingués. Même KANT n'a pas encore tout à fait élucidé cette difficulté (1). Il a toutefois beaucoup contribué à sa solution, de

---

(1) En dépit d'exposés réfléchis comme ceux-ci : « Dass alle unsere Erkenntnis mit der Erfahrung anfange, daran ist gar kein Zeifel ; denn wodurch sollte das Erkenntnisvermögen sonst zur Ausübung erweckt werden, geschähe es nich durch Gegenstände, die unsere Sinne rühren ? (...) *Der Zeit nach* geht also keine Erkenntnis in uns vor der Erfahrung vorher, und mit dieser fängt alle an. Wenn aber gleich alle unsere Erkenntnis mit der Erfahrung anhebt, so entspringt sie darum doch nicht eben alle aus der Erfahrung » (Il n'y a pas de doute que tout notre savoir commence par l'expérience, car comment la faculté de savoir serait-elle incitée à être pratiquée, si ce n'était par des objets qui touchent nos sens ? *Chronologiquement* aucune connaissance ne précède donc en nous l'expérience, et c'est par celle-ci que tout notre savoir commence. Mais quoique tout notre savoir commence par l'expérience, cela ne veut pas dire qu'il en découle) (KANT [1] B, p. 1).

sorte que sa conception a été de grande importance pour la façon dont le problème fut posé et abordé après lui.

La conception de KANT, selon laquelle la géométrie est une science « welche die Eigenschaften des Raumes synthetisch und doch a priori bestimmt » (2), (qui définit les propriétés de l'espace synthétiquement et pourtant a priori), est une variante du point de vue aprioriste, non pas au sens rationaliste, mais au sens intuitionniste. Selon lui, l'espace est une *forme* de la sensibilité, et c'est donc une inversion des véritables conditions que d'essayer de baser les propriétés de l'espace sur l'expérience ; l'expérience n'est possible que grâce aux formes intuitives, données a priori.

En dépit de l'essor que KANT sut donner à l'ancien problème, la divergence de vues serait restée sans issue, si de nouvelles géométries n'avaient été développées à côté de la géométrie euclidienne. Vers l'an 1830, la géométrie hyperbolique fut introduite par LOBATCHEFSKY et BOLYAI, tandis que vingt ans après, RIEMANN découvrit la possibilité des géométries avec courbure positive. Si au début la question a pu se poser de savoir si vraiment ces géométries non euclidiennes étaient incontestables, aucun doute ne fut plus possible après les interprétations de RIEMANN, BELTRAMI, CAYLEY-KLEIN, et plus tard de Henri POINCARÉ ; il était évident que leur consistance logique équivalait à celle de la géométrie euclidienne. En même temps, on peut déduire de ces interprétations et notamment des considérations de HELMHOLTZ dans son ouvrage, *Uber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome* (3), que les géométries non-euclidiennes étaient dans une certaine mesure concevables par intuition.

Cette évolution a été une atteinte sérieuse à l'incontestabilité des idées de KANT, ce qui, à son tour, a produit une véritable consternation parmi tous ceux qui avaient emprunté ses idées. Leurs réactions furent violentes et vues après coup, elles nous paraissent une note comique dans l'histoire de la philosophie. Cependant, ce n'est pas ici le lieu de nous étendre plus longuement sur cet aspect (4). Nous voulons seulement constater que le développement des géométries non-euclidiennes n'oblige pas forcément à une condamnation radicale de la conception

---

(2) l.c. p. 40. Cf. chap. II, note 95, et chap. VII, pp. 120 ss.

(3) Ce traité a été inséré dans H. HELMHOLTZ [1].

(4) Voir p. ex. E.W. BETH [5], pp. 24-34.

de KANT. Même le penseur empiriste HELMHOLTZ s'efforçait de maintenir le contact avec KANT (5). Il est vrai qu'il considérait l'opinion selon laquelle les axiomes se font connaître au moyen de l'intuition a priori, comme une hypothèse superflue et même inutilisable, mais il acceptait la doctrine des formes a priori de la sensibilité. Toutefois, il ajoute : « Diese Formen müssen wirklich inhaltsleer und frei genug sein, um jeden Inhalt, der überhaupt in die betreffende Form der Wahrnehmung eintreten kann, aufzunehmen » (6). (Il faut que ces formes soient vraiment vides et suffisamment libres pour recevoir tout contenu qui puisse entrer dans la forme d'intuition en question). Selon lui, les formes intuitives provenaient de la constitution physiologique des sens.

L'école de Marbourg a tâché de réconcilier de façon toute différente la doctrine de KANT avec le développement de la science exacte. Cette école soutenait que la philosophie de KANT n'impliquait pas la nécessité de penser selon les principes de la géométrie euclidienne. Dans son livre, *Kants Theorie der Erfahrung,* H. COHEN admet même que les géométries non-euclidiennes peuvent être interprétées par l'intuition. Or, selon lui, cela ne veut pas dire qu'elles soient des produits de l'intuition pure. A cette fin, leur productivité scientifique doit être démontrée ou entrevue (7). Il adresse à HELMHOLTZ la remarque suivante : « Indessen muss daraus dass der Raum eine Form des Anschauens sei, doch 'irgend etwas' für die Axiome folgen, sonst wäre die Form als solche gegenstands- und bedeutungslos. Dass die Axiome für die Geometrie vorhanden seien, dass die Geometrie nicht ohne bestimmende Direction in Phantasien sich ergehe : diesen Gedanken allein bezeugt die Form. Welche Formulierung jedoch die Axiome finden müssen, das ist in der Form nicht entwickelt ; in dieser Entwicklung des Inhalts der Form ist die geometrische Forschung souverän » (8). (Toutefois, il faut qu'il résulte quelque chose pour les axiomes du fait que l'espace est une forme de l'intuition, sans cela la forme telle qu'elle est serait sans objet et sans signification. Qu'il existe des axiomes pour la géométrie, que la géométrie ne se perde pas sans direction déterminante en fantaisies, voilà la seule pensée qui soit indiquée par la forme. Mais la formulation

(5) Il fut même un de ceux qui activa le néo-Kantisme. De même sa conception de la notion d'identité, qu'il jugeait ne pas être dérivable de l'expérience, révèle des tendances kantiennes (Cf. *Zählen und Messen, erkenntnistheoretisch betrachtet,* dans : HELMHOLTZ [2], vol. III, pp. 356-391).

(6) HELMHOLTZ [2], vol. II, pp. 659, 660.

(7) H. COHEN [1], p. 231.

(8) l.c., pp. 233-234.

que les axiomes doivent trouver n'est pas développée dans la forme ; c'est dans ce développement du contenu de la forme que la recherche géométrique est souveraine).

La conception de l'école de Marbourg fut développée par P. NATORP, qui, dans son ouvrage *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften,* reconnaît que la géométrie non-euclidienne est applicable, bien que seulement à des structures compliquées dans l'espace euclidien. C'est pour cette raison qu'il maintient l'espace euclidien « als alleinige für uns anschaubare Raumordnung » (9) (comme seul ordre spatial qui soit accessible à notre intuition). On ne peut guère dire que les conclusions soient satisfaisantes, d'autant moins qu'elles concernent uniquement les géométries d'EUCLIDE, de LOBATCHEFSKY et de RIEMANN. Ce n'est que CASSIRER qui réussira à rendre justice à la pensée de la science exacte moderne, ce qui toutefois ne se fera pas sans un certain délayage de la doctrine de KANT.

L'empirisme par contre, n'a au début pas été confronté avec des problèmes urgents, ainsi que le fut l'école rationaliste-idéaliste, par suite de la découverte de nouvelles géométries. Au contraire, il semblait que cette découverte comportât la nécessité de décider par observations laquelle des géométries était la vraie. Aussi les principaux savants de la géométrie non-euclidienne tendaient - ils à l'empirisme. GAUSS déjà, exécuta un mesurage par rapport à la somme des angles dans un triangle de très grandes dimensions (10). Il en est de même de LOBATCHEFSKY et de RIEMANN. LOBATCHEFSKY écrivit, qu'après les vains efforts pour démontrer le postulat des parallèles, le désaccord ne pouvait cesser que, par exemple, au moyen d'observations d'ordre astronomique (11). RIEMANN projeta dans son « Habilitationsschrift » *Uber die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen* (1854, publié en 1867) (12) une théorie générale des variétés à n dimensions. Il montre comment on peut réduire un espace métrique quelconque à un espace dans lequel il y a mouvement libre des corps (espace avec courbure constante) et il a argumenté qu'un espace non discret n'a pas une métrique intrinsèque. RIEMANN posa également la question de savoir quelles étaient les suppositions spéciales qu'il fallait faire pour pouvoir appliquer la théorie générale à l'espace réel. Selon lui, seulement l'expérience pouvait

(9) P. NATORP [1], p. 310.

(10) Voir p. ex. aussi GAUSS, *Werke VIII,* p. 177, où la géométrie, à l'opposé de l'arithmétique, est mise au même plan que la mécanique.

(11) Voir N.I. LOBATCHEFSKY [1], p. 67.

(12) En 1919, H. WEYL assura une nouvelle édition (RIEMANN [1]).

fournir la réponse à cette question (13). A cette fin, il est nécessaire « die einfachsten Tatsachen aufzusuchen, aus denen sich die Massverhältnisse des Raumes bestimmen lassen... Diese Tatsachen sind wie alle Tatsachen nicht notwendig, sondern nur von empirischer Gewissheit, sie sind Hypothesen » (14) (de chercher les faits les plus simples, par lesquels se laissent définir les rapports des mesures de l'espace... Comme tous les faits, ces faits-ci ne sont pas nécessaires, mais seulement d'une certitude empirique, ils sont des hypothèses). C'est ainsi qu'il pourrait apparaître « dass die Massverhältnisse des Raumes im Unendlichkleinen den Voraussetzungen der Geometrie nicht gemäss sind » (15) (que dans l'infinitésimal les rapports des mesures de l'espace ne sont pas conformes aux suppositions de la géométrie). RIEMANN lui-même croit se trouver ici aux confins de la mathématique et de la physique (16) (17).

Le passage cité nous apprend qu'il n'est probablement pas permis d'attribuer à HELMHOLTZ en vertu du titre de son étude, *Uber die Tatsachen die der Geometrie zum Grunde liegen* (1868) (18), une tendance

(13) « Hiervon aber ist eine notwendige Folge, dass die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Grössenbegriffen ableiten lassen, sondern dass diejenigen Eigenschaften, durch welche sich der Raum von anderen denkbaren dreifach ausgedehnten Grössen unterscheidet, nur aus der Erfahrung entnommen werden können » (une conséquence nécessaire en est que les propositions de la géométrie ne sont pas dérivables de notions générales de grandeur, mais que les propriétés par lesquelles l'espace se distingue d'autres grandeurs de trois dimensions ne peuvent être tirées que de l'expérience) (RIEMANN [1], pp. 1-2).

(14) l.c., p. 2.

(15) l.c., p. 20.

(16) l.c., p. 21.

(17) La tendance empiriste de cette argumentation est évidente, même si l'on peut douter de sa solidité philosophique (voir note 22). Spécifiquement anti-kantien est également un fragment posthume sur la théorie de la connaissance, qui a été inséré dans RIEMANN [2], pp. 489-490. Après avoir noté que la science naturelle se développe constamment en se rendant compte d'expériences imprévues, RIEMANN écrit : « Es ist nun von Herbart den Nachweis geliefert worden, dass auch die zur Weltauffassung dienenden Begriffe, deren Entstehung wir weder in der Geschichte, noch in unserer eigenen Entwicklung folgen können, weil sie uns unvermerkt mit der Sprache überliefert werden, sämltich (..) aus dieser Quelle abgeleitet werden können und daher nicht (wie nach Kant die Kategorien) aus einer besonderen aller Erfahrung vorangehenden Beschaffenheit der menschlichen Seele hergeleitet werden können » (HERBART a démontré qu'aussi les notions qui font partie de la conception de l'univers et dont nous ne pouvons suivre l'origine ni dans l'histoire, ni dans notre propre développement, parce qu'elles nous sont transmises imperceptiblement en même temps que la langue, peuvent toutes être dérivées de cette source et que par conséquent elles ne peuvent être dérivées (comme d'après KANT les catégories) d'une propriété spéciale de l'âme humaine qui précéderait toute expérience) (p. 490).

(18) Plus tard inséré dans HELMHOLTZ [2], vol. II, pp. 618-639.

polémique contre RIEMANN. D'autant moins que HELMHOLTZ déclare se ranger du côté de RIEMANN et ne vouloir qu'éclairer la même problématique sous un autre angle. Il part de la supposition que chaque métrique repose sur la présence de corps solides, qui sont librement mobiles. Sur cette base, il dresse quatre postulats et il démontre que ces postulats ne sont compatibles qu'avec une métrique euclidienne ou non-euclidienne (18 a).

La recherche de HELMHOLTZ a été critiquée à différents points de vue. C'est ainsi qu'encore récemment, H. FREUDENTHAL a rappelé que l'on n'est pas obligé de supposer des corps solides pour une métrique. Des règles solides suffisent et aussi la forme différentielle de RIEMANN dans son aspect général ne conduit-elle pas à des corps librement mobiles (19). D'autres insuffisances furent constatées peu de temps après la publication. Ce qui manquait en premier lieu à l'étude de HELMHOLTZ, était que HELMHOLTZ avait négligé de traiter le problème à la lumière de la théorie des groupes, ce qui, vu la grande importance qu'il attribue à la notion de la congruence, aurait été de rigueur. Deuxièmement, le postulat de la mobilité libre n'y était pas formulé de manière satisfaisante. Troisièmement, il se trouva que son postulat de la monodromie pour des espaces de trois dimensions ou plus, était superflu (20). Les raisonnements de HELMHOLTZ ont été renforcés par S. LIE dans deux essais, *Uber die Grundlagen der Geometrie,* qui parurent tous deux en 1890 (21). Partant du point de vue de la théorie des groupes, tel que celui-ci avait été formulé par F. KLEIN dans le *Erlanger Programm* (1872), il soumet la question entière à un examen minutieux. Mais en fait, les résultats de HELMHOLTZ y sont confirmés (21 a).

Si l'œuvre de HELMHOLTZ montre quelques défauts de beauté mathématiques, il fait par contre preuve d'une compréhension pénétrante de la problématique empiriste. En cela, il semble surpasser RIEMANN (22). Comme lui, HELMHOLTZ est de l'opinion que la géomé-

---

(18a) Pour un aperçu des théories de KANT, GAUSS, RIEMANN, HELMHOLTZ e.a. voir aussi E.W. BETH [5], pp. 71-72 et 110-120.

(19) Voir H. FREUDENTHAL [4], p. 92 ; FREUDENTHAL [5], p. 374 ; FREUDENTHAL [7], p. 10.

(20) En outre, HELMHOLTZ n'avait au début pas tenu compte de la possibilité de la géométrie hyperbolique.

(21) Plus tard inséré dans S. LIE et F. ENGEL [1].

(21a) A côté de H. WEYL [1], plusieurs études plus récentes dans ce domaine sont mentionnées par H. FREUDENTHAL [5].

(22) H. COHEN [1], p. 226, avait déjà soutenu qu'à ce point, RIEMANN est en faute. Cf. aussi E.W. BETH [1], p. 21.

trie de l'espace doit être déduite de l'expérience au lieu de reposer sur des principes connaissables a priori. Toutefois, il comprend que même les données les plus complètes de la perception laissent la possibilité de plusieurs interprétations. La conduite de corps solides, de surfaces planes, de lignes droites est essentielle, mais nous ne pouvons décider si un corps est solide, que « mittels derselben Sätze, deren tatsächliche Richtigkeit durch die Prüfung zu beweisen wäre » (23) (au moyen des théorèmes, dont la vérité serait à démontrer par l'essai empirique). D'après ce qu'il remarque ailleurs, chaque essai de vérification des axiomes géométriques doit être précédé de certaines suppositions (24). Sur les traces de HELMHOLTZ, POINCARÉ introduira cette complication en détail dans ses dissertations (25). En même temps, nous verrons que sa philosophie géométrique a fortement subi l'influence du point de vue de la théorie des groupes (26).

Pour obtenir un aperçu tant soit peu complet du milieu historique dans lequel le conventionalisme fut engendré, il est nécessaire de nous arrêter plus longuement sur le perfectionnement de la méthode axiomatique. Ici aussi la recherche du postulat des parallèles servait de préparation. M. PASCH nous en déroule le programme dans ses *Vorlesungen über neuere Geometrie.* Il formule avec force : « Die Lehrsätze werden aus den Grundsätzen deduziert, so dass alles, was zur Begründung der Lehrsätze gehört, ohne Ausnahme sich in den Grundsätzen niedergelegt finden muss » (27). (Les théorèmes sont déduits des axiomes, de sorte que tout ce qui va avec l'établissement des théorèmes doit — sans exception — se retrouver dans les axiomes). Et peut-être encore plus clairement dans le passage suivant : « Es muss in der Tat, wenn anders die Geometrie wirklich deduktiv sein soll, der Prozess des Folgerns unabhängig sein vom *Sinn* der geometrischen Begriffe, wie er unabhängig sein muss von den Figuren ; nur die in den benutzten Sätzen, beziehungsweise Definitionen niedergelegten Bezie-

(23) HELMHOLTZ [2], vol. II, p. 618.

(24) HELMHOLTZ [1], p. 23.

(25) Il introduira celle-ci dans un domaine plus étendu. Non seulement la mesure de courbure, mais aussi le nombre de dimensions devient alors discutable. Pour ce qui est de ce dernier point, HELMHOLTZ ne s'était encore méfié de rien. (Cf. la remarque « Wir als Bewohner eines Raumes von drei Dimensionen » (Nous, en tant qu'habitants d'un espace de trois dimensions), dans HELMHOLTZ [1], p. 10).

(26) C'est à bon droit que ROUGIER y prête beaucoup d'attention dans la première partie de ROUGIER [1].

(27) M. PASCH [1], p. 5.

hungen zwischen den geometrischen Begriffen dürfen in Betracht kommen » (28). (Si toutefois la géométrie doit être vraiment déductive, il faut en effet que le procès de la déduction soit indépendant du *sens* des notions géométriques, de même qu'il doit être indépendant des figures ; seuls les rapports entre les notions géométriques, tels qu'ils sont établis dans les propositions, respectivement les définitions, utilisées, peuvent être considérés). Or, les propositions primitives de même que les notions primitives, reposent à leur tour sur l'expérience et PASCH veut « in der Geometrie nichts weiter erblicken als einen Teil der Naturwissenschaft » (ne voir la géométrie que comme une partie de la science naturelle) (29).

L'opinion de PASCH renferme une combinaison du principe empiriste avec une stricte méthodologie axiomatique. Dans un certain sens, cette combinaison se trouve encore chez G. PEANO et chez G. VERONESE. En 1888 et 1889, le premier publie deux livres (30), où, se rattachant à PASCH et à la *Ausdehnungslehre* de GRASSMANN (1844, 1862), il fournit à l'aide de la pasigraphie une construction déductive de la géométrie. L'expérience ne semble pas y figurer. Mais lorsqu'en 1894, PEANO s'occupe de la question de savoir en quelle mesure la mathématique est libre de choisir ses axiomes, il écrit, que le nom de « géométrie » est seulement applicable à ces systèmes auxquels l'expérience a servi de point de départ (31). VERONESE aussi place l'expérience au commencement de la géométrie, tout en plaidant pour une liberté aussi grande que possible pour l'esprit géométrique. En outre, selon lui, la construction du système déductif même est conduite par l'intuition. Dans son introduction à ses *Fondamenti di Geometria* (1891), il décrit, en résumé, l'essence de ce qu'il appelle la géométrie théorique ainsi : « La geometria teoretica pertanto si distingue dalle altre scienze sperimentali esterne in questo : che essa ha bisogno dell' osservazione esterna per fissare i suoi assiomi propriamente detti, ma se ne rende tosto indipendente considerando non già i corpi stessi bensî il luogo che essi

(28) l.c., p. 98.

(29) l.c., p. 4. Plus tard aussi, il défendra l'opinion qu'il est juste « in der Geometrie einen Teil der Naturwissenschaft zu erblicken » (de voir la géométrie comme une partie de la science naturelle) (M. PASCH [2], p. 1). Il ajoute : « Diesen Standpunkt habe ich von jeher vertreten » (Depuis toujours j'ai soutenu ce point de vue).

(30) PEANO [1] et [3].

(31) PEANO [9], en particulier p. 75. Dans cet article, les termes nécessaires à une théorie géométrique sont divisés en termes logiques, termes géométriques primitifs et termes géométriques dérivés.

occupano nello spazio intuitivo vuoto, diventando subito dopo una scienza puramente deduttiva » (La géométrie théorique se distingue donc des autres sciences expérimentales extérieures en ce qu'elle a besoin de l'observation extérieure pour établir ses axiomes proprement dits, mais qu'elle s'en affranchit complètement du fait qu'elle ne considère non pas les corps eux-mêmes, mais la place que ceux-ci occupent dans l'espace intuitif vide. Ainsi elle devient immédiatement après une science purement déductive) (32) (33).

Il sera d'ailleurs bientôt clair, que l'on peut se passer entièrement de l'expérience comme point de départ d'une construction déductive de la géométrie. Sur les traces de PEANO, G. FANO (34) et surtout M. PIERI ont eu une grande part dans ce processus.

De 1894 à 1899, PIERI publia une série d'études sur l'axiomatisation de la géométrie projective (35), au début à l'aide de trois termes primitifs, plus tard de deux (point ; droite de connexion de deux points). Il se sert de la logistique de PEANO pour l'expression de ses démonstrations.

En 1899, un résumé de cette série a été inséré dans les *Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino* (signé : octobre 1897) (36). Dix-neuf postulats y figurent, tandis qu'aussi certaines variantes qui se forment par une modification ou adjonction de postulats, y sont traitées. Dans un Appendice, PIERI discute l'indépendance et la consistance du système. L'indépendance devrait être démontrée, dit-il, par « 19 interpretazioni o specificazioni degli enti 'punto prj' e 'congiungente due

---

(32) G. VERONESE [1], p. IX.

(33) Aux pages XV - XVI, il donne six principes qui sont à la base de l'axiomatisation de la géométrie. Le dernier de ces principes est, dans la traduction allemande de 1895, conçu ainsi : « Die Axiome, Sätze und Beweise sollen vom Anfang an kein nicht definirtes Anschauungselement enthalten, derart nämlich, dass bei Abstraktion von der Anschauung von dem geometrischen System nur ein System rein abstrakter Wahrheiten übrig bleibt, in welchem die Axiome die Stelle von gut bestimmten Definitionen oder abstrakten Hypothesen einnehmen » (Les axiomes, les propositions et les démonstrations ne doivent, dès le début, contenir aucun élément intuitif non défini, c'est-à-dire qu'en faisant abstraction de l'intuition, il ne reste du système géométrique qu'un système de vérités purement abstraites, dans lequel les axiomes occupent la place de définitions bien définies ou d'hypothèses abstraites).

(34) En 1892, celui-ci écrit : « A base del nostro studio noi mettiamo una *varietà* qualsiasi di enti di qualunque natura ; enti che chiameremo, per brevità, *punti,* indipentemente però, ben intesto, dalla lora stessa natura » (G. FANO [1], pp. 108-109. Cité par H. FREUDENTHAL [7], p. 14).

(35) M. PIERI [1] - [5].

(36) M. PIERI [5].

punti prj' per ciascuno delle quali rimanesse insoddisfato *uno solo* di quei principî » (37) (19 interprétations ou spécifications des choses 'punto prj' et 'congiungente due punti prj' de telle façon que pour chacune d'elles resterait insatisfait *un seul* axiome). PIERI démontre seulement que chaque postulat est indépendant des postulats précédents. La consistance est démontrée avec un appel à la théorie des nombres réels. Il remarque que l'indépendance de la négation de chaque postulat par rapport aux dix-huit autres en résulte directement.

Le passage suivant, que nous trouvons dans l'introduction à l'étude en question, est, par sa tendance générale, de la plus grande importance : « Carattere principalissimo degli *enti primitivi* d'un qualsivoglia sistema ipotetico-deduttivo è l'èssere capaci d'interpretazioni arbitrarie, dentro certi confini assegnati dalle *proposizioni primitive* (*assiomi* o *postulati*). In altri termini il contenuto ideale delle parole o dei segni, che dinotano un qualche soggeto primitivo, è determinato soltanto dalle prop[i]. prim[e]. che versano intorno al medesimo : e il Lettore ha facultà di annettere a quelle parole e a que' segni un significato *ad libitum,* purchè questo sia compatibile con gli attributi generici imposti a quell' enti dalle propos[i]. primit[e]. » (38). (La caractéristique la plus importante des choses primitives de chaque système hypothétique-déductif est d'être susceptible d'interprétations arbitraires, dans certaines limites qui ont été indiquées par les propositions primitives (axiomes ou postulats). En d'autres termes, la signification des mots ou des signes qui indiquent un objet primitif quelconque, est uniquement déterminée par les propositions primitives qui s'y rapportent : et le lecteur a la faculté d'attribuer à discrétion une signification à ces mots et ces signes, pourvu que celle-ci soit compatible avec les propriétés générales qui sont imposées à ces objets par les propositions primitives).

Dans l'année suivante des *Memorie* paraît son essai *Della Geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo* (signé : avril 1899), qui forme la base de sa contribution au Congrès International de Philosophie à Paris en 1900 : *La géométrie envisagée comme un système purement logique*. Point et mouvement y sont les termes primitifs. C'est pendant ce même congrès que PADOA fait une conférence où il soumet entre autres les principes des démonstrations de l'indépendance à un examen (39). Notons que, lors de cette conférence, PADOA est le premier qui traitera aussi de l'indépendance des *termes* primitifs.

---

(37) M. PIERI [5], p. 60.
(38) l.c., p. 6.
(39) A. PADOA [2].

En général, l'ouvrage de HILBERT, *Grundlagen der Geometrie* (1899) est considéré comme le couronnement de l'évolution décrite ci-dessus. Cette opinion me semble juste. L'ouvrage couvre un terrain quelque peu plus étendu que ne le font les articles de PIERI qui le précèdent, du fait qu'il s'étend plus longuement sur les conséquences qui résultent de l'exclusion ou l'addition des axiomes. C'est dans cet ordre d'idées que H. FREUDENTHAL signale la force de persuasion d'une philosophie, « die nicht programmatisch verkündet, sondern handgreiflich durchexerziert wird » (40) (qui n'est pas prêchée dogmatiquement, mais développée en détails concrets). Toutefois il y a lieu de se demander si les articles de PIERI ne méritent pas plus d'attention qu'il ne leur en est attribuée en général. Car ici aussi plusieurs possibilités alternatives sont envisagées et tout comme HILBERT, PIERI se montre intéressé par les problèmes de l'indépendance et de la consistance. En plus, nous y trouvons, à côté de la partie purement mathématique, des observations méthodologiques de grande valeur, qui manquent chez HILBERT. Mais pas plus que HILBERT, PIERI n'emploie le terme « définition implicite ».

POINCARÉ, lui aussi, a reconnu les mérites de HILBERT. Il apprécie sa méthode strictement logique et quoiqu'il ait des objections contre la façon dont il néglige le problème de la genèse de la géométrie, il termine son compte rendu de HILBERT ainsi (41) : « Son œuvre est donc incomplète ; mais ce n'est pas une critique que je lui adresse. Incomplet, il faut bien se résigner à l'être. Il suffit qu'il ait fait faire à la philosophie des Mathématiques un progrès considérable, comparable à ceux que l'on devait à LOBATCHEFSKY, à RIEMANN, à HELMHOLTZ et à LIE » (42).

B. - La philosophie de la géométrie de Henri Poincaré.

En 1887, POINCARÉ publia son premier article sur la philosophie de la géométrie (43). Se reportant à la terminologie de KANT, il se demande au sujet des axiomes : « Sont-ce des faits expérimentaux, des jugements analytiques ou synthétiques a priori ? » (44). Sa réponse est à tous les points de vue négative. Les axiomes ne sont pas des descriptions de faits expérimentaux car la géométrie est une science tout à fait

(40) H. FREUDENTHAL [7], p. 24.
(41) H. POINCARÉ [23]. Voir aussi POINCARÉ [25].
(42) *Œuvres, XI*, p. 113.
(43) POINCARÉ [7].
(44) *Œuvres, XI*, p. 90.

exacte, qui n'est pas dépendante des données inexactes de l'observation. Ils ne sont ni des jugements analytiques ni des jugements synthétiques a priori, puisqu'ils peuvent être niés et que cette négation n'entrave pas la construction d'une géométrie.

Il est évident que POINCARÉ pense en particulier à la géométrie non-euclidienne et il accentue sa problématique à l'égard du postulat des parallèles : « En quel sens peut-on, par exemple, dire que le postulatum d'Euclide soit vrai ? » (45). La géométrie, dit POINCARÉ, est l'étude d'un groupe ; pourquoi l'homme a-t-il choisi justement le groupe euclidien pour y appliquer les phénomènes ? Son explication est, que le groupe euclidien est plus simple mathématiquement et plus commode physiquement. « Le groupe choisi est seulement plus commode que les autres et l'on ne peut pas plus dire que la géométrie euclidienne est vraie et la géométrie de LOBATCHEFSKY fausse, qu'on ne pourrait dire que les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires fausses » (46).

Dans cette formule est déjà impliquée la quintessence de l'opinion qui, plus tard, sera connue comme conventionalisme (47). Cela revient donc à dire que les axiomes sont considérés non pas comme des énoncés sur l'espace réel, ni comme des caractéristiques d'une forme intuitive qui est déjà impliquée dans l'esprit de l'homme, mais comme des conventions, qui sont acceptées en considération de leur commodité à décrire efficacement nos perceptions sensorielles.

POINCARÉ revient plus amplement sur cette question dans un article, écrit en 1891, *Les géométries non-euclidiennes* (48). Ici paraissent pour la première fois les termes « convention » et « définition déguisée ».

Après avoir donné un aperçu de quelques problèmes qui touchent à la découverte et au développement de la géométrie non-euclidienne, POINCARÉ énonce une fois de plus que les axiomes ne font pas partie de la classification de KANT. Ils ne sont pas des jugements : « Ce sont des *conventions* ; notre choix, parmi toutes les conventions possibles, est guidé par des faits expérimentaux ; mais il reste *libre* et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction. C'est ainsi que les postulats peuvent rester *rigoureusement* vrais quand même les lois expérimentales qui ont déterminé leur adoption ne sont qu'approximatives.

---

(45) l.c., p. 90.
(46) l.c., p. 91.
(47) J'ai en vue ici seulement la branche géométrique et non pas la branche physique de cette théorie.
(48) POINCARÉ [8].

En d'autres termes, *les axiomes de la géométrie* (...) *ne sont que des définitions déguisées.*

Dès lors, que doit-on penser de cette question : La géométrie euclidienne est-elle vraie ?

Elle n'a aucun sens.

Autant demander si le système métrique est vrai et les anciennes mesures fausses ; si les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires fausses. Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être *plus commode* » (49).

Ensuite, il paraît que la commodité de la géométrie euclidienne repose d'une part sur sa plus grande simplicité mathématique, d'autre part sur le fait, qu'elle « accorde assez bien avec les propriétés des solides naturels, ces corps dont se rapprochent nos membres et notre œil et avec lesquels nous faisons nos instruments de mesure » (50).

Selon POINCARÉ, la géométrie euclidienne ne peut être considérée ni comme vraie ni comme fausse. La partie la plus intéressante de cette conception est, qu'il est impossible d'emprunter à l'expérience des arguments en faveur de la vérité ou de la fausseté de cette géométrie. Il vaut la peine d'examiner de près comment POINCARÉ justifie ce point.

En premier lieu, il remarque que la géométrie traite d'autres choses que de celles qu'on aperçoit en réalité. Les notions géométriques sont des notions idéales, et « on n'expérimente pas sur des droites ou des circonférences idéales ; on ne peut le faire que sur des objets matériels » (50 a). Ailleurs, il dit : « Les expériences ne nous font connaître que les rapports des corps entre eux ; aucune d'elles ne porte, ni ne peut porter, sur les rapports des corps avec l'espace, ou sur les rapports mutuels des diverses parties de l'espace » (51).

Un second argument est indirect. Si la géométrie était d'une façon ou de l'autre dépendante de l'expérience, elle serait sujette à un continuel processus de révision. Or, la géométrie est invariable. Il est vrai qu'ici on pourrait alléguer qu'il s'est montré possible de bâtir de nouvelles géométries à côté des géométries déjà existantes ; les anciens systèmes cependant n'ont pas été rejetés à cause de cela.

En troisième lieu, il en appelle au fait que les géométries euclidienne et non-euclidienne peuvent être traduites l'une dans l'autre

(49) *SH,* pp. 66-67 ; POINCARÉ [8], pp. 773-774.

(50) *SH,* p. 67 ; POINCARÉ [8], p. 774.

(50a) *SH,* pp. 65-66 ; POINCARÉ [8], p. 773.

(51) *SH,* p. 100 ; aussi RMM, 8, p. 79. Idem pour les rayons de lumière, cf. RMM 7, p. 265.

comme l'ont montré RIEMANN, BELTRAMI, KLEIN, CAYLEY, et POINCARÉ lui-même. Une partie de l'espace physique qui peut être décrite à l'aide de la géométrie euclidienne peut être décrite donc également à l'aide d'une des autres. C'est-à-dire : si elle est un modèle de la géométrie euclidienne, alors elle l'est également de la géométrie de LOBATCHEFSKY ou de RIEMANN. POINCARÉ dit : « Peut-on soutenir que certains phénomènes, possibles dans l'espace euclidien, seraient impossibles dans l'espace non-euclidien, de sorte que l'expérience, en constatant ces phénomènes, contredirait directement l'hypothèse non-euclidienne ? Pour moi, une pareille question ne peut se poser. A mon sens, elle équivaut tout à fait à la suivante, dont l'absurdité saute aux yeux de tous : y a-t-il des longueurs que l'on peut exprimer en mètres et centimètres, mais que l'on ne saurait mesurer en toises, pieds et pouces, de sorte que l'expérience, en constatant l'existence de ces longueurs, contredirait directement cette hypothèse qu'il y a des toises partagées en six pieds ? » (52). Si, par exemple, il se trouvait que les rayons de lumière et les axes rotatifs ne se comportent pas comme des droites euclidiennes, l'homme ne serait aucunement forcé de rejeter la géométrie euclidienne. POINCARÉ est même convaincu que plutôt que de changer de géométrie, on se décidera à reconstruire la physique de telle façon que la conception euclidienne reste maintenue (53). Il conclut sa description de son célèbre monde de fantaisie dont les habitants choisiraient très probablement, sinon certainement, la géométrie de LOBATCHEFSKY pour décrire leur espace (54), en disant : « Quant à nous, en face des mêmes impressions, il est certain que nous trouverions plus commode de ne pas changer nos habitudes » (55).

En le formulant de manière un peu différente, l'argument précédent revient à ceci : une géométrie ou une autre ne peut être vérifiée à l'aide de l'expérience que quand certaines hypothèses « géométriques » concernant l'expérience ont été faites, c'est-à-dire quand on a décidé quels objets ou phénomènes physiques doivent être considérés comme des lignes droites ou des corps solides. L'expérience ne peut pas nous l'apprendre. Cette question est amplement discutée dans une polémique avec RUSSELL à propos de son ouvrage *Essay on the Foundations of*

(52) *SH*, pp. 93-94 ; aussi RMM 7, pp. 265-266.

(53) *SH*, p. 93. Cette prophétie n'a pas été tout à fait réalisée.

(54) RgSpa 3, pp. 74-75. Voir aussi *SH*, pp. 84-87.

(55) *SH*, p. 91.

Geometry sur lequel je demande qu'il me soit permis de m'arrêter un moment (56).

RUSSELL avait soutenu dans son livre qu'entre autres le postulat des parallèles est l'expression d'un fait empirique. POINCARÉ le défie de proposer une expérimentation concrète, par laquelle sa vérité se montrerait indéniable (57).

RUSSELL reconnaît que l'expérience ne peut jamais conduire à un résultat tout à fait exact. Cependant, il croit qu'à l'aide de mesures des surfaces et des contenus, il est possible de mettre certaines limites au rayon de courbure, et qu'en réalité l'espace est euclidien ou non (58). Ceci est fondamentalement contesté par POINCARÉ. A son sens, on ne peut rien savoir sur les rapports quantitatifs de distance, surface et contenu autrement qu'à partir d'un certain système de mensuration. Quand on enfouit une bille dans la terre on peut seulement constater que (à ce moment) la terre est plus grande que la bille. Combien de fois plus grande ? C'est ce qui ne peut être dit qu'après avoir fait une convention par laquelle par exemple la bille est choisie comme unité invariable (59). La même chose s'applique à l'univers : « Je ne puis affirmer, sans adopter un système de mensuration, qu'il est plus grand qu'une bille et demie, qu'une bille et un dixième, ni même qu'une bille et un millionième. Une pareille affirmation n'est ni vraie ni fausse » (60).

En résumé, cette divergence d'opinions consiste en ce que RUSSELL attribue à la notion de distance un contenu intuitif, tandis que POINCARÉ est d'avis que celle-ci doit être définie. « La distance est le résultat de la comparaison de deux ' Strecken ' », écrit-il à ce sujet (61), et d'une manière ou d'une autre il faudra déterminer comment cette comparaison doit s'effectuer. « Quand on dit ' la distance AB ' en faisant abstraction de la possibilité de comparer cette distance à d'autres, on prononce cinq syllabes et rien de plus » (62). Or, cette comparaison est réalisée par le choix d'un certain système de mensuration. Quand on y considère les corps soi-disant solides comme étant invariables (sans compter certaines déformations), la possibilité se présente de décrire l'espace

(56) Cet échange d'idées se trouve dans RMM 7 et 8. Pour ce qui précède, voir aussi E.W. BETH [5], pp. 120-126.

(57) RMM 7, p. 279.

(58) RMM 7, pp. 684-696.

(59) RMM 8, pp. 80-81.

(60) RMM 8, p. 81.

(61) RMM 8, p. 80. RUSSELL croyait entrevoir dans cette définition un cercle vicieux, cf. RMM 7, p. 687.

(62) RMM 8, p. 78.

physique à l'aide de la géométrie euclidienne. D'autre part, l'acceptation du postulat des parallèles limite les possibilités de comparer deux segments ou angles, c'est-à-dire les possibilités de choisir une définition physique de « congruence ». En réalité, POINCARÉ semble penser que l'acceptation de la géométrie euclidienne détermine uniquement la façon dont la comparaison de deux segments ou angles se fait (63). C'est pourquoi le postulat des parallèles est appelé par lui une définition (déguisée) de la notion de distance (64). Apparemment, il ne s'agit pas ici de quelque chose qui s'accomplit dans la géométrie pure. Plutôt s'agit-il du fait, que le choix de la géométrie euclidienne comporte que les corps solides peuvent en effet être considérés comme invariables et que par conséquent ils peuvent servir — du moins dans certaines limites et avec certaines corrections — comme instruments de mensuration.

Ce raisonnement implique que la tentative de démontrer la géométrie euclidienne par l'expérience n'est pas réalisable. Comme HELMHOLTZ, POINCARÉ est de l'opinion, qu'avant de pouvoir procéder à une vérification de la géométrie, on est forcé de faire de telles suppositions que la vérification devient impossible (65). Pas plus qu'une langue, la géométrie n'est susceptible d'être vérifiée ou prouvée fausse (66). « En résumé, de quelque façon qu'on se retourne, il est impossible de découvrir à l'empirisme géométrique un sens raisonnable », voilà la conclusion de POINCARÉ (67).

En défendant le point de vue selon lequel la géométrie part de conventions choisies pour leur commodité, POINCARÉ se concentre non seulement sur le postulat des parallèles, mais aussi sur le nombre des dimensions de l'espace. Les articles *On the Foundations of Geometry* (1899) et *L'espace et ses trois dimensions* (1903) nous fournissent là-dessus les exposés les plus détaillés. Différentes théories sur la provenance de la tridimensionalité y paraissent juxtaposées.

---

(63) « Mais la distance est-elle parmi les choses que l'on peut définir ? Je réponds oui ; car j'en donne une définition qui n'est autre chose que le postulatum d'Euclide » (RMM 8, p. 74). Quoique CARNAP et REICHENBACH eux aussi, estiment que l'acceptation de la mesure de courbure 0 suffit à obtenir la notion normale de distance, A. GRÜNBAUM montre que cette prémisse permet aussi de tout autres métriques (Voir GRÜNBAUM [1], en particulier pp. 214-216, (ici aussi des références à CARNAP et REICHENBACH) et GRÜNBAUM [2] (idem)).

(64) RMM 8, pp. 74-76.

(65) POINCARÉ soutient aussi que le « conventionalisme » n'est pas en opposition avec « la loi de la relativité ». Cf. RMM 7, pp. 267-269.

(66) RMM 8, p. 79.

(67) RMM 7, p. 269.

(68) POINCARÉ [15] et [24].

Premièrement, POINCARÉ fait une distinction selon la nature des sensations qui contribuent à la notion d'espace (68 a). L'espace visuel est autre que l'espace tactile et tous deux doivent être distingués de l'espace qui repose principalement sur le sentiment des mouvements des muscles (69). POINCARÉ estime que ce dernier, qu'il appelle « l'espace moteur » (en réalité, il s'agit d'un espace haptique puisque le sens moteur y paraît en combinaison avec le sens tactile) est le plus important. Son analyse de cet espace est à son tour composée de deux théories.

D'un côté, son raisonnement tourne autour de la notion du déplacement. Ici, il part du principe que les changements qui furent perçus par l'homme à la phase pré-géométrique peuvent être divisés en changements intérieurs et extérieurs ; les changements intérieurs se distinguent du fait qu'ils sont arbitraires et qu'ils vont de pair avec des perceptions des muscles. Il se trouve alors qu'une partie des changements extérieurs peut être corrigée par des changements intérieurs. Ces changements extérieurs sont nommés « déplacements » (70), de même que les changements intérieurs qui peuvent corriger un changement extérieur. Regardant de plus près, il paraît que les déplacements forment à peu de chose près un groupe, ce qui veut dire que l'espace est homogène, isotrope et sans limites. En plus, les expériences indiquent que ce groupe est d'ordre six (71) et qu'il est continu. Comment l'homme est-il arrivé à choisir une représentation tridimensionnelle de ce groupe ? (72). Premièrement, il a dû remarquer que le groupe de déplacements contient beaucoup de sous-groupes, tel que les sous-groupes rotatifs (consistant en rotations autour d'un point) et les sous-groupes hélicoïdaux (consistant en rotations autour d'un axe combinées avec une translation dans la direction de cet axe) (73). En outre, il apparaît que des déplacements, qui diffèrent à première vue, peuvent être considérés

---

(68a) Pour ce qui suit, voir aussi E.W. BETH [5], chap. 7, où l'on trouve aussi mentionnée de la littérature psycho-physiologique (Th. ZIEHEN, W.H. ten SELDAM, E. MACH, E. von CYON, G. MANNOURY).

(69) En bref, POINCARÉ parle aussi des canaux semi-circulaires. Voir *VS*, chap. IV, § 7.

(70) Ou bien « changements de position », RMM 3, p. 636.

(71) Parce qu'il y a six transformations indépendantes infinitésimales, dans lesquelles chaque transformation infinitésimale peut être exprimée de façon linéaire (POINCARÉ [15], pp. 21-22). D'après LIE, cette condition équivaut l'existence de six paramètres essentiels.

(72) POINCARÉ fait remarquer qu'au début, il y a autant de dimensions que de nerfs ([15], p. 23).

(73) Le groupe de toutes les translations qui, dans la géométrie euclidienne, est un sous-groupe invariant, est important aussi.

comme étant identiques, parce qu'ils peuvent être annulés par le même changement intérieur. C'est ainsi que deux rotations, reconnaissables à la propriété de laisser une seule sensation inaltérée (74), sont identiques sans que cette sensation soit dans les deux cas la même. Le nombre des sous-groupes rotatifs y diminue fortement. Chacun d'eux est d'ordre trois et peut être — de façon tout à fait schématique — mis en rapport avec la notion de « point » ; et la collection de tous les transformés $D R D^{-1}$ d'un groupe rotatif donné R (D parcourt le groupe des déplacements) est une infinité continue à trois dimensions. Un espace à quatre dimensions, par exemple, serait trouvé, si au lieu du point, la ligne, c'est-à-dire le caractère schématique du sous-groupe hélicoïdal, était choisie comme élément.

Déjà à la fin de son article dans *The Monist,* mais surtout dans son article de 1903, Poincaré s'est éloigné de la théorie exposée ci-dessus. « Ce groupe des déplacements », remarque-t-il « est apparenté à l'espace, et on pourrait en déduire l'espace, mais il n'est pas équivalent à l'espace puisqu'il n'a pas le même nombre de dimensions ; et quand nous aurons montré comment la notion de ce continu peut se former et comment on peut en déduire celle de l'espace, on pourrait toujours se demander pourquoi l'espace à trois dimensions nous est beaucoup plus familier que ce continu à six dimensions, et douter par conséquent que ce soit par ce détour, que s'est formé dans l'esprit humain la notion d'espace » (75). La tridimensionalité est ensuite expliquée indépendamment de la notion de déplacement. Les mouvements du corps humain où un certain doigt reste à sa place, forment le point de départ. Nommons la classe de ces mouvements σ ; on les trouve par l'expérience, parce qu'en beaucoup de cas, la sensation à laquelle ce doigt est exposé, ne change pas par suite de ces mouvements. Tous les mouvements se laissent maintenant diviser en classes, de façon que les mouvements qui sont identiques mod. σ retombent dans une même classe. Nous voyons que cette classification a comme résultat un continu physique (76) à

---

(74) L'expérience nous apprend que cette sensation n'est pas une sensation visuelle, mais qu'elle doit être une sensation tactile. Nous exprimons cela en disant que le sens visuel opère à distance, et que le sens tactile n'opère pas à distance.

(75) RMM 11, p. 410. Aussi dans *VS,* p. 102.

(76) Selon Poincaré, un continu s'appelle physique, lorsque $A = B$ et $B = C$ peut être accompagné de $A \neq C$.

trois dimensions (77). Le nombre de dimensions d'un continu y est défini ainsi : le nombre de dimensions est 1 quand le continu est divisé par un nombre fini d'éléments qui sont séparés entre eux ; il est n + 1 quand il ne peut être divisé que par un continu d'au moins n dimensions (78). POINCARÉ cherche aussi ce qui peut être la cause de ce que les différents espaces, qui sont liés aux différents doigts, sont identiques.

Mais ici aussi l'expérience ne mène pas à des conclusions univoques. Elle nous apprend seulement qu'il est facile, mais non pas nécessaire d'attribuer à l'espace trois dimensions. Cette attribution n'est possible qu'en négligeant des phénomènes qui sont en contradiction avec la majorité des phénomènes trouvés, ce qui toutefois implique un certain élément arbitraire. Que cet élément est minime en l'occurrence, c'est ce que POINCARÉ démontre dans *Pourquoi l'espace a trois dimensions* ; en somme, POINCARÉ soutient dans cet ouvrage la théorie que l'homme est obligé d'accepter une conception de l'espace à trois dimensions, parce que sans cela il aurait perdu pied dans la lutte pour la vie. POINCARÉ y démontre également que l'on ne peut pas voir les axiomes d'ordre de HILBERT comme conventionnels. Il les caractérise comme « de véritables propositions intuitives » (79) et il les estime indispensables pour une description de l'espace réel ; il avait déjà autrefois constaté une même indispensabilité à l'égard de l'axiome d'Archimède (80).

Dans les pages précédentes, nous avons déjà parlé du fait que selon POINCARÉ, la géométrie est l'étude d'un groupe de mouvements. Sans groupe, aucune géométrie ne serait possible. En général, il a en vue le groupe des déplacements, auquel cas la proposition implique qu'aucune géométrie n'est possible sans corps solides et mobiles. « Si donc il n'y avait pas de corps solides dans la nature, il n'y aurait pas de géométrie » (81), voilà ses propres mots. Parfois, il applique cette proposition au groupe de tous les mouvements du corps humain. « But be this as it may » (mais quoiqu'il en soit), écrit-il après avoir fait mention des deux possibilités, « the introduction of a group, more or

---

(77) Cette théorie a été développée plus en détails dans POINCARÉ [38]. On en trouve une version à part dans POINCARÉ [32].

(78) Voir p. ex. *SH*, pp. 44-47.

(79) RMM 20, p. 503 ; *DP*, pp. 94-95.

(80) Néanmoins, il est au courant de l'existence de la géométrie non archimédienne (*SH*, pp. 63-64).

(81) RMM 3, p. 368. Aussi *SH*, p. 80.

less complicated, appears to be absolutely neccessary » (82) (l'introduction d'un groupe plus ou moins compliqué paraît être absolument nécessaire). Il est d'avis que « le concept général de groupe préexiste dans notre esprit au moins en puissance. Il s'impose à nous, non comme forme de notre sensibilité, mais comme forme de notre entendement » (83).

La première de ces idées exclut plusieurs géométries, dont l'existence était connue depuis RIEMANN. Cependant, il nous faut remarquer que POINCARÉ fait également allusion à ces géométries-là, ce qui est entre autres le cas dans l'article de 1887, mais encore plus clairement dans sa *Réponse à quelques critiques* ; dans cet essai, l'homogénéité de l'espace est décrite comme une convention, qui n'est pas nécessaire pour la géométrie. Il semble donc possible que la condition de la présence des corps solides ne soit pas tant envisagée comme une demande mathématique que comme une demande psychologique. Il semble supposer que les expériences de l'homme ne peuvent mener à une géométrie qui est applicable à cette expérience, que quand il se présente un groupe de mouvements. Ce n'est qu'ainsi qu'une distinction peut être faite entre des changements observés qui sont, et qui ne sont pas de circonstance au point de vue géométrique (84).

Je termine en citant quelques phrases de l'article paru dans *The Monist,* étant donné que la philosophie de la géométrie de POINCARÉ y est probablement mieux résumée qu'ailleurs. « Geometry is not an experimental science, experience forms merely the occasion for our reflecting upon the geometrical ideas which pre-exist in us. But the occasion is necessary ; if it did not exist we should not reflect ; and if our experiences were different, doubtless our reflections would also be different. Space is not a form of our sensibility ; it is an instrument which serves not to represent things to ourselves, but to reason upon things » (85). (La géométrie n'est pas une science expérimentale, l'expérience nous donne seulement l'occasion de réfléchir sur les idées géométriques qui préexistent en nous. Mais l'occasion est nécessaire ; si elle n'existait pas, nous ne réfléchirions pas ; et si nos expériences étaient différentes, nos réflexions seraient sans doute différentes aussi. L'espace n'est pas une forme de notre sensibilité ; il est un instrument qui nous sert non pas à nous représenter les choses, mais à raisonner sur elles). Cet instrument

(82) POINCARÉ [15], p. 32.
(83) *SH,* pp. 90-91.
(84) Cf. aussi RMM 7, p. 276.
(85) POINCARÉ [15], p. 41.

peut être choisi sans que ce choix « is imposed by experience. It is simply guided by experience. But it remains free ; we choose this geometry rather than that geometry, not because it is more *true,* but because it is more *convenient* » (86) (soit imposé par l'expérience. Il est simplement guidé par l'expérience. Mais il reste libre ; nous choisissons plutôt cette géométrie-ci que celle-là, non pas parce qu'elle est plus *vraie,* mais parce qu'elle est plus *commode*).

C. - **Rétrospective.**

La philosophie de la géométrie de POINCARÉ a été critiquée tant au point de vue terminologique qu'au point de vue matériel.

La première forme de critique se trouve notamment dans un article de E. DUPRÉEL, intitulé *Convention et Raison,* où l'auteur en vient à la conclusion suivante : « On peut dire que si POINCARÉ a popularisé en philosophie le mot de convention, c'est à peine si, en réalité, il en a retenu l'idée, dont le noyau est l'accord des esprits » (87). Il y ajoute une critique matérielle : POINCARÉ aurait admis à tort que les conventions décrites par lui reposent chez tous les participants sur les mêmes réflexions. A. LALANDE a également envisagé cette question dans son *Vocabulaire Technique et Critique de la Philosophie,* estimant que le terme « convention », tel que le comprend POINCARÉ, pourrait être remplacé par « choix décisoire » (88).

Le fait est que le terme convention est à l'origine de malentendus évidents. La signification de ce terme envisagée par POINCARÉ n'a rien à voir avec des notions telles que « accord » ou « entente », ni est-il question d'une connotation péjorative, ainsi que nous fait aussi observer LALANDE. Toutefois, la notion d'« habitude » y joue un grand rôle. POINCARÉ définit dans les termes suivants l'évidence de la conception de l'espace à trois dimensions : « Cette évidence n'est autre chose que la répugnance que l'on éprouve à rompre avec de très vieilles habitudes, dont on s'est toujours bien trouvé » (89), et à l'égard de l'euclidicité des jugements analogues sont formulés (90). Mais en même temps il ne faut pas manquer de mentionner la connotation « délibération ration-

(86) l.c., p. 42.

(87) DUPRÉEL [1], p. 291.

(88) LALANDE [1]. Voir aussi la thèse de E.W. BETH : « Pour les conceptions de POINCARÉ à l'égard du dit problème des fondements des mathématiques, « conventionalisme » n'est pas un nom efficace » (E.W. BETH [1]).

(89) *SM,* p. 108.

(90) Voir p. ex. *SH,* p. 91.

nelle ». Les axiomes géométriques ne sont-ils pas, d'après POINCARÉ, des « conventions commodes » ou des « conventions justifiées » ? (91). Et si leur acceptation n'a pas été précédée de délibération rationnelle, elle peut au moins en être suivie ; il est possible de motiver nos habitudes géométriques à l'aide de nos expériences.

Plus que dans la conception naïve de l'espace, cette délibération rationnelle se manifeste dans la géométrie comme outil scientifique. Elle y est même devenue courante depuis le début de notre siècle. La question des conditions dans lesquelles l'on mesure est fondamentale pour la théorie de la relativité et la recherche dans ce domaine a abouti à la conclusion, qu'outre la géométrie euclidienne d'autres géométries peuvent être données comme fondement à la physique. C'est ce qui explique le grand enthousiasme d'EINSTEIN pour la philosophie géométrique de POINCARÉ (92).

Or, M. L. ROUGIER distingue dans son livre *La philosophie géométrique de Henri Poincaré* quatre formes différentes de conventions justifiées. Il les appelle : « conventions d'écriture, conventions nominales, conventions d'interprétation, conventions instrumentales » (93). Il écrit alors à propos de la philosophie de POINCARÉ : « suivant le point de vue auquel l'on se place, suivant qu'il s'agit de la géométrie pure ou de géométrie appliquée, le postulat d'Euclide apparaît tour à tour (...) comme une convention nominale ou comme une convention instrumentale » (94).

Cette opinion qui est exprimée de nouveau à la fin du chapitre VI de l'ouvrage cité (95), ne me paraît pas juste. Le conventionalisme de POINCARÉ se rapporte seulement à la géométrie en tant que science appliquée. La distinction que ROUGIER fait entre géométrie pure et géométrie appliquée n'y joue pas un rôle important : pour POINCARÉ, l'acceptation de la géométrie euclidienne va de pair avec l'acceptation d'un système de mensuration pratique. Ce n'est d'ailleurs pas pour rien que cette conception se rattache aux idées conventionalistes sur les

---

(19) Le dernier terme p. ex. dans *DP*, p. 94.

(92) Voir P.A. SCHILPP [1], pp. 677-679. Que l'on compare à cela la déclaration suivante de REICHENBACH : « Die Leistung Einsteins besteht hier nur darin, mit der theoretischen Einsicht in die Relativität der Geometrie Ernst gemacht zu haben » (La seule chose qu'Einstein ait accompli ici, c'est d'avoir pris au sérieux la conception théorique de la relativité de la géométrie) (REICHENBACH [1], p. 48).

(93) L. ROUGIER [1], pp. 122-123.

(94) l.c., p. 128.

(95) En outre, la tridimensionalité y est décrite comme « une convention d'interprétation ».

principes de la physique et de la mécanique et de l'astronomie. Cela n'implique pas que POINCARÉ ait exclu la possibilité de construire la géométrie comme une science pure. Au contraire : POINCARÉ insiste beaucoup sur le caractère tout à fait exact de cette science et il estime que l'existence de ses entités est assuré, pourvu qu'il n'y ait pas de contradictions (96). Il est même persuadé, que pour une compréhension juste de la mathématique en général et de la géométrie en particulier, il faut surtout prêter son attention à ces systèmes qui s'écartent des conceptions communes. « Plus ces spéculations s'écartent des conceptions les plus communes, et par conséquent de la nature et des applications, mieux elles nous montreront ce que l'esprit humain peut faire (...) » (97).

Néanmoins, il continue ainsi : « Mais c'est du côté opposé, du côté de la nature, qu'il faut diriger le gros de notre armée » (98). En dépit de sa reconnaissance des droits que la mathématique, en tant que science pure, pouvait faire valoir, POINCARÉ avait horreur d'une « science dépourvue de portée », « impuissante » quoique « certaine » (99). C'est pourquoi l'autonomie de la mathématique à l'égard de la réalité n'avait pas vraiment son intérêt philosophique. Sa notion de « convention » n'a pas trait à une théorie axiomatique abstraite. Elle caractérise les axiomes par rapport à la réalité de l'expérience qui a servi de motif et en tant qu'ils continuent à y être engagés.

On ne voit nulle part que POINCARÉ ait été disposé à caractériser comme conventions aussi les axiomes de la géométrie hyperbolique de LOBATCHEFSKY, par exemple, en raison du fait qu'ils forment la base d'une théorie déductive. Ils ne deviendraient des conventions, qu'au moment où ils nous serviraient à décrire et à ordonner nos expériences de l'espace. Par conséquent, il est également faux d'identifier la signification du terme de « définition déguisée » avec celle du terme de « définition implicite » dans le sens de l'axiomatique, ainsi que le fait partiellement ROUGIER (100). C'est à juste titre que H. FREUDENTHAL conteste une pareille identification (101). Selon POINCARÉ, les axiomes sont des définitions déguisées en tant qu'ils déterminent un système de mensuration pratique. Seule la décision concernant la géométrie qui est

---

(96) *SH*, p. 59 ; POINCARÉ [8], p. 772.

(97) *SM*, pp. 31-32.

(98) *SM*, p. 32.

(99) *SH*, p. 3.

(100) L. ROUGIER [1], pp. 124-125.

(101) H. FREUDENTHAL [6], p. 115.

appliquée, est une question de convention, et « cette convention définit à la fois l'espace et l'instrument parfait » (102).

La critique matérielle porte le plus souvent sur l'attitude de POINCARÉ envers l'empirisme. Beaucoup estiment qu'il s'en est trop éloigné. Déjà, chez F. ENRIQUES, l'on rencontre dans ses *Problemi della scienza,* une critique de cette teneur. ENRIQUES considère POINCARÉ comme un représentant du nominalisme dans la philosophie de l'espace. Il puise ses arguments les plus importants dans l'imagination par POINCARÉ d'un monde dans lequel les corps ont une géométrie lobatchefskienne. Il dit que la géométrie de ce monde diffère non pas seulement en apparence, mais réellement du monde euclidien. D'après ENRIQUES, POINCARÉ part d'une notion transcendante de la réalité et il suppose un observateur qui n'est pas soumis aux conditions données (103).

Une même critique se trouve dans l'ouvrage de V. KRAFT, *Mathematik, Logik und Erfahrung.* L'auteur estime que la thèse conventionaliste, selon laquelle des corps ne seraient solides que par définition est : « zunächst nur von einem metaphysischen Gesichtspunkt aus verständlich » (104) (compréhensible avant tout seulement d'un point de vue métaphysique). Ni l'un ni l'autre commentaire n'est tout à fait justifié. Selon le conventionalisme, il n'importe pas de parler des corps solides au sens absolu. Le fait que l'arbitraire qui joue un rôle ici, peut être interprété comme un arbitraire dans le choix d'un *observateur* transcendant, ne veut pas encore dire qu'un observateur transcendant soit indispensable. Le cas échéant, l'on peut, pour la caractérisation des conceptions de l'espace, se passer d'un observateur transcendant. KRAFT qui, de son côté, tient le conventionalisme pour la théorie moderne des jugements synthétiques a priori, s'appuie finalement sur une règle qui est plutôt d'ordre pragmatique ou méthodologique que logique : « Man darf nicht physikalische Annahmen machen ohne einen anderen Grund als den, die Anwendung einer vorausbestimmten Geometrie zu ermöglichen » (On n'a pas le droit de faire des suppositions physiques sans autre raison que celle de rendre possible l'application d'une géométrie qui est définie d'avance) (105). « Man darf nicht » (on n'a pas le droit) semble supposer « man kann » (on est capable de) ; on pourrait faire rentrer cet énoncé dans une théorie conventionaliste,

(102) *DP,* p. 41.
(103) F. ENRIQUES [1], Paris, 1913, p. 13.
(104) V. KRAFT [1], p. 49.
(105) l.c., p. 53.

qui diffère de celle de POINCARÉ seulement en ce qui concerne la notion « commode ».

Outre ENRIQUES (106) et KRAFT (107), REICHENBACH (108) aussi est d'avis que le conventionalisme de POINCARÉ est en dernière analyse un prolongement du Kantisme. REICHENBACH admet en même temps que la notion « corps solide » exige une « Zuordnungsdefinition » (définition de correspondance) qui est au fond arbitraire. Cependant, il conteste catégoriquement que cela rende impossible tout énoncé objectif sur la géométrie de l'espace physique. « Im Gegenteil ist es gerade die Bedeutung der Zuordnungsdefinitionen, dass sie den physikalischen Massangaben objektiven Sinn verleihen » (109) (C'est au contraire la portée des définitions de correspondance de prêter un sens objectif aux données des mensurations physiques). Aussi croit-il qu'une distinction objective est possible entre des mondes qui, sans la supposition des forces universelles, montrent différentes géométries (110). Il est probable que POINCARÉ partagerait cette opinion. Mais en raison de l'argument que le physicien préfère ne pas introduire des forces universelles, REICHENBACH énonce plus ou moins contrairement à l'opinion de POINCARÉ : « Es handelt sich für die Physik nicht darum welche Geometrie einfacher, sondern welche Zuordnungsdefinition einfacher ist » (111) (Pour la physique, il ne s'agit pas de savoir quelle géométrie est la plus simple, mais quelle définition de correspondance est la plus simple). Ensuite, REICHENBACH nous montre que l'application de la géométrie euclidienne à un espace physique, qui diffère topologiquement de notre espace, peut conduire à des anomalies dans la causalité (112).

---

(106) Outre dans l'ouvrage déjà mentionné, également dans ENRIQUES [2], p. 9.

(107) « Er ist die moderne Theorie der synthetischen Urteile a priori » (il (c'est-à-dire le conventionalisme) est la théorie moderne des jugements synthétiques a priori) (KRAFT [1], p. 68).

(108) REICHENBACH [2], p. 133.

(109) REICHENBACH [1], p. 49. L'objectivité réside seulement dans un énoncé relatif au lieu de dans un énoncé absolu. Que l'on compare : « Dadurch, dass wir die Temperaturskala willkürlich festsetzen können, wird die Angabe der Temperatur eines Naturkörpers keineswegs eine subjektive Angelegenheit » (le fait que nous pouvons établir à volonté l'échelle de température n'implique nullement que la mention de la température d'un corps naturel devient une affaire subjective) (l.c., p. 49).

(110) REICHENBACH [2], p. 136.

(111) REICHENBACH [1], p. 46.

(112) REICHENBACH [1], p. 79-82.

La critique que Augusto CECCHINI soulève dans son ouvrage *Il Concetto di Convenzione matematica in Henri Poincaré,* a surtout comme but de montrer que les idées de POINCARÉ sont contradictoires. Des éléments empiristes et kantistes y seraient présents (113). CECCHINI est aussi d'avis qu'il ne convient pas à un conventionaliste de soumettre les systèmes géométriques concevables à l'exigence non-conventionaliste de la consistance (114).

Ce dernier reproche est en effet très déraisonnable ; il va sans dire que chacun a le droit de dresser ses propres théories, si nécessaire. Et en général, il est dangereux de manier l'empirisme et le Kantisme comme pierre de touche. Le fait que la théorie de POINCARÉ présuppose l'activité créative de l'esprit humain n'est pas plus suffisant pour le qualifier de Kantiste (raté ou déguisé) (115) que le fait qu'il accepte l'expérience est suffisant pour le qualifier d'empiriste (raté). La position intermédiaire qu'occupe le conventionalisme est en soi légitime. C'est à juste titre que POINCARÉ a signalé la définition impliquée dans l'application d'une géométrie à l'espace physique et l'importance essentielle du choix d'un instrument de mesure. Et en tout cela sa façon « large » de philosopher a été de grande importance. Ses efforts méthodiques pour rechercher la signification de certaines expressions, son attention pour l'impropriété des problèmes qui, pourtant, semblent s'imposer, ont eu un effet stimulant sur une grande partie de la philosophie du vingtième siècle. Dans cet ordre d'idées, il n'est pas très important que la science naturelle moderne ait interprété la notion « commode » plutôt au sens de REICHENBACH que de POINCARÉ.

Par contre, il est permis de critiquer la connaissance que POINCARÉ possédait de la recherche des fondements géométriques de son époque. C'est ce qu'a surtout fait H. FREUDENTHAL (116). Il remarque que POINCARÉ ne fait pas de distinction entre l'espace mathématique et physique, qu'il parle d'axiomes sans les préciser suffisamment, qu'il ignore les œuvres de PASCH, PEANO, PIERI et autres (117). FREUDENTHAL estime que POINCARÉ « noch ganz empiristisch im Sinne des Helmholtz-

(113) A. CECCHINI [1], pp. 19-20.

(114) l.c., p. 21.

(115) Le philosophe néo-kantien Bruno BAUCH s'accorde en grandes lignes avec le conventionalisme de POINCARÉ, mais il n'approuve pas sa conception de commodité. Voir B. BAUCH [1], pp. 213-235.

(116) H. FREUDENTHAL [6], pp. 114-115 et [7], pp. 17-25.

(117) FREUDENTHAL [7], p. 17, 23.

schen Raumproblems denkt » (pense encore tout à fait de façon empiriste dans le sens du problème de l'espace de HELMHOLTZ) (118).

En effet, il nous faut admettre que sa compréhension de l'axiomatique est très insuffisante. Le résultat est qu'il a insuffisamment considéré dans ses études le système *total* des axiomes. Une pareille prise en considération était de rigueur, parce que d'une part le problème de la convention peut se poser différemment pour différents axiomes et d'autre part parce qu'il est difficile de juger de la commodité d'un seul axiome. La question de la commodité ne devient importante, que quand il s'agit de l'application de tout un système d'axiomes. POINCARÉ suggère toutefois qu'il serait possible de juger de la commodité d'axiomes isolés.

(118) FREUDENTHAL [6], p. 115.

CHAPITRE II

LA LOGISTIQUE ET LA RECHERCHE DES FONDEMENTS

On admet d'habitude et à juste titre que la renaissance de la logique formelle dont l'époque moderne a été témoin, commence en 1847. C'est en cette année que parurent à la fois l'œuvre de G. BOOLE, *The Mathematical Analysis of Logic,* et celle de A. DE MORGAN, *Formal Logic : or the Calculus of Inference, necessary and probable.* Depuis lors, le nombre de publications dans le domaine de la logique augmenta rapidement (1). Mais aussi dans la nature des œuvres un changement s'opéra : la logique avait pris un caractère nettement mathématique. On se met à parler non seulement de logique formelle, mais aussi de logique mathématique, algorithmique, formalisée et symbolique (2). Et plus tard, le terme « logistique » (3), qui fut proposé lors du *Congrès International de Philosophie* à Genève (1904), par G. ITELSON et L. COUTURAT (4), sera accepté.

Ce n'est pas mon intention de donner ici un sommaire de l'évolution de la logistique jusqu'au moment où POINCARÉ formula ses objections. Un pareil sommaire ne serait pas à sa place ici et je me permets de renvoyer le lecteur à d'autres ouvrages sur ce sujet (5). Toutefois, il est nécessaire de mettre en évidence le rôle de la logistique dans l'évolution de la recherche des fondements des mathématiques dans la

---

(1) Voir la statistique dans E.W. BETH [8].

(2) Le terme « algèbre de la logique » a une signification quelque peu plus restreinte.

(3) En général, j'emploierai ce terme.

(4) *Rapports.* Cf. RMM, 12, p. 1042.

(5) Voir p. ex. J. JÖRGENSEN [1], vol. I ; W. et M. KNEALE [1] ; E.W. BETH [4] ; I.M. BOCHENSKI [1].

dernière partie du XIX[e] siècle et au début du XX[e] siècle. Dans ce domaine, trois savants méritent notre attention : G. FREGE, G. PEANO et B. RUSSELL.

La proposition centrale de FREGE était que l'arithmétique peut être déduite entièrement de la logique. Cette proposition qui, plus tard, sera appliquée à la mathématique pure en totalité par RUSSELL, est connue sous le nom de « logicisme ». Selon FREGE, la logique elle-même n'est pas précédée d'autres sciences. C'est ainsi que nous lisons dans la préface à la première partie de son ouvrage principal *Grundgesetze der Arithmetik* : « Ich halte es für ein sicheres Anzeichen eines Fehlers, wenn die Logik Metaphysik und Psychologie nötig hat, Wissenschaften, die selber der logischen Grundsätze bedürfen. Wo ist denn hier der eigentliche Urboden, auf dem Alles ruht ? » (6). (Lorsque la logique a besoin de métaphysique et de psychologie, je considère cela comme une indication certaine d'une faute, puisque ces sciences-là ont elles-mêmes besoin des principes logiques. Où se trouve alors ici le vrai fondement sur lequel tout repose ?). Il s'acharne surtout contre les prétentions de la psychologie en déclarant que « psychologische Betrachtungen in der Logik ebensowenig angebracht sind, wie in der Astronomie oder Geologie » (7) (des considérations psychologiques sont aussi peu à leur place dans la logique que dans l'astronomie ou la géologie). Sans quoi la logique serait subjective (8). Toutefois, B. RUSSELL estime qu'à certains moments, FREGE s'est laissé induire à une conception psychologique, notamment en faisant une distinction entre « Anerkennung der Wahrheit » et « Wahrheitswert » (reconnaissance de la vérité et valeur de vérité). RUSSELL écrit : « to divorce assertion from truth seems only possible by taking assertion in a psychological sense » (de séparer l'assertion de la vérité semble seulement possible en prenant l'assertion dans un sens psychologique) (9).

En outre, FREGE se tourne contre les 'formalistes' (E. HEINE, H. SCHUBERT, J. THOMAE). La partie la plus importante de cette polémique se trouve dans le deuxième tome de *Grundgesetze der Arithmetik,* les

---

(6) G. FREGE [3], vol. I, p. XIX.

(7) l.c., p. XXIV. On sait que FREGE, par sa lutte contre le psychologisme, a eu une grande influence sur HUSSERL.

(8) l.c., p. XXVIII.

(9) PM°, Appendix A : *The logical and Arithmetical Doctrines of Frege,* § 478. Voir dans ce contexte E.W. BETH [2], pp. 106 ss., 224 ss.

pages 96 - 139 (10). Contrairement à la conception selon laquelle l'arithmétique ne traite que des symboles qui figurent dans cette science et auxquels il ne faut attribuer aucun sens, FREGE défend une conception, qui tient compte du sens des signes. Selon lui, les formalistes font de l'arithmétique une sorte de jeu d'échecs, où chaque formule représente une position qui, par déduction, passe à une autre position. Or, FREGE croit que la différence décisive entre une formule arithmétique et une position dans un jeu d'échecs est que la première exprime la teneur d'une pensée et non la deuxième (11). Il se demande comment il est possible d'expliquer l'application de l'arithmétique à la réalité quand on part du point de vue formaliste.

Ce qu'il écrit dans le paragraphe 93 prouve qu'il voyait loin. Ici, FREGE soutient que l'arithmétique formaliste ne connaît pas de théorèmes (Lehrsätze) au sens propre du mot ; à côté des formules, dépourvues de sens, y figurent, tout comme dans un jeu d'échecs, seulement des règles. Des théorèmes figurent dans la théorie du jeu d'échecs, pas dans le jeu même. « Der Unterschied zwischen dem Spiele selbst und seiner Theorie wird von Thomae nicht gemacht, trägt aber wesentlich zur Einsicht in die Sache bei. Wenn wir in der Thomaeschen Darstellung Lehrsätzen begegnen, so ist zu vermuten, dass sie der Theorie des Spieles angehören. Diese Sätze werden nur scheinbar von den Figuren etwas sagen (...). Vielmehr sind es die Regeln des Spieles, deren Eigenschaften durch diese Sätze ins Licht gestellt werden » (12). (THOMAE ne fait pas de différence entre le jeu même et sa théorie, quoique cette différence contribue réellement à la compréhension de l'affaire. Lorsque nous rencontrons dans la présentation par THOMAE des théorèmes, l'on peut supposer qu'ils appartiennent à la théorie du jeu. Ces théorèmes ne diront qu'en apparence quelque chose sur les figures (...). Ce sont surtout les règles du jeu dont les propriétés sont mises en évidence par les théorèmes). Cette distinction entre le jeu avec les signes et la théorie du jeu prélude à la distinction formaliste entre la mathématique et la méta-mathématique. L'étude de FREGE fut publiée

(10) Une traduction par Max BLACK de cette polémique se trouve dans *The Philosophical Review*, 59 (1950), pp. 77-93, 202-220, 332-345. Elle est intitulée : *Frege against the Formalists* (Aussi dans FREGE [4]).

(11) Cf. aussi G. FREGE [2], p. 107, où FREGE écrit sur le signe : « Ohne einen Inhalt ist es nur Tinte oder Druckerschwärze auf Papier, hat als solche physikalische Eigenschaften (..) « (sans contenu, il n'est qu'encre à écrire ou encre d'imprimerie sur papier, tel quel il a des propriétés physiques).

(12) FREGE [3], vol. II, p. 102.

en 1903, c'est-à-dire une année avant que HILBERT signale pour la première fois au congrès mathématique de Heidelberg la possibilité et la nécessité d'une théorie de la démonstration.

La critique de FREGE, tant à l'égard du formalisme qu'à l'égard du psychologisme, est basée sur une conception platoniste de la nature des objets mathématiques. Ces objets n'appartiennent pas à la réalité, parce qu'en ce cas ils relèveraient de la juridiction d'une science empirique — mais ils ne sont pas non plus subjectifs, parce que la mathématique est certaine et indubitable. « Ich erkenne ein Gebiet des Objektiven, Nichtwirklichen an » (13), (J'admets un domaine de l'objectif et non-réel), écrit-il. A son sens, ce domaine est celui des mathématiques ainsi que de la logique.

Une réduction de l'arithmétique à la logique exigeait tout d'abord une recherche logique approfondie. L'algèbre logique de BOOLE et autres était trop limitée pour pouvoir servir de base au programme de FREGE (14). La partie la plus importante se trouve déjà dans son petit ouvrage *Begriffsschrift* de 1879. On trouve ici les points principaux du système de FREGE : l'introduction du quantificateur universel (à l'aide duquel, ainsi que fait remarquer FREGE, l'existence aussi peut être exprimée), une nouvelle conception de la notion de fonction, une construction axiomatique, et une distinction nette entre les thèses logiques et les règles de déduction. Quant aux autres ouvrages de FREGE, il convient de mentionner ici : sa théorie du symbole, sa théorie de la définition et son analyse de la notion de fonction avec l'extension qu'il donne à celle-ci (15).

Il est évident que l'exécution subséquente du programme logistique de FREGE se composera de deux parties. D'une part, il est nécessaire de montrer que les notions arithmétiques peuvent être définies en termes logiques, d'autre part les théorèmes arithmétiques doivent être démontrés de manière purement logique. On trouve un exposé succinct de la méthode qu'il emploie dans son livre *Grundlagen der Arithmetik* (1884). Dans cet ouvrage, il énonce que les nombres cardinaux doivent être vus comme des propriétés qui peuvent être assignées aux notions. Ensuite, il définit : « Die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist

---

(13) l.c. vol. I, p. XVIII. Cf. E.W. BETH [3], pp. 198-199.

(14) FREGE, lui-même, relève le fait que l'algèbre de la logique était essentiellement un calculus ratiocinator ; en outre il exigeait de son système qu'il pût servir de lingua characteristica. Voir FREGE [6].

(15) Voir P.E.B. JOURDAIN [1]. Cf. W. et M. KNEALE [1], chap. VIII.

der Umfang des Begriffes 'gleichzahlig mit dem Begriffe F' » (16). (Le nombre qui appartient à la notion F est l'extension de la notion 'équinumérique à la notion F'). Les termes « extension d'une notion » et « équinumérique », dont des définitions purement logiques sont possibles, jouent un rôle capital (17). Afin de pouvoir également donner des définitions logiques individuelles pour les nombres naturels, il introduit des notions qui renferment une contradiction (18). Je cite : « 0 ist die Anzahl, welche dem Begriffe 'sich selbst ungleich' zukommt » (19). (0 est le nombre qui appartient à la notion 'non-identique à soi-même'). Les définitions des autres nombres naturels peuvent être réalisées par récurrence. Dans ce but, FREGE définit l'expression « dans la rangée des nombres naturels n succède directement à m » (20), et il décrit la preuve du théorème : « die Anzahl, welche dem Begriff 'der mit n endenden natürlichen Zahlenreihe angehörend' zukommt, (folgt unmittelbar) auf n in der natürlichen Zahlenreihe » (le nombre qui revient à la notion 'appartenant à la rangée de nombres naturels qui se termine par n', (succède immédiatement) à n dans la rangée des nombres naturels) (21).

Une conséquence importante de ce projet est que la méthode de démonstration par induction complète peut être justifiée. Or, aussi dans *Grundgesetze der Arithmetik*, FREGE ne donne pas d'élaboration de cette conséquence (22).

La théorie des définitions de FREGE, telle qu'il l'expose dans *Grundgesetze der Arithmetik*, ne reconnaît effectivement que la définition explicite, à laquelle peut être également ramenée la définition par

---

(16) FREGE [2], pp. 79-80.

(17) L'extension d'une notion est définie comme un 'Wertverlauf' d'une fonction. Cf. FREGE [3], vol. I, pp. 7-8.

(18) Cela est admis parce que « Alles was von Seiten der Logik und für die Strenge der Beweisführung von einem Begriffe verlangt werden kann, ist seine scharfe Begrenzung, dass für jeden Gegenstand bestimmt sei, ob er unter ihn falle oder nicht » (Cela est admis parce que tout ce qu'on puisse désirer du côté de la logique et en vue de la rigueur de la démonstration d'une notion, c'est sa délimitation nette par laquelle est décidé pour chaque objet s'il tombe sous elle ou non).

(19) FREGE [2], p. 87.

(20) l.c., p. 89.

(21) l.c., p. 94.

(22) Pour un aperçu plus détaillé de la construction de l'arithmétique de FREGE, voir E.W. BETH [6], pp. 122-126.

abstraction. Il considère comme inacceptable la définition implicite au moyen de postulats (23). Cette condamnation est sans doute étroitement liée avec son logicisme. Premièrement, il ne pouvait admettre que les notions fondamentales fussent définies par les axiomes logiques, puisque selon lui elles ont une signification primordiale et déterminée. Deuxièmement, tous les symboles mathématiques devaient au besoin pouvoir être exprimés en symboles fondamentaux logiques ; par conséquent, toutes les définitions devaient en principe pouvoir être éliminées (24).

Toutefois, sa condamnation radicale de la définition implicite est regrettable. Pendant que FREGE écrivait, la recherche des fondements au sens axiomatique faisait de grands progrès. Cela s'applique non seulement à la géométrie (voir le chapitre I, pages 9-13), mais également à l'arithmétique. En 1860 déjà, Hermann GRASSMANN avait fait un effort remarquable pour réaliser une construction axiomatique de l'arithmétique des nombres entiers (25). En 1881, C. S. PEIRCE (26) ébaucha une théorie de l'arithmétique des nombres naturels basée sur une définition de « semi-infinite, discrete, simple quantity » (quantité semi-infinie, discrète et simple) (27), et sur des définitions récursives pour l'addition et la multiplication. L'objectif de PEIRCE était de montrer que les propositions arithmétiques élémentaires sont « strictly syllogistic consequences from a few primary propositions » (28) (des conséquences

(23) Voir FREGE [3], vol. I, pp. XIII-XIV et en particulier vol. II, §§ 26-33. Cf. la critique de FREGE de la construction axiomatique de la géométrie par HILBERT, contenue dans FREGE [8] et [9]. Voir dans cet ordre d'idées aussi le commentaire de E.W. BETH à propos de M.G. BEUMER [1].

(24) Au sujet de l'inadmissibilité pour le logicisme de définitions au moyen de postulats, voir R. CARNAP [1], en particulier p. 94. CARNAP voit ici une analogie avec l'intuitionnisme (pp. 104-105).

(25) Cf. Hao WANG [1]. Il écrit à propos du livre de GRASSMANN : « This was probably the first serious and rather succesful attempt to put numbers on a more or less axiomatic basis (..). He (GRASSMANN) was probably the first to introduce recursive definitions for addition and multiplication, and prove on such a basis ordinary laws of arithmetic by mathematical induction » (C'est là probablement le premier effort sérieux et assez réussi de placer les nombres sur une base plus ou moins axiomatique (..). Il (GRASSMANN) fut probablement le premier à introduire des définitions récursives pour l'addition et la multiplication, et de démontrer sur cette base des lois communes de l'arithmétique par induction mathématique.

(26) C.S. PEIRCE [1].

(27) Une « simple quantity » est caractérisée par le fait que la relation fondamentale (qui est toujours transitive) est aussi connexe.

(28) PEIRCE [1], p. 85. « Syllogistic » signifie ici tout simplement « logique ».

purement syllogistiques de quelques propositions primaires). Il ajoute : « The question of the logical origin of these latter, which I here regard as definitions, would require a seperate discussion » (29). (La question de l'origine logique de ces propositions primaires, que je regarde ici comme des définitions, nécessiterait une discussion à part).

En 1887, parut *Was sind und was sollen die Zahlen ?* de DEDEKIND. Comme FREGE, DEDEKIND considère l'arithmétique comme une partie de la logique, ce qui toutefois ne correspond chez lui pas à une conviction philosophique à l'égard d'un « Gebiet des Objektiven, Nichtwirklichen » (domaine de l'objectif et non - réel). Au contraire, dans la préface de la première édition de l'ouvrage cité, il dit : « Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes » (les nombres sont des créations libres de l'esprit humain), tandis que l'arithmétique entière reposerait sur la faculté de l'esprit humain « Dinge auf Dinge zu beziehen, einem Dinge ein Ding entsprechen zu lassen, oder ein Ding durch ein Ding abzubilden » (d'appliquer des choses à des choses, de faire correspondre une chose à une autre, ou bien de représenter une chose par une autre). Il part notamment des notions « système » (ensemble) et « appartenir à » (30). La partie la plus importante de sa théorie est dominée par la notion « chaîne » (31) et elle culmine dans la définition des systèmes simples et infinis. En voici la teneur : un système N est simple et infini quand une application φ (N) et un élément 1 dans N existent de manière que

a. φ (N) $\subset$ N.
b. N est la chaîne de 1.
c. L'élément 1 n'est pas renfermé dans φ (N).
d. L'application φ est biunivoque.

DEDEKIND ne démontre pas que ces conditions — que l'on peut considérer comme un système de postulats — soient indépendantes, et il ne dit rien de la consistance (32). Par contre, il montre que pour

---

(29) PEIRCE [1], p. 85. PEIRCE continue en exprimant l'espérance que dès lors l'entière arithmétique pourra être construite syllogistiquement.

(30) D'après DEDEKIND, un système S est entièrement défini lorsque de chaque objet est établi s'il est un élément de S ou non. Cette conception existe déjà chez B. BOLZANO [1], p. 38 ; elle est également celle de FREGE (cf. note 18).

(31) Soit φ une application d'un système S en soi. Un sous-système K s'appelle alors une chaîne, si φ (K) $\subset$ K. La section de toutes les chaînes qui embrassent un sous-système A, est nommée la chaîne de A, ou bien A_0 tout court.

(32) Ce problème ne deviendra en effet actuel qu'après la découverte des paradoxes. Néanmoins BROUWER [1], p. 139, a un reproche à faire à ce sujet.

les systèmes simples et infinis, la méthode de démonstration par induction complète est possible. Ce résultat s'appliquerait également à l'arithmétique. Car, dit DEDEKIND, « wenn man bei der Betrachtung eines einfach unendlichen, durch eine Abbildung φ geordneten Systems N von der besonderen Beschaffenheit der Elemente gänzlich absieht, lediglich ihre Unterscheidbarkeit festhält und nur die Beziehungen auffasst, in die sie durch die ordnende Abbildung φ zu einander gesetzt sind, so heissen diese Elemente *natürliche Zahlen* oder *Ordinalzahlen* oder auch schlechthin *Zahlen,* und das Grundelement 1 heisst die *Grundzahl der Zahlenreihe N* » (quand, en étudiant un système N, qui est simple et infini et ordonné par une application φ, on laisse de côté la nature spéciale des éléments et que l'on fait seulement attention au fait que ceux-ci sont distinguables et aux relations dans lesquelles ils sont placés par l'application ordonnante φ — ces éléments s'appellent dans ce cas *nombres naturels* ou *nombres ordinaux* ou bien tout simplement *nombres,* et l'élément fondamental 1 s'appelle le *nombre fondamental de la rangée de nombres N*) (33).

Lorsqu'on compare la théorie de DEDEKIND avec celle de FREGE, plusieurs différences sautent aux yeux. J'en ai déjà désigné une : à l'opposé de FREGE, DEDEKIND parle de « freie Schöpfungen des menschlichen Geistes » (créations libres de l'esprit humain). Dans les circonstances données (l'intuitionisme de BROUWER n'est pas encore à l'ordre du jour), cette parole le caractérise comme formaliste. Mais alors que FREGE poursuit une formalisation complète de l'arithmétique, DEDEKIND ne connaît pas cette ambition. De plus, DEDEKIND ne donne pas de définition de nombres individuels et il renonce à spécifier le rapport de succession. Ensuite, nous voyons que DEDEKIND développera d'abord une théorie de nombres ordinaux et alors seulement une théorie de nombres cardinaux, tandis que, d'après FREGE, la théorie des nombres cardinaux est primaire. Finalement, l'on peut constater qu'une preuve d'existence du système des nombres naturels est renfermée dans la théorie de FREGE ; la théorie de DEDEKIND n'admet pas une démonstration pareille, quoiqu'il prétende que si (34).

PEANO a pris la théorie de DEDEKIND comme point de départ de ses recherches dans le domaine de l'arithmétique. Cela était déjà évident

---

(33) DEDEKIND [1], p. 21.

(34) La démonstration de DEDEKIND de l'existence d'un ensemble infini ne cadre pas tout à fait avec sa méthode. Pour une étude critique du projet de DEDEKIND, voir aussi Hao WANG [1].

dans son opuscule *Arithmetices Principia* (1889). Un chapitre introductif traite de la notation symbolique de PEANO et contient en outre une série de propositions logiques dans cette notation. A la suite de FREGE, PEANO est de l'opinion qu'il est possible et souhaitable de récrire la mathématique de façon strictement symbolique (35). Au surplus, le symbolisme de PEANO est plus simple que celui de FREGE et se reporte plus directement à la tradition ; il est donc plausible qu'elle ait eu plus d'adeptes. Et à côté de cela, PEANO a enrichi la logistique de plusieurs nouvelles idées et notions. Il a été le premier à distinguer la notion d'appartenance de celle de l'inclusion ; il choisit comme symboles respectivement ε et Ɔ (36). En rapport avec ε, il introduit $[x\,\varepsilon]$, « la classe de tous les x, qui satisfont à » (37). L'introduction de ι (38) date de 1890 et sera plus tard — dans le tome II du Formulaire — complétée avec l'inverse ℩ ou ⁊, qui toutefois n'est pas une contribution originale, étant donné que le tome I des *Grundgesetze der Arithmetik* de FREGE (1893) contient l'article défini ($\diagdown$), quoique dans un sens élargi.

Le système d'axiomes dans les *Arithmetices Principia* se compose de neuf axiomes. Les termes primitifs sont N, 1, + =. Du dernier de ces signes, PEANO dit : « Hoc ut novum signum considerandum est, etsi logicae signi figuram habeat » (39). (Ce signe doit être considéré comme un nouveau signe, bien qu'il ait la forme d'un signe de la logique). Le signe logique = n'a trait qu'à l'équivalence entre des propositions (fonctions propositionnelles) et à l'identité entre des ensembles. Cela comporte que quatre des neuf axiomes comprennent des lois universelles de l'identité, appliquées à des nombres. Les autres cinq correspondent grandement au système devenu classique (40). Des définitions récurrentes pour l'addition, la multiplication et la formation des puissances y sont présentées. Dans les derniers paragraphes, les nombres rationnels et réels sont traités.

Dans une introduction sur la logique, PEANO ne fait pas de distinction entre les termes primitifs et définis, ni entre les propositions

---

(35) PEANO a même réalisé avant FREGE ce point du programme pour une théorie entière.

(36) La nécessité de cette distinction est suffisamment claire : la relation d'inclusion par exemple, est une relation transitive, non pas la relation d'appartenance. Néanmoins encore en 1899 (RMM 7, p. 628) même COUTURAT met en doute la nécessité de cette distinction.

(37) Egalement indiqué au moyen de x:, $\overline{x\varepsilon}$ et $x \ni$.

(38) $x = x$ peut alors également s'écrire ainsi : $x\varepsilon\,\iota\,\mathbf{x}$.

(39) PEANO [2].

(40) Avec $a = b. = . a = 1 = b + 1$ au lieu de $a + 1 = b + 1.$ Ɔ. $a = b$.

primitives et démontrées. Par contre, il fait cette distinction dans une série de cinq articles dans la première année de la Rivista di Matematica (1891) (41). Dans ces articles-là, nous trouvons aussi une division plus satisfaisante entre les propositions de la logique d'une part et les axiomes de l'arithmétique d'autre part.

Il y a maintenant quatre termes logiques primitifs : $\supset$, $\cap$, $-$ et Λ à propos desquels PEANO remarque que la question de savoir si une notion donnée est primitive ou définissable, ne peut pas être résolue au sens absolu. La question doit être posée ainsi : « soient données les choses a, b,..., la chose x peut-elle être définie ? » (42). Il adjoint treize propositions primitives aux quatre termes primitifs. Par la suite, on verra que quelques-unes en sont démontrables et dans F1N1 (*Formulaire de Math.,* tome I, première partie), il en changera une en définition (43). Plus tard, PEANO renoncera tout à fait à ses recherches concernant les propositions primitives de la logique. Entre temps, le système des termes primitifs est, lui aussi, sujet à des modifications. C'est à juste titre que FREGE, dans une lettre à PEANO (44) remarque que les quatre termes nommés sont insuffisants pour les buts que PEANO s'était posés. Aussi opère-t-il dans F2N2 à l'aide de neuf termes primitifs. Dans F5N1 il y en a de nouveau neuf, mais ce ne sont plus les mêmes.

Une comparaison du système logique de PEANO avec celui de FREGE est peu favorable pour PEANO. Son système est beaucoup moins réfléchi que celui de FREGE. Il est vrai qu'il a introduit des innovations, mais d'autre part il a omis des finesses nécessaires que FREGE fait ressortir. C'est ainsi que PEANO ne semble pas avoir vu la différence entre implication et règle de déduction (45). L'explication du signe $\supset_x$ de PEANO est symptomatique. Dans son article *Studii di Logica Matematica,* l'explication est la suivante : « Siano p e q delle proposizioni

(41) PEANO [6], [7], [8].

(42) PEANO [7], p. 24.

(43) $a - a = \Lambda$.

(44) FREGE [7].

(45) Il semble que ses collaborateurs, eux aussi, étaient aux prises avec cette difficulté. Encore en 1919, C. BURALI-FORTI identifie sa proposition de base p. p $\supset$ q : $\supset$: q avec « una forma *grafica* fondamentale di *ragionamente* che consiste in questo : 'essendo noto che p è vera, e che p $\supset$ q è pure vera, allora noi affermiamo, senz' altro, la q et la *scriviamo isolamente* senza più tener conto di p e di p $\supset$ q' » (Cf. BURALI-FORTI [1], p. 233).

contenenti lettere variabili x,...z. La formula p $\supset_{x,....z}$ q significa 'qualunque si siano x,....,z, purchè soddisfino alla condizione p, esse soddisferanno alla condizione q.' » (Soient p et q des propositions qui contiennent les variables x,....z. La formule p $\supset_{x,....z}$ q signifie 'quels que soient x,....z, s'ils satisfont à la condition p, ils satisferont à la condition q') (46). Or, à peu près en même temps, il écrit dans F2N1 : « Soient p et q des propositions contenant des lettres variables x,.....z. La formule p $\supset_{x.....z}$ q signifie 'de p on déduit, quels que soient x,......,z, la q.' » (47).

En outre, l'on pourrait remarquer qu'il aurait été préférable que le quantificateur universel n'ait été introduit pas seulement en rapport avec l'implication et l'équivalence. FREGE connaissait d'ailleurs — ainsi que nous l'avons remarqué — déjà en 1879 le quantificateur universel, alors que PEIRCE introduisit en 1885 deux quantificateurs. Au début, PEANO exprime l'existence par $- = x \Lambda$; plus tard (1897) (48), il use du symbole $\exists$, seulement pour exprimer qu'une classe n'est pas vide (49). En dernier lieu, on ne peut passer sous silence le fait que PEANO ne fait pas suffisamment de distinction entre signe et signifié (50).

L'on peut expliquer ces défauts par le fait que les questions logiques en elles-mêmes n'intéressaient que peu PEANO. La logique était pour lui en premier lieu une lingua characteristica (51). Sa découverte de la notion de l'appartenance, l'importance qu'il attache à la distinction entre une classe singulière et l'élément appartenant à cette classe, la distinction de variables vraies et apparentes (52) et la promotion d'un système commode de notations — voilà probablement les principaux apports de PEANO dans le domaine de la logique formelle (53).

Or, il est certain que les recherches de PEANO sur l'axiomatique de l'arithmétique ont été de grande importance. Même la deuxième

(46) PEANO [11], p. 365. Similaire dans PEANO [4], p. 16.

(47) PEANO [5], vol. II, N 1, p. 3.

(48) PEANO [11] et dans *F2N1*.

(49) $a \, \varepsilon K . \supset : \exists a . = . a \sim = \Lambda$ Déf. (PEANO [11], déf. 19).

(50) Il se sert parfois de guillemets pour indiquer le signe lui-même. Mais dans F2N1, p. 3, il écrit : « K signifie « classe » ».

(51) Cependant, il écrit : « Les deux objets de la Logique mathématique, la formation d'une écriture symbolique, et l'étude des formes de transformations ou de raisonnement, sont étroitement liés » (Amer. Journ. of Math. 17, p. 68).

(52) PEANO [11], pp. 366-367.

(53) Cf. A. PADOA [8] et Ugo CASSINA [1].

publication qu'il consacre à cette recherche n'est pas encore définitive. Le système fut après cela inséré dans les éditions successives du *Formulaire,* dans lesquelles de petites modifications, qui n'étaient pas toujours des améliorations, furent régulièrement amenées. Dans F2, les axiomes sont conçus ainsi :

1. $0 \varepsilon N$
2. $a \varepsilon N_0 . \supset . a + \varepsilon N_0$
3. $a,b \varepsilon N_0 . a + = b + . \supset . a = b$
4. $a \varepsilon N_0 . \supset . a + \,\text{-}= 0$
5. $s \varepsilon Cls . 0 \varepsilon s : x \varepsilon s . \supset_x . x + \varepsilon s : \supset . N_0 \supset s$

Il y a donc ici trois termes primitifs arithmétiques, à savoir : un symbole de classe N_0, un symbole d'individu 0 et un signe de fonction + (54). Tout cela est connu. Mais moins connu est le fait que déjà en 1891 l'énumération des axiomes est suivie d'une démonstration de leur indépendance à base de cinq interprétations (55). Ceci signifie un progrès considérable. Ce n'est qu'en 1906 que PEANO traitera de la consistance de son système en rapport avec une interprétation dans la théorie des ensembles (56), ce qu'il considère toutefois comme superflu. « Nam nos non crea postulatos ad arbitrio, sed nos sume ut postulatos propositiones simplicissimo, scripto in modo explicito aut implicito, in omni tractatu de Arithmetica, aut de Geometria. (...). Systema de postulatos de Arithmetica et de Geometria es satisfacto per ideas que de numero et de puncto habe omni scriptore de Arithmetica et de Geometria. Nos cogita numero, ergo numero es » (Car nous ne créons pas à volonté des postulats, mais nous prenons comme postulats les propositions les plus simples, écrites de façon explicite ou implicite, dans chaque traité d'arithmétique ou de géométrie. Au système des postulats de l'arithmétique et de la géométrie est satisfait par les idées que tous les auteurs dans le domaine de l'arithmétique et de la géométrie ont sur le nombre et sur le point. Nous pensons le nombre, donc il existe) (57). Au début, des exigences catégoriques n'existaient pas encore à l'égard de la saturation ; tout au moins les propositions connues devaient pouvoir être déduites des axiomes.

Somme toute, on peut dire que le retard que PEANO en tant que logicien montre en comparaison de FREGE, est en partie compensé

---

(54) En 1902, A. PADOA réduit le système de PEANO à deux termes primitifs et quatre axiomes (PADOA [4]).

(55) PEANO [8], p. 93.

(56) PEANO [14].

(57) PEANO [14], pp. 142-143. Cf. chap. VII, p. 136.

par une compréhension plus nuancée des possibilités et des problèmes que comportent les systèmes déductifs. Si la théorie des définitions de PEANO est à beaucoup de points de vue inférieure à celle de FREGE (58), nous constatons par contre que chez PEANO une compréhension de la définition implicite commence à poindre. Mais en général, PEANO continue à présenter son système d'axiomes pour l'arithmétique comme une axiomatique matérielle, dans le sens que HILBERT et BERNAYS donnent à ce terme (59) ; les symboles N_0, 0 et + ont une signification qui garantit la vérité des axiomes. Toutefois, l'on peut constater des gradations intéressantes. Dans *Arithmetices Principia,* PEANO écrit : « Signo N significatur numerus, signo 1 significatur unitas, etc. » (60) (le signe N signifie nombre, le signe 1 signifie unité, et caetera). Mais dans la Rivista di Matematica 1 ce passage sera changé en : « Il segno N si lègga *numero,* il segno 1 si lègga *uno,* et caetera » (le signe N se lise *nombre,* le signe 1 se lise *un,* et caetera) (61). Digne de mention est également une observation qui se trouve dans l'introduction que PEANO écrivit à la première édition du *Formulaire, Notations de Logique Mathématique* (1894). Tandis que le paragraphe sur les définitions ne traite que des définitions explicites et des définitions par abstraction, le paragraphe sur les démonstrations porte plus loin. Les notions primitives vont de front avec les propositions primitives, dit-il, et il ajoute : « Ces propositions déterminent, ou, si l'on veut, définissent les idées primitives, dont on n'a pas donné de définition directe » (62).

Cet énoncé marque un point décisif dans l'histoire de la définition implicite. Il est connu que jadis déjà on avait signalé la possibilité de définitions implicites, et on admet unanimement que le mathématicien français, M. GERGONNE, fut le premier à le faire (63). Son idée ne trouva au début aucune réponse — elle fut même reléguée au second plan. Ce n'est que grâce aux recherches sur l'axiomatique de la géométrie et de l'arithmétique qu'elle fut de plus en plus appréciée, c'est-à-dire vers 1900. Dans ce processus, l'œuvre de PEANO a sans doute joué un rôle important (64) (Cf. chap. I, pages 10-13).

---

(58) Pour une critique de FREGE au sujet de la manière de définir de PEANO, voir G. FREGE [7].

(59) HILBERT-BERNAYS [1], vol. I, pp. 1-2.

(60) PEANO [2].

(61) PEANO [8].

(62) PEANO [4], p. 52.

(63) Voir M. GERGONNE [1].

(64) Ce fut également le périodique de PEANO, RdM, qui, encore une fois, appela l'attention sur les idées de GERGONNE (G. VACCA [1]).

Toutefois, quelques observations critiques ont leur place ici. Comme je l'ai déjà fait remarquer, le problème de la consistance des postulats ne préoccupait au début pas du tout PEANO, et plus tard il en traita seulement en passant. Aussi est-il frappant que dans sa conférence sur les *Définitions Mathématiques* au premier Congrès Intern. de Philosophie, il ne souffle mot de la définition implicite. De même la façon dont PEANO traite la définition de la multiplication est très peu satisfaisante : dans la Rivista di Matematica 1 il remplace la définition récurrente des *Arithmetices Principia* par celle, où a x b est défini comme le nombre qu'on obtient, partant de 0, en exécutant l'opération + a, b fois. Bien entendu, cela ne veut pas dire que PEANO eût pu résoudre tous les problèmes connexes à la définition récurrente de la multiplication. Cette problématique n'a été éclaircie que vers 1930 (65). Toutefois, on peut conclure que sa théorie mathématique souffre de la même nonchalance qui dépare la base logique de son système. PEANO a toujours quelque chose de l'improvisateur qui modifie ses exposés en vertu de facteurs à peine saisissables. Il aurait pu voir plus clair dans le problème de la définition implicite ; il aurait pu approcher de plus près l'idéal d'une axiomatique formelle. Déjà l'œuvre de PIERI nous renseigne là-dessus (66). En 1900, PADOA formule des énoncés fondamentaux sur la façon dont l'indépendance des termes primitifs peut être démontrée (67). A l'instar de PIERI, il remarque : « La valeur d'une théorie est indépendante du sens des symboles ; le système des idées qu'on leur fait correspondre n'est qu'une interprétation » (68). Mais c'est à HILBERT que revient le mérite d'avoir montré (dans sa conférence sur les *Matematische Probleme* en 1900) (69) la consistance de l'arithmétique comme étant un problème de grande importance.

Une des conséquences du projet de PEANO est que les termes arithmétiques primitifs peuvent être interprétés de différente manière. Il s'ensuivra bientôt la question de savoir s'il n'est pas possible de spécifier leur signification à l'aide de la logique des classes et par là de montrer la validité des axiomes de PEANO. Ainsi l'on pourrait rapprocher sa construction de l'arithmétique du logicisme. Une première tentative fut faite par C. BURALI-FORTI dans son article *Classi Finite* (70). A l'exemple

(65) Pour des détails, voir D. HILBERT et P. BERNAYS [1], vol. I.

(66) Voir ch. I, pp. 11-13.

(67) Voir ch. I, p. 12.

(68) D'après le compte rendu dans RMM 8, p. 592.

(69) HILBERT [3].

(70) BURALI-FORTI [2].

de DEDEKIND, il considère un ensemble comme fini, quand il n'a pas de vrai sous-ensemble équinumérique. Un ensemble B s'appelle un successeur de l'ensemble A, quand B se compose des éléments d'A et un seul élément qui n'appartient pas à A. Comme préparation au postulat de l'induction, BURALI-FORTI démontre ensuite qu'un ensemble w d'ensembles finis, non-vides, qui contient tous les ensembles singuliers et qui, quand il contient un ensemble a, contient aussi tous les successeurs de a, contient tous les ensembles finis, non-vides, comme éléments.

N'u (le nombre de u) est, conforme à CANTOR, défini par abstraction. Les définitions pour 1, N et l'addition sont explicites. Mais à l'égard de la démonstration des axiomes de PEANO une difficulté surgit. Trois de ses axiomes sont démontrés seulement en vertu de la supposition qu'il existe un ensemble infini, c'est-à-dire un ensemble infini d'individus. Pour la formation des nombres, BURALI-FORTI ne dispose pas d'ensembles qui ont des ensembles ou des nombres comme éléments.

Une autre difficulté réside dans un des axiomes que BURALI-FORTI avait pris comme base à son étude (70[a]). WHITEHEAD montra qu'avec une interprétation normale cet axiome était faux. Mais ainsi que remarqua PIERI, il était possible et suffisant de remplacer cet axiome par l'axiome selon lequel l'union d'un nombre infini d'ensembles non-vides disjoints est un ensemble infini (71). PIERI considère cette supposition, de même que celle relative à l'existence d'un ensemble infini, comme étant de caractère purement logique. « Je n'y vois qu'une détermination convenable des concepts de classe et de représentation », écrit-il (72). Il va sans dire que pas tout le monde partageait son opinion. En dernier lieu, il ne faut manquer de remarquer que dans son article, BURALI-FORTI se sert de l'axiome de choix.

PEANO lui-même essaie de réaliser l'univocité de manière différente. C'est ainsi qu'il écrit dans F2N2, après avoir démontré l'indépendance de ses axiomes : « Ces Pp, dont nous avons vu la nécessité, sont suffisantes pour déduire toutes les propriétés des nombres qu'on rencontrera dans la suite. Mais il y a une infinité de systèmes qui satisfont à toutes les Pp. Par exemple, elles sont toutes vérifiées si l'on remplace N_0 et 0 par N_1 et 1 (...). Tous les systèmes qui satisfont aux 5 Pp sont en

(70[a]) L'axiome dit qu'une classe de classes non vides a tout au plus autant de membres que l'union de ses éléments.

(71) PIERI [9], p. 207.

(72) Idem.

correspondance réciproque avec les nombres. Le nombre N_0 est ce qu'on obtient par abstraction de tous les systèmes ; différemment dit, le nombre est le système qui a toutes et seules les propriétés énoncées par les 5 P primitives » (73). Or, ce raisonnement est peu satisfaisant. D'abord il suggère l'impression que le système N_0 est une des interprétations possibles de ses axiomes. Ensuite N_0 paraît être le système qu'on obtient en faisant abstraction de toutes les interprétations imaginables ; la formulation par laquelle PEANO termine est tout à fait analogue à l'observation de DEDEKIND citée à la page 38.

En somme, le système des nombres naturels constitue une des interprétations possibles, aussi bien des axiomes de DEDEKIND que de ceux de PEANO. Il est possible que PEANO ait toujours eu cela en vue. Le fait est en tous cas que dans la troisième édition du Formulaire un paragraphe est voué à la définition des termes primitifs N_0, 0 et $+ 1$, et cela conformément à l'article de BURALI-FORTI, cité ci-devant. PEANO ajoute : « On peut commencer ici l'Arithmétique : nous définirons directement les signes .. 0, N_0, + .. sans passer par les idées du paragraphe 20 » (74) (Le paragraphe 20 fait mention des axiomes de l'arithmétique). Cet énoncé semble préluder au logicisme, ce qui est d'autant plus curieux, que plus tôt dans la même édition, il avait remarqué : « Peut-on définir le nombre ? La réponse dépend de l'ensemble des idées qu'on suppose connues. Si l'on présuppose seulement celles représentées par les signes de Logique Cls, ε, $\supset$, $\cap$, $=$, du paragraphe 1, alors la réponse est négative » (76) (L'omission de « — » doit avoir résulté d'une erreur). Mais la définition qu'il donnera plus tard, présuppose seulement les termes primitifs logiques. Ce qui rend l'affaire encore plus confuse, c'est le fait que dans le paragraphe 20, il admet aussi que le paragraphe 32 est indépendant des postulats. En tous cas on ne démontre pas que les définitions explicites de F3N2, paragraphe 32, rendent possible une déduction des axiomes. Par là aussi le paragraphe 32 se trouve comme une sorte de « corps étranger » (Fremdkörper) au milieu de l'ouvrage (77).

L'article *On Cardinal Numbers* (1902) (78) est, lui aussi, intéressant en vue de la question qui nous occupe. Quoique cet article soit au nom

---

(73) F2N2, p. 2.
(74) F3N2, § 32.
(75) Dans cette édition-ci du Form., il y en a six, « $N_0 \varepsilon$ Cls » étant ajouté.
(76) l.c., p. 39.
(77) Encore dans la cinquième édition du Form., PEANO ne semble pas exclure une construction logiciste de l'arithmétique (l.c., p. 27 ; Cf. KNEALE [1], p. 474).
(78) M. WHITEHEAD [2].

de WHITEHEAD, la troisième partie qui traite de nombres entiers finis et infinis, est — ainsi que nous l'annonce l'avant-propos — entièrement de la main de RUSSELL, alors que dans la seconde partie, celui-ci donne un résumé de la logique des relations dans le cadre de la logistique de PEANO (79). Le problème que RUSSELL se pose en particulier, porte à l'équivalence des deux définitions de la notion « nombre cardinal fini », savoir celle basée sur la récurrence, et la définition ensembliste. Or, une partie essentielle est constituée par la proposition que chaque ensemble infini contient un sous-ensemble avec le nombre cardinal $\aleph_0$, et la démonstration en repose sur la validité de l'axiome de choix de ZERMELO. Cela étant devenu clair, RUSSELL n'accepte plus la démonstration qu'il avait fournie. Dans cet ordre d'idées, je me permets de remarquer par avance que POINCARÉ avait encore d'autres objections contre la démonstration (80).

RUSSELL, de son côté, fera dans son article, *On some Difficulties in the Theory of Transfinite Number and Order Types* (1905) (81), une différence entre les notions « inductive number » et « finite number ». Il reconnaît que, sans se servir de l'axiome de choix de ZERMELO, ou tout au moins de l'axiome multiplicatif, on ne saurait prouver que les nombres finis sont inductifs. Cependant, l'inverse est valide.

Dans l'intervalle, son livre *The Principles of Mathematics* avait paru. Dans les chapitres 13 et 14, RUSSELL donne un résumé de la situation. Le premier chapitre relève l'article de WHITEHEAD, le dernier (plus spécialement le paragraphe 123) revient au problème que BURALI-FORTI avait examiné. A l'opposé de BURALI-FORTI, RUSSELL ne fait pas la supposition spéciale qu'il existerait un ensemble infini. Il soutient que cette supposition est démontrable (82).

Il est souhaitable de relever également plusieurs autres aspects des *Principles of Mathematics,* puisque ce livre constitue incontestablement un élément important dans l'histoire de la philosophie des mathématiques. Grâce au résumé que L. COUTURAT en a donné dans la Revue de Métaphysique et de Morale 12 et 13 (1904 et 1905), ce livre a, en outre, donné lieu à la critique de POINCARÉ sur la logistique. Dans *Principles of Mathematics,* les idées de FREGE sont en général défendues. Et pourtant, ce livre a été écrit indépendamment de FREGE, dont

(79) Cf. RUSSELL [9].

(80) Cf. pp. 85-86.

(81) RUSSELL [13].

(82) Cf. aussi « Introduction to the second edition », p. VIII.

RUSSELL n'a connu l'œuvre qu'après l'achèvement de son livre, ainsi qu'il ressort de l'avant-propos. Les influences les plus importantes que RUSSELL a subies en écrivant, sont celles de CANTOR et de PEANO. D'ailleurs RUSSELL était dans l'ensemble au courant de l'œuvre de savants congénères. Sans compter ses nombreuses études novatrices, ce fut un de ses grands mérites d'avoir su combiner les possibilités que d'autres avaient créées.

L'affinité avec FREGE se manifeste notamment dans la théorie du nombre cardinal. Le logicisme que FREGE limitait à l'arithmétique, RUSSELL l'étend à toute la mathématique (83). Par conséquent, la proposition fondamentale de *Principles of Mathematics* est que toutes les notions mathématiques peuvent être exprimées par un nombre limité de termes logiques et que toutes les propositions des mathématiques pures peuvent être démontrées à l'aide d'un nombre limité de principes logiques. Aussi le livre de RUSSELL commence-t-il par la définition suivante : « Pure mathematics is the class of all propositions of the form 'p implies q', where p and q are propositions containing one or more variables, the same in the two propositions, and neither p nor q contains any constants except logical constants » (84) (la mathématique pure est l'ensemble de toutes les propositions de la forme « p implique q », où p et q sont des propositions qui contiennent une variable ou plus, les mêmes variables dans les deux propositions, et ni p ni q ne contient aucune constante, à l'exception de constantes logiques). Par là, on serait tenté de croire que chaque domaine d'objets est perdu pour la mathématique. Or M. BÔCHER (85) et à son instar L. COUTURAT (86), ont relevé que la conception de RUSSELL de la mathématique n'est pas une conception nominaliste ou formaliste. Selon eux, RUSSELL définit la mathématique autant suivant sa forme et sa méthode que suivant ses objets, puisque ces objets sont caractérisés par leur propriété de pouvoir être définis entièrement en termes logiques. Tout comme FREGE, RUSSELL est au début de l'opinion qu'une existence objective appartient à ces notions.

---

(83) Vu l'arithmétisation, à laquelle les mathématiques furent soumises pendant la deuxième moitié du siècle dernier, cet élargissement était tout trouvé.

(84) La critique que RUSSELL lui-même exprimera plus tard, au sujet de cette définition (voir *Introduction to the second edition*), ne concerne pas le point de départ logiciste.

(85) M. BÔCHER [1]. La définition de B. PEIRCE : « Mathematics is the science which draws necessary conclusions » (La mathématique est la science qui tire des conclusions nécessaires) sert d'exemple caractéristique d'une définition des mathématiques d'après le point de vue méthodique.

(86) COUTURAT [4], pp. 214-218.

D'après l'analyse de RUSSELL, la mathématique repose sur neuf notions primitives et sur vingt propositions primitives. Dix de ces propositions portent sur le calcul des propositions, deux sur le calcul d'ensembles et huit sur le calcul des relations (87). RUSSELL part du primat du calcul des propositions (88). Ses axiomes peuvent tous être formalisés, excepté un seul, à savoir la règle de déduction du modus ponens : « A true hypothesis in an implication may be dropped, and the consequent asserted » (Une vraie hypothèse dans une implication peut être omise et le conséquent assuré) (Paragraphe 18). Comme FREGE, RUSSELL objecte par principe contre la définition par postulats. Seules sont acceptables les définitions explicites (89) ; les définitions par postulats font preuve d'analyse insuffisante, dit-il (cf. par exemple le paragraphe 120). C'est pourquoi RUSSELL s'efforce de déduire les axiomes de l'arithmétique de PEANO de ses propres définitions explicites. Selon lui, les termes primitifs ont un contenu réel et objectif, bien que le choix des axiomes soit plus ou moins arbitraire.

Le gros du livre, à savoir la deuxième jusqu'à la septième partie, est voué à une démonstration informelle de la proposition, selon laquelle toute la mathématique peut en effet être bâtie à base des principes mentionnés. Mais dès le début cette tentative est chargée de paradoxes. Le premier paradoxe est divulgué par BURALI-FORTI en 1897 (90). En 1899, CANTOR découvre le paradoxe du plus grand nombre cardinal, paradoxe qu'il ne publie toutefois pas (91). Peu de temps après, il s'avère que non seulement la théorie des ensembles est menacée, mais du même coup tout le système logique qui formait la base des recherches de FREGE, DEDEKIND, PEANO et RUSSELL. C'est du moins ce qui

---

(87) RUSSELL lui-même, suggère la possibilité que ces nombres pourront être réduits. En examinant l'affaire de plus près, cela parut en effet être le cas.

(88) En général, PEANO opte pour le primat de la logique des classes. En dehors de quelques principes, la logique des relations ne figure pas chez lui. Cf. R. FEYS [1].

(89) RUSSELL écrit : « Given any set of notions, a term is definable by means of these notions when, and only when, it is the only term having to certain of these notions a certain relation which itself is one of the said notions » (Donné un ensemble quelconque de notions, un terme est définissable au moyen de ces notions, si, et seulement si, c'est le seul terme ayant une certaine relation avec quelques-unes de ces notions, relation qui est elle-même une des notions en question) PM°, § 108.

(90 BURALI-FORTI [3].

(91) Cf. S.C. KLEENE [1], p. 36. Il paraît dans ses lettres à HILBERT (1896) et à DEDEKIND (1899) que CANTOR connaissait déjà en 1895 le paradoxe de BURALI-FORTI.

découla du paradoxe de RUSSELL (1903). Avant de publier ce paradoxe dans *Principles of Mathematics*, RUSSELL fait part de sa découverte à FREGE. A ce moment, la seconde partie de *Grundgesetze der Arithmetik* est sur le point de paraître, de sorte que FREGE doit se contenter de traiter la question dans une postface. Il découvre que la cause en réside dans son axiome V, dont il avait en effet déjà admis le caractère douteux. L'axiome en question, exprimé en mots, est le suivant : lorsque les « Wertverläufe » de deux fonctions sont identiques, ces fonctions ont la même valeur pour chaque argument. Les difficultés surgissent quand un « Wertverlauf » est à la fois un argument (92) ; aussi l'axiome devra-t-il être remplacé par une formule qui exclut cette possibilité. Or, la conséquence en est que beaucoup de propositions doivent être pourvues d'hypothèses supplémentaires et que les démonstrations doivent être soumises à un contrôle. FREGE n'a pas été à même de réaliser ce programme (93).

Au début, RUSSELL a hésité sur le chemin à prendre pour éviter les paradoxes, quoiqu'il vît bien que surtout la notion de classe demandait une révision. En 1905 encore, il hésite entre la « zig-zag theory », la « theory of limitation of size » et la « no class theory ». Peu après, il se convertit à la théorie des types (*Mathematical Logic as based on the Theory of Types,* 1908) (94), qui, quelques années plus tard, servira de base aux *Principia Mathematica.*

En guise de conclusion de ce chapitre, j'aimerais tenter de résumer les problèmes que la logistique a fait surgir par rapport aux mathématiques. Ces problèmes ne furent pas tous envisagés de manière uniforme par les logisticiens. De même, il serait faux de mettre le mérite d'avoir posé ces problèmes entièrement au compte de la logistique. Il existe un rapport étroit entre ces problèmes et les tendances mathématiques contemporaines en général, comme par exemple les efforts de réaliser

---

(92) Dans la terminologie de RUSSELL, qu'il emploie dans *PM*°, cela veut dire qu'une class-as-many ne peut pas en toute rencontre être changée en class-as-one. Dans RUSSELL [13], il écrit que les fonctions propositionnelles peuvent être entièrement définies (c'est-à-dire que de chaque objet l'on peut constater s'il y satisfait ou non) sans définir une classe. Il appelle les fonctions propositionnelles de ce genre non-prédicatives.

(93) QUINE a soutenu que les suggestions de FREGE sont contradictoires. Voir W.V. QUINE [1].

(94) RUSSELL [15]. Cf. aussi RUSSELL [14] et [16].

une exactitude toujours plus grande et la création de nouvelles théories peu intuitives. Mais tout cela ne change rien au fait que ce furent surtout les logisticiens qui ont confronté le monde mathématique autour de l'an 1900 avec cinq questions qui se tiennent l'une à l'autre, à savoir :

1° Est-il possible d'exécuter la définition des notions mathématiques en termes logiques ?

2° Est-il possible de démontrer les propositions mathématiques par voie purement logique ? (95).

3° Est-il possible (et utile) d'exprimer toute la mathématique en langage symbolique ?

4° Quel est le rôle de l'infini en mathématiques ?

5° Quelles sont les conséquences qu'il faut tirer de l'intervention des paradoxes et comment ceux-ci peuvent-ils être évités ?

---

(95) La discussion sur ces deux points controversés est influencée par la terminologie de KANT à l'égard des jugements. Le terme « logique » est souvent remplacé par « analytique » (entre autres par FREGE : « ...dass die arithmetische Gesetze analytische Urtheile sind » (que les lois arithmétiques sont des jugements analytiques) [2], p. 99), alors que la qualification « synthétique » indique un appel à l'intuition ou à l'expérience. E.W. BETH [9] a protesté contre cette interprétation des intentions de KANT.

CHAPITRE III

SUR LA LOGIQUE ET L'INTUITION EN MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE PHASE : 1893 - 1904

A. - **Poincaré.**

On constate le fait remarquable que les Français n'ont que peu contribué aux recherches relevées dans le chapitre précédent. Une étude sérieuse des fondements de l'arithmétique existait à peine en France à cette époque. Quant au domaine de la logistique dans le sens plus strict du mot, les Français n'y obtinrent pas plus de résultats importants. Toutefois, on ne peut dire que ce sujet fût tout à fait inconnu en France. En 1878, Louis LIARD publia son opuscule sur *Les logiciens anglais contemporains,* qui donne entre autres un aperçu des théories de DE MORGAN, BOOLE et de Stanley JEVONS, et dont apparurent en 1883 et 1890 respectivement une deuxième et troisième édition. En outre, l'on peut admettre que l'ouvrage du Belge J. R. L. DELBOEF, *Logique algorithmique* ait trouvé des lecteurs en France, d'autant plus qu'il avait paru auparavant dans la Revue Philosophique de France et de l'Etranger (1876). Mais ce n'est qu'en 1893 que s'ouvriront des perspectives qui promettent une amélioration du climat intellectuel. En cette année, la Revue de Métaphysique et de Morale est fondée. Quoiqu'aussi les revues précédentes, et notamment la Revue Philosophique mentionnée ci-dessus, prêtent leur attention aux relations entre la philosophie et la science exacte, il est un fait que la nouvelle revue fait mieux ressortir le sujet. Déjà, dans les premières années, plusieurs articles paraissent sur la mathématique, et l'origine du nombre naturel y est traitée.

Il s'agit ici en premier lieu des contributions de E. BALLUE et de G. RIQUIER (1). Les deux écrivains sont d'accord qu'il est impossible de fonder la théorie du nombre naturel sans faire appel à l'expérience. D'après eux, cette théorie repose sur des pluralités qui constituent une donnée expérimentale (2). BALLUE ajoute : « quant à placer des postulats à la base de la théorie du nombre entier (...) pour le vain plaisir de faire de l'arithmétique une construction de l'esprit, je n'y vois vraiment qu'une satisfaction dilettante, et je n'y peux apercevoir un véritable progrès scientifique » (3).

Il est curieux que FREGE ait pris la peine de réagir à l'article de BALLUE (4). Il critique en particulier la définition que BALLUE donne de la notion de pluralité (5) et la définition du nombre : « Les pluralités sont représentées par des symboles qu'on appelle des nombres entiers » (6).

Dès le début, nous trouvons également POINCARÉ parmi les coopérateurs réguliers de la Revue de Métaphysique et de Morale. Dans la première année, il publie un article sur *Le Continu Mathématique,* dans lequel il soutient que le continu mathématique a été introduit pour éviter les antinomies physiques. La théorie des coupures de DEDEKIND, basée sur le fait que les mathématiciens ne sont pas intéressés aux objets mêmes (7), mais aux relations entre ces objets, ne serait pas née sans motif empirique. POINCARÉ résume ce point de vue ainsi : « L'esprit a la faculté de créer des symboles, et c'est ainsi qu'il a construit le continu mathématique, qui n'est qu'un système particulier de symboles. Sa puissance n'est limitée que par la nécessité d'éviter toute contradiction ; mais l'esprit n'en use que si l'expérience lui en fournit une raison » (8).

---

(1) G. RIQUIER [1] et [2] ; E. BALLUE [1].

(2) Ainsi le théorème fondamental de l'arithmétique n'est démontrable que par l'expérience (RMM 2, p. 318). Il en est de même de la propriété commutative de l'addition et de la multiplication (RMM 2, pp. 320-321).

(3) RMM 2, p. 322. Cf. les objections de KERRY contre l'œuvre de FREGE, dont RUSSELL traite dans PM°, App. A, pp. 520-522.

(4) G. FREGE [5].

(5) « La réunion de plusieurs objets distincts, sans se préoccuper de la nature ou de la forme de ces objets, s'appelle une pluralité » (RMM 2, p. 317).

(6) RMM 2, p. 318.

(7) Voir RMM 1, p. 28 ; *SH,* p. 32. Une autre formulation est la suivante : « La matière ne leur importe pas, la forme seule les intéresse » (id.). Par ailleurs, la discussion de la htéorie de DEDEKIND est déparée par la méprise, que KRONECKER en serait l'auteur. Dans *SH* cette faute a été réparée.

(8) RMM 1, p. 32 ; *SH,* p. 40.

Dans la deuxième année paraît l'article renommé *Sur la nature du raisonnement mathématique*. Quoique cet article ne s'occupe pas directement de la logistique, il contient quelques indications importantes sur la façon dont POINCARÉ aimerait qu'on réponde aux questions 2 et 4 de la page 51. Comment est-il possible, se demande-t-il, que la mathématique soit déductive et qu'elle ne soit tout de même pas une immense tautologie ? Le syllogisme ne nous apprend rien de nouveau ; comment alors la certitude de la mathématique est-elle compatible avec sa fécondité ? Dans le même ordre d'idées, l'on peut se demander si la mathématique procède de manière particularisante ou généralisante.

Dès le début, il est évident que POINCARÉ n'a nullement l'intention de se laisser induire à une réponse conforme aux vues de BALLUE. Il rejette explicitement la conception suivant laquelle les propositions les plus importantes de la mathématique ne peuvent être déduites que de l'expérience. L'expérience n'est jamais capable de fournir ce degré de certitude qui caractérise la mathématique. Il repousse tout autant la tentative de vouloir démontrer les propositions mathématiques au moyen d'une vérification analytique et il cite à ce propos la preuve par LEIBNIZ de $2 \times 2 = 4$. POINCARÉ considère cette proposition comme étant trop peu générale pour pouvoir être admise comme proposition mathématique (9). Tandis que la logique procède du général au particulier, comme il apparaît par le syllogisme, la marche de la mathématique est en somme en sens inverse (10).

Afin de rendre cela acceptable, POINCARÉ reconstitue la preuve de plusieurs propositions fondamentales, telles que la commutativité de l'addition et de la multiplication. Il fait observer que la méthode de démonstration par induction complète dont il se sert, ne peut être ramenée à un nombre fini de syllogismes (11) : « Le caractère essentiel du raisonnement par récurrence », écrit-il, « c'est qu'il contient, condensés pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogismes ». La validité en repose sur ce qui suit : « C'est qu'il n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est

---

(9) Cf. : « On peut même dire que les sciences exactes ont précisément pour objet de nous dispenser de ces vérifications directes ». POINCARÉ [11], p. 373 ; *SH*, p. 13.

(10) Cette conception a fait école. C'est ainsi qu'elle paraît aussi dans BRUNSCHVICG [1], § 273, où elle a surtout trait à la mathématique moderne. Cf. aussi les observations de E.W. BETH dans le chap. I de BETH-PIAGET [1].

(11) RMM 2, p. 379 ; *SH*, p. 20.

une fois possible. L'esprit a de cette puissance une intuition directe et l'expérience ne peut être pour lui qu'une occasion de s'en servir et par là d'en prendre conscience » (12). C'est en vertu de cela qu'il constate simplement qu'une certaine proposition est vraie pour n = 1, n = 2, n = 3, *et caetera.* La loi qui, ensuite, exprime la validité générale de la proposition, est « manifeste », dit POINCARÉ, tout comme une loi physique quelconque est manifeste. Tous deux reposent sur l'induction. La différence entre les deux est que l'induction physique est incertaine, parce qu'elle repose sur : « la croyance à un ordre général de l'Univers, ordre qui est en dehors de nous » (13), tandis que l'induction mathématique est parfaitement sûre, parce qu'elle repose sur notre propre esprit. Tout en n'étant pas emprunté à l'expérience, il n'est pas non plus juste de voir ce principe comme une convention plus ou moins arbitraire (14).

C'est ainsi que POINCARÉ donne la solution au problème posé par lui. La certitude de la mathématique ne repose pas sur le fait que ses propositions peuvent être déduites de manière syllogistique. Car, la méthode de démonstration typiquement mathématique, n'est-elle pas la méthode de l'induction complète qui n'est pas réductible à des principes logiques ? (15). Cette méthode effectue tant la certitude des mathématiques que leur fécondité (16). Elle est synthétique a priori.

G. LACHELAS objecta contre cet article. Ses objections nous paraissent curieuses, quand on pense à l'opposition subséquente de POINCARÉ contre la logistique. Non seulement reproche-t-il à POINCARÉ d'avoir dépourvu les signes 1, +, =, de leur signification normale en omettant de spécifier la définition de x+1, et de proclamer qu'elle « ne jouera plus aucun rôle dans la suite des raisonnements » (17), mais en outre il pense pouvoir accuser POINCARÉ d'avoir clandestinement subrogé la signification normale (18). De son côté, POINCARÉ se défend

---

(12) RMM 2, p. 382 ; *SH,* p. 23-24.

(13) RMM 2, p. 382 ; *SH,* p. 24. Point controversé ! Voir par ex. H. FEIGL [1].

(14) RMM 2, p. 382 ; *SH,* p. 23.

(15) POINCARÉ caractérise l'induction complète comme suit : « C'est donc bien là le raisonnement mathématique par excellence » (RMM 2, p. 379 ; *SH,* p. 19) et il remarque même : « A chaque pas, si on y regarde bien, on retrouve ce mode de raisonnement, soit sous la forme simple que nous venons de lui donner, soit sous une forme plus ou moins modifiée » (RMM 2, p. 379 ; *SH,* p. 19).

(16) « Nous ne pouvons nous élever que par l'induction mathématique, qui seule peut nous apprendre quelque chose de nouveau » (RMM 2, p. 384 ; *SH,* p. 28).

(17) RMM 2, p. 375 ; *SH,* p. 15.

(18) G. LACHELAS [1].

avec l'argument que la seule intention qu'il eût, était celle de rendre claire la méthode récurrente et qu'en faisant cela il est parti d'un point de vue aussi formel que possible (19). Car : « le raisonnement mathématique ne devient rigoureux que quand la forme pure a été vidée de toute matière » (20). Selon lui, ce dessein n'excluait pas la possibilité de se servir, en passant et en guise d'exemple, de l'interprétation normale. Cet incident en soi n'est pas important, mais il nous fournit des données intéressantes sur l'attitude de POINCARÉ à l'égard des courants formaliste et logistique. Nous examinerons ces données de plus près dans le chapitre VII. Mais déjà en ce moment-ci, le passage cité nous renseigne sur la conception de POINCARÉ au sujet de « la nature du raisonnement mathématique » (21).

D'autres explications s'imposaient. Notamment le passage qui semblait indiquer que d'après POINCARÉ, chaque étape d'une démonstration mathématique repose sur le principe de l'induction complète, est extrêmement obscur (22). Bien entendu, il est impossible qu'il ait vraiment voulu dire ce qu'il écrivit là. Aussi, écrira-t-il dans la Revue de Métaphysique et de Morale 13 : « Je ne voulais pas dire, comme on l'a cru, que tous les raisonnements mathématiques peuvent se réduire a une application de ce principe. En examinant ces raisonnements d'un peu près, on y verrait appliqués beaucoup d'autres principes analogues, présentant les mêmes caractères essentiels. Dans cette catégorie de principes, celui de l'induction complète est seulement le plus simple de tous et c'est pour cela que je l'ai choisi pour type » (23). Mais cette correction souleva de nouveaux problèmes. Quels étaient ces principes analogues que l'on découvrerait en examinant de près les démonstrations mathématiques ? P. BOCKSTAELE estime qu'il est peut-être permis de supposer que POINCARÉ ait entendu par là l'axiome de choix (24). Remarquons qu'en effet, il nomme ce principe un jugement synthétique

(19) POINCARÉ [13].

(20) RMM 5, p. 62.

(21) Il semble que R. DAVAL et G.-T. GUILBAUD n'en étaient pas suffisamment conscients, puisque, du fait que POINCARÉ choisit ses exemples parmi l'arithmétique élémentaire, ils tirent la conclusion que : « Dès l'abord, POINCARÉ affirme donc implicitement que le raisonnement mathématique n'est pas une forme vide, et souligne les rapports entre le raisonnement et ce sur quoi on raisonne ». DAVAL-GUILBAUD [1], p. 4.

(22) Voir note 15 de ce chapitre.

(23) RMM 13, p. 818 ; *SM,* pp. 159-160.

(24) P. BOCKSTAELE [1], p. 62.

a priori (25). R. DAVAL et G.T. GUILBAUD sont tentés de croire que la seule indication concrète dans l'œuvre de POINCARÉ a rapport à la construction du continu (26) ; la faculté de l'esprit humain de répéter infiniment une même opération jouerait également un rôle essentiel dans la création du continu.

Toutefois, nous n'avons par là pas encore une réponse satisfaisante à la question de savoir ce que POINCARÉ a voulu dire en se référant aux principes qui seraient analogues à l'induction complète. Même en comptant parmi ces principes à la fois la construction du continu, l'axiome de choix et l'induction transfinie (un choix plus étendu est difficile à faire avec les articles de POINCARÉ présents à l'espit), l'inconvénient reste qu'il existe d'innombrables démonstrations mathématiques qui ne se servent d'aucun de ces principes. Aussi me semble-t-il qu'il n'y a pas de réponse satisfaisante à la question posée. La véritable intention de POINCARÉ a dû être beaucoup plus vague et ne peut cadrer avec une énumération explicite de quelques principes. Partant de l'expérience personnelle selon laquelle le fournissement de preuves mathématiques présuppose plus que la connaissance d'un petit nombre de lois logiques, il était par avance persuadé que la mathématique doit faire appel, non seulement à la logique, mais aussi et continuellement à l'intuition. C'est en se référant à l'induction complète qu'il a voulu rendre acceptable cet énoncé. L'avantage d'une pareille tactique est que ce faisant, il indique en effet une méthode, dont il est indiscutable qu'elle soit admissible, mais qui semble — grâce à l'introduction de l'infini — être placée au-dessus de la logique. L'inconvénient en était, qu'en réduisant cette méthode à un principe analytique, tout le poids de la démonstration retomberait sur POINCARÉ. Aussi n'est-il pas étonnant que les discussions qui se développeront par suite des *Principles of Mathematics* de RUSSELL et les *Principes des Mathématiques* de COUTURAT, porteront surtout sur la méthode de démonstration par l'induction complète. Les deux partis avaient intérêt à triompher sur ce chapitre (27).

---

(25) RMM 14, p. 313. Or, une certaine réserve est fondée : l'axiome de choix n'était pas encore connu en 1894.

(26) DAVAL-GUILBAUD [1], p. 45. Cette opinion est basée sur POINCARÉ [10].

(27) MILHAUD conteste l'opinion que le principe de l'induction complète introduirait l'infini. D'après lui, l'infini réside en fait déjà dans la formule « pour un nombre quelconque» qui fait partie d'une des prémisses. En outre, une pareille formule intervient régulièrement aussi en dehors de l'arithmétique : « Pour un triangle quelconque » et caetera. Voir G. MILHAUD, *Le Raisonnement géométrique et le Syllogisme* dans MILHAUD [2]. La même critique fait partie de son compte rendu de *SH* (MILHAUD [3]).

Une autre question qui se pose au sujet de l'article de POINCARÉ est la suivante : à quels principes logiques fait-il allusion quand il écrit que la méthode de l'induction complète ne peut en être déduite ? Il mentionne — mais seulement incidemment — le principe d'identité, celui de la contradiction ainsi que le syllogisme sous sa forme catégorique et hypothétique. Ces exemples font l'effet d'être assez traditionnels, effet qui peut être vérifié en faisant par exemple une comparaison avec les treize propositions primitives, dont PEANO avait fait mention en 1891 (28). De la plupart de ces propositions, nous ne trouvons nulle trace chez POINCARÉ. La conclusion est évidente, à savoir que POINCARÉ n'était pas, ou à peine, au courant de l'évolution moderne de la logique. Cette conclusion sera par la suite confirmée de façon surprenante. Le fait qu'il a néanmoins deviné quelque chose de la problématique à laquelle les logiciens se heurtèrent, rend ses articles plus intéressants que l'on ne supposerait en première instance d'après leurs lacunes.

L'opinion peu favorable de POINCARÉ à l'égard de l'intérêt que la logique a pour les mathématiques allait de front avec la défense de l'intuition. Cela s'avère pour la première fois dans son article *La Logique et l'Intuition dans la Science Mathématique et dans l'Enseignement* (1899). Ses vues sur l'intuition sont exposées plus amplement dans sa conférence au deuxième Congrès International des Mathématiciens (1900), sous le titre *Du Rôle de l'Intuition et de la Logique en Mathématiques*. Si la logique est l'instrument de la démonstration, dit-il, l'intuition, par contre, est celui de l'invention (29). Sans elle, la mathématique resterait court ; c'est elle qui dirige le mathématicien quand il fait son choix parmi les possiblités logiques et qui lui fournit « une vue d'ensemble », nécessaire tant à fournir qu'à comprendre les démonstrations (30). Caractéristique est aussi le raisonnement suivant : « En devenant rigoureuse, la science mathématique prend un caractère artificiel qui frappera tout le monde ; elle oublie ses origines historiques ; on voit comment les questions peuvent se résoudre, on ne voit plus pourquoi elles se posent » ; et d'où dériverait aussi : « que la Science de la démonstration n'est pas la Science tout entière et que l'intuition doit

(28) Les principes de POINCARÉ paraissent chez PEANO sous la forme suivante :
a Ɔ a (loi de l'identité),
a — a = Λ (loi de la contradiction),
a Ɔ b . b Ɔ c : Ɔ. a Ɔ c (syllogisme).

(29) POINCARÉ [20], p. 126 ; *VS*, p. 29.

(30) l.c., pp. 125-126 ; *VS*, pp. 27-29.

conserver son rôle comme complément, j'allais dire comme contrepoids ou comme contrepoison de la logique » (31).

Dans cette conférence, POINCARÉ distingue trois formes d'intuition. En premier lieu, il y a « l'intuition sensible », basée sur les observations et imaginations sensorielles. Deuxièmement, il y a l'intuition généralisante, « calquée pour ainsi dire sur les procédés des sciences expérimentales » et qui est éclaircie à l'aide d'entre autres le principe de continuité de PONCELET. Troisièmement, il y a « l'intuition du nombre pur » (32). Seule la dernière forme ne peut nous tromper, bien que POINCARÉ ne tranche pas la question de savoir si en fin de compte, elle n'est pourtant dépendante de la coopération des sens (33). C'est sur cette dernière forme de l'intuition que repose la méthode de démonstration de l'induction complète. En outre, elle joue un rôle dans chaque découverte, mêmes celles faites par les natures les plus abstraites et logiques (34), et dans chaque démonstration quelque exact qu'en soit le plan. L'assertion du début selon laquelle l'intuition ne jouerait pas de rôle dans la démonstration même, est par conséquent contredite. Il y a donc, outre une forme d'intuition qui renseigne le mathématicien sur le chemin à suivre, mais qui, après cela, ne joue plus aucun rôle, deux formes d'intuition qui ne peuvent être éliminées. Ce sont d'une part « la vue d'ensemble » intuitive sans laquelle une preuve ne peut être envisagée comme preuve, et d'autre part les moyens de démonstration intuitifs. POINCARÉ fait l'observation suivante au sujet de cette dernière catégorie : « Or, dans l'Analyse d'aujourd'hui, quand on veut se donner la peine d'être rigoureux, il n'y a plus que des syllogismes ou des appels à cette intuition du nombre pur, la seule qui ne puisse nous tromper. On peut dire qu'aujourd'hui la rigueur absolue est atteinte » (35).

B. - **Couturat.**

Il n'était donc pas étonnant que POINCARÉ se heurtât à ceux qui professaient que la rigueur mathématique pouvait et devait être toujours augmentée. Mais avant que ses idées pussent mener à une contre-attaque

---

(31) l.c., pp. 123-124 ; *VS*, pp. 24-25.

(32) l.c., p. 122 ; *VS*, p. 22.

(33) l.c., p. 129 ; *VS*, p. 32.

(34) La distinction entre « géomètres » et « analystes » paraît également, sous une forme quelque peu modifiée, dans *SE*, p. 135.

(35) POINCARÉ [20], p. 122 ; *VS*, pp. 22-23.

réfléchie, il fallait que la recherche des fondements basée sur la logistique, fût connue en France. En 1899, deux articles sur la logistique de PEANO parurent dans la Revue de Métaphysique et de Morale, respectivement de la main de G. VAILATI (36) et de L. COUTURAT (37). Les deux articles sont en grande partie à titre d'information, mais dénotent en outre une opinion favorable à l'égard des tentatives et des objectifs de la logistique. COUTURAT termine en incitant ses compatriotes à se mettre à l'étude de cette matière. Ensuite, il publie en 1900 un essai sur l'algèbre universelle de WHITEHEAD (38), après quoi il s'occupera pendant quelque temps de l'étude des manuscrits inconnus de LEIBNIZ (39). Nous voyons que dans ces années-ci les conceptions de COUTURAT à l'égard de la philosophie de la mathématique s'altèrent. Si au début, il partait à plusieurs points de vue des principes kantiens (40), malgré sa critique du finitisme dans *De l'Infini Mathématique* (1896), sous l'influence de PEANO, WHITEHEAD, RUSSELL et LEIBNIZ, il se range maintenant du côté de la logique et du logicisme. Aussi, le discours qu'il fait en 1904 à l'occasion de la commémoration de KANT, et qui sera publié avec plus de détails dans la Revue de Métaphysique et de Morale 12 (41), abonde en observations critiques. COUTURAT y conteste notamment l'assertion selon laquelle l'arithmétique serait synthétique. L'origine intuitive du nombre, qu'il veut bien reconnaître, ne joue plus aucun rôle dans la théorie ; cette théorie constitue un système purement analytique. L'opinion de KANT, selon laquelle le signe en soi aurait un caractère intuitif, est poussée « ad absurdum » par COUTURAT, montrant qu'en ce cas chaque expression, y compris le syllogisme, serait synthétique.

Dans la même année et dans l'année suivante, il publia dans la Revue de Métaphysique et de Morale, un aperçu détaillé sur la situation de la recherche des fondements (42). Cette série d'articles qui se réfère

---

(36) G. VAILATI [1].

(37) L. COUTURAT [9].

(38) L. COUTURAT [11]. COUTURAT admire les résultats de WHITEHEAD pour ce qui est de la vaste signification des mathématiques.

(39) Le résultat de ces recherches est incorporé dans COUTURAT [2] et [3].

(40) Encore en 1900, il écrit : « que le nombre n'est pas un concept, mais une intuition ; en d'autres termes, on ne définit pas un nombre, on ne peut que le montrer » (RMM 8, p. 36). Et dans le même article, il conclut que la tentative des mathématiciens de mettre à l'épreuve la conception de l'arithmétique de KANT « ne fait que la vérifier et la consolider » (RMM 8, p. 36).

(41) Voir resp. COUTURAT [12] et [13].

(42) RMM 12, pp. 19-50, pp. 211-240, pp. 664-698, pp. 810-844 ; RMM 13, pp. 224-256.

plus spécialement aux *Principles of Mathematics* de RUSSELL, parut, quelque peu modifiée, également sous forme de livre : *Les principes des Mathématiques* (1905). Entre temps, des contributions de sa main sur la logistique et des sujets analogues parurent dans d'autres périodiques (43) ; également en 1905, il fit paraître un opuscule sur *l'Algèbre de la logique,* alors qu'il enseignait l'histoire de la logistique au Collège de France, de 1905 à 1906. Sans aucun doute, le grand mérite de COUTURAT a été que, grâce à lui, la logistique est devenue plus connue en France qu'elle ne l'était auparavant.

Cependant, il est vrai qu'aussi à l'étranger, la logistique n'avait pas toujours reçu l'attention qu'elle méritait. L'œuvre de FREGE y était à peine lue, alors que PEANO avait à subir une critique injuste non seulement du côté des philosophes (CROCE) (44), mais aussi du côté des mathématiciens (VERONESE) (45). Mais dans plusieurs pays, la logique fut au moins pratiquée et des groupes de collaborateurs s'y formèrent, comme par exemple en Italie (PEANO et son école) et en Angleterre (RUSSELL et WHITEHEAD). Il est regrettable qu'une bonne entente n'ait existé que rarement entre ces différents groupements (46). Le mérite de RUSSELL, qui sut user des différents éléments, en est d'autant plus grand et il en est de même de COUTURAT, qui fit honneur autant à l'œuvre de PEANO et des siens qu'à celle de BOOLE, SCHRÖDER, FREGE, WHITEHEAD et RUSSELL. Cette activité synthétique fut considérablement facilitée par le premier Congrès International de Philosophie à Paris (1900), auquel prirent part entre autres SCHRÖDER, PEANO, PADOA, PIERI, BURALI-FORTI, MacCOLL, RUSSELL et PORETSKY (47).

L'auteur des *Principes des Mathématiques* se montre carrément partisan des objectifs de la logistique et du logicisme. Ce faisant, il considère le logicisme simplement comme étant un fait. Dans un aperçu concis de l'évolution de la logique et des mathématiques pendant la deuxième partie du 19e siècle, il dit : « Ainsi s'est consommée de nos

(43) Par ex. dans *L'Enseignement Math.* Voir COUTURAT [16] et [17].

(44) Voir par ex. CROCE [2], pp. 90-94 et 381-388. Selon lui, la logique mathématique souffre d'une confusion fondamentale de pensée et de langue. Après quelques observations ironiques, CROCE termine en écrivant : « Ma la loro nullita filosofica rimane, sin da ora, pienamente provata » (l.c., p. 94). Une critique de ce genre paraît pour la première fois dans CROCE [1].

(45) Voir VERONESE [1].

(46) Cf. J. JÖRGENSEN [2], pp. 141-142.

(47) RUSSELL raconte (RUSSELL [5], p. 65) que ce n'est qu'à ce congrès qu'il a connu l'œuvre de PEANO. Le congrès fut par ailleurs organisé par RMM avec le concours de COUTURAT.

jours l'union, pour ne pas dire la fusion de la Logique et de la Mathématique ; on ne peut plus discerner où finit la Logique, où commence la Mathématique » (48). La tâche de rattraper et d'ordonner les méthodes mathématiques de la démonstration incombe donc à la logistique (49).

Quant à la définition, COUTURAT reconnaît, ainsi que le font FREGE et RUSSELL, seulement la définition explicite. Comme la définition à l'aide de postulats permet différentes interprétations, COUTURAT trouve qu'il est en somme faux de parler ici de définition (50). En outre, il formule l'objection qui avait déjà été convaincante pour FREGE : « La définition (...) est en réalité la construction d'un concept », étant entendu que « on ne peut pas créer un objet par une définition » (51). Et comme FREGE, COUTURAT estime que les notions primitives de la logique ont une signification qui est antérieure à la construction de la logique : pendant une discussion au deuxième Congrès International de Philosophie, il combat la manière de voir les symboles logiques primitifs comme des signes dépourvus de sens réel (52). Mais une théorie déductive est toutefois entièrement indépendante de la signification des symboles primitifs (52 a).

Il va sans dire que COUTURAT jugeait une construction axiomatique, telle que PEANO l'avait présentée, insatisfaisante. Dans le chapitre 2 B de son livre, consacré à la théorie ordinale (le chapitre I traite des fondements de la logique de RUSSELL, le chapitre 2 A de la théorie cardinale), il s'efforce de rattacher le système de PEANO à la notion logiciste du nombre. Il se conforme en principe à l'article de WHITEHEAD (53), c'est-à-dire qu'il se sert de la simplification que PADOA avait effectuée dans la théorie de PEANO. Il soutient que les définitions de WHITEHEAD de « successeur » et « nombre naturel » rendent possible une déduction des axiomes de PADOA et il s'en réfère aux *Grundlagen der Arithmetik* de FREGE. De cette façon, l'axiome de l'infini de BURALI-FORTI peut être évité. Or, j'ai déjà signalé qu'à la longue cette méthode s'est révélée impuissante à surmonter les difficultés.

---

(48) *PMq*, p. 3. Néanmoins, COUTURAT dit dans la Conclusion que la mathématique possède le caractère abstrait et formel de la logique, mais qu'elle reste « distincte de celle-ci et subordonnée à elle » (*PMq*, p. 218).

(49) Car : « Démontrer une proposition, c'est la déduire de certaines autres, admises ou données comme vraies, au moyen des *seuls* principes de la Logique » (*PMq*, p. 35).

(50) *PMq*, pp. 41-43. Cf. aussi L. COUTURAT [16].

(51) COUTURAT [16], p. 30 et p. 37.

(52) *Rapports*, p. 712. Cf. RMM 12, pp. 1048-1049.

(52a) COUTURAT [16], p. 39.

(53) WHITEHEAD [2].

L'intérêt du chapitre 2 C réside surtout dans une polémique avec POINCARÉ au sujet de sa théorie de l'induction complète telle qu'elle fut exposée dans la Revue de Métaphysique et de Morale 2. Contre l'opinion selon laquelle le moyen de démonstration par induction complète est le moyen universel de démonstration mathématique, COUTURAT objecte que celui-ci n'est utilisé que dans l'arithmétique des nombres finis. Il conteste l'opinion suivant laquelle le principe en question embrasse un nombre infini de syllogismes, soutenant qu'au contraire ce principe rend *superflu* un nombre infini : « il permet de démontrer une proposition pour tous les nombres entiers finis sans qu'on ait à la démontrer séparément pour chacun d'eux » (54). Finalement, il conteste aussi l'idée que le principe serait un jugement synthétique, étant donné que celui-ci fait partie de la définition des nombres finis en guise de « propriété essentielle et caractéristique » (55). COUTURAT met les erreurs commises par POINCARÉ au compte du fait que l'ensemble des nombres finis est infini. Or, il y a deux sortes d'infinités ; à savoir « l'infini de compréhension » et « l'infini d'extension ». De ces deux, il n'y a que le premier qui soit inadmissible et d'ailleurs impensable. Le second peut toutefois être embrassé par une notion de compréhension finie. Les raisonnements, basés sur cette notion finie sont alors également finis et le fait qu'en certaines circonstances ils peuvent avoir trait à un nombre infini d'objets n'est pas important. COUTURAT conclut que : « C'est dans ce sens seulement, que le principe d'induction enveloppe l'infini ; il n'y a donc là rien qui puisse infirmer son caractère logique et analytique » (56).

Cette emphase du caractère logique de la mathématique pure est maintenue jusqu'à la fin de la série d'articles, de sorte que COUTURAT peut terminer son aperçu de l'œuvre de RUSSELL avec les paroles suivantes : « C'est donc bien l'esprit même de la mathématique moderne qui s'incarne et se manifeste dans l'ouvrage de M. RUSSELL » (57). Comme les autres chapitres ne contiennent que peu de points de contact intéressants, il m'est à présent possible de procéder à l'étude de la réplique de POINCARÉ.

---

(54) RMM 12, p. 225 ; *PMq*, pp. 62-63.
(55) RMM 12, p. 225 ; *PMq*, p. 63.
(56) RMM 12, p. 226 ; *PMq*, p. 63.
(57) RMM 13, p. 255.

CHAPITRE IV

SUR LA LOGIQUE ET L'INTUITION EN MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME PHASE : 1905 - 1913

La critique de POINCARÉ à l'égard des objectifs et des théories de PEANO, RUSSELL et COUTURAT est en première instance incorporée dans un article, intitulé *Les Mathématiques et la Logique* et publié en 1905 et en 1906 (1). On peut constater que cette critique porte en grande partie sur les problèmes relatifs à la définition au moyen de postulats. Dans cet ordre d'idées, il énonce également son opinion sur la conférence de HILBERT au troisième Congrès International des Mathématiciens. Je me propose de m'arrêter plus longuement sur ce sujet dans le chapitre suivant. Cependant, d'autres questions y sont — soit directement, soit indirectement — mises en évidence, de sorte qu'il est utile de diviser notre aperçu en cinq points : ceux mentionnés à la fin du second chapitre.

1. Est-il possible d'exécuter la définition des notions mathématiques en termes logiques ? POINCARÉ concentre son attention surtout sur la notion du nombre. La méthode qui donne la priorité aux nombres transfinis sur les nombres finis est à son avis contraire à toute saine psychologie (2). Du reste, il en conteste la justesse logique ; il lui paraît faux d'admettre que la logistique soit indépendante du nombre. C'est ainsi qu'il soutient que les relations présupposent le nombre 2. En effet, il croit pouvoir signaler dans la définition du nombre 1 de BURALI-FORTI

(1) POINCARÉ [27].

(2) *SM*, p. 154.

et dans celle du nombre 0 de COUTURAT une pétition de principe (3). Il trouve également un point de rattachement dans la théorie des nombres transfinis, étant donné que dans la démonstration du théorème de BERNSTEIN la méthode de définition de l'induction complète est employée, laquelle méthode n'est pas censée être connue (4).

2. Est-il possible de démontrer les propositions mathématiques par voie purement logique ? « Autant dire que tout l'art du joueur d'échecs se réduit aux règles de la marche des pièces », dit POINCARÉ (5). En y regardant de plus près, il se trouve qu'il conteste deux choses différentes. Non seulement, il combat la notion que la démonstration logique soit suffisante (a), mais il combat également celle qui énonce que les principes logiques d'un système comme celui de RUSSELL sont au fond logiques (b).

a) Pour ce qui est du premier point, POINCARÉ note que dans certaines parties des mathématiques, une démonstration purement logique, c'est-à-dire qui procède de façon « purement mécanique », et qui pourrait, le cas échéant, être imitée à l'aide d'une machine (6), s'est avérée possible. Il se réfère à l'œuvre de HILBERT. A son sens, la possibilité d'une telle démonstration est équivalente à la possibilité de transmettre le raisonnement en langage pasigraphique sans qu'on ait besoin de recourir à des prémisses qui ne sont pas réductibles à la logique et sans que des antinomies interviennent (7). Dans l'arithmétique, dans l'analyse, voire (malgré le renvoi à HILBERT) dans la géométrie cette possibilité n'existerait pas (8), et cela à cause de la nécessité de l'induction complète.

b) Quant au deuxième point, POINCARÉ soutient que les propositions primitives de RUSSELL doivent être regardées comme des énoncés intuitifs. Elles supposent connue la signification des termes employés et elles ne sauraient être regardées comme une définition implicite. Dans le dernier cas, il faudrait montrer que le système d'axiomes est consis-

(3) RMM 13, p. 823.

(4) RMM 14, pp. 27-29.

(5) RMM 13, p. 817. L'intention du langage figuré n'est pas tout à fait claire. L'intuition est-elle comparée aux règles qui décident du résultat du jeu ? Cela n'est pas probable. Il nous semble que l'intention de POINCARÉ a été de comparer la logique à l'ensemble des règles du jeu.

(6) RMM 13, p. 816.

(7) RMM 13, p. 825.

(8) RMM 13, p. 832. La restriction à l'égard de la géométrie, à laquelle on ne s'attendrait pas en raison de ce qui a précédé, est faite surtout en vue de la nécessité des démonstrations de consistance.

tant, ce qui est impossible puisque la méthode de démonstration de l'induction complète n'apparaîtra que plus tard (9). D'après POINCARÉ, les axiomes de RUSSELL sont par conséquent des jugements synthétiques a priori ; ils le furent depuis longtemps et ils ne sont pas devenus analytiques du seul fait d'avoir obtenu une place dans un système logique (10). C'est à cause de cela que la logique moderne est devenue beaucoup plus étendue que la logique classique. Une différence importante dérive du fait que les symboles se sont multipliés de telle sorte qu'ils permettent des combinaisons « qui ne sont plus en nombre limité » (11). Cet énoncé obscur exige une explication. Il découle d'une considération de l'emploi du quantificateur universel et existentiel qui — selon POINCARÉ — permettent des conjonctions et des disjonctions infinies. C'est par là que la logique moderne se distinguerait de celle d'Aristote.

D'après POINCARÉ, la logique d'ARISTOTE se borne à la syntaxe de « si... alors » et « non pas ». Il est vrai qu'elle connaît aussi, quoique sous une autre forme, les formules « Si Ψ (x), φ (x) quel que soit x » et « Si Ψ (x), φ (x) au moins pour un x » (12). Mais POINCARÉ semble vouloir dire que dans la logique d'ARISTOTE, il est seulement question de classes finies (13), tandis que dans celle de RUSSELL (il passe sous silence d'autres formes de logique, et il se plaît à dire que l'on doit toutes les corrections qui ont été amenées dans la logique dans le cours du 19e siècle, à RUSSELL) (14) l'on peut satisfaire à une fonction propositionnelle au moyen d'un nombre infini d'objets. Nous avons déjà remarqué plus tôt que POINCARÉ regardait non seulement le syllogisme comme analytique, mais également le principe de contradiction et d'identité (15). Synthétiques s'appellent par contre les axiomes qui sont à la base de l'addition logique ; le passage de « compréhension » à « extension » est également dit « synthétique » (16) (17).

---

(9) RMM 13, p. 829.

(10) RMM 13, p. 829.

(11) RMM 13, p. 828.

(12) RMM 13, p. 827-828.

(13) Par rapport au point de vue extensionaliste, attribué à ARISTOTE ? Le fait que RUSSELL donnait le premier pas à la compréhension sur l'extension est du moins dit « une innovation très importante » (RMM 13, p. 832).

(14) Sans le vouloir, l'œuvre de COUTURAT lui a sans doute fait cette impression.

(15) Voir p. 59.

(16) RMM 13, p. 832.

(17) Bref, il semble exister pour POINCARÉ une différence essentielle entre les principes logiques traditionnels et ceux que la logistique y a adjoints. Les premiers nous n'apprennent rien de nouveau, ils sont analytiques ; les derniers par contre, nous apprennent quelque chose de nouveau, ils sont synthétiques.

Or, il se pourrait « qu'après ces appels à l'intuition (..) on n'aura plus à en faire d'autres et on pourra constituer la mathématique tout entière sans faire intervenir aucun élément nouveau » (18). POINCARÉ dénie cette possibilité. Cela me ramène à la question relevée sous a). POINCARÉ estime que l'intuition du nombre naturel est requise pour arriver, en tout état de cause, à une théorie mathématique de quelque peu d'importance. Il fixe plus spécialement son attention sur le système des axiomes arithmétiques de PEANO. Ceux-ci doivent être complétés par une preuve de consistance. Car ne faut-il pas démontrer que les objets qui satisfont à ces axiomes existent et « en mathématiques le mot exister ne peut avoir qu'un sens, il signifie exempt de contradiction » (19). POINCARÉ indique trois méthodes pour aboutir à une telle preuve. Premièrement, l'on peut indiquer un exemple ou un modèle qui satisfasse aux postulats ; deuxièmement, l'on peut constater au moyen d'une comparaison de toutes les propositions dérivables des postulats, s'il y a — oui ou non — deux propositions qui se contredisent ; troisièmement, l'on peut fournir la preuve à l'aide de l'induction complète (20). Or, dans le cas des axiomes de PEANO, aucune de ces méthodes ne satisfait. La première méthode échoue parce qu'il faudrait indiquer un nombre infini d'objets (21) ; la seconde parce qu'il faudrait comparer l'un avec l'autre un nombre infini de propositions ; la troisième parce que le principe de l'induction complète est précisément un des postulats qui est à examiner. POINCARÉ écrit à ce propos : « Si je m'appuie sur le principe lui-même pour montrer qu'il n'implique pas contradiction, je démontre seulement que s'il est vrai, il n'est pas contradictoire ; et cela ne nous apprend rien » (22). En outre, il se demande : « Comment saurai-je que le

---

(18) RMM 13, p. 830.

(19) RMM 13, p. 819. On pourrait se demander s'il y avait ici aussi l'influence de HILBERT. Je pense au passage suivant dans sa conférence au deuxième CIM : « Si l'on peut, au contraire, démontrer que les attributs conférés à une notion ne peuvent jamais, par l'application d'un nombre fini de déductions logiques, conduire à une contradiction, je dirai que l'on a ainsi démontré l'existence mathématique de la notion en question « (*Compte Rendu*, p. 73). Néanmoins, cf. pp. 14 et 25.

(20) RMM 13, pp. 819-820.

(21) RMM 13, p. 833. PADOA avait néanmoins tâché de suivre une pareille méthode. (*Bibliothèque*, p. 251). G. VAILATI, lui aussi, jugeait dans sa discussion de *Les Mathématiques et la Logique* non convaincantes les objections de POINCARÉ à ce point (VAILATI [2]). Par contre, il en est ainsi que cette méthode dépend, elle aussi, de l'application de l'induction complète : il faut d'abord démontrer qu'un modèle qui satisfait aux postulats, satisfait aussi à toutes les propositions qui peuvent être déduites des postulats.

(22) RMM 13, p. 834.

nombre de mes raisonnements est un de ceux qui satisfont au principe ? » (23). Ce que POINCARÉ veut dire est évidemment que cela devrait d'abord être démontré ce qui toutefois n'est possible que par induction complète. Le cercle vicieux est donc inévitable. Ainsi, la troisième méthode présuppose en quelque sorte la première méthode : la notion « nombre d'étapes de démonstration » est censée satisfaire aux axiomes de PEANO.

La question discutée se rattache à une autre objection que POINCARÉ soulève contre les « logiciens ». A son sens, ceux-ci opèrent à l'aide de deux définitions différentes de « nombre naturel ». Si d'une part ils définissent le nombre naturel comme celui qui peut être obtenu à l'aide de l'application répétée de l'opération + 1, partant de 0, d'autre part ils supposent que ce nombre obéit à la méthode de démonstration par induction complète. POINCARÉ écrit littéralement : « Un nombre peut être défini par récurrence ; sur ce nombre on peut raisonner par récurrence ; ce sont deux propositions dictinctes. Le principe d'induction ne nous apprend pas que la première est vraie, il nous apprend que la première implique la seconde » (24). POINCARÉ soutient que ce passage ne peut être déduit logiquement, mais qu'il repose sur un jugement synthétique a priori (25). Le rapport entre cette question-ci et la précédente pourrait être résumé ainsi : même si on peut définir la notion « nombre d'étapes de démonstration » par récurrence, il n'est par là pas encore démontré que la méthode de démonstration par induction complète peut y être appliquée.

Il s'ensuit que d'après POINCARÉ, l'intuition est surtout indispensable dans l'arithmétique. Non seulement parce qu'elle prête au mathématicien la conscience de « je ne sais quelle géométrie plus profonde, et plus cachée, qui seule fait le prix de l'édifice construit » (26), et lui permet par conséquent de faire un choix parmi toutes les possibilités logiques, mais aussi parce qu'elle est nécessaire pour la systématisation après coup. Elle est non seulement l'instrument de l'invention, mais aussi celui de l'arrangement et de la compréhension. Sans compter la différence essentielle que POINCARÉ constate entre la logique d'ARISTOTE et la logistique, celle-ci n'est pas non plus à même de fournir une preuve irréfutable d'une proposition générale quelconque (27).

---

(23) RMM 13, p. 834.
(24) RMM 13, p. 835.
(25) RMM 14, p. 32.
(26) RMM 13, p. 817.
(27) RMM 13, p. 832.

3. Est-il possible (et utile) d'exprimer toute la mathématique en langage symbolique ? POINCARÉ reconnaît qu'il peut être utile de reproduire des notions fréquemment employées par des symboles simples (28). Toutefois, il ne faut pas en surestimer l'importance. Le maniement d'une mécanique purement formelle a l'inconvénient qu'elle nous fait fermer les yeux sur le sens plus profond des mathématiques : « en réduisant la pensée mathématique à une forme vide, il est certain qu'on la mutile » (29). En attendant une formalisation complète des mathématiques, POINCARÉ constate que la pasigraphie n'est pas une garantie contre les paradoxes, les cercles vicieux et les infractions intuitives. Sa réaction est donc plutôt négative, ce qui s'est avéré largement dans des tournures ironiques, telles que « le péanien » ou une observation comme la suivante : « Tant qu'il s'agit seulement de démontrer que un est un nombre, la pasigraphie suffit, mais si une difficulté se présente, s'il y a une antinomie à résoudre, la pasigraphie devient impuissante » (30). Dans cet ordre d'idées, je rappelle le lecteur à l'observation de POINCARÉ sur la valeur de la pasigraphie en tant que critère pour la possibilité d'une construction strictement logique de la mathématique (voir la page 66).

4. Quel est le rôle de l'infini en mathématiques ? POINCARÉ maintient sa conception suivant laquelle l'infini est caractéristique pour les mathématiques et un obstacle pour la logique. Le caractère intuitif de la méthode de démonstration par induction complète découle du fait qu'elle a trait à un ensemble infini. D'autre part, POINCARÉ trouve que des ensembles infinis sont parfois appliqués à tort en mathématiques, notamment quand ils sont regardés comme étant actuels au lieu de potentiels. Cette question sera traitée plus amplement ci-après ; voir les pages 86-87 et le chapitre VI.

5. Quelles sont les conséquences qu'il faut tirer de l'intervention des paradoxes et comment ceux-ci peuvent-ils être évités ? Dans cet article, POINCARÉ ne consacre que peu de mots à ce sujet. Il avance la notion que le fait que ces paradoxes se produisent prouve que la pasigraphie a usé à tort de l'intuition (31). Des articles suivants s'arrêteront plus longuement sur ce sujet.

---

(28) RMM 13, p. 822. Que POINCARÉ ait eu de la compréhension pour la signification scientifique d'une notation non ambiguë, n'est pas étonnant. En outre, il en a signalé l'importance philosophique (cf. *SE*, p. 90).

(29) RMM 13, p. 817.

(30) RMM 13, p. 824.

(31) RMM 13, p. 825.

En guise de résumé de ses pensées, POINCARÉ se réfère au contraste entre KANT et LEIBNIZ. On ne peut certainement pas dire que la divergence d'opinions entre ces deux philosophes se soit terminée en faveur du dernier (32). Même en accordant à la logistique tout ce qu'elle demande, il resterait encore une tâche pour « les philosophes qui ne veulent pas que la logique soit tout », savoir la recherche de l'origine de l'instinct mathématique, l'étude des lois de la « géométrie profonde qui se sentent et ne s'énoncent pas » (33).

Il n'est certainement pas vrai que toutes les observations critiques émises par POINCARÉ dans l'article discuté ci-dessus soient justifiées. Aussi, la tâche de COUTURAT qui se charge de la défense de la logistique, n'est-elle jusque-là pas trop difficile. La réplique de celui-ci *Pour la Logistique* (34) réfute toute une foule d'assertions incorrectes. Son objection cruciale est que POINCARÉ ne s'est pas donné la peine d'étudier la logistique de première main et il ajoute les paroles caustiques : « En général, du reste, M. POINCARÉ parle de la logistique sur le ton dont un bel esprit pourrait parler de l'Algèbre ou des Mathématiques en général » (35). Il obtient des cercles vicieux par une traduction approximative de la logistique en langage ordinaire, un procédé qui est forcément illicite. Tout bien considéré, ni BURALI-FORTI ni COUTURAT ne se sont rendus coupables de cercles vicieux (36). La démonstration de la proposition de Bernstein ne fournit pas non plus d'argument, puisque l'induction complète définit non seulement le nombre naturel mais encore chaque progression (37). Tout à fait insoutenable est en outre l'opinion selon laquelle la logistique se servirait de deux définitions du nombre naturel dont l'équivalence ne peut être constatée qu'en vertu d'un jugement synthétique. COUTURAT démontre qu'en fait seulement une des deux formules que POINCARÉ a en vue, est une définition, et que l'autre peut y être obtenue logiquement (38). Il n'existe d'ailleurs pas de meilleur moyen pour combattre les cercles vicieux que précisément

---

(32) RMM 14, p. 34.

(33) RMM 13, p. 817. Il écrit aussi : « Le philosophe conserverait le droit de rechercher les origines de ces conventions » (c'est-à-dire des axiomes de la logique), « de voir pourquoi elles ont été jugées préférables aux conventions contraires » (RMM 13, p. 817).

(34) COUTURAT [18].

(35) RMM 14, p. 212.

(36) l.c., pp. 223-228.

(37) l.c., p. 246.

(38) l.c., p. 249.

la logique (39). Et à quoi sert-il de reprocher à la logistique de rendre les raisonnements plus faciles et plus sûrs ? (40). L'invention en bénéficie : « Loin donc de paralyser l'invention ou de la rendre inutile, la Logistique lui prête des échasses ou des ailes » (41). Ce faisant, elle présuppose plus « d'effort d'esprit » et « d'ingéniosité » que POINCARÉ n'en fait paraître (42).

Aussi l'idée de POINCARÉ que l'invention ait besoin de l'intuition, est correcte, quoique non intéressante dans ce contexte. Le fait est là que l'invention est une question psychologique et par conséquent sans intérêt pour la logique : « Personne n'a jamais prétendu que toute la mathématique se réduit matériellement à la logique (...). Nous soutenons seulement que tous les raisonnements mathématiques s'effectuent en vertu des *seules* règles de la logique, de même que toutes les parties d'échecs qu'on a pu et qu'on pourra jamais jouer s'effectuent suivant les règles du jeu » (43). COUTURAT regrette le courant alors à la mode, à savoir le mépris de la logique formelle au nom « de la logique de la nature et de la vie » (44). Mais le « sûr instinct » d'une « géométrie plus profonde » dont POINCARÉ parle, n'est au fond « qu'une forme inconsciente de la raison logique » (45). « La raison qui invente est conforme, et au fond identique, à la raison qui démontre, sans quoi celle-ci ne pourrait pas *vérifier* les trouvailles de celle-là ; et ces trouvailles ne sont des inventions, c'est-à-dire ne sont *vraies,* qu'à cette condition. C'est donc en définitive la conformité aux lois de la logique qui seule fait le prix de l'édifice construit » (46). COUTURAT déclare même que les logisticiens admettent qu'ils empruntent leurs principes à l'intuition, pourvu qu'il soit précisé qu'il s'agit de l'intuition intellectuelle et non pas de l'intuition sensible (47). C'est à tort que POINCARÉ passe sous silence cette distinction dans son dernier article (48). Son idée que les paradoxes reposent sur un usage erroné et secret de

---

(39) l.c., p. 223.

(40) l.c., p. 219.

(41) l.c., p. 219.

(42) l.c., p. 219.

(43) l.c., p. 214. Cf. : « Opposer à la logique le fait psychologique de l'invention, c'est commettre la plus grossière *ignoratio elenchi* » (l.c., p. 215).

(44) l.c., p. 215.

(45) l.c., p. 215.

(46) l.c., p. 215.

(47) l.c., p. 219.

(48) l.c., pp. 218-219.

l'intuition devrait être avérée (49). Quoiqu'il en soit, leur présence ne peut être employée comme arme contre la logistique en particulier, puisqu'ils interviennent également ailleurs (50).

Reste encore la question de savoir si — laissant de côté les points de départ et les phénomènes psychologiques annexes — la mathématique peut être construite comme un système logique et analytique. COUTURAT a soutenu ailleurs que la logique formelle aussi est capable d'effectuer des généralisations telles qu'elles se produisent en mathématiques (51). Il se borne ici à critiquer la preuve de consistance que POINCARÉ exige. Bien entendu, il existe une autre définition du nombre naturel que celle des postulats de PEANO. C'est la définition explicite de RUSSELL à laquelle celui-ci adjoint une preuve d'existence. Mais à part cela, COUTURAT soutient que pour deux raisons, il est illicite d'exiger une preuve de consistance. Son premier argument est qu'une telle preuve est impossible, strictement parlé ; il a l'opinion que l'absence de la consistance ne peut être que constatée. PADOA n'avait-il pas écrit (53) : « Les *contradictions* ou les *dépendances* des propositions ne peuvent être démontrées que par des *raisonnements* déductifs, tandis que les *non-contradictions* ou les *indépendances* des propositions ne peuvent être démontrées que par des *constatations* (on constate que des interprétations convenablement choisies des symboles vérifient ou ne vérifient pas les propositions en question) ». D'après COUTURAT, l'induction complète ne sert rien à ce sujet. A côté des syllogismes, il y a d'autres formes de raisonnement et en général leur succession n'est pas linéaire. « Dès lors », se demande COUTURAT, « que signifie le *nombre* des raisonnements qu'on aura faits à un moment donné, si leur ordre linéaire est toujours plus ou moins arbitraire, et provient uniquement de la nécessité pratique de les énoncer successivement dans le discours (parce que le temps n'a qu'une dimension) ? » (54). Un argument curieux qui n'est certainement pas décisif, et qui aboutit à la conjecture tout aussi curieuse que POINCARÉ aurait confondu l'induction mathématique avec l'induction physique (55). Le mieux est, dit COUTURAT, d'attendre et de voir

(49) l.c., p. 221.

(50) l.c., p. 228.

(51) Dans COUTURAT [15].

(52) l.c., pp. 241-244.

(53) PADOA [3], p. 90.

(54) RMM 14, pp. 238-239.

(55) l.c., p. 240.

si des contradictions se produisent ; selon lui, c'est là la méthode à laquelle tous les mathématiciens se conforment (56).

Son deuxième argument est que la consistance ne dit rien sur l'existence mathématique (et logique). L'existence d'une chose mathématique veut dire qu'une certaine classe n'est pas vide ; « dire : 'Il existe des a (au moins un a)' c'est, par définition, affirmer que la classe a n'est pas nulle. C'est justement pour cela que les mathématiciens ont coutume, pour prouver l'existence d'une classe, d'en donner un *exemple* » (57). Toutefois, l'existence d'un individu, qui sert d'exemple, est accepté a priori (58). En vertu de cette conception, COUTURAT soutient que l'intervention d'une contradiction démontre sans doute la non-existence, alors que la non-contradiction ne démontre pas l'existence (59).

Ce problème suscite la question de savoir où en était, vers 1905, la recherche concernant les démonstrations de la consistance. Après que la consistance de la géométrie euclidienne avait été démontrée au moyen d'un recours à l'analyse, d'où l'on pouvait en même temps inférer la consistance des géométries non-euclidiennes, le problème de la consistance de l'analyse se présenta comme de soi-même. Etant donné le procès de l'arithmétisation auquel l'analyse avait été assujettie, cela voulait dire en dernière instance que la consistance de l'arithmétique des nombres naturels (ou entiers) devrait être démontrée. En 1900, HILBERT avança ce problème comme étant une des questions les plus importantes des années à venir : dans sa conférence *Mathematische Probleme*, il le traite en deuxième lieu tout de suite après le problème du continu.

Au même congrès le lendemain de la conférence de HILBERT, PADOA fit un discours sur *Un Nouveau Système Irréductible de Postulats pour l'Algèbre* (60). Lui et PEANO étaient persuadés que cette contribution présentait la solution du problème que HILBERT avait signalé (61). Car PADOA soutient avoir démontré la consistance de son système de sept axiomes avec les termes primitifs « entier », « suc » et « sym », savoir à l'aide du modèle suivant : « Voici une interprétation de nos symboles non définis qui vérifie simultanément tous nos postulats :

(56) l.c., p. 236. D'après COUTURAT, cela en a tout l'air que POINCARÉ exige une démonstration de contradiction dans le seul but d'embarrasser les logisticiens.

(57) l.c., pp. 232-233.

(58) l.c., p. 233.

(59) l.c., p. 234.

(60) A. PADOA [1].

(61) Voir PADOA [3].

entier signifie nombre entier relatif, et, si x est entier quelconque, *suc* x signifie 1 + x, *sym* x signifie — x » (62). En fait, la consistance de l'arithmétique (intuitive) est déjà présupposée ici, et il était donc évident que la démonstration de PADOA ne pouvait satisfaire HILBERT ; la tentative de justifier les axiomes arithmétiques en faisant appel à l'arithmétique a dû lui sembler vicieuse. Même au sein de l'école de PEANO, des objections furent soulevées, entre autres du côté de M. PIERI qui, dans une note d'un de ses articles, soutient (63) que l'arithmétique ne peut être justifiée dans le domaine de l'arithmétique, mais tout au plus dans celui de la logique ; c'est à ce titre qu'il prend parti contre PADOA. Dans son article *Sur la Compatibilité des Axiomes de l'Arithmétique* (1906), il s'arrête plus longuement sur ce sujet (64). Partant de l'idée que la consistance d'un système d'axiomes est équivalente à la possibilité « d'un *quid* qui les vérifie toutes à la fois », PIERI écrit : « Si A, B, C... sont des propositions appartenant à un même système déductif Γ (n'importe lequel), on pourra dire qu'on a démontré (...) leur compatibilité, si dans quelque domaine $\triangle$ de connaissances rationnelles (comprenant les concepts et les axiomes fondamentaux de la Logique, sur lesquels repose toute déduction) on peut trouver une *interprétation* des idées primitives de Γ, qui manifeste *toutes* les propriétés énoncées par les propositions A, B, C... ; pourvu qu'un tel domaine $\triangle$ ne comprenne aucune de ces propositions parmi ses prémisses ou fondements déductifs, et que la consistance de ses principes soit *déjà établie* ou *accordée a priori* » (66). Les conditions exigées pour la validité de la démonstration sont nettement précisées ici. Une des conséquences en est d'ailleurs que la consistance des axiomes logiques devient indémontrable (67), puisqu'il n'y aurait pas d'autre méthode que celle que nous venons de mentionner. La méthode par induction complète de POINCARÉ est, selon PIERI, inutilisable. A son sens, il n'est pas permis de partir de la supposition que la suite des conclusions dérivées des propositions données A, B, C... soit dénombrable (68).

---

(62) PADOA [1], p. 251.
(63) M. PIERI [8], pp. 330-331.
(64) PIERI [9].
(65) RMM 14, p. 196.
(66) l.c., p. 197.
(67) l.c., p. 197.
(68) l.c., p. 199.

PIERI a ensuite comme objectif de démontrer la consistance de l'arithmétique en interprétant les termes primitifs dans le cadre de la logique. Dans l'ensemble, il se conforme à l'article de BURALI-FORTI, *Le Classi Finite* (voir les pages 44-45). Nous avons déjà pu constater que ce faisant, plusieurs suppositions spéciales doivent être faites, dont on peut contester le caractère analytique (69).

C'est à cette époque que PEANO projette une démonstration de la consistance de l'arithmétique au moyen d'une interprétation dans le cadre de la théorie des ensembles (70). Mais en fait, il juge une telle démonstration inutile puisque dans l'esprit de tout mathématicien, l'arithmétique est réalisée (cf. la page 42).

WHITEHEAD, de son côté, consacre une partie du premier chapitre de son livre *The Axioms of Projective Geometry* (1906) au problème en question (71). Il doute que l'absence de contradictions puisse déjà être considérée comme une condition suffisante pour l'existence. Lorsqu'on démontre l'existence à l'aide de la consistance (au lieu de l'inverse), celle-ci ne peut être assurée que « by a direct appeal to intuition, and by the fact that no contradiction has hitherto been deduced from the axioms » (72) (par un appel direct à l'intuition et par le fait que jusqu'alors aucune contradiction n'a été déduite des axiomes).

De même que WHITEHEAD, HADAMARD s'oppose à l'identification de consistance et existence à la manière de POINCARÉ. Dans un article *Sur la Logistique et la Notion du Nombre entier* (73), écrit à propos de la polémique entre POINCARÉ et COUTURAT, il fait remarquer que la consistance dérive de l'existence, « mais l'inverse, pour nous (comme pour M. FREGE), n'est nullement évident » (74). Il reconnaît cependant la grande importance que les démonstrations de consistance peuvent avoir, lorsque du moins — et ici il s'accorde avec POINCARÉ — on laisse de côté la consistance de l'induction complète. Il s'étonne que COUTURAT n'ait pas compris cela. C'est surtout en fournissant des démonstrations de la sorte, que la logistique peut montrer son prix :

---

(69) PIERI défend le caractère logique de l'axiome de l'infini (p. 207). Dans son article suivant, POINCARÉ considère l'axiome d'infinité pas plus évident que le principe de l'induction complète, qui doit être démontré (RMM 14, p. 311).

(70) PEANO [14].

(71) WHITEHEAD [1], [3].

(72) WHITEHEAD [1], p. 3 .

(73) HADAMARD [2].

(74) HADAMARD [2], p. 907. HADAMARD partage avec FREGE la méfiance des définitions au moyen de postulats (l.c., p. 907).

« elles reposeront nécessairement sur une énumération exacte et complète des procédés logiques mis en œuvre : c'est-à-dire sur la Logistique » (75). Celle-ci est « rigoureusement indispensable ».

Bien que dans le même article, HADAMARD partage la présomption de POINCARÉ que la définition de 1 est circulaire, on ne peut se soustraire à l'impression qu'il a plus de sympathie pour la logistique que n'en a son illustre compatriote. Il reconnaît en tous cas que la logistique n'est pas une occupation inutile mais un moyen indispensable (76). Dans cet ordre d'idées, il convient d'exposer les opinions de quelques autres mathématiciens français sur le problème de la logique et de l'intuition en mathématiques.

Déjà dans les années 1904-1905, le jeune P. BOUTROUX était entré en lice. Dans une conférence au deuxième Congrès International de Philosophie, intitulée : *Sur la notion de Correspondance dans l'Analyse mathématique* (77), il défend le caractère intuitif de la notion mathématique de correspondance. Cette conférence avait été signalée par POINCARÉ (78) et combattue par COUTURAT dans son compte rendu du congrès en question (79). P. BOUTROUX développe son point de vue plus en détails dans son article *Correspondance mathématique et Relation logique* (80). Quand BOUTROUX dit que la correspondance mathématique est un fait intuitif, il entend par là que celui-ci ne peut être emprunté ni à l'expérience ni à la logique, mais qu'il repose sur une perception suprasensible (81). Il constate une certaine analogie avec la physique : le fait intuitif mathématique est « analogue à la loi physique, comme un objet que la science a pour mission d'analyser et dont un travail progressif dégagera peu à peu le contenu » (82). Ce contenu est infini, raison pour laquelle l'on n'est capable que de donner des descriptions complémentaires (83) et non pas une définition universelle, ce qui d'ailleurs s'avère dans l'évolution de la théorie des fonctions. D'après BOUTROUX, ce processus historique révèle en même temps l'insoutena-

---

(75) l.c., p. 907.

(76) Même la subordination de la logistique au bon sens n'y fait pas tort (l.c., p. 909).

(77) P. BOUTROUX [1].

(78) RMM 13, p. 830.

(79) COUTURAT [14].

(80) P. BOUTROUX [2].

(81) RMM 13, p. 624.

(82) l.c., pp. 620-621.

(83) l.c., p. 629.

bilité de l'opinion selon laquelle les mathématiques peuvent être construites à l'aide d'un certain nombre de constantes logiques ; il y a la liberté du mathématicien qui peut choisir son champ de recherche d'un moment à l'autre (84). Il va sans dire que la logique joue un rôle important en mathématiques, mais elle marche à reculons. Donné un champ de recherches, elle tâche de découvrir les principes qui en sont à la base. Mais « la recherche mathématique est une marche en avant : elle consiste à incorporer, à dompter des notions nouvelles » (85).

Des conceptions analogues, quoiqu'encore plus prononcées, sont défendues par E. Borel. Bien que les contributions de celui-ci dans le domaine de la philosophie des mathématiques aient surtout trait à la théorie des ensembles, l'on peut néanmoins inférer de différentes boutades, son appréciation de la logique. « Il me paraît (...) qu'il est vain de discuter éternellement les principes sans se demander jamais ce qu'est la science elle-même », écrit-il par exemple dans un article sur *La Logique et l'Intuition en Mathématiques* (86), dans lequel il se met sur la brèche pour les droits de l'invention en général contre ceux de la démonstration logique et de la théorie complétée. Il déclare même : « Une formule logique est un phénomène comme la chute d'un corps ou comme un arbre, et les mathématiques sont une science naturelle dans laquelle la logique ne joue pas plus de rôle que dans les autres sciences naturelles » (87). De la même année date la singulière assertion que dans la géométrie, la méthode « euclidienne » est de plus en plus remplacée par une méthode intuitive (88).

Toute aussi surprenante est la remarque de Lebesgue, exprimée dans ses *Leçons sur l'Intégration et la Recherche des fonctions primitives* (1904) : « J'emploie à dessein le mot convaincre pour marquer qu'à mon avis les raisons de se déclarer satisfait par un raisonnement sont de nature psychologique, en mathématique comme ailleurs. La logique nous donne des raisons pour rejeter certains raisonnements, elle ne peut nous faire croire à un raisonnement » (88 a).

J. Richard aussi s'est mêlé à la discussion. Il est vrai que son opuscule *Sur la Philosophie des Mathématiques* (1903) évite les problèmes connexes à la logique (phénomène qui est certainement déjà

(84) l.c., p. 627.
(87) l.c., p. 276.
(86) E. Borel [3], p. 274.
(87) l.c., p. 276.
(88) E. Borel [4].
(88a) H. Lebesgue [1], p. 328, n. 1.

symptomatique en soi), mais dans l'article *Sur la logique et la notion du nombre entier* (89) au moins quelques-uns des problèmes logiques sont relevés. RICHARD examine une justification éventuelle du principe de l'induction complète dans le sens de l'ouvrage de DEDEKIND *Was sind und was sollen die Zahlen?* sans toutefois mentionner DEDEKIND. Or, la consistance des prémisses, qu'il présuppose, ne peut être démontrée que par induction complète. La consistance du principe lui-même ne peut donc jamais être démontrée. « Ce principe est indémontrable, il est l'expression d'une intuition logique » (90).

Laissant de côté la remarque de HADAMARD, l'on peut constater que les mathématiciens français ont donc allégué bien peu d'arguments pour la défense de la recherche moderne des fondements. Je ne veux cependant pas manquer de signaler le commentaire de M. WINTER. Comme HADAMARD, il relève l'importance de la logistique tout en critiquant la question soulevée par POINCARÉ : comment pourrait-on faire de nouvelles découvertes avec des moyens analytiques ? Le mot « nouveau » indique ici une catégorie qui ne peut être employée utilement que par rapport à l'homme. « Et n'y a-t-il pas une contradiction manifeste à vouloir donner un fondement logique absolu à ce qui n'est que psychologique et humain ? » (91).

Cette pensée correspond à la réplique que RUSSELL, sous le titre *Sur la relation des mathématiques à la logistique* (92), consacra aux conceptions de BOUTROUX, telles que nous les avons exposées ci-dessus. Il va sans dire que celles-ci ne s'accordaient que rarement avec les siennes. Que la notion de correspondance soit définissable ou non — dit-il en premier lieu — il ne convient pas d'y attribuer un contenu infini (93) ; seule l'extension est infinie, non pas la compréhension (94). Et en général, RUSSELL soutient que BOUTROUX confond les mathématiques d'une part avec la psychologie de ceux qui pratiquent les mathématiques, d'autre part avec l'histoire des mathématiques. « Le point capital est que ce qui évolue, c'est notre *connaissance* des mathématiques, et non le corps de vérités que nous découvrons graduellement. Cette évolution rend très probable qu'une liste de huit constantes dressée dans

(89) J. RICHARD [4].

(90) RICHARD [4], p. 44.

(91) M. WINTER [1], p. 70. Les différents chapitres de ce livre avaient déjà paru sous une forme quelque peu autre dans RMM.

(92) B. RUSSELL [11].

(93) RMM 13, p. 912.

(94) l.c., pp. 914-915.

l'état présent de notre connaissance aura besoin de correction ; mais elle ne rend pas le moins du monde probable qu'on ne puisse trouver aucune liste de constantes » (95).

Quoique POINCARÉ ne soit pas directement mêlé à cette polémique, plusieurs de ses conceptions y sont en jeu. Quant aux idées de POINCARÉ lui-même, RUSSELL les critique dans sa discussion du livre de POINCARÉ, *La Science et l'Hypothèse,* parue dans *Mind* (1905 (96). En vertu de sa théorie que le principe de l'induction complète coïncide avec la définition du nombre naturel, RUSSELL ne peut évidemment pas y voir le principe synthétique et universel pour lequel POINCARÉ le tient (97). De même conteste-t-il, ainsi que l'avait fait MILHAUD, que l'induction complète mène du particulier au général : la généralité de la conclusion réside dans une des prémisses. Si RUSSELL nie la théorie suivant laquelle les mathématiques renfermeraient un élément intuitif, il partage par contre l'opinion de POINCARÉ qui n'admet pas qu'elles puissent être regardées comme une immense tautologie. Selon lui, toute déduction mène bel et bien à une nouvelle proposition. Finalement, il trouve une pensée kantiste injustifiable dans la conception de POINCARÉ selon laquelle la certitude d'un principe peut être fondée sur une faculté de l'esprit humain. Ne se pourrait-il qu'il y ait beaucoup d'esprits doués de beaucoup de facultés ? (La polémique entre RUSSELL et POINCARÉ, à laquelle cette étude a donné lieu (98), n'est pas très satisfaisante).

En 1905, parut l'article de RUSSELL, *On some difficulties in the theory of Transfinite Numbers and Order Types* (99). Cet article est surtout intéressant en ce qu'il contient une étude préparatoire de la théorie des types. Point de départ est l'existence de fonctions propositionnelles qui sont entièrement déterminées (100) sans qu'elles définissent

(95) l.c., p. 910.

(96) RUSSELL [12].

(97) Amusante est la critique de RUSSELL à l'égard de la formulation de POINCARÉ du principe synthétique de l'induction complète comme étant la faculté de l'esprit humain de « la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible » (*SH,* p. 24). RUSSELL réduit cette formulation à : « If an operation is one that can be repeated indefinitely, then it is capable of indefinite repetition » (Si une opération en est une qui peut être répétée indéfiniment, alors elle est capable de répétition indéfinie), à quoi il ajoute : « It can hardly be this principle which saves mathematics from being a 'vast tautology' » (ce principe peut difficilement être celui qui sauve les mathématiques d'être 'une vaste tautologie').

(98) MIND, N.S. 15 (1906), pp. 141-143.

(99) RUSSELL [13].

(100) RUSSEL appelle une fonction propositionnelle « perfectly determined » lorsqu'on peut déterminer pour chaque élément s'il y satisfait, oui ou non.

une classe. Elles conduisent à des paradoxes dont RUSSELL découvre qu'ils peuvent être introduits arbitrairement. Ainsi que nous l'avons déjà signalé à la page 50, il proposa au début trois méthodes, par lesquelles les fonctions propositionnelles qu'il qualifie de « non-prédicatives » pourraient, peut-être, être évitées. Ce sont : la « théorie zig-zag », la « théorie de la limitation de grandeur » et la « théorie pas de classes » ; cette dernière lui semble, ainsi qu'il l'écrit dans une annotation (101), la préférable. La théorie des types en effet provient de la dernière méthode. L'article consacre également un paragraphe à l'axiome de choix de ZERMELO, établi en 1904 et qui, de même que l'axiome multiplicatif, est qualifié par RUSSELL comme très probablement « not true without some restriction » (pas vrai sans quelque restriction) (102). Ainsi RUSSELL se désintéresse de sa démonstration de l'équivalence des notions « inductive number » (nombre inductif) et « finite number » (nombre fini) qui sont définis dans l'article (voir les pages 47 et 85).

La discussion est suivie d'une duplique de POINCARÉ, de nouveau intitulée *Les Mathématiques et la Logique* (Revue de Métaphysique et de Morale 1906) (103). L'auteur s'y reporte non seulement à la critique de COUTURAT, mais également à l'article de PIERI et à l'étude de RUSSELL mentionnée ci-avant. Voulant se borner aux points principaux, il commence son exposé en cédant à COUTURAT d'un ton ironique plusieurs choses que celui-ci avait soutenues avec force (104). Ces points principaux sont les suivants : « Les règles de la logistique ont-elles fait leurs preuves de fécondité et d'infaillibilité ? Est-il vrai qu'elles permettent de démontrer le principe d'induction complète sans aucun appel à l'intuition ? » (105).

En traitant de cette dernière question, il va de soi que POINCARÉ continue à défendre la nécessité de preuves de consistance. L'idée de COUTURAT que cette demande serait arbitraire, voire impossible, est d'une part combattue par le renvoi au fait que COUTURAT est seul parmi

---

(101) RUSSELL [13], p. 53.

(102) l.c., p. 52.

(103) POINCARÉ [28].

(104) Il s'agit des questions suivantes :
« 1° Que *toujours faux*, ce n'est pas la même chose que *jamais vrai*.
2° Qu'avant les travaux de M. BURALI-FORTI, il était permis de douter que un fût un nombre, du moins ordinal.
3° Que l'idée d'unité n'implique pas le nombre un » (RMM 14, p. 295).

(105) RMM 14, p. 295.

tous les savants à adhérer à cette opinion (106), d'autre part par la réponse de POINCARÉ qui précise : « Impossible pour vous, mais pas pour nous, qui admettons le principe d'induction comme un jugement synthétique a priori » (107). La supposition de COUTURAT que POINCARÉ aurait confondu l'induction physique avec l'induction mathématique « prouve évidemment qu'il n'y a rien compris du tout » (108). Il est en effet étonnant que COUTURAT en soit arrivé à cette remarque. La faute est ici en grande partie à COUTURAT. C'est à juste titre que POINCARÉ soutient dans son nouvel article que la conception de COUTURAT de l'existence ne rend nullement superflues les preuves de consistance. Les mathématiques n'ont-elles pas rapport à une autre sorte d'objets que ceux dont la physique s'occupe, de sorte qu'il n'est pas possible d'établir l'existence de ces objets au moyen de la perception sensorielle. Tant que l'on parle d'un individu, « seul au monde, et dont on n'affirme rien », l'on peut accepter son existence tout court. « Il vous restera à démontrer l'existence de l'individu ' dans une classe ' et pour cela il vous faudra toujours prouver que l'affirmation : tel individu appartient à telle classe, n'est contradictoire ni en elle-même, ni avec les autres postulats adoptés » (109).

Il y a toutefois quelque chose d'obscur dans la suite des idées de POINCARÉ. Qu'est-ce qu'il entend par « rencontrer une contradiction », « tomber sur une contradiction » et expressions similaires ? Je veux tâcher d'éclaircir cela à l'aide du passage suivant, où il soutient encore une fois que le principe de l'induction complète n'est simplement pas employé comme une définition : « Pour que nous ayons le droit de poser un système de postulats, il faut que nous soyons assurés qu'ils ne sont pas contradictoires. C'est là une vérité qui est admise par la plupart des savants (...). Mais que signifie-t-elle ? Veut-elle dire : il faut que nous soyons sûrs de ne pas rencontrer de contradiction après un nombre *fini* de propositions, le nombre *fini* étant par définition celui qui jouit de toutes les propriétés de nature récurrente, de telle façon que si une de ces propriétés faisait défaut, si par exemple nous tombions sur une contradiction, nous *conviendrons* de dire que le nombre en question n'est pas fini ? » (110).

---

(106) l.c., p. 302. Une proposition fort controversable, témoins par exemple l'opinion de PEANO, citée à la page 42.

(107) l.c., p. 298.

(108) l.c., p. 299.

(109) l.c., p. 297.

(110) l.c., p. 302.

L'on peut se demander s'il veut seulement dire par là que lorsqu'une contradiction intervient, l'on considérera le système d'axiomes comme contradictoire plutôt que le numéro d'ordre de la déduction en question comme non-fini. La suite donne lieu à une telle supposition. Mais en fait le raisonnement semble renfermer plus que cela. POINCARÉ fait paraître que l'absence de contradictions est une propriété récurrente, par quoi il entend : si, après n étapes de démonstration aucune contradiction n'intervient, il n'y en a pas non plus après n + 1 étapes de démonstration. Cela signifierait que l'on devrait entendre par l'absence de contradictions non seulement l'absence explicite (c'est-à-dire l'absence de deux propositions contradictoires après un certain nombre d'étapes de démonstrations), mais l'absence implicite (c'est-à-dire l'impossibilité de déduire encore deux propositions contradictoires, ne fût-ce, peut-être, qu'à l'aide de méthodes plus ou moins intuitives). Autrement dit, la démonstration de la consistance, telle que POINCARÉ la propose, doit contenir le résultat suivant : lorsqu'un système d'assertions ne renferme point de contradictions, il en est de même du système que l'on peut obtenir en exécutant une seule étape de démonstration.

Il convient d'examiner sous ce jour la formulation par POINCARÉ des démonstrations de consistance par induction complète. « Nous pouvons vérifier que les opérations de la nouvelle logique appliquées à des prémisses exemptes de contradiction ne peuvent donner que des conséquences également exemptes de contradiction. Si donc après n opérations, nous n'avons pas rencontré de contradiction, nous n'en rencontrerons non plus après la n + 1^{e}. Il est donc impossible qu'il y ait un moment où la contradiction *commence,* ce qui montre que nous n'en rencontrerons jamais » (111). Cette formulation semble cadrer avec l'interprétation que nous avons tenté de donner ci-dessus. Si elle est juste, alors les démonstrations de consistance de POINCARÉ ont plutôt rapport à une épreuve de la logique qu'à une épreuve des différents systèmes d'axiomes.

Il y a là évidemment une conséquence vexante. Lorsqu'on met de côté l'interprétation qui nous occupe, l'avant-dernière citation est à peine compréhensible. Car ne faut - il pas alors admettre que cette citation veut dire : Soit un système d'axiomes A qui ne contient pas deux assertions contradictoires, et soit démontré que, si après n étapes de démonstration il ne se produise pas deux assertions contradictoires, alors ceci n'arrivera non plus après n + 1 étapes de démonstration. Au cas où une contradiction interviendrait pourtant, l'on considérerait ce

(111) *SM,* p. 175-176.

système d'axiomes comme contradictoire ! L'on est forcé de constater tout au moins que POINCARÉ n'a pas conscience d'un critère formel nettement défini, en vertu duquel l'on peut, sans plus, établir la présence d'une contradiction dans un système fini d'assertions (112).

Sa croyance que nous posséderions l'intuition du nombre naturel et que nous ne serions pas capables de penser sans nous servir de cette intuition, ne l'empêche pas d'exprimer son appréciation sur l'article de PIERI. Il considère son programme comme étant « parfaitement correct » (113), mais il déduit de l'impossibilité de démontrer la compatibilité des axiomes logiques, le fait qu'en fin de compte nous dépendons toujours de l'intuition : « Ainsi la compatibilité des postulats fondamentaux de la Logique est elle-même un postulat qu'il faut admettre et qu'il est impossible de démontrer déductivement. Nous ne pouvons donc affirmer cette compatibilité que par un jugement synthétique a priori » (114). Il a toutefois des objections contre la conception de PIERI, suivant laquelle l'on ne pourrait se servir de l'induction complète pour démontrer la consistance. Il se demande ce qu'il faut se représenter quand il s'agit d'une rangée indénombrable de déductions. L'on doit être satisfait lorsqu'il est démontré qu'après un nombre fini d'étapes de démonstration aucune contradiction n'intervient (115). Il convient de se servir ici de l'induction complète, ce qui toutefois n'est permis que quand on accepte ce principe comme un jugement synthétique a priori (116). La conséquence est que POINCARÉ et COUTURAT visent chacun à autre chose quand ils parlent d'une définition récurrente du nombre naturel. Pour POINCARÉ, l'induction complète n'en fait pas partie ; la définition telle qu'il l'a présentée, revient aux quatre premiers axiomes de PEANO, de sorte qu'il peut continuer à soutenir que la méthode de démonstration par induction complète ne peut pas en être déduite par voie analytique (117).

L'autre question capitale est de savoir si la logistique a prouvé sa fécondité et son infaillibilité. POINCARÉ est tenté de croire que les deux qualifications sont très douteuses. C'est à cause de cette soi-disante

(112) Très probablement, cela s'accorde au fait que beaucoup (y compris POINCARÉ) regardent avec défiance la possibilité d'une formalisation complète des mathématiques.

(113) RMM 14, p. 298.

(114) l.c., p. 298.

(115) l.c., p. 300.

(116) l.c., p. 302.

(117) l.c., p. 303.

infaillibilité même qu'il ne peut être question de fécondité : « S'il faut vingt-sept équations pour établir que 1 est un nombre, combien en faudra-il pour démontrer un vrai théorème ? » (118). La logistique ne procure certainement pas des ailes ainsi que COUTURAT aime à le faire croire. Il n'y aurait pas de mal si au moins l'infaillibilité était établie, mais cette certitude a été détruite par les antinomies (119). Afin d'examiner comment celles-ci se sont produites, POINCARÉ discute le paradoxe de RICHARD (1905) (120) : Il est possible de ranger alphabétiquement la collection E de nombres réels qui sont définissables dans un certain langage à l'aide d'un nombre fini de mots ; ensuite, l'on peut définir dans un nombre fini de mots un nombre N, qui ne figure pas dans la suite établie. Selon RICHARD, la solution de cette contradiction est que la définition de N n'a point de signification tant que la suite n'est pas achevée. POINCARÉ est du même avis et ainsi la définition correcte est selon lui la suivante : « E est l'ensemble de tous les nombres que l'on peut définir par un nombre fini de mots, sans introduire la notion de l'ensemble E lui-même » (121). Il déclare que les autres paradoxes aussi reposent sur la même erreur et se rattachant à la terminologie de RUSSELL, il dit : « Les définitions qui doivent être regardées comme non prédicatives sont celles qui contiennent un cercle vicieux » (122).

Les définitions non prédicatives sont dépourvues de sens. C'est sur cette base qu'appuie la critique de POINCARÉ au sujet de la publication de RUSSELL et WHITEHEAD, *On Cardinal Numbers*. Dans sa critique, il se sert des notions suivantes qu'il a en partie empruntées à RUSSELL : classe récurrente : classe de nombres qui contient 0 et qui, quand elle contient n, contient également n + 1 ; nombre inductif : nombre qui appartient à toute classe récurrente ; nombre fini : nombre cardinal d'une classe qui n'est équivalente à aucune vraie sous-classe ; entier fini : nombre cardinal n qui est inégal à n — 1. Il s'agit de savoir si chaque nombre fini et chaque nombre entier fini est un nombre inductif. « Etablir ce point ce serait démontrer le principe d'induction » (123). RUSSELL essaie alors de démontrer qu'aucun nombre non inductif n'est un entier fini et à cette fin il forme la classe des nombres m, de telle

(118) l.c., p. 295.

(119) Etant entendu que ces antinomies sont le seul argument pour la fécondité ! « La logistique n'est plus stérile, elle engendre l'antinomie » (l.c., p. 316).

(120) Publié pour la première fois dans RICHARD [2].

(121) RMM 14, p. 307.

(122) l.c., p. 307.

(123) l.c., p. 308.

façon que n — m est non inductif lorsque n est non inductif. Cette classe est récurrente et contient par conséquent tous les nombres inductifs. C'est à ce moment toutefois que l'on peut constater que la définition de « nombre inductif » est non prédicative : on aurait dû prendre la précaution d'appliquer la définition du « nombre inductif » seulement à « toutes les classes récurrentes dans la définition desquelles n'intervient pas déjà la notion de nombre inductif » (124). La preuve telle quelle, n'est pas valable. A l'opposé de RUSSELL, le fait qu'on se sert en passant aussi de l'axiome de choix ne semble pas gêner POINCARÉ. Ce n'est pas qu'il soit de l'opinion que cet axiome puisse être justifié par voie analytique. Plutôt le voit-il comme un jugement synthétique a priori, « sans laquelle la 'théorie cardinale' serait impossible, aussi bien pour les nombres finis que pour les nombres infinis » (125).

En dernière instance, les définitions non prédicatives reviennent à la croyance en l'infini actuel (126). Le mot « tous » qui a une signification claire pour les ensembles finis n'a pour les ensembles infinis une signification que si il y avait un infini actuel (127). « Si la définition d'une notion N dépend de *tous* les objets A, elle peut être entachée de cercle vicieux, si parmi les objets A il y en a qu'on ne peut définir sans faire intervenir la notion N elle-même » (128). Mais seuls les ensembles finis peuvent être soumis à une analyse complète (129).

Selon POINCARÉ, l'infini actuel n'existe même pas et il met ce fait directement en rapport avec l'intervention de paradoxes. Pourtant il semble improbable que POINCARÉ veuille dire que l'infini actuel ne peut être répudié qu'après que les paradoxes soient intervenus. Car à : « Il n'y a pas d'infini actuel », suit immédiatement : « les Cantoriens l'ont oublié, et ils sont tombés dans la contradiction » (130), comme si dès le début il y avait quelque chose qu'on pouvait oublier. Ainsi, il semble que, se reportant à la tradition philosophique, il rejette l'existence de l'infini actuel pour des raisons à la fois mathématiques et philosophiques. Quoiqu'il en soit, le fait que des paradoxes interviennent dans la théorie des ensembles, est pour lui condition suffisante pour pouvoir conclure à la non-existence de l'infini actuel.

---

(124) l.c., p. 310.

(125) l.c., p. 313. Avec un peu plus de réserve, il écrit à la page 315 : « (...) quoique je sois plutôt disposé à admettre l'axiome de ZERMELO ».

(126) l.c., p. 316.

(127) l.c., p. 316.

(128) l.c., p. 316.

(129) Cf. RMM 14, p. 868.

(130) RMM 14, p. 316.

Ainsi l'infini, qui est pour POINCARÉ une des caractéristiques des mathématiques (131), est toujours un infini en puissance. Pour la logistique, il est a fortiori impossible de faire le saut vers l'infini actuel, un saut qu'elle a néanmoins risqué. Selon POINCARÉ, les paradoxes marquent sa déconfiture (132). Elle se trouve confrontée avec la nécessité d'une révolution de son propre système. RUSSELL s'en préoccupe et POINCARÉ est prêt à prendre son système en considération lorsque la révision en sera terminée (133).

De cette façon, la réaction de POINCARÉ aux questions 4 et 5 (voir la page 70) est devenue plus compréhensible. En outre, il déclare que les difficultés qu'il a discutées ne concernent bien entendu que le cantorisme et la logistique : « les *vraies* mathématiques, celles où l'on ne patauge pas dans l'infini actuel, pourront continuer à se développer d'après leurs principes propres sans se préoccuper des orages qui sévissent en dehors d'elles, et elles poursuivront pas à pas leurs conquêtes accoutumées qui sont définitives et qu'elles n'ont jamais à abandonner » (134).

C'est à la dernière observation que RUSSELL rattache son article *Les Paradoxes de la Logique* (Revue de Métaphysique et de Morale 1906) (135), écrit à la suite de l'étude de POINCARÉ que nous venons de discuter : il s'oppose, ainsi que le fait COUTURAT, au fait que POINCARÉ ne prend pas au sérieux les courants auxquels il s'est attaqué (136). Mais lui-même, il ne peut plus reconnaître que la logistique soit une occupation mécanique et que l'intuition n'y joue point de rôle : « Son objet n'est pas de bannir 'l'intuition', mais de contrôler et de systématiser son emploi, d'éliminer les erreurs auxquelles son emploi non contrôlé donne lieu, et de découvrir des lois générales d'où l'on peut, par déduction, obtenir des résultats jamais contredits par l'intuition, et,

---

(131) Cf. p. 70.

(132) « Nous tromper, pour nous, c'est un malheur, un très grand malheur, pour vous c'est la mort » (l.c., p. 296).

(133) l.c., p. 317.

(134) l.c., p. 312.

(135) RUSSELL [14].

(136) Mais l'ironie de RUSSELL ne le cède pas à celle de POINCARÉ. C'est ainsi qu'il « traduit » (pour en expliquer le caractère réactionnaire) la référence de POINCARÉ aux *vraies* mathématiques en termes qui touchent aux antinomies originales du calcul différentiel : « Inutile d'ajouter que le leibnizianisme est seul en cause ; les vraies mathématiques, c'est-à-dire l'algèbre, la géométrie et la mécanique, pourront continuer à se développer d'après leurs principes propres ». RMM 14, p. 629.

dans les cas cruciaux, confirmés par elle » (137). La logistique, ainsi que toute branche des mathématiques, exige de l'imagination et de l'intuition, ne fût-ce que pour dépister aussi vite que possible des contradictions éventuelles (138).

Par contre, RUSSELL partage le point de vue de POINCARÉ, à savoir que l'intervention des paradoxes est due aux cercles vicieux. Il soutient (ainsi qu'il l'avait déjà fait dans son étude *On some difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types*) que tous les paradoxes logiques peuvent être réduits à la formule suivante : « Etant donnée une propriété φ et une fonction f telle que, si φ appartient à tous les membres de u, fu existe toujours, a la propriété φ et n'est pas un membre de u ; alors la supposition qu'il y a une classe w de tous les termes ayant la propriété φ et que fw existe, conduit à la conclusion que fw à la fois a et n'a pas la propriété φ » (139). Mais il dénie que l'infini actuel y joue également un rôle : il y a des paradoxes où l'infini n'est pas impliqué, et qui ne diffèrent pas essentiellement des autres (A titre d'exemple, il nomme le paradoxe de BERRY). Et lorsque POINCARÉ écrit que le terme « tous » n'est admissible qu'en rapport avec des ensembles finis, n'énonce-t-il pas lui-même un jugement sur tous les membres d'un ensemble infini ? En outre, RUSSELL s'oppose au moyen que POINCARÉ propose pour remédier au paradoxe de RICHARD : la définition de l'ensemble E, telle que POINCARÉ la présente, renferme un cercle vicieux (140). Cette objection peut être généralisée (141). Donc, lorsque RUSSELL formule la prescription de POINCARÉ de la manière suivante : « Tout ce qui contient une variable apparente ne doit pas être une des valeurs possibles de cette variable » (142) (Principe du cercle vicieux), il ne croit pas par là être arrivé

(137) l.c., p. 630.

(138) l.c., p. 631.

(139) l.c., p. 635. Le paradoxe de BURALI-FORTI peut être obtenu ici par exemple en mettant au lieu de φ x : x est un nombre ordinal, et au lieu de fu : le nombre ordinal de u.

(140) Il en est de même pour sa proposition en vue d'une amélioration de la définition « nombre inductif ». RUSSELL juge le fait que POINCARÉ aboutit à des solutions par trop faciles et par là intenables, caractéristique de son attitude dédaigneuse à l'égard de la logistique : « Je ne puis m'empêcher de penser que ses tentatives pour éviter le cercle vicieux illustrent le sort de ceux qui dédaignent la logique » (l.c., p. 649).

(141) « L'assertion qu'ils (i.e. les cercles vicieux) doivent être évités (..) enveloppe elle-même un de ces cercles qu'elle prescrit d'éviter » (l.c., p. 648).

(142) l.c., p. 634.

au bout. On ne peut pas non plus dire qu'une fonction propositionnelle φ x ne soit signifiante que pour certaines valeurs de x, car cela voudrait dire que l'on peut toujours mettre des valeurs quelconques à la place de x (143). Il se trouve que le domaine de signifiance doit, d'une façon ou d'une autre, être donné en même temps que la variable, « et cela ne peut se faire qu'en employant des variables ayant une *structure* interne de manière à être de quelque type logique défini autre que les individus » (144). Ces individus sont représentés par des lettres à part, mais tout le reste ne peut plus être regardé comme individu. Des classes par exemple apparaissent comme des matrices de la forme $\frac{p}{a}$, ce sont là des fonctions propositionnelles où a est remplaçable et qui déterminent tous les x qui font de $\frac{p}{a}$; x une vraie proposition (145). Il est dès lors clair que $\frac{p}{a}$; $\frac{p}{a}$ est sans signification. RUSSELL remarque en général : « Les divers types qui se présentent dans cette méthode : classes, classes de classes... relations binaires, classes de relations binaires... sont simplement des phrases incomplètes » (146).

A côté de cela, les propositions et les fonctions propositionnelles sont partagées en différents groupes selon leurs variables liées, ce qui entraîne des conséquences non seulement pour la notion de vérité, mais aussi pour le principe de l'induction complète. En tant que l'on parle de « toutes les propriétés», il est nécessaire de se borner aux propriétés qui peuvent être formulées sans variables liées (147) et cela pourrait devenir funeste. Pour parer à ces dangers, RUSSELL propose l'axiome,

---

(143) Lorsque l'on pose par exemple que « φ x n'est signifiante que quand x est une classe », cela implique que : « φ x n'est pas signifiante quand x n'est pas une classe » ; on voit que des valeurs quelconques de x peuvent être substituées (l.c., p. 641).

(144) l.c., p. 642.

(145) $\frac{p}{a}$; x représente le résultat de la substitution de a dans p par x.

(146) l.c., p. 637. Une étude préparatoire de la théorie des types de RUSSELL, dont nous n'avons pas encore fait mention, est RUSSELL [10]. Ici les « denoting phrases » sont considérées comme des expressions qui sont en soi exemptes de sens et qui ne prennent une signification que par le contexte dans lequel elles interviennent. Elles peuvent toujours être éliminées.

147) Cela signifie qu'une proposition telle que « Si m est un nombre naturel, alors pour chaque nombre naturel n : $m < n$, $m = n$ ou $m > n$ », ne pourrait être démontrée par induction complète pour m.

dit l'axiome de réductibilité : « Tout énoncé contenant x et une variable apparente est équivalent, pour toutes les valeurs de x, à quelque énoncé φ (x) ne contenant aucune variable apparente » (148).

Lorsque POINCARÉ donne dans *A Propos de la Logistique* (Revue de Métaphysique et de Morale 1906) (149) une réponse provisoire à la théorie des types de RUSSELL, il se confine en bonne partie à l'induction complète. Il y résume la divergence d'opinion ainsi :

« Définition A. — Un nombre *fini* est un nombre cardinal n tel que $n < n + 1$.

Définition B. — Un nombre *inductif* est un nombre qui fait partie de toutes les classes récurrentes.

Proposition C. — Tout nombre fini est inductif.

Pour M. RUSSELL, c'est la définition B qui est le principe d'induction, et en partant de cette définition, il a cherché à démontrer la proposition C.

Pour moi, c'est la proposition C qui est le principe d'induction ; cette proposition n'est pas une définition et elle est indémontrable (..). A la façon de voir de M. RUSSELL, j'ai objecté que la définition B, pouvant impliquer un cercle vicieux, ne peut être appliquée que sous certaines restrictions, et que ces restrictions ne permettent pas l'emploi qu'il en fait » (150). RUSSELL a reconnu ce problème mais la solution qu'il propose nécessite un axiome que POINCARÉ juge incompréhensible et qui, pour lui, n'est en tous cas pas plus évident que le principe de l'induction complète. Comme POINCARÉ est de l'opinion que « pour qu'il y ait intérêt à le substituer au principe d'induction qu'il s'agit de démontrer, il faut qu'il soit plus directement évident que ce principe » (151), il s'ensuit que la dernière tentative de RUSSELL ne peut pas non plus trouver grâce à ses yeux.

Dans *Mathematical Logic based on the Theory of Types* (American Journal of Mathematics 1908) (152), RUSSELL parvient à l'expression définitive de sa théorie des types. Il en formule le principe fondamental comme suit : « any expression containing an apparent variable is of a

(148) RMM 14, p. 648.

(149) POINCARÉ [29].

(150) RMM 14, p. 867. Il est curieux que la proposition C contienne le terme « tout » par rapport à une classe infinie.

(151) l.c., p. 868.

(152) RUSSELL [15].

higher type than that variable » (153) (toute expression contenant une variable apparente est d'un type plus élevé que cette variable), et c'est sur cette base que reposent ses prescriptions qui servent à combattre les cercles vicieux. Dès lors, il n'est plus permis d'énoncer un jugement qui renferme « tous les noms » ou « toutes les propositions ». Le terme « tous » ne peut être appliqué qu'en cas d'homogénéité logique (154), c'est-à-dire quand l'ensemble fait partie du domaine de signifiance de la fonction en question (155). En vertu du principe « a type is defined as the range of significance of a propositional function » (qu'un type est défini comme le domaine de signifiance d'une fonction propositionnelle) (156), l'on peut de même dire que tous les membres de l'ensemble doivent appartenir au type approprié. Mais à aucun point de vue, il n'est nécessaire que l'ensemble soit fini.

RUSSELL appelle élémentaires les propositions qui ne contiennent point de variable liée ; leurs termes se nomment des individus. Les propositions du premier ordre consistent en propositions élémentaires et en propositions contenant des individus comme variable liée. Les propositions de second ordre contiennent des propositions du premier ordre comme variable liée, et ainsi de suite. Une division analogue est appliquée aux fonctions propositionnelles (157). RUSSELL nomme alors prédicatives les fonctions dont l'ordre est 1 plus grand que celui de leur argument (158). Pour ne pas rendre la construction des mathématiques impossible, RUSSELL doit avoir recours à l'axiome de la réductibilité, qu'il définit maintenant ainsi : « every propositional function is equivalent, for all its values, to some predicative function » (chaque fonction propositionnelle est équivalente, pour toutes ses valeurs, à une

(153) RUSSELL [15], p. 262.

(154) l.c., p. 236.

(155) l.c., p. 236.

(156) l.c., p. 236.

(157) « A function whose argument is an individual and whose value is always a first-order proposition will be called a first-order function » (Une fonction dont l'argument est un individuel et dont la valeur est toujours une proposition de premier ordre sera appelée une fonction de premier ordre), etc. (l.c., p. 239).

(158) Strictement parlant, cette définition vaut seulement pour les fonctions avec une seule variable. Une fonction propositionnelle avec plus de variables s'appelle prédicative « if there is one among these variables in respect of which the function becomes predicative when values are assigned to all the other variables » (si, parmi ces variables, il y en a une pour laquelle la fonction devient prédicative lorsque des valeurs sont attribuées à toutes les autres variables) (l.c., p. 239).

fonction prédicative) (159). Ensuite, il traite différentes notions fondamentales de mathématiques, telles que les nombres cardinal et ordinal. Ce procédé ne diffère plus essentiellement de celui utilisé dans *Principia Mathematica.*

La théorie des types de RUSSELL que nous venons d'ébaucher est nommée la théorie des types ramifiée. Elle discerne non seulement entre eux différents niveaux des variables et les valeurs que celles-ci parcourent, mais elle partage aussi les fonctions propositionnelles, les propositions et les définitions selon leurs variables liées en différents ordres. La première distinction suffit à éviter des cercles vicieux. La deuxième, effectuée en vue des paradoxes nommés sémantiques (dont fait partie entre autres le paradoxe de RICHARD), s'est plus tard avérée superflue. Subséquemment, l'axiome de réductibilité pouvait être supprimé (160).

Il s'avère alors que l'objection principale de POINCARÉ à l'égard de la théorie des types de RUSSELL, est que cette doctrine présuppose la théorie des nombres ordinaux et qu'elle ne peut par conséquent certainement pas servir à la fondation de celle-ci. Il aboutit à ce résultat dans son article *La Logique de l'Infini* (Revue de Métaphysique et de Morale, 1909) (161), après avoir encore une fois disserté sur l'origine des antinomies et ce faisant s'être heurté à des cercles vicieux. « La logique formelle n'est autre chose que l'étude des propriétés communes à toute classification », écrit-il (162), mais il ajoute que seules les classifications qui sont immuables, entrent en ligne de compte. Les classifications non prédicatives sont par contre sujettes à des modifications selon le niveau des recherches, parce qu'elles contiennent des éléments qui ont été définis en faisant appel à l'ensemble total. Tant que l'on a en vue un ensemble avec un nombre fini d'éléments, cet inconvénient n'est pas prépondérant ; il le devient par contre quand il s'agit d'un ensemble infini. La même condition est en vigueur pour, par exemple, les définitions et les applications biunivoques.

---

(159) l.c., pp. 242-243.

(160) Cette simplification est surtout due à F.P. RAMSEY [1]. En 1906, PEANO écrivit à propos du paradoxe de RICHARD : « Sed puncto debile principale in mirabile exemplo de RICHARD es : definitione de N es date parto in symbolos (..), et parto non in symbolos (..). Parte non symbolico contine idea de 'lingua commune', idea multo familiare ad nos, sed non determinato, et causa de omni ambiguitate. Exemplo de RICHARD non pertine ad Mathematica, sed ad Linguistica ; uno elemento, fundamentale in definitione de N, non pote es definito in modo exacto (secundo regulas de Mathematica). Ex elemento non bene definito nos pote duce plure conclusione contradictorio inter se » (PEANO [15], p. 157).

(161) POINCARÉ [35].

(162) RMM 17, p. 461.

Nous voyons donc que POINCARÉ maintient sa conviction que la racine du mal réside dans l'emploi de l'infini actuel. Comme nous l'avons déjà remarqué, il estime que la tentative de RUSSELL d'éliminer les paradoxes est encore pour d'autres raisons insatisfaisante. « La théorie des types est incompréhensible, si on ne suppose la théorie des ordinaux déjà constituée. Comment pourra-t-on fonder alors la théorie des ordinaux sur celle des types ? » (163). La pensée est claire : l'on doit pouvoir compter, avant de pouvoir distinguer l'un de l'autre les types successifs. Dans cet ordre d'idées, POINCARÉ pose la question de savoir s'il est permis d'avoir des types d'ordre transfini, ainsi que KÖNIG se le représente (164). Dans l'affirmative, que faut-il s'imaginer ? Sinon, comment peut-on à cet étape éliminer les niveaux transfinis ? (165). Il n'appuie pas spécialement sur le fait que la théorie des types menace de mettre fin à beaucoup de propositions arithmétiques. Maintenant que la notion « classe récurrente » a une hiérarchie à soi, les nombres naturels doivent également être triés selon leur ordre (166). C'est alors qu'il s'avère que la proposition : la somme de deux nombres entiers est un nombre entier, doit être remplacée par : la somme de deux nombres entiers de l'ordre k est un nombre entier de l'ordre k — 1 (167). Toutefois, POINCARÉ peut difficilement croire que l'axiome de réductibilité puisse offrir une issue (168). Aussi, RUSSELL n'a-t-il pas su le convaincre du bon droit de cet axiome. Un autre argument pour la justification de ce scepticisme se rattache au fait que l'axiome sert entre autres à réaliser une démonstration du principe de l'induction complète. Car POINCARÉ doute que l'axiome de réductibilité soit plus simple et plus universel que ce principe, ou « plus conforme aux tendances naturelles de notre propre esprit » (169). Il est même tenté de croire qu'il lui est équivalent.

Ensuite, il conteste encore une fois et d'une façon générale l'idée que la méthode suivant laquelle l'on retarde aussi longtemps que possible la distinction entre les nombres finis et infinis, soit psychologiquement acceptable. « Ce n'est pas ainsi que l'esprit humain procède naturellement, et quand même on devrait s'en tirer sans trop de mésaventures antinomiques, cela n'en serait pas moins une méthode contraire à toute

(163) l.c., p. 469.
(164) J. KÖNIG [1].
(165) RMM 17, p. 469.
(166) l.c., p. 468.
(167) l.c., p. 469.
(168) l.c., pp. 471-472.
(169) l.c., p. 470.

saine psychologie » (170). Chacun peut être d'accord, sans y voir une raison pour refuser cette méthode. Or, c'est ce que fait POINCARÉ : « M. RUSSELL me dira sans doute qu'il ne s'agit pas de psychologie, mais de logique et d'épistémologie ; et moi, je serai conduit à répondre qu'il n'y ait pas de logique et d'épistémologie indépendante de la psychologie ; et cette profession de foi clora probablement la discussion parce qu'elle mettra en évidence une irrémédiable digervence de vues » (171).

RUSSELL prend néanmoins la peine de répondre, à savoir dans son article *La Théorie des Types Logiques* (Revue de Métaphysique et de Morale, 1910) (172), qui, en bonne partie, est inséré dans l'introduction au tome I de *Principia Mathematica.* L'objectif en est : « expliquer plus que controverser », et on y trouve de nouveau exposées les pensées fondamentales de la théorie des types. Au surplus, les objections de POINCARÉ à cette théorie y sont combattues en peu de mots. En premier lieu, RUSSELL ne peut pas reconnaître que l'axiome de réductibilité est équivalent au principe de l'induction complète. Cet axiome a une foule d'applications qui n'ont rien à voir avec l'arithmétique. C'est ainsi que par exemple la loi de LEIBNIZ pour l'identité ne peut être maintenue que basée sur l'axiome en question (173). Toutefois, RUSSELL montre que l'existence de classes rendrait superflu l'axiome. Mais en ce cas, l'on accepte en fait un axiome plus fort.

L'évidence de l'axiome de réductibilité est, selon RUSSELL, en effet douteuse. Or, elle peut être négligée. Ce dont il s'agit, c'est de savoir si les conséquences sont convaincantes et si, au besoin, elles peuvent être obtenues d'une autre manière. Il se pose en particulier la question de savoir si parmi les conséquences il y en a qui ne sont pas vraies. Or, RUSSELL est persuadé qu'une réponse définitive à cette question n'existe pas. Quoiqu'il en soit, on peut dire que « l'évidence naturelle n'est rien de plus qu'une partie des raisons pour lesquelles on accepte un axiome et elle n'est jamais indispensable » (174).

---

(170) l.c., p. 482.

(171) l.c., p. 482.

(172) RUSSELL [16].

(173) RMM 18, p. 290.

(174) l.c., p. 299. Cf. B. RUSSELL dans RUSSELL [17] : « Il peut arriver qu'on soit certain de la vérité de beaucoup des déductions, mais que les prémisses ne paraissent que probables, et que leur probabilité leur vient de ce que des conséquences vraies en découlent. Dans un tel cas, ce dont on peut être certain c'est que les prémisses impliquent en effet toutes les conséquences vraies qu'on désirait placer dans le système déductif » (RMM 19, p. 290).

RUSSELL reconnaît que les types ont un ordre. Mais pour lui cela n'implique pas que l'étude de la notion de l'ordre précède logiquement la théorie des types. Les étapes de chaque raisonnement ne sont-elles pas, elles aussi, ordonnées ? « Aussi, bien que les types aient un ordre, les ordinaux ne sont pas présupposés dans la théorie des types, et il n'y a aucun cercle logique à fonder la théorie des ordinaux sur un système qui suppose la théorie des types » (175).

C'est ainsi que la discussion entre POINCARÉ et les représentants de la logistique tire à sa fin. Il est vrai que POINCARÉ reviendra encore à la question des définitions prédicatives dans *La Logique de l'Infini* (Scientia, 1912) (176), mais là il la traite essentiellement en rapport avec la théorie des ensembles, de sorte qu'il convient d'en différer la discussion au chapitre VI. De même, nous constatons que RUSSELL se prononcera encore dans la Revue de Métaphysique et de Morale, 1911, sur *L'Importance Philosophique de la Logistique* (177) sans s'arrêter à sa divergence de vues avec POJNCARÉ. Par contre, il consacre quelques observations à sa propre conception qui tend vers le platonisme, par rapport à l'existence d'entités logiques et mathématiques. Cette conception est résumée ainsi : « La logique et la mathématique nous forcent, donc, d'admettre une espèce de réalisme au sens scolastique, c'est-à-dire, d'admettre qu'il y a un monde des universels et des vérités qui ne portent pas directement sur telle ou telle existence particulière. Ce monde des universels doit *subsister* (...) » (178). Finalement, il souligne encore une fois l'insignifiance dans ce contexte de la notion de l'intuition (179).

C'est grâce à COUTURAT que le débat sera enfin plus ou moins clos (180). Son article *Logistique et Intuition* (Revue de Métaphysique et de Morale, 1913) (181), écrit après la mort de POINCARÉ, ne traite pas d'autre chose que de la façon dont, selon lui, les adversaires de la logistique ont abusé de la notion de l'intuition. En tenant compte, dit

(175) RMM 18, p. 301.

(176) POINCARÉ [39].

(177) RUSSELL [17].

(178) RMM 19, pp. 289-290.

(179) « La question du rôle de l'intuition logique est une question de psychologie, sur laquelle il n'est pas nécessaire d'avoir une opinion en construisant un système déductif » (l.c., p. 290).

(180) Le fait que depuis 1906 COUTURAT n'a plus beaucoup contribué à la défense et à la propagation de la logistique, s'explique par le fait qu'il a consacré beaucoup de temps au perfectionnement et à la propagande du Ido. Même des livres annoncés tels que *Manuel de Logistique* et *Histoire de la Logistique* n'ont pas été préparés pour l'imprimeur. Il n'est pas osé de mettre ce revirement en rapport avec l'opposition qu'il avait éprouvée.

(181) COUTURAT [20].

COUTURAT, du fait que tout ce qui est psychologique n'a rien à voir avec la philosophie, l'on constate qu'il n'existe point de conflit entre la logistique et l'intuition, tout au moins quand on conçoit l'intuition comme étant pure et non sensorielle. « Concluons donc », écrit-il, « que l'intuition (en tant qu'elle est inventive, c'est-à-dire vraie) consiste dans l'aperception synthétique d'une relation ou d'un ensemble de relations logiques, que la déduction doit toujours pouvoir expliciter et vérifier » (182). Ainsi les objections de POINCARÉ contre la logistique reposeraient en dernière instance sur un malentendu (183).

(182) RMM 21, p. 267.

(183) Je m'en réfère encore à PADOA [7], où celui-ci reproche surtout à POINCARÉ d'avoir envisagé l'induction complète comme un principe de déduction.

CHAPITRE V

POINCARÉ ET LE FORMALISME DE HILBERT

Peu de temps après l'achèvement de ses *Grundlagen der Geometrie* (1899), HILBERT entreprit sa recherche des fondements de l'arithmétique et de l'analyse. Le premier résultat de cette recherche fut une étude, *Uber den Zahlbegriff* (1), dans laquelle HILBERT présente un système d'axiomes pour les nombres réels. Ce système repose sur les mêmes idées fondamentales que le système pour la géométrie. Ici aussi, il vise à une structure formaliste ainsi qu'il s'avère dès les premières lignes : « Wir denken ein System von Dingen ; wir nennen diese Dinge Zahlen und bezeichnen sie mit a, b,... » (nous nous imaginons un système d'objets ; nous appelons ces objets des nombres et nous les désignons par a, b...). Les groupes, dans lesquels les axiomes sont subdivisés, correspondent à peu près aux groupes d'axiomes de la géométrie (2).

Autrement que dans les *Grundlagen der Geometrie,* il adjoint cette fois-ci une apologie de la méthode axiomatique. « Trotz des hohen pädagogischen und heuristischen Wertes der genetischen Methode », écrit - il, « verdient doch zur endgültigen Darstellung und völligen logischen Sicherung des Inhaltes unserer Erkenntnis die axiomatische Methode den Vorzug » (3) (en dépit de la grande valeur pédagogique et heuristique de la méthode génétique », écrit-il « la méthode axiomatique doit être preférée, si l'on veut parvenir à une représentation définitive et une complète garantie logique du contenu de notre connaissance ». Bien que POINCARÉ n'ait pas directement réagi à cet énoncé,

---

(1) D. HILBERT [2].

(2) Cette fois-ci ce sont les axiomes de « Verknüpfung, Rechnung, Anordnung, Stetigkeit ».

(3) HILBERT [1], p. 238.

il est certain que son point de vue n'était pas le même. Aussi lisons-nous dans son introduction à *Science et Méthode :* « Les questions d'enseignement ont leur importance, d'abord par elles-mêmes, ensuite parce que, réfléchir sur la meilleure manière de faire pénétrer des notions nouvelles dans les cerveaux vierges, c'est en même temps réfléchir sur la façon dont ces notions ont été acquises par nos ancêtres, et par conséquent sur leur véritable origine, c'est-à-dire au fond sur leur véritable nature » (4). A l'opposé de HILBERT, l'opinion de POINCARÉ est que la méthode génétique est un complément nécessaire à la méthode axiomatique. Cette opinion s'énonce également à la fin de sa discussion des *Grundlagen der Geometrie* de HILBERT (5).

Au troisième Congrès Internationale des Mathématiciens (Heidelberg, 1904), HILBERT fait une conférence, *Uber die Grundlagen der Logik und der Arithmetik* (6), lors de laquelle il donne la base pour la construction définitive de sa recherche des fondements. Pour POINCARÉ, cette conférence est un « travail capital (...) où l'on trouvera les pensées les plus profondes » (7).

A l'encontre de RUSSELL, HILBERT soutient ici qu'il est impossible d'édifier les mathématiques sur la base d'une logique qui est construite d'avance. La logique use déjà de certaines notions mathématiques, telles qu'ensemble et nombre et c'est pour cela qu'il est nécessaire de développer la logique et les mathématiques en même temps (et du néant) (8). Ce faisant, l'objet principal auquel l'on vise doit être d'éviter c. q. d'éclaircir les paradoxes. Comme les symboles introduits sont exempts de signification, un paradoxe de ce genre revient à une figure logique d'une certaine forme.

Ensuite, différents axiomes de l'arithmétique sont donnés. Ils constituent les éléments primaires de la classe des « Seienden », autrement nommés classe des « richtigen Aussagen » (énoncés corrects). De temps à autre, HILBERT entreprend une démonstration de la consistance. La forme générale de cette démonstration est selon lui : montrer qu'une contradiction avait dû paraître plus tôt, ou bien montrer que la supposition d'avoir dérivée une contradiction est contradictoire. C'est dans cet ordre d'idées que HILBERT propose sa théorie de la démonstration. Il juge

(4) *SM,* p. 3.

(5) *Œuvres XI,* p. 113 : « Les axiomes sont posés, on ne sait pas d'où ils sortent ». Cf. chap. I, p. 13.

(6) HILBERT [4].

(7) RMM 14, p. 17 ; *SM,* p. 179.

(8) Cf. E.W. BETH [6], p. 40.

nécessaire de voir les démonstrations elles-mêmes comme des édifices mathématiques et de les soumettre à une analyse mathématique.

Les objections que POINCARÉ (9), malgré sa grande admiration, soulève contre cet article de HILBERT, vont de front avec sa critique sur la conception logistique des mathématiques. Premièrement, il trouve que HILBERT n'a pas réussi à éviter l'emploi des nombres au sens usuel : HILBERT parle de symboles qui sont construit à l'aide du symbole 1, en répétant ce symbole deux, trois fois ou plus. POINCARÉ ajoute : « L'auteur était beaucoup trop avisé pour ne pas s'apercevoir de cette pétition de principe. Aussi, à la fin de son travail, cherche-t-il à procéder à un vrai replâtrage » (10).

Ensuite, il reproche à HILBERT d'appliquer la méthode de démonstration par induction complète avant que celle-ci puisse être supposée connue. Le fait est que les preuves de consistance données par HILBERT, s'appuient sur la méthode mentionnée. Afin d'éviter un malentendu chez COUTURAT, POINCARÉ déclare expressément qu'il n'a nullement l'intention de priver HILBERT de l'induction complète : « Ce que j'ai reproché à M. HILBERT, ce n'est pas d'y avoir eu recours (un mathématicien de race comme lui ne pouvait pas ne pas voir qu'il fallait une démonstration et que celle-ci était la seule possible), mais d'y avoir eu recours sans y reconnaître le raisonnement par récurrence » (11).

Ainsi l'introduction de l'induction complète apparaît trop tard. En outre, la méthode est justifiée à l'aide d'un exemple, ce qui cadre mal avec le système de HILBERT (12). POINCARÉ prend son parti de cet inconvénient, ce qui n'empêche que pour lui reste la question comment savoir si « le type ordinal, qui correspond à la succession de nos raisonnements, est précisément l'un des 'nombres ordinaux finis' ainsi définis » (13). En fin de compte, ceci n'a pas été démontré. POINCARÉ continue en remarquant : « Si nous l'avions fait, le principe d'induction ne serait plus un postulat servant de définition, ce serait un théorème comme les autres, susceptible de démonstration et tout ce détour deviendrait inutile » (14).

---

(9) Voir RMM 14, pp. 17-27 ; *SM,* pp. 179-184.

(10) RMM 14, p. 18 ; *SM,* p. 181. Voir également note 15.

(11) RMM 14, p. 299 ; *SM,* p. 198.

(12) RMM 14, p. 21. POINCARÉ constate aussi un renvoi énigmatique au « plus petit infini » (l.c., p. 21).

(13) RMM 14, p. 22.

(14) RMM 14, p. 23.

POINCARÉ s'attaque également à la conclusion de la conférence de HILBERT. Celle-ci n'est pas satisfaisante à ses yeux (15). Lorsque HILBERT dit que la démonstration est une chose mathématique, il entend par là qu'elle peut être définie au moyen de postulats. Cette définition est superflue quand on sait déjà ce qu'est une démonstration. En tous cas, il est impossible de connaître la notion « démonstration » au moyen de la définition puisque le fait est là que cette définition est composée de symboles sans signification. La question de savoir si les démonstrations conduisent à des contradictions, ou non, n'a dès lors plus aucun sens. Il semble évident que pour POINCARÉ la notion « démonstration » appartient aux notions intuitives de la pensée humaine, qui ne sont pas susceptibles d'explication mathématique.

Il est sans doute vrai qu'avec ses observations, POINCARÉ a pris le formalisme de HILBERT, tel que celui-ci le présenta en 1904, par son faible. Aussi, HILBERT s'est vu obligé d'amener des modifications importantes à sa théorie. Ce n'est qu'alors que la théorie de la démonstration ne fait plus partie de la mathématique propre, et que HILBERT parvient à une démarcation nette des différents niveaux, à laquelle la pratique et l'étude des mathématiques donnent lieu.

Dans sa thèse *Over de Grondslagen der Wiskunde* (1907), L.E.J. BROUWER avait dressé une hiérarchie des niveaux mathématiques et méta-mathématiques et il est possible que HILBERT ait tenu compte de cette conception. Quand on compare *Axiomatisches Denken* (1918) (16) avec la conférence de 1904, on est frappé du fait que HILBERT rattache le problème de la consistance à plusieurs autres questions, parmi lesquelles celle du rapport entre « Inhaltlichkeit und Formalismus » en mathématiques et en logique. Ce que finalement HILBERT veut dire par cela, il nous l'apprend dans *Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung* (1922) (17). Dans cet article, il décrit son programme comme suit : les mathématiques elles-mêmes doivent être vues comme un ensemble de formules démontrables, construites à l'aide de signes logiques et mathématiques (18), auxquels il ne faut attacher aucune signification. Une méta - mathématique y est adjointe qui doit avoir comme objet principal d'éviter les paradoxes sans donner suite aux

(15) RMM 14, p. 24. Ailleurs, il l'appelle « tout à fait énigmatique » (*SM*, p. 183).

(16) D. HILBERT [5].

(17) D. HILBERT [6].

(18) Cf. « Am Anfang ist das Zeichen ». HILBERT [6], p. 163.

désirs de KRONECKER, BROUWER et WEYL, à savoir le rejet de grandes parties de la mathématique traditionnelle. « In dieser Meta-mathematik », dit HILBERT alors, « kommt — im Gegensatz zu den rein formalen Schlussweisen der eigentlichen Mathematik — das inhaltliche Schliessen zur Anwendung, und zwar immer nur zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome » (19). (Dans cette méta-mathématique, l'on applique — contrairement aux règles de déduction purement formelles de la mathématique propre — la déduction matérielle, et cela toujours uniquement pour démontrer la consistance des axiomes). De cette façon les objections de POINCARÉ ont été grandement écartées. Il s'avère maintenant que l'induction complète est maniée à différents niveaux tout en prenant des précautions pour éviter une pétition de principe. Si en mathématiques, l'on applique l'induction complète comme un principe strictement formel qui est en vigueur pour les symboles sans signfication 0, 1, et caetera, en méta-mathématiques par contre, le principe est interprété de la façon accoutumée afin de pouvoir s'appliquer aux figures de démonstration. HILBERT a beau écrire dans l'article en question que l'objection de POINCARÉ, à savoir que le principe de l'induction complète ne pourrait être justifié que par induction complète, est infirmée par sa théorie — cela n'est vrai que parce que sa théorie a été adaptée aux objections de POINCARÉ.

Par cela, nous ne voulons pas dire que POINCARÉ, s'il avait vécu, se serait tout à fait réconcilié avec le formalisme de HILBERT. Il avait d'autres objections. Nous avons déjà vu que son respect pour l'axiomatique était moindre que celui de HILBERT et sur ce point HILBERT n'avait pas changé ainsi qu'il s'avère dans l'article mentionné. En outre, il n'y a pas de doute que l'ambition souveraine de vouloir mettre en sûreté les mathématiques au moyen d'une méta-mathématique lui ait paru peu sympathique, même si ses objections matérielles n'existaient plus. « Cette science », écrit-il des mathématiques, « n'a pas uniquement pour objet de contempler éternellement son propre nombril ; elle touche à la nature et un jour ou l'autre elle prendra contact avec elle ; ce jour-là, il faudra secouer les définitions purement verbales et ne plus se payer de mots » (20). Si l'opinion de HILBERT est que chaque objet de connaissance scientifique devient tôt ou tard accessible à la mathématique axiomatique et par là une branche des mathématiques conçues du

---

(19) l.c., p. 174.

(20) RMM 14, p. 301; *SM*, p. 199.

point de vue formaliste (21), pour POINCARÉ la démarcation entre mathématiques et expérience est beaucoup plus coulante (22). Entre temps, il s'est trouvé qu'il serait absolument incorrect d'établir un contraste complet et irréconciliable entre POINCARÉ et le formalisme. Il y avait d'importants points de départs communs, sur lesquels je m'arrêterai plus longuement dans le chapitre VII.

(21) HILBERT [5], p. 415.

(22) Il est probable qu'il se ressente ici de son éducation à l'Ecole Polytechnique.

CHAPITRE VI

POINCARÉ ET LA THÉORIE DES ENSEMBLES

Déjà dans le chapitre IV, on a vu que POINCARÉ avait des objections capitales à l'égard de la théorie des ensembles. Cruciale est dans cet ordre d'idées sa conviction que l'infini actuel n'existe pas. Il est très probable que cette conviction a été inspirée par les conceptions traditionnelles, mais elle gagna en force de persuasion du fait qu'apparemment le cantorisme donnait lieu à des contradictions. En outre, POINCARÉ faisait des objections à l'emploi de classifications, de définitions et d'applications non prédicatives. Pour ce qui est de la dernière objection, RUSSELL était du même avis, quoiqu'il désapprouvât l'attitude hostile de POINCARÉ envers l'infini actuel. POINCARÉ de son côté, reliait les deux objections l'une à l'autre. C'est ainsi qu'il écrivit déjà en 1906 : « C'est la croyance à l'existence de l'infini actuel qui a donné naissance à ces définitions non prédicatives » (1). Toutefois, la question de savoir à quel point — selon POINCARÉ — ce rapport doit être considéré comme nécessaire, subsiste. Or le paragraphe 5 de *La Logique de l'Infini* (2) nous montre qu'il voit l'intervention de notions non prédicatives comme étant inhérente à l'acceptation de l'actuel infini. Le dit chapitre est consacré au système d'axiomes que ZERMELO avait présenté en 1908 pour la théorie des ensembles.

Avant d'approfondir ce sujet, il convient de revenir à la situation, telle qu'elle se présenta en 1904. En cette année paraît de la main de ZERMELO *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann* (3).

---

(1) RMM 14, p. 316 ; *SM*, p. 212.

(2) POINCARÉ [35].

(3) E. ZERMELO [1].

Cette démonstration s'appuie sur l'axiome de choix qui était alors encore assez inconnu. ZERMELO l'énonce ainsi : « Jeder Teilmenge M′ denke man sich ein beliebiges Element m′ zugeordnet, das in M′ selbst vorkommt und das 'ausgezeichnete' Element von M′ genannt werden möge » (4) (Qu'on se représente qu'à chaque sous-ensemble M′ est adjoint un élément quelconque m′, qui paraît dans M′ lui-même et qui pourrait être nommé l'élément 'distingué' de M′). Ainsi se produit ce que ZERMELO appelle une « Belegung » de l'ensemble de tous les sous-ensembles avec des éléments d'une nature spéciale. ZERMELO attribue à Erhard SCHMIDT l'idée de parvenir à l'aide d'une telle « Belegung », basée sur l'axiome de choix, à un bon ordre (5).

Cette question a provoqué quelque agitation parmi les mathématiciens français. C'est E. BOREL qui, dans *Quelques remarques sur les Principes de la Théorie des Ensembles* (6), conteste la validité de l'axiome de choix (7). Selon lui, ZERMELO ne fait que démontrer que l'axiome de choix est équivalent au théorème du bon ordre. On ne pourrait accepter l'axiome de choix que lorsqu'a été indiquée une méthode par laquelle chaque « élément distingué » est déterminé. Cela est impossible pour les ensembles infinis. Selon BOREL, ZERMELO aurait tout aussi bien pu écrire : qu'on choisisse pour le bon ordre un premier élément, ensuite un second, et caetera, et cela de façon transfinie. BOREL continue ainsi : « Or, aucun mathématicien ne regardera comme valable ce dernier raisonnement. Il me semble que les objections que l'on peut y opposer valent contre tout raisonnement où l'on suppose un *choix arbitraire* fait une infinité non dénombrable de fois ; de tels raisonnements sont en dehors du domaine des mathématiques » (8).

Cette divergence de vues a incité HADAMARD, BAIRE et LEBESGUE à faire connaître leur opinion (*Cinq lettres sur la théorie des ensembles*) (9). Les trois auteurs sont d'accord pour dire que les difficultés valent autant pour les ensembles infinis dénombrables que non dénom-

---

(4) E. ZERMELO [1], p. 514. Ses prédécesseurs sont PEANO (1890) et B. LEVI (1902).

(5) l.c., p. 516.

(6) E. BOREL [2]. Dans la même année, se trouvent plusieurs autres articles qui sont intéressants dans cet ordre d'idées, à savoir J. KÖNIG [2], A. SCHÖNFLIESS [1], F. BERNSTEIN [1] et P.E.B. JOURDAIN [2].

(7) Ce n'était pas la première fois que BOREL faisait preuve d'une attitude réservée à l'égard de la théorie des ensembles. Voir p. ex. BOREL [1], note II : *La croissance des Fonctions et les Nombres de la Deuxième Classe* (1898).

(8) BOREL [2], p. 195.

(9) HADAMARD, BAIRE, LEBESGUE, BOREL [1].

brables. BAIRE en conclut, que toute la mathématique doit en fin de compte être ramenée au fini. HADAMARD par contre, juge artificiels les problèmes que BOREL soulève. Pour lui, il n'est pas important que le choix de l'élément distingué puisse être effectivement indiqué ou non. L'impossibilité n'en infirme pas l'existence de l'élément en question. Aussi ne faut-il pas demander : « Peut-on ordonner ? », mais « l'ordination est-elle possible ? » (10).

Or, LEBESGUE, à la suite de BOREL, exige que la correspondance que ZERMELO demande, ne puisse être admise que quand tous les éléments distingués ont été définis, et par définir, il entend : « Nommer une propriété caractéristique du défini » (11). En tout cas, il est, selon lui, nécessaire que la correspondance à laquelle ZERMELO pense, soit fixée une fois pour toutes, ce qui rend douteuse une interprétation de « choisir » dans le sens de « penser à ».

Quant à POINCARÉ, il s'occupe lui aussi dans ses articles sur *Les Mathématiques et la Logique* dans la Revue de Métaphysique et de Morale (1905, 1906) de la démonstration du théorème du bon ordre. Il y découvre une définition non prédicative, notamment dans la démonstration du lemme selon lequel la somme de tous les ensembles - γ est un ensemble - γ. « La somme logique de tous les $M\gamma$, cela doit vouloir dire la somme logique de tous les M_γ dans la définition desquelles ne figure pas la notion de Γ ; et alors le M_γ, formé par Γ et l'élément distingué de E - Γ doit être exclu » (12). Il admet toutefois l'axiome de choix ainsi que nous l'avons remarqué aux pages 57-58 et 86 et même il est disposé à le reconnaître comme un jugement synthétique a priori (13).

Dans son *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung* (14) ZERMELO revient sur la critique de POINCARÉ à l'égard de sa première démonstration (15). Il note lui-même qu'une définition non prédicative

(10) E. BOREL [1], p. 157. HADAMARD se réfère dans son argumentation à une distinction que J. TANNERY fait entre « correspondance définie » et « correspondance qui peut être décrite » (Rev. gén. des Sc. pures et app., 8, 1897, p. 133 ss.). Cette dernière notion est de nature psychologique, « relative à une propriété de notre esprit » (BOREL [1], p. 151).

(11) E. BOREL [1], p. 154.

(12) RMM 14, p. 315.

(13) RMM 14, p. 313. Pour le commentaire de POINCARÉ sur quelques paradoxes, sur l'infini actuel et sur la démonstration du théorème de BERNSTEIN, voir aussi le chapitre IV.

(14) ZERMELO [2].

(15) Il se défend contre BOREL avec l'argument que l'axiome de choix est évident et nécessaire.

figure aussi dans la nouvelle démonstration. Il n'y voit point d'inconvénient, puisque des définitions non prédicatives sont universellement employées, comme dans la démonstration de CAUCHY pour le théorème fondamental de l'algèbre. Selon ZERMELO « hindert (es) nichts, dass einige der Gegenstände, welche unter die Definition fallen, zu demselben Begriffe noch in einer besonderen Beziehung stehen und dadurch — als Minimum oder als gemeinsamer Bestandteil — vor den übrigen ausgezeichnet oder bestimmt werden können » (16) (il n'importe pas que quelques-uns des objets qui tombent sous la définition aient une relation spéciale avec la même notion, et que par là — soit comme minimum, soit comme élément commun — ils puissent être distingués ou définis avant les autres). Cela revient à dire que POINCARÉ oublierait qu'un objet peut être donné de différentes manières.

Il est intéressant de voir comment ZERMELO se tourne vivement contre PEANO en faisant appel à POINCARÉ. Les principes de PEANO sont d'une part trop restreints « um die Wissenschaft in ihrer vollen Schönheit zu entwicklen » (pour développer la science dans toute sa beauté), d'autre part trop larges « um sie von inneren Widersprüchen frei zu halten » (17) (pour la préserver contre des contradictions internes). ZERMELO ajoute : « den hier vertretenen Standpunkt einer in letzter Linie auf Intuition beruhenden produktiven Wissenschaft hat neuerdings auch Herr H. POINCARÉ (..) in einer Reihe von Aufsätzen geltend gemacht » (18) (le point de vue représenté ici d'une science productive qui, en dernière instance, repose sur l'intuition, a été soutenu récemment aussi par M. H. POINCARÉ dans une série d'essais).

Dans la même année (1908), ZERMELO publie ses *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I* (19), dans lesquelles il présente son axiomatisation de la théorie des ensembles, que POINCARÉ discute dans la *Logique de l'Infini* (1909) (20). Tout d'abord, POINCARÉ remarque que ZERMELO a renoncé à démontrer la consistance de son système. Ce ne serait pas possible autrement, dit POINCARÉ, parce que ZERMELO admet qu'aucune théorie ne précède son système. Il ne pouvait donc pas, ainsi que HILBERT le fait dans ses *Grundlagen der Geometrie,* recourir à l'analyse, ni au principe de l'induction complète. POINCARÉ en conclut que les axiomes doivent être évidents : « Les

(16) ZERMELO [2], p. 117.
(17) l.c., p. 116.
(18) l.c., p. 116.
(19) ZERMELO [3].
(20) Voir en particulier RMM 17, pp. 472-482 ; *DP,* pp. 122-139.

postulats ne peuvent donc tirer leur valeur d'une sorte de décret arbitraire, il faut qu'ils soient évidents par eux-mêmes. Il nous faudra donc, non pas démontrer cette évidence, puisque l'évidence ne se démontre pas, mais chercher à pénétrer le mécanisme psychologique qui a créé ce sentiment de l'évidence » (21).

En effet, POINCARÉ croit pouvoir constater que les axiomes de ZERMELO supposent une intuition de la notion « Menge », bien que cette intuition diffère de l'intuition d'une collection au sens de CANTOR. Car lorsqu'on adjoint au système de ZERMELO l'axiome : « Des objets quelconques forment une Menge », alors le système résultant est estimé être contradictoire. Néanmoins, tous les axiomes prétendent seulement que certains ensembles forment une « Menge », et l'on ne pourrait s'attendre à une contradiction que quand d'autres axiomes impliqueraient que certains ensembles ne sont pas des « Mengen ». ZERMELO n'a apparemment pas envisagé son système d'axiomes comme une définition mais comme la caractéristique d'un contenu intuitif (22).

Ce contenu intuitif ne diffère pas beaucoup de ce qu'on entend d'habitude par un ensemble. Pour ZERMELO, une « Menge » est aussi un ensemble, pourvu qu'elle soit donnée une fois pour toutes. « Définir un ensemble, une Menge, une collection quelconque, c'est toujours faire une classification, séparer les objets qui appartiennent à cet ensemble de ceux qui n'en font pas partie. Nous dirons alors que cet ensemble n'est pas une Menge, si la classification correspondante n'est pas prédicative, et que c'est une *Menge,* si cette classification est prédicative ou si on peut en raisonner comme si elle l'était » (23).

Dans ces circonstances, POINCARÉ peut-il admettre l'évidence du système de ZERMELO ? Tant qu'il s'agit des ensembles finis : oui. Mais POINCARÉ n'est pas persuadé que ZERMELO ait réussi à détourner tous les dangers qui menaçaient le cantorisme. Certes, les paradoxes du plus grand nombre cardinal et du plus grand nombre ordinal sont devenus impossibles, puisqu'il est défendu de parler d'un ensemble de tous les objets qui satisfassent à une condition donnée. En outre, il y a lieu d'admettre que le paradoxe de RICHARD a disparu grâce à la condition que seulement des questions définies puissent être posées.

---

(21) RMM 17, p. 473 ; *DP,* p. 123.

(22) RMM 17, p. 475 ; *DP,* pp. 127-128. L'argument est faible. On n'a qu'à supposer que des « Mengen » sont des objets, pour pouvoir produire en vertu de l'axiome de compréhension sous sa forme citée la « Menge» de toutes les « Mengen », et de parvenir ainsi au paradoxe de CANTOR.

(23) RMM 17, p. 476 ; *DP,* p. 128.

Le fait est toutefois qu'il y a toujours des ensembles infinis et selon POINCARÉ la conception de ZERMELO de la notion « défini » n'est pas assez précise pour prévenir l'intervention des notions non prédicatives. ZERMELO écrit : « Eine Frage oder Aussage E, über deren Gültigkeit oder Ungültigkeit die Grundbeziehungen des Bereiches vermöge der Axiome und der allgemeingültigen logischen Gesetze ohne Willkür entscheiden, heisst *definit* » (24) (une question ou un jugement E, de la validité ou la non-validité duquel les rapports fondamentaux du domaine décident automatiquement en vertu des axiomes et des lois logiques universelles, s'appelle *définit*). Ensuite POINCARÉ remarque : « Supposons par exemple que cette question E soit la suivante : tel élément de la Menge M possède-t-il telle relation avec *tous les autres* éléments de la même Menge, et que nous convenions de dire que tous les éléments pour lesquelles on doit répondre *oui* forment une classe K ? Pour moi, et je crois aussi pour M. RUSSELL, une pareille question n'est pas prédicative ; parce que *les autres* éléments de M sont en nombre infini, qu'on pourra sans cesse en introduire de nouveaux, et que parmi les nouveaux éléments introduits, il pourra y en avoir dans la définition desquels entre la notion de la classe K, c'est-à-dire de l'ensemble des éléments qui possèdent la propriété E. Pour M. ZERMELO, cette question serait *définit* sans que je sache exactement où est la démarcation exacte, entre les questions qui sont *définit* et celles qui ne le sont pas. Il lui semble que, pour savoir si un élément possède la propriété E par rapport à tous les autres éléments de M, il suffit de vérifier s'il la possède par rapport à chacun d'eux. Si la question est *définit* par rapport à chacun de ses éléments, elle le sera *ipso facto* par rapport à *tous* ces éléments » (25).

Ensuite, POINCARÉ soutient qu'il est évident que ZERMELO admet que dans tout ensemble donné, les éléments sont suffisamment définis. Lui-même n'en est pas si sûr. En se référant à l'exemple cité, il s'efforce d'établir la notion que l'acceptation de l'infini actuel doit nécessairement conduire à des définitions non prédicatives (26). Il est vrai que ZERMELO a réussi à empêcher qu'à cause de l'intervention d'éléments étrangers, des ensembles infinis conduisent à des contradictions. Mais il n'a pu empêcher qu'à l'intérieur des ensembles infinis, des éléments qui conduisent à des contradictions, puissent être définis (27).

(24) ZERMELO [3], p. 263.
(25) RMM 17, pp. 476-477 ; *DP*, pp. 129-130.
(26) RMM 17, p. 477 ; *DP*, p. 131.
(27) RMM 17, pp. 477-478 ; *DP*, pp. 131-132.

Pour POINCARÉ, le raisonnement sur l'actuel infini est étroitement lié au raisonnement sur des objets qui ne sont pas susceptibles d'être définis par un nombre fini de mots. Il écrit à ce sujet : « Quant à moi, je n'hésite pas à répondre que ce sont de purs néants » (28). Toutes les notions pourvues de sens sont par conséquent susceptibles d'être définies en un nombre fini de mots. Par là, il est démontré — semble-t-il — qu'ils forment un ensemble dénombrable. Que veut alors dire la démonstration de CANTOR que la puissance du continu est plus grande que celle de l'ensemble des nombres naturels ? Elle signifie qu'il est impossible d'établir une correspondance biunivoque prédicative entre les nombres naturels et les nombres réels susceptibles d'être définis en un nombre fini de mots (Les derniers étant, le cas échéant, définis à l'aide d'une correspondance supposée). Voilà ce qui est, selon POINCARÉ, le contenu réel de l'assertion de CANTOR et à la fois un exemple que tous les énoncés sur l'actuel infini doivent pouvoir être réduits à des énoncés sur le fini. De cette manière de voir résultent à la fin de son article les trois prescriptions suivantes :

« 1. Ne jamais envisager que des objets susceptibles d'être définis en un nombre fini de mots ;

2. Ne jamais perdre de vue que toute proposition sur l'infini doit être la traduction, l'énoncé abrégé de propositions sur le fini ;

3. Eviter les classifications et les définitions non prédicatives » (29).

Lorsque POINCARÉ fait en 1909 en Allemagne six conférences scientifiques, il en consacre une au problème des nombres transfinis (30). Il s'arrête de nouveau sur la vraie signification du théorème de CANTOR qui soutient que la puissance du continu est plus que dénombrable. L'assertion de RICHARD selon laquelle l'ensemble des objets susceptibles d'être définis est dénombrable, n'y est pas contraire. Il s'avère de son paradoxe que — où que le procédé soit interrompu — une nouvelle règle peut être formulée qui engendre un nouvel ensemble. Au surplus, CANTOR démontre que le procédé peut être continué indéfiniment (31).

---

(28) RMM 17, p. 478 ; *DP,* p. 132.

(29) RMM 17, p. 482 ; *DP,* pp. 138-139. BOREL écrivit, à propos de ces trois prescriptions : « L'adaptation complète et réelle de ces propositions par les mathématiciens exercerait, à mon avis, une influence des plus heureuses sur le développement et l'avenir des mathématiques » (BOREL [5], p. 504).

(30) POINCARÉ [37].

(31) l.c., pp. 46-47. Ces observations sont jointes à une nouvelle démonstration de la proposition de CANTOR.

L'apparence d'une contradiction ne survient que parce que la classification de RICHARD n'est pas prédicative.

Ensuite POINCARÉ relève la remarque de ZERMELO que l'interdiction totale de définitions non prédicatives rend impossible une grande partie des mathématiques classiques. A titre d'exemple, il avait déjà mentionné la démonstration de CAUCHY du théorème fondamental de l'algèbre. POINCARÉ soutient que l'on peut éviter ces difficultés et d'autres du même genre en limitant les valeurs de l'argument. Quand on envisage seulement des valeurs d'argument de la forme $\frac{m + ni}{p}$ (m, n et p entiers), alors la valeur pour laquelle une fonction atteint son minimum, sera en général exclue.

Je cite une autre remarque de POINCARÉ : « Was nun die zweite transfinite Kardinalzahl Aleph $_1$ betrifft, so bin ich nicht ganz überzeugt, dass sie existiert » (32) (quant au second nombre cardinal transfini Aleph$_1$, je ne suis pas tout à fait convaincu qu'il existe). Il paraît qu'il n'y a pas d'inconvénient à parler de l'ensemble de tous les nombres ordinaux qui sont plus grands que Aleph$_0$. «Es fragt sich aber, ob sie abgeschlossen ist, ob wir also von ihrer Mächtigkeit ohne Widerspruch sprechen dürfen. Ein aktual Unendliches gibt es jedenfalls nicht » (33). (Il n'est toutefois pas certain qu'il soit achevé et par conséquent qu'il soit permis de parler de sa puissance sans contradiction. Un infini actuel n'existe en tous cas pas).

Il répète la dernière assertion dans ses *Réflexions sur les deux Notes Précédentes* (34), où il discute les articles de A. SCHÖNFLIESS et de E. ZERMELO. Encore une fois, il parle de la différence des puissances 1 et 2 — cette fois-ci en ces termes : « Il est impossible de trouver une formule définissant en un nombre fini de mots une relation entre un nombre réel et un nombre entier, et qui soit telle que tout nombre réel définissable en un nombre fini de mots corresponde à un nombre entier en vertu de cette formule » (35). Dans les termes du paradoxe de RICHARD, cela veut dire qu'après la formation de E à l'aide de E un nouvel ensemble E′ peut être formé, qui lui aussi est dénombrable. La question se pose de savoir si la somme de tous ces ensembles dénombrables est dénombrable. RICHARD démontre que ce n'est pas le cas.

---

(32) l.c., p. 48.

(33) l.c., p. 48.

(34) POINCARÉ [36].

(35) l.c., p. 196.

Vis-à-vis de ZERMELO, POINCARÉ soutient non seulement que des définitions non prédicatives peuvent être évitées dans une démonstration telle que celle du théorème fondamental de l'algèbre, mais en plus il dit que strictement parlant, il n'y a pas ici de définition non prédicative. Soit E un ensemble de nombres réels avec borne inférieure e. Il se peut que e fasse partie de E. « Dans ces cas particuliers, il n'y a pas non plus de pétition de principe puisque e ne fait pas partie de E *en vertu de sa définition,* mais par suite d'une démonstration postérieure à la fois à la définition de E et à celle de e » (36).

Le dernier article que POINCARÉ consacre aux points combattus de la théorie des ensembles, est encore une fois intitulée *La Logique de l'Infini* (37). Ici, il se place pour ainsi dire « au-dessus de la mêlée ». Il examine de près les deux groupes d'adversaires : les pragmatistes et les cantoriens, et il note que leur principal point litigieux est le rejet, c. q. l'admission de la « préexistence ». Si les pragmatistes combattent la préexistence des objets et des notions dont les mathématiciens parlent et s'ils pensent que ceux-ci ne peuvent être créés que par une activité mathématique, les cantoriens, en revanche, partent du point de vue que l'entière mathématique, — connue ou inconnue — existe indépendamment de l'esprit humain. Pour le groupe des cantoriens, il n'importe donc pas que l'ordination du continu puisse être effectivement réalisée. Or, ceci est pour les pragmatistes le critère décisif. C'est ainsi que POINCARÉ est conduit à appeler les pragmatistes des « idéalistes », les cantoriens par contre des « réalistes » (38). N'est-il pas vrai que ceux-ci parlent continuellement d'épistémologie en entendant par là une « science des sciences » qui est entièrement indépendante de la psychologie ? « Elle doit nous apprendre ce que seraient les sciences s'il n'y avait pas de savants ; que nous devons étudier les sciences, non sans doute en supposant qu'il n'y a pas de savants, mais du moins sans supposer qu'il y en a » (39), dit POINCARÉ, et il ajoute : « Et pourquoi les pragmatistes refusent-ils d'admettre des objets qui ne pourraient être définis par un nombre fini de mots ? C'est parce qu'ils considèrent qu'un objet n'existe que quand il est pensé, et qu'on ne saurait concevoir un

---

(36) l.c., p. 199.

(37) POINCARÉ [39].

(38) Scientia. 12, p. 9 ; *DP,* p. 158.

(39) Scientia. 12, p. 9 ; *DP,* p. 158.

objet pensé indépendamment d'un sujet pensant. C'est bien là de l'idéalisme. Et comme un sujet pensant c'est un homme, ou quelque chose qui ressemble à l'homme, que c'est par conséquent un être fini, l'infini ne peut avoir d'autre sens que la possibilité de créer autant d'objets finis qu'on le veut » (40).

(40) Scientia. 12, pp. 9-10 ; *DP,* pp. 158-159.

CHAPITRE VII

LOGIQUE, INTUITION ET CERTITUDE EN MATHÉMATIQUES

A. - **La notion de l'intuition chez Poincaré.**

A propos des opinions et des discussions décrites dans les chapitres précédents, il convient de s'arrêter plus longuement que ce n'avait été possible jusqu'à présent, sur différents problèmes spécifiques. Surtout entrera en ligne de compte une étude plus détaillée des relations mutuelles entre la logique et l'intuition en mathématiques. Il va de soi que la mise en œuvre sera nécessairement quelque peu plus systématique, mais ici aussi le point de vue historique sera le plus important.

POINCARÉ soutient que la logique n'est pas en mesure de donner une explication de l'essence et de l'évolution des mathématiques. Selon lui les découvertes et les généralisations auxquelles cette science conduit, ne comportent aucune explication logique péremptoire. Il rejette la prétention qu'à l'aide d'une représentation strictement symbolique, les mathématiques puissent être édifiées comme un sytème logique. A côté des notions et des moyens de démonstration logiques, l'intuition joue un rôle essentiel en mathématiques, par quoi les possibilités de l'analyse logique des mathématiques sont limitées.

Une complication est causée par le fait que POINCARÉ n'emploie pas toujours le terme intuition au même sens. Il semble que la compréhension de ce terme doit être définie surtout négativement, à savoir comme indication des défauts de la logique. Pour parler comme M. MANNOURY : chez POINCARÉ, le rejet de la logique est plutôt une négation exclusive que de choix (1). C'est pourquoi chez lui, la compré-

(1) Voir G. MANNOURY [2], pp. 48-53.

hension positive du terme dépendra beaucoup du contexte. Ceci n'exclut pas que certains aspects méritent d'être mentionnés séparément.

Nous avons déjà remarqué que, dans sa conférence *Du rôle de l'Intuition et de la Logique en Mathématiques,* POINCARÉ lui aussi, a établi une distinction. En premier lieu, nous voyons qu'il distingue trois cas, qui se laissent décrire comme suit : 1) l'intuition sensorielle, 2) l'intuition généralisante, 3) l'intuition pure (2). Cette division donne lieu à une remarque, à savoir que le caractère hybride de la deuxième catégorie est frappant, car la généralisation ne peut-elle avoir trait tant à une idée sensorielle qu'à un résultat mathématique ? Il y a là deux possibilités qu'il ne faut évidemment pas confondre. Il me semble correct de parler, dans le premier cas, d'intuition sensorielle, mais par contre de ramener le deuxième cas à l'intuition pure. Ainsi disparaît l'intuition généralisante, ce qui est conforme au cours subséquent de la conférence de POINCARÉ, puisqu'il n'y confrontera que l'intuition sensorielle avec l'intuition pure. Les exemples qu'il emploie contribuent à rendre cette simplification plausible (3).

Pour POINCARÉ, l'intuition sensorielle, bien qu'elle puisse rendre d'importants services en tant que ressource pratique, ne pèse pas dans la balance (4). Il n'en est pas de même de l'intuition pure qui serait indispensable aussi pour ceux des mathématiciens qu'il appelle « analystes ». Il laisse toutefois la possibilité que l'intuition pure du point de vue psychologique, voire métaphysique, ne puisse se passer du concours des sens, « mais il suffit que la chose soit douteuse pour que je sois en droit de reconnaître et d'affirmer une divergence essentielle entre les deux sortes d'intuition » (5). Pour être complet, il convient de faire observer que les premières paroles de la conférence de POINCARÉ au Congrès International de Physique en 1900 semblent contradictoires avec cette assertion. « L'expérience est la source unique de la vérité, ellle seule peut nous apprendre quelque chose de nouveau ; elle seule peut nous donner la certitude » (6). L'on serait tenté de croire que cela porte aussi sur les mathématiques, mais lorsqu'on tient compte d'autres énoncés, on est obligé d'exclure cette possibilité (7).

---

(2) Cf. pp. 59-60.
(3) *Compte rendu,* pp. 121-122 ; *VS,* pp. 21-22.
(4) *Compte rendu,* p. 129 ; *VS,* pp. 33-34.
(5) *Compte rendu,* p. 129 ; *VS,* p. 33.
(6) POINCARÉ [21], p. 1 ; *SH,* p. 167.
(7) Cf. p. 55.

Dirige-t-on son attention plus spécialement vers la forme pure de l'intuition, alors une nouvelle différenciation s'impose. Lorsque POINCARÉ parle tout d'une haleine de « l'intuition du nombre pur, celle des formes logiques pures » (8), il dissimule qu'ici deux choses différentes sont en jeu. Dans ses ouvrages ultérieurs, il est vrai que la distinction a été observée, mais néanmoins elle n'a été nulle part nettement formulée. Cela revient à dire que d'une part POINCARÉ a en vue une notion empruntée à KANT et que d'autre part, il fait allusion à une signification qui est étroitement liée avec « compréhension » (dans le sens de : comprendre, discerner). Que contient avant tout la dernière signification, que je désignerai comme intuition de compréhension ?

Il y a plusieurs possibilités. Tout d'abord, elle peut se présenter sous l'aspect de l'invention mathématique. Soit qu'il cherche, soit qu'il démontre une proposition, le mathématicien ne peut se passer d'une certaine connaissance intuitive. Il faut qu'il soit en mesure d'embrasser dans un coup d'œil d'ensemble, les possibilités et les difficultés, avant de parvenir à une élaboration logique fructueuse. Son activité comme logicien doit être conduite par une compréhension plus ou moins mystérieuse. S'il ne possédait pas cette compréhension, il n'arriverait à rien, parce qu'il ne saurait pas comment appliquer sa logique ; il ne saurait choisir entre les possibilités logiques présentes. POINCARÉ lui-même a décrit par quelles voies capricieuses cette compréhension peut devenir consciente (9). Par sa propre expérience, il savait combien le travail logique peut être pénible et inutile lorsque cette compréhension n'existe pas et combien il est facile et irrésistible lorsque cette compréhension est présente (10).

L'intuition de compréhension joue également un rôle indispensable en dehors de l'invention proprement dite. Elle est nécessaire pour pouvoir embrasser dans un coup d'œil d'ensemble une démonstration et en comprendre davantage que seulement la raison qui fait que chaque conclusion résulte de ses prémisses. Vue ainsi, elle est non seulement

(8) *Compte rendu,* p. 129 ; *VS,* p. 33.

(9) POINCARÉ [33].

(10) J. TANNERY [1], pp. V - VI, lui aussi, soutient dans ce sens la signification pragmatique de l'intuition. Strictement parlant, elle serait toutefois superflue. Aussi la remarque suivante de F. KLEIN est-elle plus proche de POINCARÉ : « I am of the opinion that, certainly for the purposes of research, it is always necessary to combine the intuition with the axioms » (Je suis de l'opinion que, certainement pour les objectifs de la recherche, il est toujours nécessaire de combiner l'intuition aux axiomes) (KLEIN [1], vol. II, p. 228).

nécessaire pour le savant productif, mais pour chaque consommateur. « Dans ces édifices compliqués élevés par les maîtres de la Science mathématique, il ne suffit pas de constater la solidité de chaque partie et d'admirer l'œuvre du maçon, il faut comprendre le plan de l'architecte. Or, pour comprendre un plan, il faut en apercevoir à la fois toutes les parties, et le moyen de tout embrasser dans un coup d'œil d'ensemble, c'est l'intuition seule qui peut nous le donner » (11).

Ainsi se fait-il que l'invention et la compréhension n'existent que par la grâce de l'intuition de compréhension. POINCARÉ a combiné les deux cas en décrivant cette forme de l'intuition pure comme la conscience d'une mathématique plus profonde, qui se cache derrière les formulations et les démonstrations (12). Les mathématiques sont plus que seulement un système de signes qui est ordonné d'après des normes logiques, présenté par les logisticiens. Elles ont un contenu qui est insaisissable pour la logistique.

Il n'y a pas de raison de considérer l'intuition de compréhension comme étant infaillible. A cet égard, il n'existe pas de différence avec l'intuition sensorielle qui, elle aussi, peut conduire à des erreurs. POINCARÉ lui-même a accentué la nécessité de contrôler toutes les découvertes intuitives à l'aide de l'appareil logique (13). Bien entendu, cela n'implique pas que les deux formes d'intuition puissent être mises au pas. Il y a une différence très nette, qui en quelque sorte, a été formulée par Félix KLEIN, lorsqu'il opposait l'intuition naïve à l'intuition affinée (14). L'on peut toutefois dire qu'elles constituent ensemble l'aspect psychologique de l'intuition, dans le sens qu'il s'agit ici de sensations individuelles qui peuvent différer d'une personne à l'autre.

A côté de cela, il y a l'aspect épistémologique qui est lié à la deuxième forme de l'intuition pure que POINCARÉ appelle « l'intuition du nombre pur ». Lui-même est d'avis que cette forme d'intuition possède la propriété d'être infaillible parce qu'elle est une conséquence de la structure de l'esprit humain (15) et de sa fonction constitutive à l'égard de la connaissance mathématique. Généralement parlant, elle se manifeste dans l'existence des moyens de démonstration mathématiques et de contenus de pensée qui, en principe, ne sont pas justifiables par

---

(11) *Compte rendu*, p. 125.
(12) Cf. pp. 69, 71.
(13) *SM*, p. 55.
(14) KLEIN [1], vol. II, p. 226.
(15) Cf. p. 56.

voie logique parce que toute justification dépendrait à son tour de ces moyens de démonstration et de ces contenus. POINCARÉ vise surtout au principe de l'induction complète qu'il considère comme un jugement synthétique a priori (16). Mais il en est de même de la logique : le fait que certains principes logiques servent de point de départ, ne s'explique que par la structure de l'esprit humain (17).

Il est vrai qu'ici aussi différents aspects psychologiques sont en jeu. Or ceux-ci ne sont pas comparables aux phénomènes individuels que les notions « intuition sensorielle » et « intuition de compréhension » visent. En fait, l'influence de KANT est indéniable. La dernière des intuitions discutées fournit pour ainsi dire la forme transcendentale à l'intérieur de laquelle la déduction logique de même que la compréhension mathématique peuvent se réaliser. Elle est responsable des synthèses primaires sur la base desquelles l'analyse logique et mathématique se fait. On verra plus tard qu'il ne s'agit pas ici d'une forme d'intuition comme l'espace et le temps dans la philosophie de KANT. Néanmoins, il y a suffisamment de traits d'union avec cette philosophie pour pouvoir qualifier le type d'intuition en question, d'intuition *transcendentale*.

Il est clair que seule l'intuition transcendentale pourrait créer une opposition à la logique. En fait, POINCARÉ n'a pas manqué d'opposer aussi l'intuition de compréhension à la logique, et sa conviction que les logisticiens ne montrent pas assez d'intérêt pour ce côté-là du métier mathématique, a sans doute renforcé ses objections. Le caractère illicite de cette méthode de combattre a été exposé de façon efficace par J. JÖRGENSEN dans la troisième partie de son livre *A Treatise of Formal Logic* (18). « Logic is a science or a collection of propositions and rules, whereas intuition is an experience or a particular mode of apprehension », écrit-il (19) (La logique est une science ou une collection de propositions et de règles, tandis que l'intuition est une expérience ou une forme spéciale de l'appréhension). Psychologiquement parlant, l'intuition de compréhension fait en effet partie de chaque processus intellectuel (20). Le cas échéant, l'on pourrait établir une différence significative entre « a 'logical' train of throught, as it actually proceeds

---

(16) Pour ce qui est de la question de savoir quels axiomes (et quels moyens de démonstration) sont en outre en jeu, je renvoie le lecteur aux pages 57-58. Les contenus de la pensée sont les nombres naturels.

(17) Cf. pp. 66-67 et RMM 13, pp. 829-830.

(18) J. JÖRGENSEN [1], vol. 3, pp. 103-141.

(19) l.c., p. 126.

(20) l.c., p. 133.

in the mind of a thinking individual, and those abstract schemes which logicians set up as criteria of the logical validity of such thought processes » (21) (une suite d'idées 'logique', telle qu'elle s'opère dans l'esprit d'un individu pensant, et les schémas abstraits que les logiciens dressent comme critères de la validité logique de ces suites d'idées). Voilà bien autre chose que de constater une insuffisance chez les logiciens et leurs schémas abstraits. Ils n'envisagent la science que sous leur propre angle et ne la voient pas comme une forme d'activité, mais comme le système de propositions et de théories qui en est le résultat (22).

Les logisticiens, de leur côté, n'ont pas soutenu l'inutilité de l'intuition de compréhension. Même ils en ont parfois souligné l'importance. Déjà en 1900, PEANO faisait allusion à l'effet favorable de l'intuition, quand la formalisation d'une théorie était encore imparfaite (23). Plus tard, RUSSELL (24), de même que COUTURAT (25), soutiendra que le logicien aussi a besoin de l'intuition afin d'aboutir à des résultats. Il ne s'avère nulle part qu'ils s'opposent à la déclaration de D. PARODI : « Comprendre quoi que ce soit (...), c'est toujours avoir une intuition » (26). Mais il va de soi que tous les deux sont d'avis qu'au point de vue logique et méthodologique, seule la construction déductive achevée compte. POINCARÉ, par contre, est plutôt enclin à attacher plus d'importance à la manière dont la science mathématique se réalise. Mais cette différence des points de départ que P. BOUTROUX caractérise comme « la science déjà faite » contre « la science qui se fait » (27) n'explique pas le ton ironique que POINCARÉ se plaît à employer de temps à autre. C'est pourquoi l'on est obligé de supposer une fois de plus chez lui une connaissance insuffisante des points de départ et des objectifs de ses adversaires. L'unique objection matérielle de POINCARÉ est que l'ambition des « logiciens » est condamnée à l'échec, *parce que l'intuition transcendantale ne peut être éliminée qu'au prix de cercles vicieux.*

---

(21) l.c., p. 133.

(22) l.c., pp. 134-135.

(23) *Bibliothèque,* p. 287. PEANO signale ici « la précision intrinsèque des sciences mathématiques ».

(24) Cf. pp. 87-88.

(25) Cf. p. 96.

(26) D. PARODI [1], p. 556.

(27) P. BOUTROUX [3], p. 181.

B. - Une comparaison des positions de Kant, Cassirer et Poincaré.

Jusqu'à quel point POINCARÉ a-t-il, en formulant son point de vue, fait à juste titre appel à KANT, c'est-à-dire a-t-il donné une interprétation correcte de la conception de KANT à l'égard des mathématiques ? Le problème n'est pas d'un intérêt prépondérant, bien qu'il me semble à propos d'en relever les aspects les plus importants. La question de savoir si POINCARÉ, vu la définition donnée dans l'introduction à la *Kritik der reinen Vernunft,* était en droit de qualifier l'induction complète de jugement synthétique a priori, ne fait pas partie du problème qui nous occupe. CASSIRER notamment, a soutenu de façon plausible qu'il est déraisonnable de fixer KANT à sa définition primaire ; KANT lui-même manie la notion de synthèse dans un contexte plus large que celui des jugements prédicatifs (28).

Aussi, la question de savoir si, en considération d'une forme pure de l'intuition, POINCARÉ a droit à chercher à s'associer à KANT, est-elle de beaucoup plus importante. Chez KANT, l'intuition concerne exclusivement la faculté des sens ; des formes intellectuelles de l'intuition ne figurent pas dans son système. Toutefois, cette intuition ne doit pas nécessairement être empruntée à l'expérience. Il se peut aussi qu'elle repose uniquement sur la *forme* de la faculté des sens (29). Or, cette possibilité s'applique à l'intuition qui compte pour les mathématiques. La validité a priori des propositions mathématiques n'est par conséquent pas infirmée par suite de leur appui sur l'intuition. Et bien que cette intuition n'ait toujours trait qu'au particulier, le caractère général de la connaissance mathématique est maintenu, parce que « dasjenige, was aus den allgemeinen Bedingungen der Konstruktion folgt, auch von dem Objekte des konstruierten Begriffs allgemein gelten muss » (30) (ce qui dérive des conditions générales de la construction, doit également

---

(28) CASSIRER [2], p. 38. L. ROUGIER croit toutefois voir dans cette question terminologique une défaillance de POINCARÉ (Avant-propos à une édition de *VS*, Genève, 1946).

(29) L'intuition spatiale par exemple peut seulement fournir un savoir a priori pour autant « sie bloss im Subjekte, als die formale Beschaffenheit desselben, von Objekten affiziert zu werden und dadurch *unmittelbare Vorstellung derselben,* d.i. *Anschauung* zu bekommen, ihren Sitz hat, also nur als Form des äusseren Sinnes überhaupt » (que celle-ci est établie seulement dans le sujet, comme la propriété formelle de celui-ci d'être touché par les objets et par là d'obtenir une *représentation directe* de ceux-ci, c'est-à-dire une *intuition,* par conséquent seulement comme la forme du sens extérieur en général). KANT [1] B, p. 41.

(30) l.c., p. 744.

valoir en général de l'objet de la notion construite). Résumant, KANT dit : « die mathematische (Erkenntnis ist die Vernunfterkenntnis) aus der *Konstruktion* der Begriffe. Einen Begriff aber konstruiren heisst : die ihm korrespondierende Anschauung apriori darstellen. Zur Konstruktion eines Begriffes wird also eine nichtempirische Anschauung erfordert, die folglich als Anschauung ein *einzelnes* Objekt ist, aber nichtsdestoweniger als die Konstruktion eines Begriffes (einer allgemeinen Vorstellung) Allgemeingültigkeit für alle mögliche Anschauungen, die unter demselben Begriff gehören, in der Vorstellung ausdrücken muss » (31) (la connaissance mathématique est la connaissance de raison par la *construction* des notions. Construire une notion veut dire : établir a priori l'intuition qui y correspond. Une intuition non empirique est donc de rigueur pour construire une notion. Cette intuition, telle quelle, est l'intuition d'un seul objet, mais elle doit néanmoins, en tant que construction d'une notion (d'une représentation générale) exprimer dans la représentation la validité générale de toutes sortes d'intuitions, qui tombent sous la même notion).

Cependant, il convient de noter d'autres questions importantes dans ce contexte. Afin de pouvoir traiter de celles-ci, il nous faut d'abord disposer d'une interprétation satisfaisante des termes « analytique » et « synthétique », et cela en rapport avec les mots « notion », « jugement » et « méthode ». Pour ce qui est de cette interprétation, je me joins à E.W. BETH (32).

Il me semble que l'on ne peut raisonnablement douter des aspects suivants de la doctrine de KANT :

1) Les notions mathématiques sont des notions synthétiques.

2) Les jugements mathémathiques sont des jugements synthétiques.

KANT exprime cet énoncé avec force (33). Aussi la supposition originale de H. FREUDENTHAL que KANT, le cas échéant, qualifierait le jugement $12 - 7 = 5$ d'analytique, ne me semble pas tout à fait fondée (34).

3) La méthode mathématique, c'est la méthode synthétique. Je me réfère notamment aux *Prolegomena zu einer jeden künftigen Meta-*

(31) l.c., p. 741. Cf. pour ce qui précède aussi E.W. BETH [1], pp. 10-19 et pp. 87-89.

(32) Voir surtout BETH [9], BETH [7], pp. 41-47 et 56-57, et BETH-PIAGET [1], pp. 8-18.

(33) KANT [1] B, p. 14.

(34) FREUDENTHAL [3], p. 167.

physik, où KANT déclare que la mathématique « nicht analytisch, nämlich durch Zergliedrung der Begriffe, sondern nur synthetisch verfahren kann » (35) (ne peut procéder de façon analytique, c'est-à-dire en analysant les notions, mais seulement de façon synthétique). Dans la *Kritik der reinen Vernunft,* KANT soutient que seulement par le moyen de l'analyse de la notion « triangle » l'on ne parviendra jamais à la proposition que la somme des angles est 180°. La mathématique « kann mit dem blossen Begriffe nichts ausrichten, sondern eilt sogleich zur Anschauung, in welcher sie den Begriff *in concreto* betrachtet » (36) (ne peut rien faire avec seulement la notion, et elle n'hésite pas à avoir recours à l'intuition, dans laquelle elle envisage la notion *in concreto*).

La question se pose maintenant de savoir comment il convient d'interpréter plus en détails la méthode synthétique en mathématiques. Des passages frappants dans le paragraphe sur *Die Disziplin der reinen Vernunft im dogmatischen Gebrauche* (que nous avons déjà cité) indiquent que la démonstration mathématique se fait entièrement à l'aide de l'intuition. Le mathématicien est « immer von der Anschauung geleitet » (37) (toujours conduit par l'intuition) ; des démonstrations, il est dit qu'elles « in der Anschauung des Gegenstandes fortgehen » (procèdent dans l'intuition de l'objet) (38).

Directement contraire aux passages cités paraît être le paragraphe V de l'introduction à la deuxième édition du *Kritik der reinen Vernunft.* On dirait que d'un seul coup KANT y mine sa propre vision. Il dit : « Mathematische Urteile sind insgesamt synthetisch. Dieser Satz scheint den Bemerkungen der Zergliederer der menschlichen Vernunft bisher entgangen, ja allen ihren Vermutungen gerade entgegengesetzt zu sein, ob er gleich unwidersprechlich gewiss und in der Folge sehr wichtig ist. Denn weil man fand, dass die Schlüsse der Mathematiker alle nach dem Satze des Widerspruches fortgehen, (welches die Natur einer jeden apodiktischen Gewissheit erfordert), so überredete man sich, dass auch die Grundsätze aus dem Satze des Widerspruches erkannt würden ; worin sie sich irrten ; denn ein synthetischer Satz kann allerdings nach dem Satze des Widerspruchs eingesehen werden, aber nur so, dass ein anderer synthetischer Satz vorausgesetzt wird, aus dem er geforgert

(35) KANT [2], §10.

(36) KANT [1] B, p. 743.

(37) l.c., p. 745.

(38) l.c., p. 763.

werden kann, niemals aber an sich selbst » (39) (les jugements mathématiques sont dans l'ensemble synthétiques. Cette proposition semble avoir échappé jusqu'à présent aux observations des analystes de la raison humaine ; elle semble même contraire à toutes leurs présomptions, même si elle est à la fois irréfutablement certaine et très importante dans ses conséquences. Car, du fait qu'on estimait que les conclusions des mathématiques se font toutes d'après le principe de contradiction (ce qu'exige la nature de chaque certitude apodictique), l'on était convaincu que les axiomes aussi étaient admises en vertu du principe de contradiction. Ils se trompaient toutefois, car une proposition synthétique peut en effet être reconnue en vertu du principe de contradiction, mais seulement quand une autre proposition synthétique est supposée, de laquelle elle peut être déduite, mais jamais pour elle-même).

KANT ne conteste évidemment pas que les démonstrations mathématiques puissent être fournies selon le principe de contradiction, lorsqu'on dispose d'un nombre suffisant d'axiomes et de définitions. Or, les définitions sont des définitions de notions synthétiques. Elles fournissent par conséquent une caractéristique complète. Dans ces circonstances, les démonstrations peuvent se faire par voie strictement formelle de sorte que l'intuition a tout au plus une signification heuristique.

Ce fut surtout CASSIRER qui, dans un article intitulé *Kant und die moderne Mathematik* a fait ressortir le rôle du « Verstand » dans la philosophie des mathématiques de KANT. Dans cet ordre d'idées, il lui est possible de relever que d'après le paragraphe 38 des *Prolegomena,* les propositions de la géométrie trouvent leur base non pas dans l'espace mais dans le « Verstand » (40), alors qu'aussi selon la *Kritik der reinen Vernunft,* la synthèse intellectuelle de « l'Appréhension » serait la condition indispensable pour parvenir à une intuition a priori de l'espace et du temps (41). « Denn zweifellos kennt doch die kritische Lehre Formen der *reinen intellektuellen Synthesis* », remarque-t-il, « die sich zwar, um empirische Erkenntnisse zu ermöglichen, auf die Anschauung von Raum und Zeit beziehen müssen, die aber ihre Wahrheit und Geltung nichtsdestoweniger dem 'reinen Verstande' verdanken » (Car sans aucun doute, la doctrine critique connaît des formes de la *synthèse pure et intellectuelle,* qui — il est vrai — afin de rendre

(39) l.c., p. 14.

(40) CASSIRER [2], p. 34.

(41) l.c., p. 34. Cf. KANT [1] A, p. 99 et B, p. 133.

possible des connaissances empiriques, se rapportent à l'intuition de l'espace et du temps, mais qui, néanmoins, doivent leur vérité et leur validité au « reinem Verstande ») (42). CASSIRER croit même que le criticisme a une tendance immanente à s'accorder avec le logicisme, ou tout au moins avec les objectifs du logicisme (43). A l'encontre de POINCARÉ, la logistique a l'entière sympathie de CASSIRER, témoin l'observation suivante : « Wie immer man über ihre Bedeutung für die *Gesamtheit* der philosophischen Probleme denken mag : es lässt sich nicht leugnen, dass sie die 'formale Logik' erneuert und sie wiederum mit dem Lebenssaft der *Wissenschaft* erfüllt hat » (44) (Quoique l'on veuille penser de son importance pour *l'ensemble* des problèmes philosophiques, on ne peut nier qu'elle a renouvelé la 'logique formelle' et qu'elle l'a remplie de nouveau de la sève vitale de la *science*). Il admet également ses méthodes et ses résultats et il n'a à l'égard de l'ouvrage de COUTURAT, *Les Principes des Mathématiques* guère d'autres objections que celles qui ont trait à la critique de KANT. Il est simplement de l'opinion que COUTURAT interprète mal KANT (45).

Toutefois, il faut reconnaître que CASSIRER prend prématurément parti pour un des aspects décrits ci-dessus de la doctrine de KANT. C'est ce qui paraît de façon évidente quand il écrit que l'on ne peut conclure si la logique et les mathématiques sont synthétiques « aus der Technik des mathematischen Beweises, sondern lediglich aus der Natur der mathematischen Definitionen und Axiome » (46) (au moyen de la technique de la démonstration mathématique, mais seulement par la nature des définitions et des axiomes mathématiques). Ainsi l'interprétation intuitionniste de la méthode synthétique est déclarée une chose de moindre importance. Il est vrai que CASSIRER reconnaît naturellement

---

(42) CASSIRER [2], p. 36. Plus tard, E.W. BETH [1], pp. 17-19, soutiendra aussi que selon KANT, la mathématique se trouve sous la supervision de l'intelligence. Et d'accord avec POINCARÉ, CASSIRER [1], p. 440, déclare que le principe de l'induction complète est, en effet, basée sur une véritable synthèse a priori.

(43) CASSIRER [2], pp. 31-32. Par contre, le néo-Kantiste Bruno BAUCH déclare explicitement : « Die Anschauung spielt bei KANT eine zu grosse, weil der Analysis gegenüber zu verselbständigte Rolle ; und ebendarum weist er der Analysis eine zu bescheidene Rolle an » (L'intuition joue chez KANT un rôle trop grand parce que trop indépendant de l'analyse ; c'est bien pour cela qu'il attribue à l'analyse un rôle trop modeste). B. BAUCH [1], p. 214.

(44) CASSIRER [2], p. 8.

(45) l.c., pp. 32-42. COUTURAT adhère à l'interprétation qui est défendue également par BOLZANO, FREGE et RUSSELL. Voir chap. II, note 95.

(46) CASSIRER [2], p. 40.

le caractère synthétique des mathématiques (RUSSELL en fait autant dans *The Principles of Mathematics* (47) ; ce que celui-ci — à l'encontre de COUTURAT — reproche à KANT, c'est de n'avoir pas compris le caractère synthétique de la logique mais seulement celui des mathématiques), mais les implications de cette reconnaissance ont été atténuées autant que possible.

L'objectif de CASSIRER était évidemment de montrer que la doctrine de KANT n'entravait aucunement une appréciation de la recherche moderne des fondements. Dans l'article mentionné, il est surtout apologiste. D'autre part, c'est notamment E.W. BETH qui a souligné l'utilité d'un autre point de départ où est visé une « interprétation radicale » au lieu d'une « interprétation souple » (48). Ceci conduit à un soulignement des éléments intuitionnistes dans la doctrine de KANT, notamment par rapport à la démonstration mathématique. La question se pose toutefois de savoir si une interprétation cohérente où l'on rend justice à tous les passages importants (même en se confinant à la deuxième édition de la *Kritik der reinen Vernunft*) est possible.

Or, nous remarquons maintenant le fait singulier qu'un dilemme analogue intervient quand on interprète les énoncés de POINCARÉ.

D'une part, celui-ci insiste sur le besoin que le mathématicien a continuellement de l'intuition. Nommément, l'intuition des axiomes ne saurait lui suffire. Toutefois, l'on constate cette différence-ci avec KANT, à savoir que POINCARÉ appuie cette proposition pour l'arithmétique, KANT surtout pour la géométrie. POINCARÉ déclare explicitement que l'intuition de l'espace lui est étranger (49), tandis que chez KANT le caractère intuitif des démonstrations de l'algèbre n'est assuré que par la nécessité des symboles (50). Cela facilite de beaucoup une interprétation formaliste, puisque l'on peut douter qu'il soit encore réellement question ici de « Anschauung des *Gegenstandes* » (intuition de l'objet). Et KANT n'emprunte point d'arguments à l'existence des propositions arithmétiques universelles qui soient comparables à ceux de POINCARÉ. Cela correspond au fait que chez POINCARÉ, à l'opposé de chez KANT, l'intuition a un caractère intellectuel.

D'autre part, POINCARÉ n'a pas manqué de relever le caractère strictement formel des mathématiques. Dans cet ordre d'idées, l'on est

(47) RUSSELL [3], § 434. Voir RUSSELL [2], §§ 11 et 12.

(48) F. ALQUIÉ e.a. [1], pp. 149-150.

(49) Cf. « Cette intuition me manque absolument » (RMM 7, p. 274). C'est de l'égalité de distance (et de durée) qu'il parle ici.

(50) KANT [1] B, p. 762.

enclin de penser à son identification de l'existence mathématique avec la consistance (51) et à sa remarque que les mathématiques ne sont rigoureuses que quand elles sont devenues une forme pure (52).

Je traiterai plus en détails ce problème dans le paragraphe VII c. Mais il convient de m'arrêter d'abord sur une face du point de vue de CASSIRER, que je n'ai pas encore relevée. CASSIRER remarque que le problème du caractère synthétique c. q. analytique des principes de la logique menace de dégénérer en une logomachie insignifiante (53). En réalité, cela n'est pas le cas, dit-il. Conforme aux idées de base de l'école de Marbourg, il soutient que derrière ce problème se cache la question de savoir à quel point les mathématiques jouent un rôle dans l'ordination des phénomènes. Après que la logistique a accompli son œuvre, c'est à la philosophie criticiste qu'incombe la tâche d'examiner ce problème. C'est là l'opinion de CASSIRER. Autrement dit : la philosophie doit découvrir le rapport entre les mathématiques et les sciences naturelles. Ne réussit-on pas à montrer qu'un système mathématique donné joue un rôle nécessaire dans la refonte des phénomènes en sciences naturelles, alors ce système n'est qu'une chimère. « Erst wenn wir begriffen habben, dass dieselbe Grundsynthesen, auf denen Logik und Mathematik beruhen, auch den wissenschaftlichen Aufbau der Erfahrungserkenntnis beherrschen, dass erst sie es uns ermöglichen, von einer festen gesetzlichen Ordnung unter Erscheinungen und somit von ihrer gegenständlichen Bedeutung zu sprechen : erst dann ist die wahre Rechtfertigung der Prinzipien erreicht » (54) (Ce n'est que quand nous avons compris que les mêmes synthèses de base sur lesquelles reposent la logique et les mathématiques, dominent aussi la construction scientifique de la connaissance empirique, compris que ce ne sont qu'eux qui nous mettent à même de parler d'un ordre fixe et conforme aux lois dans les phénomènes et par suite de leur signification objective ; alors seulement est atteinte la vraie justification des principes).

POINCARÉ suit un autre chemin. Bien qu'il ait plus d'une fois fait preuve de prédilection pour une mathématique appliquée ou tout au moins applicable, il conteste pour des raisons purement mathématiques que son débat avec COUTURAT soit en fait une polémique innocente.

---

(51) Cf. p. 68.

(52) Cf. p. 57.

(53) CASSIRER [2], p. 42.

(54) l.c., p. 45. L'idée que seules les applications puissent prêter aux mathématiques un sens, a été soutenue plus tard entre autres aussi par H. WEYL [2].

Avec force argumentation, il annonce que la réduction des mathématiques telle que les logisticiens la présente, est douteuse. « Eh bien, ce que je veux rechercher, c'est s'il est vrai qu'une fois admis les principes de la logique, on peut je ne dis pas découvrir, mais démontrer toutes les vérités mathématiques sans faire de nouveau appel à l'intuition », écrit-il (55), et encore peut-on se demander s'il s'agit peut-être ici seulement de l'intuition de compréhension. Il paraît qu'il n'en est pas ainsi, car il suit un renvoi au principe de l'induction complète. Lorsque plus tard ceci sera élaboré, POINCARÉ constate que tous les partis semblent être d'accord que les principes logiques doivent être conçus comme des jugements synthétiques. Mais ajoute-t-il : « Ce qui me paraît douteux, c'est qu'après ces appels à l'intuition, ce sera fini » (56), et cela veut dire que « c'est ici seulement que le vrai débat commence » (57). POINCARÉ désire montrer qu'il est impossible de réduire le principe de l'induction complète à un principe logique, que celui-ci soit un axiome ou une définition. La seule solution serait alors de le baser sur une qualité fondamentale de l'esprit humain.

Il est clair que CASSIRER et POINCARÉ développent la doctrine de KANT de deux manières toutes différentes. CASSIRER, à la suite de COHEN et de NATORP, a l'opinion que l'apriorité de l'espace et du temps ne porte pas tant à la structure de la faculté des sens qu'à la possibilité en général de la connaissance objective de la nature (58). Par suite, il a le désir de vouloir ordonner et perfectionner logiquement les mathématiques, mais d'autre part il est enclin à juger déterminante au point de vue philosophique, leur relation avec les sciences naturelles. POINCARÉ, par contre, pense encore dans les termes de la structure de l'esprit humain. En remplaçant toutefois la faculté des sens par la pensée, il attribue l'intuition transcendentale à une certaine forme de l'intelligence humaine. Si ce sont chez KANT en premier lieu les formes de la sensibilité qui décident du caractère synthétique des mathématiques, chez POINCARÉ ce sont certaines formes de la pensée.

A. CECCHINI a également étudié la question de savoir sous quel rapport KANT et POINCARÉ diffèrent dans leur conception du caractère synthétique des mathématiques. Il estime que chez KANT l'élément synthétique a avant tout un caractère normatif, chez POINCARÉ, par

---

(55) RMM 13, p. 817 ; *SM*, p. 159.
(56) RMM 13, p. 380 ; *SM*, p. 176.
(57) RMM 13, p. 382.
(58) Voir p. ex. : H. COHEN [1], chap. V.

contre, surtout un caractère constructif : « Attività sintetica a priori », écrit CECCHINI, « significa, per il POINCARÉ, facoltà di creare, costruendolo, un mondo di enti matematici, è quindi un' attività creatrice, e non semplicemente legislatrice come per KANT » (59) (L'activité synthétique a priori signifie, pour POINCARÉ, la faculté de créer, tout en construant, un monde d'entités mathématiques. Elle est donc une activité créative et non seulement, comme pour KANT, une activité législative). Ch. VOROVKA avait déjà fait allusion, quoique moins explicitement, à cette différence (60). Selon lui, l'intuition telle que POINCARÉ la conçoit, est la conscience de pouvoir faire quelque chose. Vue sous cet angle, l'intuition que POINCARÉ défend, ne doit pas nécessairement avoir trait aux objets individuels, mais elle peut également concerner les actions logiques d'un sujet.

L'on peut objecter contre cette manière de voir qu'elle est trop restreinte par le fait qu'elle caractérise la conception de KANT de normative (à l'opposé de constructive). Car chez lui, le synthétique porte au contraire un caractère nettement constructif ; je rappelle le lecteur encore une fois à sa caractérisation des mathématiques comme étant la « Vernunfterkenntnis aus der *Konstruktion* der Begriffe » (la connaissance de raison par la *construction* des notions). Laisse-t-on de côté de tels passages, cela implique qu'on opte pour « l'interprétation souple » de CASSIRER, laquelle obscurcit l'aspect constructif. D'autre part, nous notons que chez POINCARÉ la construction du continu par exemple a un aspect nettement normatif (61).

Quand même la différence que CECCHINI soutient, existerait, il convient de ne pas y attacher trop d'importance. Elle n'est en tous cas pas suffisante pour pouvoir dénier à POINCARÉ le droit de faire appel à KANT. Il me semble que le fait mentionné auparavant, à savoir que chez POINCARÉ, à l'opposé de chez KANT, l'intuition a un caractère intellectuel, implique des conséquences plus graves. POINCARÉ oppose à la logique les conceptions *générales* des mathématiques et celles-ci n'ont pas été obtenues à base de conceptions particulières ainsi que chez KANT. POINCARÉ ne soutient-il pas expressément que la vérification d'une proposition générale pour des cas particuliers n'a pas d'importance essentielle ? (62). Pour lui, il y a des moyens de démonstration qui

---

(59) Augusto CECCHINI [1], p. 32.

(60) Ch. VOROVKA [1].

(61) POINCARÉ [10].

(62) Cf. p. 55.

conduisent directement à la connaissance d'une proposition générale et dont le caractère intuitif cadre avec la généralité de la proposition (63). Pour cette raison, l'intuition a chez POINCARÉ un caractère platoniste qui est absent chez KANT (64).

En revanche, POINCARÉ réduit le caractère général des mathématiques à la nature de l'esprit humain. C'est pour cette raison que je me suis servi du terme « intuition transcendentale ». Et c'est pour la même raison que l'on peut constater une affinité entre la notion de l'intuition de POINCARÉ et celle de KANT.

C. - **La certitude mathématique.**

Ce qu'il ne faut jamais oublier en étudiant la position de POINCARÉ, c'est l'argumentation surprenante avec laquelle il défend l'intuition transcendentale. Il en appelle à la nécessité de démontrer la consistance des systèmes mathématiques et cela seul prête déjà à son point de vue un aspect formaliste.

L'on peut se demander s'il ne faut entendre le dit argument que comme « argumentum ad hominem » : lorsque l'on tâche de justifier l'induction complète au moyen d'un système formel, on a néanmoins de nouveau besoin de l'induction complète pour démontrer la consistance de ce système. Mais par contre, ceux-là mêmes à qui était adressée l'argumentation, ne sont certainement pas tous convaincus de la nécessité d'une démonstration de consistance (65), tandis que d'autre part POINCARÉ a relevé dans un autre contexte aussi la nécessité de démonstration de consistance.

En tout cas, il est, vu l'argumentation formaliste, difficile de qualifier POINCARÉ d'intuitionniste tout court. Et n'oublions pas qu'encore en 1897 il soutenait l'opinion que la mathématique n'est rigoureuse que quand elle est devenue une forme pure (66), ce qui ne l'empêche toutefois pas de prétendre en 1905 que l'on diminue la

---

(63) Comme PASCAL avait déjà formulé le principe de l'induction complète, il n'était pas impossible que KANT l'eût impliqué dans ses dissertations. Pour plusieurs données historiques, voir H. FREUDENTHAL [2].

(64) D'après R. POIRIER, ce sont aussi des considérations esthétiques qui ont influencé POINCARÉ : « Il semble que la réalité à laquelle il songe soit d'ordre arithmétique d'une part, d'ordre esthétique plutôt que métaphysique de l'autre » (POIRIER [3], p. 197). Cela aussi indiquerait une différence entre lui et KANT.

(65) Cf. pp. 73-74 et p. 76.

(66) Cf. p. 57.

mathématique en la réduisant à une forme pure (67). L'œuvre de POINCARÉ permet la supposition que ce n'est que dans les années d'après 1900 qu'il est devenu tout à fait conscient de ce qu'il considérait comme les dangers de la conception logistique (68). Reste à savoir toutefois si par là la contradiction mentionnée est suffisamment expliquée. Il y a encore un deuxième point qu'il s'agit de ne pas négliger. C'est que probablement les énoncés de POINCARÉ dans son débat avec COUTURAT ont été influencés entre autres par son rôle pendant ce même débat. POINCARÉ avait une prédilection pour des boutades, qui rendaient l'expression des divergences d'opinions parfois trop acérée. Il est difficile de mesurer l'influence de cette manie mais en tous il y a aussi chez POINCARÉ, à côté d'une « interprétation radicale », de la place pour une « interprétation souple ». Mais que cette influence ait existé paraît plausible lorsqu'on lit son article *La Logique de l'Infini* (1912), dans lequel il use d'un ton plus modéré à l'égard des problèmes en question (69).

Or, il est certain que la manière de penser de POINCARÉ a toujours conservé, même au point culminant de la polémique, quelques traits formalistes. Aussi suis-je de l'avis de A. HEYTING, qui le comptait à juste titre aussi bien parmi les précurseurs de l'intuitionnisme de BROUWER que parmi ceux de la théorie de la démonstration de HILBERT (70).

On ne peut nier que son intérêt pour l'œuvre de PEANO et de RUSSELL n'ait été moins sérieux que pour celle de HILBERT. Toutefois, une différence importante subsiste avec les conceptions de BROUWER telles que celles-ci sont exposées dans sa thèse *Over de Grondslagen der Wiskunde* (1907) (Sur les Fondements de la Mathématique) et dans un article publié peu de temps après, intitulé, *De onbetrouwbaarheid der logische principes* (1908) (L'incertitude des principes logiques). BROUWER soutient que la mathématique ne relève pas du tout de la logique, tandis qu'inversement la logique est dépendante des mathématiques (71). Selon lui, il n'y a pas de raison d'admettre que les lois logiques qui se laissent distiller des systèmes mathématiques, s'appliquent

(67) Cf. p. 70.

(68) Que l'on compare cela à une évolution analogue des idées de POINCARÉ à l'égard de la théorie des ensembles. Voir E.T. BELL [1], pp. 171-172.

(69) Cf. pp. 111-112.

(70) A. HEYTING [1], p. 3.

(71) L.E.J. BROUWER [1], p. 127.

à tous les objets ; en 1908, il conteste même la validité générale du principe du tiers exclu à l'intérieur des mathématiques (72). BROUWER en vient à déclarer que le langage mathématique qui est nécessaire pour des raisons pratiques ne fait en somme plus partie des mathématiques. La mathématique proprement dite, c'est l'activité intellectuelle qui, basée sur l'intuition primitive, s'effectue dans l'esprit humain indépendamment de toute formulation (73). La logistique est qualifiée de science empirique et l'on pourrait pour de bonnes raisons la ranger dans l'ethnographie. Elle ne peut « niets leren omtrent de grondslagen der wiskunde, omdat ze onherroepelijk van de wiskunde gescheiden blijft » (74) (rien nous apprendre sur les fondements des mathématiques parce qu'elle est irrévocablement séparée des mathématiques).

De telles conceptions extrêmes n'existent pas chez POINCARÉ. D'ailleurs BROUWER s'attaque sans détour à son critère de l'existence mathématique. Il prétend que POINCARÉ confond le langage des mathématiques avec la vraie construction mathématique. « De wiskunde is zeker geheel onafhankelijk van de materiële wereld, maar *bestaan* in wiskunde betekent : *intuitief zijn opgebouwd* ; en of een begeleidende taal vrij van contradictie is, is niet alleen op zichzelf zonder belang, maar ook geen criterium voor het wiskundig bestaan » (75) (Les mathématiques sont certainement entièrement indépendantes du monde matériel, mais en mathématiques *exister* veut dire : être construit intuitivement ; et qu'un langage qui les accompagne soit exempt de contradiction n'est ni important en soi, ni un critère pour l'existence mathématique).

Mais par contre, il y a un aspect analogue, savoir la signification que les deux savants attribuent au nombre naturel et au principe de l'induction complète. C'est ainsi que BROUWER déclare que « de relatie *opvolger zijn van* (...) het redeneren in de eigenlijke wiskunde beheerst » (la relation *être successeur de* (...) domine le raisonnement dans la

---

(72) Dans BROUWER [2].

(73) Voir BROUWER []1, p. 130 et 180. Cf. aussi : « Dat in de taal, die de wiskunde begeleidt, de opvolging der woorden aan wetten gehoorzaamt, spreekt vanzelf ; maar die wetten als het leidende bij den opbouw te beschouwen, daarin ligt de fout » (Que dans le langage qui accompagne les mathématiques, la succession des mots obéisse à des lois, va de soi ; mais de considérer ces lois comme l'élément dirigeant dans la construction, c'est l'erreur). (l.c., p. 165).

(74) l.c., p. 169. Voir aussi BROUWER [2]. Dans des écrits ultérieurs du côté intuitionniste, il est parfois soutenu qu'il s'agit d'éviter des points de départ métaphysiques (et plus spécialement platonistes). Voir par exemple A. HEYTING [2], p. 2.

(75) BROUWER [1], p. 177.

mathématique propre) (76). Il ne faut, dit-il, pas se laisser dérouter par le fait que cette relation n'intervient pas dans la mathématique du raisonnement logique. « Die relatie treedt weliswaar niet meer expliciet op, maar ze is er zo goed als in alle wiskunde voorondersteld » (77). (Cette relation n'intervient sans doute plus explicitement, mais elle y est présupposée aussi bien que dans toutes les mathématiques). Il est clair que, dans la pensée de BROUWER aussi, le principe de l'induction complète ne demande ni ne supporte aucune justification (78).

L'intervention des paradoxes est attribuée par BROUWER à l'application des lois logiques à un langage de mots mathématiques, qui n'accompagne pas une mathématique propre (79). Cela veut dire que c'est la logistique elle-même qui introduit un élément d'incertitude en mathématiques sans que la possibilité existe d'éviter cette incertitude au moyen de prescriptions convenablement choisies : toute formalisation repose en fin de compte sur la langue ordinaire et elle est par suite équivoque, de sorte qu'en fait, seul le système qui est construit dans l'esprit du mathématicien est exact (80). La conception de POINCARÉ ne peut tenir tête à ce « pessimisme ». Ses objections à l'égard de l'infini actuel (81) par exemple ne concernent pas uniquement la logique ; en outre, il laisse la possibilité que la logique surmonte ses difficultés (82). Ce que POINCARÉ veut démontrer, c'est plutôt l'étroitesse de l'œuvre des logisticiens (alors qu'eux-mêmes la surestiment), que son insignifiance totale ou bien même sa perversion (83). Toutefois, tant de BROUWER

(76) l.c., pp. 127-128. BROUWER écrit au sujet de la notion mathématique « et caetera » qu'elle se rapporte à « un type d'ordre ω d'objets identiques (l.c., p. 146), ce qui rappelle la répétition indéfinie d'un même acte de POINCARÉ (cf. p. 55).

(77) BROUWER [1], p. 128.

(78) En 1908, BROUWER écrit : « POINCARÉ is misschien de eenige, die in de volledige inductie « le raisonnement mathématique par excellence » heeft herkend » (POINCARÉ est peut-être le seul qui ait reconnu dans l'induction complète « le raisonnement mathématique par excellence ») (BROUWER [2], p. 157, n. 1).

(79) BROUWER [2], p. 155.

(80) Voir aussi A. HEYTING [1], pp. 11-13.

(81) Celles-ci surpassaient celles de BROUWER. Celui-ci admet au moins l'existence de l'infini actuel dans ce qui peut être construit intuitivement (BROUWER [1], p. 176).

(82) RMM 14, p. 317 ; *SM*, p. 214.

(83) Parlant de la résistance de POINCARÉ aux tendances abstraite, formaliste, logiciste et ensembliste des mathématiques de son époque, E.W. BETH remarque : « A mon avis, il est plutôt juste de dire que POINCARÉ a prévu certaines complications auxquelles le développement de ces tendances devait ultérieurement donner lieu ; ce qu'il a voulu réfuter, ce sont certaines conceptions trop simplistes et certaines espérances exagérées » (*Livre du Centenaire*, p. 238). L'auteur vise évidemment à des espérances exagérées à l'égard des résultats de la méthode pasigraphique, et aux difficultés que les définitions imprédicatives comportent.

que de POINCARÉ l'on peut dire que leur principal stimulant en défendant l'intuition provenait de la conviction que ce n'est que par l'intuition que la certitude inhérente aux mathématiques peut être expliquée.

La certitude que la logique est en mesure de fournir, concerne, selon POINCARÉ, seulement la vérification de cas particuliers. La certitude des vérités générales reposerait sur l'induction complète ou sur d'autres méthodes intuitives (84). La vigueur avec laquelle POINCARÉ insiste sur la faillibilité de la logistique, sert entre autres à faire ressortir d'autant plus clairement la certitude de l'intuition transcendentale. L'idée que les objections de POINCARÉ à l'égard d'une fondation logique des mathématiques résultent de la conviction que les mathématiques possèdent le caractère de la certitude absolue, a d'ailleurs déjà été soutenue par G. MANNOURY dans son livre *Methodologisches und Philosophisches zur Elementar-Mathematik* (1909) (85).

Pour MANNOURY, cette conviction est en effet incompatible avec une conception analytique et déductive des mathématiques. Il en tire différentes conséquences intéressantes. Parlant des problèmes de la consistance, il remarque que ceux-ci exigent non seulement des recherches logiques mais avant tout des recherches philosophiques (86). « Widerspruch und mathematische Gewissheit sind Opposita, welche jede für sich unverständlich sind. Wer in den logischen Redefiguren nur die Form sieht, in welcher uns die unveränderliche Wahrheit einer 'eigentlichen' Mathesis zugänglich werden soll, kann befürchten, dass diese Form mit dem Wesen dieser Wahreit in 'Widerspruch' geraten könnte. Wer aber im Symbolismus nur ein Werkzeug sieht zur bequemeren Verständigung über Urteile deren 'Wahrheit' oder 'Unwahrheit' immer relativ, und am Ende auf Abschätzung von Empfindungen zurückführbar ist, kann dem 'Widerspruch' keine objektive Bedeutung, sondern nur die einer bestimmten Zusammenstellung von Redefiguren beilegen » (87) (Contradiction et certitude sont 'opposita'. Elles sont incompréhensibles chacune pour soi. Qui ne voit dans les figures de raisonnement que la forme dans laquelle la vérité invariable d'une vraie mathématique doit devenir accessible, peut craindre que cette forme soit en 'contradiction' avec l'essence de cette vérité. Qui, par contre, ne voit dans le symbolisme qu'un instrument pour faciliter la communication sur des

---

(84) Cf. pp. 55-56.
(85) G. MANNOURY [1], p. 82.
(86) l.c., p. 149.
(87) l.c., pp. 149-150.

jugements, dont la 'vérité' ou la 'fausseté' est toujours relative et finalement réductible à une évaluation d'impressions, ne peut pas attribuer à la contradiction une signification objective, mais seulement celle d'un certain ensemble de figures de raisonnement).

MANNOURY lui-même appartient à la deuxième catégorie, ce qui ne l'empêche ni d'avoir des sentiments très positifs à l'égard de l'œuvre des logisticiens (88), ni d'apprécier l'autre tendance qui est orientée vers KANT. Selon lui, le Kantisme, en mathématiques modernes, ne peut se maintenir qu'en effectuant une séparation entre le langage mathématique et les vraies mathématiques. Alors que BROUWER a accepté cette conséquence dans toute son étendue (89), POINCARÉ s'y est au fond opposé. Pourtant MANNOURY n'est pas sûr que POINCARÉ ait eu le dessous dans son débat avec COUTURAT. Car selon lui, la construction logique des mathématiques n'exclut en elle-même pas la possibilité d'une origine synthétique de la certitude mathématique (90). L'intuition, le concours de l'esprit vivant, pourrait être indispensable « sobald es darum geht die Mittel herbeizuschaffen deren die Analysis sich bedient » (dès qu'il s'agit de fournir les moyens dont l'analyse se sert) (91). MANNOURY pense ici notamment à la nécessité de justifier les principes de la logique et les définitions mathématiques.

Il est évident que la distinction que MANNOURY fait à l'égard de la fonction qu'il convient d'attribuer aux systèmes de symboles mathématiques, n'est pas reconnue comme impérative par tout le monde. Les logisticiens en tout cas occupent une position intermédiaire, puisqu'ils prétendent d'une part pouvoir fournir aux mathématiciens une base plus sûre que les intuitionnistes et que d'autre part ils attachent une grande importance à l'emploi du symbolisme mathématique. Il paraît toutefois que BRUNSCHVICG est d'accord avec la réduction de l'intuitionnisme à la conscience de la certitude mathématique telle que MANNOURY la

---

(88) Comparez le commentaire de E.W. BETH : « Het boek heeft nog steeds grote waarde. Lang voor zulk een stap elders werd ondernomen, verbindt MANNOURY hier het formalisme van de school van PEANO met het door MACH verdedigde empirisme en positivisme » (Le livre est toujours un livre de grande valeur. Longtemps avant qu'une démarche semblable fut faite ailleurs, MANNOURY joint ici le formalisme de l'école de PEANO à l'empirisme et au positivisme que MACH défend) (E.W. BETH [11], p. 299).

(89) Comme MANNOURY [1] est une élaboration d'un cours qui fut fait depuis 1903 et qui fut suivi par BROUWER, il n'est pas impossible que BROUWER ait fait cette démarche sous l'influence de MANNOURY.

(90) MANNOURY [1], p. 88.

(91) l.c., p. 88.

conçoit. Dans l'impossibilité pour la logique formelle d'aboutir à une affirmation d'un énoncé catégorique, il voit l'explication du fait que l'on « a essayé de rattacher à l'intuition la nature de la vérité mathématique » (92).

Et les logisticiens, qu'opposent-ils exactement à cela ? De RUSSELL vient le fameux énoncé : « mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true » (93) (les mathématiques se laissent définir comme le sujet dans lequel nous ne savons jamais de quoi nous parlons ni si ce que nous disons est vrai). COUTURAT émet un énoncé plus ou moins analogue quand il dit : « Der Glaube, dass die logische Deduktion irgend eine Wahrheit, z.B. die mathematischen Wahrheiten begründen könne, ist ein weitverbreiteter Irrtum » (94) (La croyance que la déduction peut établir une vérité quelconque, par exemple les vérités mathématiques, est une erreur largement répandue). Les deux énoncés reposent sur la conviction que les mathématiques sont un système hypothético-déductif (tel que PIERI l'entend), où la certitude des déductions va de front avec l'incertitude des axiomes. Ceci signifie une inversion surprenante à l'égard de l'opinion traditionnelle selon laquelle ce sont les points de départ mêmes qu'il faut considérer comme indubitables (95). DESCARTES, nommément, a fait ressortir le caractère incertain propre à chaque raisonnement déductif tant qu'il n'est pas soutenu pas à pas par des intuitions directes. En revanche, les logicistes, ainsi que les logisticiens en général, partent d'une conception toute différente de la notion de la certitude mathématique ; l'évidence leur est suspecte tant que celle-ci n'est pas confirmée par une déduction formelle. « Questione de evidentia es subjectivo, et non objecto de Mathematica » (96) (la question de l'évidence est une question subjective, et non pas une question qui concerne la mathématique), écrivit PEANO.

Cependant, il est nécessaire de tenir compte du fait que d'autres déclarations de RUSSELL révèlent une tendance à reconnaître la vérité des propositions des mathématiques. Cela s'avère déjà entre autres dans le paragraphe 1 de *Principles of Mathematics,* où après avoir signalé les

(92) L. BRUNSCHVICG [1], § 273.

(93) RUSSELL [8], p. 84 ; *Mysticism and Logic,* p. 75.

(94) COUTURAT [21], pp. 187-188.

(95) Outre chez ARISTOTE, l'on rencontre cette conception par exemple chez DESCARTES et chez PASCAL. GAUSS aussi semble en partir (Voir F. GONSETH [1], p. 10).

(96) PEANO [15], p. 147.

notions de base de la logique, il écrit : « In addition to these, mathematics *uses* a notion which is not a constituent of the propositions which it considers, namely the notion of truth » (De plus, les mathématiques se servent d'une notion qui n'est pas un élément des propositions qu'elles envisagent, à savoir la notion de vérité). Nous trouvons une amplification de cette pensée dans *L'Importance Philosophique de la Logistique* où l'argument est que la force de conviction des axiomes est déterminée par la vérité des conséquences qui en découlent (97). Mais le problème de la vérité des axiomes le préoccupe directement aussi, ainsi qu'on le déduit de ses observations sur la vérité de l'axiome multiplicatif (98). Sa conception se manifeste probablement le plus clairement dans le passage de l'article mentionné ci-dessus où il rejette l'idéalisme en vertu de l'argument que cette école ne garantit pas le caractère éternel et universellement valable des vérités a priori (99). En 1899, il avait même défendu devant POINCARÉ le contenu intuitif des notions primitives des mathématiques (100). RUSSELL adhérait alors encore à une conception kantienne ; plus tard, il en arrive à la conclusion qu'on est forcé de parvenir à un certain réalisme à la manière de la Scolastique (101).

Il est évident qu'en fait, RUSSELL était vivement intéressé au problème de la certitude mathématique. Il partage cet intérêt avec des esprits aussi dissemblables que POINCARÉ, HILBERT et BROUWER. MANNOURY, de son côté, jugeait cette certitude non fondée et s'efforçait — à l'encontre des savants mentionnés — de l'expliquer psychologiquement. Sans l'attitude positive de RUSSELL à l'égard de la certitude mathématique, CASSIRER lui aussi, aurait difficilement pu admettre le logicisme. Mais les critères de la certitude pouvaient diverger de l'intuition primitive de BROUWER jusqu'à la déduction strictement logique de RUSSELL et HILBERT. Quant à POINCARÉ, il n'a choisi ni l'un ni l'autre de ces extrêmes. Comme RUSSELL, il était disposé à se méfier par principe de l'élément intuitif en mathématiques. D'autre part, il ne voyait pas le moyen de réaliser de façon admissible la construction logique des mathématiques dont RUSSELL était partisan, sans affaiblir la certitude des mathématiques. Bien qu'il fût un des premiers à avoir relevé le caractère conventionnel d'une théorie mathématique, POINCARÉ

---

(97) RMM 19 (1911), p. 290. Cf. p. 95.

(98) Cf. p. 81.

(99) RMM 19, pp. 289-290.

(100) RMM 7, pp. 700-702.

(101) Cf. p. 95.

se faisait en même temps un devoir d'alléguer des arguments qui puissent restreindre autant que possible le caractère arbitraire des mathématiques. L'évolution historique, l'application à la réalité et avant tout les formes et les contenus intellectuels donnés avec l'esprit humain — ce sont là les facteurs qu'il avançait.

Le logicisme lui aussi, est le contraire d'une théorie conventionnaliste. Même PEANO s'est expressément éloigné d'une conception conventionnaliste des mathématiques, ainsi qu'il ressort du passage que nous avons déjà cité à la page 42, à savoir : « Systema de postulatos de Arithmetica et de Geometria es satisfacto per ideas que de numero et de puncto habe omni scriptore de Arithmetica et de Geometria. Nos cogita numero, ergo numero es » (102). De tels passages se prêtent à démontrer la relativité de toutes les oppositions. L'appel à tous les mathématiciens rappelle BOREL, et la dernière phrase, BROUWER. Afin de pouvoir néanmoins donner un aperçu aussi complet que possible des oppositions existantes, il convient de signaler à côté du différend au sujet de la logique et de l'intuition, d'autres différends, sans que les démarcations coïncident. Pour ce qui est de la nécessité de certaines intuitions, le formalisme et l'intuitionnisme marchent au début de compagnie (103). Il n'en est pas de même quand il s'agit du problème : comment évaluer la forme et le contenu des mathématiques. Alors que les formalistes sont enclins à préférer l'aspect formel dépourvu de sens (104), l'intuitionnisme et le logicisme défendent, chacun à leur façon, les droits du contenu (105). Quant au problème que POINCARÉ a soulevé à maintes reprises, à savoir l'importance qu'il faut attacher à la psychologie en vue d'une interprétation correcte des mathématiques, les rapports entre les trois mouvements à l'égard de ce sujet sont différents encore. Alors que le logicisme et le formalisme soutiennent que ce problème peut être passé sous silence, plusieurs intuitionnistes ont une autre opinion (106).

---

(102) PEANO [15], p. 143.

(103) Voir L.E.J. BROUWER [3] et A. HEYTING [1], II. Abschnitt, § 3.

(104) HILBERT lui-même ne s'est jamais placé à un point de vue formaliste extrême.

(105) Pour FREGE, cf. p. 33. A. HEYTING écrit par exemple : « Nach intuitionistischer Auffassung hat die Mathematik inhaltliche Bedeutung und entsteht sie durch eine konstruktive Tätigkeit unseres Verstandes » (Suivant la conception intuitionniste, la mathématique a une signification plus que formelle et elle provient d'une activité constructive de notre intelligence) (HEYTING [1], p. 2).

(106) Pour le point de vue de POINCARÉ dans cette question, voir les pp. 93-94.

Cet aspect du point de vue intuitionniste n'est pas important tant qu'on entend par là que le mathématicien est plus qu'une machine à calculer (107). Ce problème ne devient intéressant que quand on peut le mettre en rapport avec le premier point débattu. Il s'agit alors, pour parler dans les termes de M. WINTER, de savoir « si l'élément intuitif qui intervient *en fait* au moment de la découverte, doit être maintenu *en droit* comme un élément constitutif de la pensée » (108). POINCARÉ répond affirmativement à cette question. Pour lui, l'intuition psychologique a un aspect transcendental et envisagé sous cet angle, il n'est pas étonnant qu'il n'ait pas fait de distinction nette entre ces deux formes de l'intuition.

(107) Voir l'opinion de M. WINTER sur le point de vue intuitionniste dans M WINTER [2].

(108) RMM 16 (1908), p. 925.

CHAPITRE VIII

POINCARÉ ET LA PHILOSOPHIE FRANÇAISE

Lorsque l'on tâche de donner aux idées de POINCARÉ sur la logique et l'intuition une place dans la philosophie française, l'on est étonné de voir combien elles cadrent avec une tradition philosophique. Dans le premier chapitre (*Caractères généraux de la Philosophie française*) de son opuscule *La Philosophie française,* V. DELBOS indique comme vertu principale des philosophes français : la clarté. Il ajoute tout de suite que cette qualité n'est pas au détriment de la vie et que le contact avec la réalité est toujours maintenu. « C'est qu'ils sont tous plus ou moins convaincus que les procédés intellectuels ne se suffisent pas à eux-mêmes et ne suffisent à rien, que ce sont de simples instruments dont l'intelligence doit rester la maîtresse (...) » (1). Et c'est seulement pour des penseurs de deuxième ordre que « la facilité du raisonnement déductif commun remplaçait la puissance de découvrir un ordre rationnel profond » (2). Selon DELBOS, l'opposition contre « les procédés intellectuels », soit au nom de « la raison commune », soit au nom de « l'esprit de finesse », remonte aux illustres exemples de DESCARTES et de PASCAL.

Dans ce chapitre-ci, je me propose de m'arrêter sur quelques détails de l'histoire de la philosophie française, pour autant qu'ils se rapportent à la problématique de la logique et de l'intuition. Cet aperçu n'a naturellement aucune prétention à être complet ; j'ai toutefois essayé de faire un choix représentatif. Il va de soi que j'ai attaché le plus

(1) V. DELBOS [1], pp. 7-8.

(2) l.c., p. 5.

d'importance au 19[e] et au 20[e] siècle, et plus spécialement à la période 1840-1940.

On sait que DESCARTES essaye de démontrer l'inutilité du syllogisme tant dans son *Discours de la méthode* que dans ses *Regulae ad directionem Ingenii.* Dans le dernier ouvrage (cité d'après la traduction de J. SIRVEN) (3), il écrit : « Aussi bien, est-ce surtout pour éviter ici que notre raison ne se donne congé pendant l'examen de quelque vérité, que nous rejetons ces formes logiques comme contraires à notre but et recherchons plutôt avec soin tout ce qui nous aide à retenir notre pensée attentive, ainsi que la suite le montrera. Or, pour qu'il apparaisse encore plus évident que cet art de raisonner ne contribue en rien à la connaissance de la vérité, il faut remarquer que les Dialecticiens ne peuvent construire avec leur art aucun syllogisme dont la conclusion soit vraie, à moins d'en avoir déjà la matière, c'est-à-dire à moins de connaître déjà auparavant la vérité elle-même qu'ils y déduisent. Il en résulte manifestement qu'une telle forme logique ne leur permet à eux-mêmes de rien percevoir de nouveau et que par suite la Dialectique ordinaire est tout à fait inutile à ceux qui veulent découvrir la vérité des choses. Elle peut seulement servir quelquefois à exposer plus facilement à d'autres les raisons déjà connues et par conséquent il faut la faire passer de la Philosophie dans la Rhétorique » (4).

D'après les *Regulae,* il y a deux méthodes qui conduisent à une connaissance sûre, à savoir la déduction (« deductio ») et l'intuition (« intuitus »). La déduction se distingue, contrairement à l'intuition, par le mouvement et la succession. Or, DESCARTES entend par déduction non pas un raisonnement conforme à des règles générales, mais une succession d'étapes de démonstration qui, chacune pour soi, ne peuvent être justifiées qu'en vertu de l'intuition, et dont également le point de départ ne peut être fixé qu'au moyen de l'intuition. Ainsi l'intuition est pour lui aussi la base de la déduction (5) ; à cette dernière manque toutefois l'évidence (et à ce qu'il paraît aussi quelque chose de l'indubitabilité) de l'intuition, car la mémoire doit venir à son secours.

---

(3) DESCARTES [2].

(4) DESCARTES [2], p. 65 ; DESCARTES [1], p. 406.

(5) « Though DESCARTES speaks of intuition *and* deduction, he does not mean by the latter anything fundamentally distinct from intuition » (Quoique DESCARTES parle d'intuition *et* de déduction, il n'entend pas par déduction quelque chose de fondamentalement différent d'intuition), dit N. KEMP SMITH [1], p. 70. Cf. aussi L.J. BECK [1],, chap. 6, et E.W. BETH [13].

L'intuition elle-même est décrite comme « le concept que l'intelligence pure et attentive, forme avec tant de facilité et de distinction qu'il ne reste absolument aucun doute sur ce que nous comprenons ; ou bien, ce qui est la même chose, le concept que forme l'intelligence pure et attentive, sans doute possible, concept qui naît de la seule lumière de la raison et dont la certitude est plus grande, à cause de sa plus grande simplicité, que celle de la déduction elle-même, bien que cette dernière ne puisse pas être mal faite même par l'homme, comme nous l'avons noté plus haut » (6).

En raison de ces quelques observations au sujet de la doctrine de DESCARTES, il nous est déjà possible de constater plusieurs rapports essentiels entre lui et POINCARÉ. Tous deux préconisent une interprétation intuitionniste de la déduction (chez POINCARÉ plus spécialement la déduction mathématique). Par conséquent, l'appréciation de la logique formelle n'est ni chez l'un ni chez l'autre très favorable. Chez tous deux, l'intuition n'est pas sensorielle, mais intellectuelle. Une des différences est toutefois que chez POINCARÉ, l'intuition est en moindre mesure tournée vers les objets individuels que chez DESCARTES. Cela explique pourquoi il ne postule pas l'attention de l'esprit comme une condition nécessaire pour le fonctionnement de l'intuition alors que DESCARTES ne cesse d'y insister (7). C'est pourquoi POINCARÉ est plus éloigné d'un éventuel psychologisme que DESCARTES. Néanmoins, l'aperçu des chapitres III-VI a montré que POINCARÉ aussi est disposé à tenir compte de considérations psychologiques.

Dans cet ordre d'idées, il convient de mentionner en même temps le spiritualisme du 19e siècle, courant qui est fortement influencé par DESCARTES. Les philosophes de cette école partageaient entre autres la conviction qu'il ne fallait pas sous-estimer l'importance que la psychologie a pour la philosophie. Victor COUSIN déjà, tentait de fonder une métaphysique sur la psychologie. « Il y a deux points sur lesquels il n'a jamais varié et dans lesquels se résume toute sa pensée », écrivit J. LACHELIER sur lui dans son étude *Psychologie et Métaphysique* (1885), « nécessité de commencer l'étude de la philosophie par la psychologie, et possibilité de passer, par la théorie de la raison, de la psychologie à la métaphysique » (8).

---

(6) DESCARTES [2], p. 14 ; DESCARTES [1], p. 368.

(7) Cf. la remarque afférente de Leslie BECK dans F. ALQUIÉ e.a. [1], p. 158.

(8) Jules LACHELIER [1], t. I, pp. 170-171. Cf. aussi E. BRÉHIER [1].

Dans la dite étude, LACHELIER expose comment la conception de la psychologie de COUSIN a été combattue. Aussi convient-il de modifier tant soit peu son point de vue. Mais même LACHELIER continue à soutenir que l'étude de la psychologie est étroitement liée à celle de la métaphysique (9).

En fait, cette conception était largement répandue en France pendant la seconde moitié du 19e siècle. Il nous faut la considérer comme un des facteurs qui ont pendant quelque temps entravé en France l'approfondissement de l'intérêt pour la logistique.

Une autre tendance parmi les philosophes spiritualistes est digne de mention, à savoir leur appréciation de l'œuvre des philosophes classiques. L'éclectisme de COUSIN est connu. Non moins surprenante est la déclaration de LACHELIER dans une lettre à Emile BOUTROUX (1868) : « Quant au chemin à suivre, je n'en connais qu'un (...), c'est l'étude directe, patiente et docile, des maîtres grecs, français et allemands. La philosophie n'est plus une chose à inventer, elle est faite, elle est tout entière dans leurs ouvrages, et ce que chacun de nous peut appeler sa philosophie n'est que sa manière de les interpréter » (10). Une pareille conception a dû être également nuisible à l'étude d'une nouvelle discipline philosophique telle que la logistique.

Au vingtième siècle, c'est surtout L. BRUNSCHVICG qui excelle dans le caractère nettement historique de sa philosophie. Tout en n'étant pas éclectique, il était trop relativiste pour pouvoir estimer les droits de la logique formelle selon leur valeur. Dans son étude, *Le Progrès de la Conscience dans la Philosophie Occidentale* (1927), cette branche est à peine mentionnée. Elle est cependant discutée assez amplement dans *Les Etapes de la Philosophie Mathématique* (1912). Or, BRUNSCHVICG y constate la « dissolution de la philosophie logistique » (11), et il est d'avis que RUSSELL lui-même a contribué au ternissement du « 'faux idéal' de la déduction universelle et absolue » (12). La logistique ne pourra certainement pas contribuer à éclaircir les fondements des

(9) LACHELIER [1], t. I, pp. 218-219.

(10) Cité dans L. BRUNSCHVICG [3], p. 316. BRUNSCHVICG cite également d'une lettre à Gabriel SÉAILLES : « Ai-je jamais eu une philosophie ? J'ai eu, je crois, quelques idées philosophiques, peu ou point d'entièrement originales, presque toutes tirées de DESCARTES, de LEIBNIZ, de KANT, de PLATON aussi et d'ARISTOTE, et qui n'en valent sans doute que mieux » (l.c., p. 315).

(11) BRUNSCHVICG [1], pp. 394-411.

(12) l.c., p. 411. La logistique appartient à ces courants intellectualistes qui, pendant quelque temps, se sont abandonnés à ce que BRUNSCHVICG appelle : « L'obsession de la déduction purement logique » (l.c., p. 537).

mathématiques (13). La philosophie aura donc à s'orienter ailleurs pour pouvoir découvrir « le rythme propre de l'intelligence dans la production et dans la composition des idées, dans l'unification du savoir scientifique » (14). « La logique symbolique, intervenant comme l'art poétique après les œuvres spontanées du génie, ne peut que consacrer la victoire ou enregistrer la défaite. Dès lors c'est sur le terrain de la science positive que doit désormais se placer la philosophie mathématique positive. Elle renonce à l'idéal chimérique de fonder la mathématique en prolongeant, au delà des limites qu'imposent les conditions mêmes de la vérification méthodique, l'appareil des définitions, postulats et démonstrations ; elle se fait immanente à la science avec le dessein de prendre conscience de ce qui s'y est incorporé d'intelligence et de vérité » (15).

Le spiritualisme de BRUNSCHVICG est intellectualiste et idéaliste. Mais la philosophie française avait déjà bien avant lui contribué à l'idéalisme, à savoir par son apport à la renaissance du Kantisme. Nous pensons entre autres à l'œuvre de A. COURNOT, *Essai sur les Fondements de nos Connaissances et sur les Caractères de la Critique Philosophique* (1851). Pour COURNOT, la faculté suprême de l'homme est la *raison*. Cette faculté recherche dans les choses, raison, ordre et règle. Il est probable que de cette manière nous pourrons rattraper quelque chose de la réalité elle-même, quoique cela ne soit pas certain, la réalité absolue étant inaccessible et tout au plus approchable. La critique philosophique est utile et nécessaire, d'une part pour signaler les lacunes de notre savoir, d'autre part pour contribuer aux conclusions positives de notre « raison ».

Inférieure à la raison est pour COURNOT l'intelligence. Les moyens de l'intelligence sont défectueux parce qu'ils sont discontinus et linéaires, tandis que la réalité est continue et ordonnée d'une infinité de manières différentes. Or la logique est un instrument de l'intelligence. « Il suit de là que la logique, qui tire son nom et sa forme du nom et de la forme du langage, est un instrument souvent rebelle et nativement défectueux, tant pour la perception que pour l'explication des vrais rapports de disposition et de subordination entre les choses » (16).

---

(13) l.c., p. 408.

(14) l.c., p. 537.

(15) l.c.,, p. 426.

(16) A. COURNOT [1], p. 606. Voir pour le résumé précédent, en particulier pp. 596-606. Une certaine analogie avec les idées de BERGSON saute aux yeux ; cf. pp. 147-148.

COURNOT traite de cette question en détails dans le chapitre *De l'Ordre linéaire de Discours - De la Construction logique et du Syllogisme.* Il admet que même le syllogisme peut dans certains cas conduire à une amplification de notre connaissance. Or, il souligne, dans le domaine de la logique, les possibilités de parvenir de la connaissance de cas particuliers à la connaissance du général. Une de ces possibilités est l'induction complète (« c'est bien là en effet conclure du particulier au général » (17)), une autre, la démonstration des propriétés pour une classe de figures via un raisonnement sur une seule figure. Même ces possibilités-là ne compensent pas les inconvénients connexes à une application de la logique. COURNOT écrit : « tandis qu'on s'attache à perfectionner ainsi l'ordre logique, il faut s'attendre à troubler souvent les rapports essentiels, l'analogie, la symétrie, en un mot l'ordre rationnel entre les diverses parties d'une composition scientifique » (18). Aussi « l'induction philosophique » est-elle selon lui supérieure à la « preuve logique » (19).

Ainsi que l'on a déjà pu le constater, la logique connaît selon COURNOT plusieurs variantes déductives. En outre, il met au compte de la logique également l'induction scientifique de même que la justification des hypothèses en vérifiant leurs conséquences. Pour résumer toutes ces formes, il se sert du terme « construction » (20). Nous verrons plus tard que ce terme occupera une place centrale aussi dans la théorie de GOBLOT.

De plus d'importance pour le développement du néo - kantisme furent les idées de Ch. RENOUVIER. « J'avoue donc nettement que je continue KANT », c'est ce que celui-ci déclare dans l'avant-propos du premier tome de ses *Essais de critique générale,* avec le sous-titre *Analyse Générale de la Connaissance - Bornes de la Connaissance* (1854) (21) ; une réédition amplifiée de ce premier essai apparut en 1875. Mais à côté de cette continuation de KANT, ressort dans cet avant-propos une appréciation positive de la logique. « Qui sait seulement poser correctement un problème ? », se demande RENOUVIER. « Le soi-disant rationalisme, en France du moins, emprunte ses dogmes aux traditions théologiques, passées à l'état de hautes convenances ; il a

(17) COURNOT [1], p. 379.
(18) l.c., pp. 371-372.
(19) l.c., pp. 379-380.
(20) l.c., p. 380.
(21) Ch. RENOUVIER [1], vol. 1, p. XV.

peur de la logique, et ne s'en cache pas, et on le soupçonne de n'avoir pas une foi très ferme dans les *nobles* objets de sa rhétorique usuelle » (22).

L'impression que la logique (y compris la logique formelle) est plus positivement appréciée par RENOUVIER que par beaucoup de ses co-philosophes est confirmée en lisant son ouvrage. Premièrement, elle ramène dans l'arithmétique le rôle de la synthèse à celle des notions « un » et « plusieurs ». Les deux notions se nomment corrélatives. « L'*un* est une abstraction, un produit de l'analyse, lequel n'est point représentable sans le *plusieurs* ; et le *plusieurs* et l'*un* ne sont eux-mêmes représentables que dans le *tout* » (23). Mais une fois la notion du nombre établie au moyen de la synthèse des notions « un » et « plusieurs », l'arithmétique peut subséquemment être construite de façon purement analytique. RENOUVIER constate : « On voit que l'arithmétique est une science purement analytique, une fois posée la synthèse qui donne le nombre » (24).

L'attitude de RENOUVIER à l'égard de la géométrie est également franche. Il reconnaît entièrement la raison d'être de la géométrie non-euclidienne. « C'est un problème logique comme un autre que celui de tirer les conséquences d'un système de vérités, dans l'hypothèse où une certaine autre vérité ne serait pas vraie » (25), et il tient même compte de la possibilité que d'autres axiomes aussi que le postulat des parallèles sont susceptibles d'être niés (26). C'est avec approbation qu'il cite la remarque de HELMHOLTZ, selon laquelle les axiomes sur lesquels notre géométrie est basée, ne sont pas nécessaires ; d'autres géométries peuvent être construites avec la même consistance (27). Par contre, RENOUVIER croit que la possibilité de connaître d'autres géométries repose sur la connaissance de la géométrie euclidienne (28).

A cela est jointe une discussion favorable du rôle du syllogisme dans les démonstrations géométriques (29). RENOUVIER analyse la

(22) l.c., vol. 1, p. XI.

(23) l.c., vol. 1, p. 257.

(24) vol. 1, p. 263.

(25) l.c., vol. 2, p. 88.

(26) l.c., vol. 2, p. 89.

(27) l.c., vol. 2, pp. 91-92.

(28) l.c., vol. 2, p. 176. Nous constatons toutefois que RENOUVIER [2] est beaucoup moins positif. La deuxième partie (pp. 37-66) en est consacrée à une lutte contre la géométrie non euclidienne. Cf. la critique de COUTURAT dans COUTURAT [6].

(29) RENOUVIER [1], vol. 2, pp. 170-184.

démonstration de la proposition euclidienne, selon laquelle la somme des angles d'un triangle est de 180 degrés, et, directement à l'opposé de KANT, il aboutit alors à la conclusion qu'onze fois un syllogisme a été appliqué. En revanche, il ne rencontre qu'une fois un appel à l'intuition, dont il montre toutefois la justification logique subséquente. « On semble répéter toujours la même chose ; et cependant on avance », remarque-t-il (30). L'explication de cet énoncé est basée sur la pensée qu'une figure est partie de figure d'une figure plus grande. « Ce sont des cas liés à d'autres cas, des parties de figures construites et que nous tenons en relation avec d'autres parties (...). La *figure particulière* correspond, on peut s'en assurer, aux *moyens* à trouver dans la construction comme dans les syllogismes pour obtenir la démonstration, ce qui est précisément conforme à la doctrine d'Aristote sur la *recherche des moyens* » (31).

Pour RENOUVIER, « le syllogisme est le fond de la méthode de démonstration en géométrie, tout comme de l'argumentation enveloppée dans les conversations familières » (32). Quant à la fondation de la logique formelle, il combat la théorie de déduction de Stuart MILL, celui-ci ayant recours à l'expérience et à l'induction (33). Par contre, il loue l'œuvre de DE MORGAN, *Formal Logic* (34). Il est regrettable que les pensées de RENOUVIER dans ce domaine aient eu si peu d'effet.

Le livre de J.M.C. DUHAMEL, *Des Méthodes dans les Sciences de Raisonnement* (première partie : 1865, deuxième partie : 1866) fait preuve d'une attitude toute différente. « La justesse d'une déduction se reconnaît par le sentiment de l'évidence », c'est là son opinion (35). Il s'appuie entièrement sur DESCARTES. Depuis ARISTOTE, il a fallu vingt siècles « pour qu'il se trouvât un autre homme de génie qui osât penser et dire que l'évidence était le seul caractère au moyen duquel on pût s'assurer de la justesse ou de la fausseté d'un raisonnement » (36). Depuis DESCARTES, le syllogisme n'est maintenu que par respect pour ARISTOTE.

Que la théorie du syllogisme continue à être dans cette période sujet important de discussion philosophique, n'est pas étonnant, puisque

(30) l.c., vol. 2, p. 176.
(31) l.c., vol. 2, pp. 176-177.
(32) l.c., vol. 2, p. 177.
(33) l.c., vol. 2, p. 183.
(34) l.c., vol. 2, pp. 185-186.
(35) J.M.C. DUHAMEL [1], vol. 1, p. 5.
(36) l. c., vol. 1, pp. 17-18.

le nombre de ceux qui étaient au courant des derniers développements de la logique formelle était restreint. L'attitude d'un philosophe à l'égard de la logique et de l'intuition devait en bonne partie ressortir de son attitude à l'égard du syllogisme. Est-ce qu'il acceptait la théorie d'ARISTOTE comme un apport exemplaire, quoique peut-être incomplet, à la théorie des sciences, ou non ?

Toutefois, cela mènerait trop loin de passer en revue toutes les études qui ont été consacrées en France, dans la seconde moitié du 19e siècle, au syllogisme (37). Je me bornerai à mentionner celles de J. LACHELIER (38) et de P. JANET (39), ainsi que l'article de G. MILHAUD, *Le Raisonnement Géométrique et le Syllogisme* (1897 (40). Comme RENOUVIER, MILHAUD reconnaît la grande importance du syllogisme pour la démonstration géométrique. Pour lui, un raisonnement est plus satisfaisant à mesure qu'il comprend moins d'éléments intuitifs. « C'est ainsi qu'en géométrie même, moins l'intuition interviendra dans la démonstration, plus elle séduira le mathématicien » (41).

BERGSON aussi est encore disposé à reconnaître la grande importance de la logique pour la géométrie. D'après ce qu'il soutient dans *L'Evolution Créatrice* (1907), les deux sont étroitement liées génétiquement : « Logique et géométrie s'engendrent réciproquement l'une l'autre (...). C'est de l'extension d'une certaine géométrie naturelle, suggérée par les propriétés générales et immédiatement aperçues des solides, que la logique naturelle est sortie. C'est de cette logique naturelle, à son tour, qu'est sortie la géométrie scientifique, qui étend indéfiniment la connaissance des propriétés extérieures des solides » (42). Or, BERGSON poursuit ainsi : « Géométrie et logique sont rigoureusement applicables à la matière. Elles sont là chez elles, elles peuvent marcher là toutes seules. Mais, en dehors de ce domaine, le raisonnement pur a besoin d'être surveillé par le bon sens, qui est tout autre chose » (43). Ce « bon sens » sera plus tard décrit comme « l'expérience continue du réel » (44).

---

(37) Outre les études mentionnées et celles qui seront encore mentionnées, voir aussi par exemple E. RABIER [1].

(38) Elles ont été rassemblées dans J. LACHELIER [2] et [1].

(39) P. JANET [1].

(40) D'abord dans Revue Philosophique 1897², pp. 364-389. Plus tard dans MILHAUD [2].

(41) Rev. Phil. 1897², p. 387.

(42) BERGSON [1], p. 162.

(42) l.c., p. 162.

(43) l.c., p. 162.

(44) l.c., p. 214.

Du fait que la logique est née de notre expérience des objets concrets, plus spécialement des corps solides, elle n'a qu'une validité limitée. La déduction est possible par rapport à l'espace, non pas par rapport à la durée. « Tant qu'elle roule dans l'espace ou dans le temps spatialisé, elle n'a qu'à se laisser aller. C'est la *durée* qui met les bâtons dans les roues » (45). La déduction joue par conséquent un rôle important dans les sciences naturelles, non pas dans « les sciences psychologiques et morales », encore moins en philosophie. En philosophie, l'intuition philosophique doit être prépondérante (46), une faculté qui surpasse tant l'intelligence (dont la logique est l'instrument) que l'instinct. Déjà la langue ordinaire a l'inconvénient que tout ce qui y est dénommé est réduit à une chose (47). Cela s'applique a fortiori à la logique. La logique est pour BERGSON le résultat d'une décadence qui commence dès la formation de l'espace et de la géométrie naturelle. « Vous ne pouvez vous donner cet espace sans introduire, du même coup, une géométrie virtuelle qui se dégradera, d'elle-même, en logique. Toute la répugnance des philosophes à envisager les choses de ce biais vient de ce que le travail logique de l'intelligence représente à leurs yeux un effort positif de l'esprit. Mais, si l'on entend par spiritualité une marche en avant à des créations toujours nouvelles, à des conclusions incommensurables avec les prémisses et indéterminables par rapport à elles, on devra dire d'une représentation qui se meut parmi des rapports de détermination nécessaire, à travers des prémisses qui contiennent par avance leur conclusion, qu'elle suit la direction inverse, celle de la matérialité. Ce qui apparaît, du point de vue de l'intelligence, comme un effort, est en soi un abandon » (48).

L'importance de la logique pour la philosophie est, selon BERGSON, négligeable. Par contre, elle domine la déduction. Par là, BERGSON se distingue non seulement de DESCARTES et de POINCARÉ, mais également de GOBLOT, dont la théorie de déduction sera traitée dans le paragraphe suivant.

---

(45) l.c., p. 214.

(46) Dans *L'Intuition Philosophique,* BERGSON a relevé ce point. Selon lui, l'intuition philosophique fonctionne surtout négativement. « Elle défend. Devant des idées couramment acceptées, des thèses qui paraissaient évidentes, des affirmations qui avaient passé jusque-là pour scientifiques, elle souffle à l'oreille du philosophe le mot : *Impossible !* » (BERGSON [2], p. 811).

(47) BERGSON [1], p. 161. Cf. aussi : « Un philosophe digne de ce nom n'a jamais dit qu'une seule chose : encore a-t-il plutôt cherché à la dire qu'il ne l'a dite véritablement » (RMM 19, p. 813). Voir Jeanne HERSCH [1] sur l'attitude de BERGSON à l'égard du langage.

(48) BERGSON [1], p. 213.

Dans sa thèse, *Essai sur la Classification des Sciences,* plusieurs faces de cette théorie ont déjà été élaborées. Elle apparaît sous forme plus détaillée dans l'article *La Démonstration Mathématique, Critique de la Théorie de M. Poincaré* (1908). Cet article correspond en grande partie au chapitre XI, intitulé *Le Raisonnement déductif* du *Traité de Logique* de GOBLOT (1918). Je me bornerai en majeure partie à ce chapitre-là (49).

GOBLOT s'accorde avec POINCARÉ en disant que la déduction mathématique « consiste à passer à une propriété hétérogène (...) ou à une propriété plus générale (..), jamais à une propriété moins générale » (50). Pour cette raison déjà, elle ne peut pas être justifiée uniquement par la théorie du syllogisme. En outre, il s'en rapporte à DESCARTES : « Tout raisonnement consiste à parcourir des 'chaînes de raisons', à avoir successivement, selon DESCARTES, l'intuition claire et distincte de la liaison de chaque chaînon au suivant, à percevoir la dépendance d'une propriété à l'égard d'une autre » (51). Il a même l'opinion que « le domaine de la logique est taillé dans celui de la psychologie » (52) ; logique et psychologie ne peuvent être séparées l'une de l'autre.

Aussi ne fait-il pas grand cas, en général, de la logique formelle. Son défaut fondamental est, selon lui, qu'elle confond la relation de la conséquence avec celle de l'implication (53). « Le problème de la logique déductive est justement de savoir comment une hypothèse peut entraîner une conséquence *qu'elle n'implique pas,* comment on peut déduire une chose d'une *autre* chose, d'où elle résulte, sans y être *contenue* » (54). GOBLOT paraît vouloir dire que l'affirmation : « B résulte de A » signifie beaucoup plus que « B est contenu dans A ». La démonstration que B résulte de A est par contre pour lui la même chose que la construction de B partant de A. « Démontrer, c'est construire. On ne démontre que des jugements hypothétiques ; car seuls ils expriment la

---

(49) GOBLOT [4] et [5] sont des études provisoires. Sa conférence GOBLOT [6] provoqua la critique de PADOA (Voir RMM 19, pp. 523-525 et 657-658).

(50) GOBLOT [2], p. 255. Il en est d'ailleurs de même en dehors des mathématiques, ainsi qu'il s'avère dans le commencement de GOBLOT [4] : « Démontrer, c'est appuyer sur des propriétés admises pour en établir de *nouvelles,* ou complètement hétérogènes, ou plus générales (..) » (RMM 18, p. 478).

(51) GOBLOT [2], p. 255.

(52) l.c., p. 22.

(53) l.c., p. 257.

(54) RMM 19, p. 210. Ce point de vue est infirmé par le théorème de déduction.

nécessité d'une relation. Pour démontrer qu'une hypothèse entraîne une conséquence, *on construit la conséquence avec l'hypothèse* » (55). La dernière étape de la démonstration est formée par la constatation du résultat (56).

Pour arriver à une définition plus exacte du caractère de la construction en démonstrations, GOBLOT note que celle-ci est en principe externe, mais qu'elle est exécutée mentalement. Elle n'est pas arbitraire, mais procède selon certaines règles. Ces règles ne sont pas celles de la logique formelle. Ce sont « les propositions antérieurement admises, soit par évidence immédiate, soit par démonstration, soit à titre de postulats ou de conventions logiques. Elles sont de deux sortes, et se rapportent les unes à la possibilité des opérations, les autres à la nécessité de leur résultat » (57). Le syllogisme y domine seulement l'application des règles de déduction aux cas particuliers. « Le raisonnement doit au syllogisme sa nécessité, à la spontanéité créatrice de l'esprit sa fécondité » (58).

Une partie de cette théorie donne à supposer qu'il est ici surtout question d'une opposition verbale à la logique formelle. Or, il y a des différences essentielles. Puisque, selon GOBLOT, la déduction est féconde, « la spontanéité créatrice de l'esprit » doit y jouer un rôle indispensable. Mais celle-ci ne s'effectue pas en dehors des règles, car le processus de déduction *entier* suit ces règles. Elle sera donc étroitement liée à ce qu'il nomme dans une citation antérieure « l'évidence immédiate ». Les moments intuitifs dans la déduction n'ont apparemment pas un caractère purement psychologique, ils sont également importants au point de vue logique. C'est sur eux aussi que repose la validité du raisonnement. Néanmoins, ils ne sont pas réductibles à des règles dans le sens de la logique formelle (59).

Ce point de vue ressemble beaucoup à celui de POINCARÉ, même si GOBLOT conteste la place privilégiée que POINCARÉ attribue à l'induction complète (60). En outre, il estime que la conception de POINCARÉ au sujet de l'induction complète comprend deux inconséquences, contenues dans les deux caractéristiques suivantes de l'induction complète :

(55) GOBLOT [2], p. 272.

(56) l.c., p. 273.

(57) l.c., p. 274.

(58) l.c., p. 276.

(59) Aussi GOBLOT combat-il l'opinion de LACHELIER et des logisticiens selon laquelle on n'aurait qu'à étendre la syllogistique pour obtenir une théorie de déduction satisfaisante (RMM 18, pp. 478 ss.).

(60) GOBLOT [2], pp. 257-260.

comme une série de « syllogismes en cascade », respectivement comme « le type véritable des jugements synthétiques » (61). En dernier lieu, GOBLOT considère l'appel que POINCARÉ fait à l'« intuition du nombre pur » comme une forme de platonisme non justifié (62), qui est évité par son propre constructivisme.

La théorie de la déduction de GOBLOT doit être vue comme une systématisation de certaines conceptions intuitionnistes telles que celles-ci existaient aussi chez POINCARÉ. Aussi la théorie de GOBLOT ne laisse-t-elle pas de place pour des restrictions. Si POINCARÉ faisait ressortir encore le caractère formel du raisonnement mathématique, pour GOBLOT par contre, aucun raisonnement n'est indépendant de l'objet dont il traite (63).

C'est L. ROUGIER qui a critiqué cette doctrine dans son étude *La Démonstration Géométrique et le Raisonnement Déductif* (1916), qui parut plus tard sous forme de livre portant le titre *La Structure des Théories Déductives* (1921). ROUGIER signale ici la possibilité de développer des théories sans tenir compte de la signification intuitive, concrète, psychologique ou réelle des symboles employés (64). Il soutient son point de vue formaliste à l'aide d'une analyse détaillée, entre autres au sujet des *Grundlagen der Geometrie* de HILBERT.

En dépit des objections fondées de ROUGIER, la théorie de GOBLOT a été en principe soutenue par A. SPAIER, dans son livre *La Pensée concrète. Essai sur le Symbolisme Intellectuel* (1927). Il est vrai que SPAIER propose certaines modifications, mais celles-ci vont précisément à l'encontre des objections de ROUGIER. C'est qu'il trouve que GOBLOT ne donne pas de réponse péremptoire à la question de savoir pourquoi les constructions déductives sont fécondes. Sa propre réponse est la suivante : « La véritable raison d'être de ces opérations réside dans la nature même de notre intelligence, dont tous les contenus sont des représentations, autrement dit, des symboles, et tirent par conséquent leur sens de l'expérience à laquelle ils se rapportent au moins indirectement » (65). Il détourne la théorie de GOBLOT tant soit peu dans une

---

(61) l.c., pp. 270-271.

(62) l.c., p. 271.

(63) « Le raisonnement n'est jamais indépendant des objets sur lesquels on raisonne » (l.c., p. XXII).

(64) RMM 23, p. 832. Conséquence : « La validité d'un raisonnement ne dépend pas de la matière dont on parle mais de la forme de ce qu'on dit » (ROUGIER [2], p. 11).

(65) A. SPAIER [1], p. 389.

direction empiriste et il combat l'opinion de ROUGIER selon laquelle des théories déductives seraient possibles sans faire appel à l'intuition sensorielle (66).

Dans cet ordre d'idées, il convient de ne pas passer sous silence le fait que le même auteur combat dans son ouvrage *La Pensée et la Quantité* (1927) (en partie à l'instar de la *Philosophie der Arithmetik* de HUSSERL) pour des raisons insuffisantes la réduction de l'arithmétique à la logique (67).

L'idée que la faculté la plus frappante de la pensée humaine est le progrès de cette même pensée est le point de départ de l'ouvrage important d'Emile MEYERSON, *Du Cheminement de la Pensée* (1931). MEYERSON se propose de rechercher comment ce progrès s'accomplit dans la pensée spontanée. Il est compréhensible que dans ce cadre la logistique ne lui serve pas à grand'chose, bien qu'il exprime son admiration pour ses fondateurs, à savoir FREGE et RUSSELL : « Tout cela ne constitue du reste en aucune façon, nous avons à peine besoin de l'ajouter, une critique de l'effort formidable et digne d'admiration de FREGE. Cela nous montre seulement (...) que nous ferions fausse route en cherchant chez ces auteurs des révélations sur le cheminement *spontané* de l'intellect » (68).

Dans le livre III, consacré au *Raisonnement Mathématique,* MEYERSON avance l'idée d'une solution intermédiaire entre la conception aprioriste et la conception empiriste des mathématiques. Selon lui par exemple, la philosophie mathématique de POINCARÉ n'est pas en mesure de donner une explication du rapport entre mathématiques et réalité. Il faudra admettre que la pensée mathématique aussi découle de l'expérience (69). En soutenant ce point de vue, il a non seulement recours à la philosophie de Stuart MILL et de BERGSON (le dernier pour ce qui est de sa manière de voir l'origine de la logique), mais entre autres aussi au sociologue LÉVY-BRUHL pour ce qui concerne la préhistoire de la notion du nombre. Les notions mathématiques et

---

(66) A. SPAIER [1], p. 389.

(67) Voir en particulier partie I, chap. 1, et section 33. C'est notamment avec sa remarque qu'une classe de classes équinumériques « est toujours infinie et ne saurait donc caractériser aucun nombre en particulier », qu'il s'appuie sur HUSSERL (SPAIER [2], p. 186).

(68) E. MEYERSON [1], pp. 26-27.

(69) Voir p. ex. : « Ainsi l'on est bien contraint d'admettre l'intervention, dans le raisonnement mathématique, en apparence purement apriorique, d'un élément provenant de l'expérience » (l.c., p. 348).

notamment celle du nombre doivent, selon MEYERSON, être vues comme des abstractions en raison de l'expérience, qui ont été réalisées pour ce qu'on pourrait appeler un objectif aprioriste, savoir « la rationalisation d'un réel » (70). « L'esprit n'opère qu'à l'aide de notions abstraites, notions qu'il a créées lui-même ; mais cette opération même, il ne peut que l'observer dans le réel, l'emprunter au réel. Il reste donc que l'opération logique soit la traduction, dans la pensée, d'une opération, d'un acte réel, ayant pour points de départ, pour substrats, non pas des objets réels, mais des concepts, des idées » (71).

MEYERSON ne se borne toutefois pas strictement à son projet primaire. Plusieurs passages indiquent qu'il a l'intention de critiquer, partant de la pensée spontanée, les théories qui ont une autre tendance que de rechercher cette même pensée spontanée. Il me semble qu'il faut voir dans cette lumière la critique de MEYERSON de la théorie de la déduction de GOBLOT et autres théories similaires. GOBLOT soutient la connexité de la logique et de la psychologie. Or cela ne veut pas dire qu'il veuille seulement donner une analyse des processus intellectuels spontanés. MEYERSON avance l'opinion que GOBLOT aurait admis à tort que la constatation logique à la fin d'une démonstration est indépendante de l'expérience ; le souvenir d'autres expériences, réellement exécutées, y joue un rôle décisif. Or, la question est de savoir en quelle mesure le raisonnement spontané peut être reconstruit dans un sens aprioriste (72).

La divergence dans la critique de la logistique et du logicisme est plus évidente dans le troisième chapitre du livre III. Contre les courants mentionnés, une des objections soulevées est que leurs démonstrations deviennent de plus en plus compliquées et s'écartent toujours plus de la pensée spontanée. En outre, il soutient que la logistique et le logicisme

(70) Le moyen à cette fin est *l'identification* sur laquelle repose aussi la force logique d'un raisonnement : « C'est par cette marche selon l'identité, cette mise en œuvre incessante de la notion d'identité, que le raisonnement exerce une contrainte réelle sur notre esprit, c'est par là qu'il force notre assentiment » (MEYERSON [1], pp. 394-395).

(71) MEYERSON [1], p. 349.

(72) Toutefois, la différence entre GOBLOT et MEYERSON à ce point n'est pas grande, témoins la remarque de GOBLOT : « En substituant aux opérations réelles de l'esprit qui raisonne des opérations logiquement équivalentes, on est conduit à ne plus pénétrer la vraie nature du raisonnement (..). Etrange entreprise que d'étudier le raisonnement par une méthode qui en élimine tout d'abord tout ce qu'il contient d'intelligence et de raison ! » (RMM 18, pp. 482-483).

font des mathématiques une tautologie (73). Or, subséquemment il soutient que la mathématique n'est pas une tautologie en faisant appel au contenu empirique (74).

Albert LAUTMAN proteste lui aussi dans son *Essai sur les Notions de Structure et d'Existence en Mathématiques* (1937) contre le désir de réduire les mathématiques à une tautologie. La cause de ce désir réside dans la méthode déductive. « A vouloir construire toutes les notions mathématiques à partir d'un petit nombre de notions et de propositions logiques primitives, on perd de vue le caractère qualitatif et intégral des théories constituées. (..) la recherche des notions primitives doit céder la place à une étude synthétique de l'ensemble » (75). Aussi, LAUTMAN écrit-il à propos de son propre livre : « Ce livre est né du sentiment que dans le développement des mathématiques, s'affirme une réalité que la philosophie mathématique a pour fonction de reconnaître et de décrire » (76).

La monographie de R. POIRIER, *Le Nombre* (1938), exprime des affinités à la fois avec les idées de GOBLOT et avec celles de MEYERSON. « L'arithmétique est donc, elle aussi, une science de la nature » (78), telle est la conclusion de l'auteur et la même chose semble s'appliquer à la logique formelle. « Comme la logique formelle, l'arithmétique est essentiellement l'organisation d'une expérience symbolique et repose sur deux espèces d'intuitions irréductibles, celles qui correspondent à la construction des expériences (définitions des termes et des jugements), celles qui correspondent à la constatation des résultats » (79). Dans un autre ouvrage, il déclare : « Toute démonstration est de forme expérimentale. Un raisonnement conclut par la même force qu'une expérience » (80). De plus, il estime que « le rôle de l'intuition à l'origine et dans le développement des théories » (81) constitue le thème essentiel de la philosophie mathématique.

---

(73) « Si l'on prétend, en effet, prendre pour point de départ uniquement des concepts nettement délimités et définis et s'avancer par des voies d'une rigueur logique implacable, il est fatal que l'on aboutisse à considérer la pensée comme essentiellement tautologique, ce qui équivaut à postuler son immobilité complète et irrémédiable » (MEYERSON [1], p. 457).

(74) l.c., p. 452.

(75) A. LAUTMAN [1], p. 8.

(76) LAUTMAN [1], p. 7.

(78) R. POIRIER [2], p. 171.

(79) POIRIER [2]), p. 171.

(80) POIRIER [1], p. 129.

(81) POIRIER [2], p, 80.

POIRIER se distingue toutefois par une méthode d'étude beaucoup plus exacte, grâce à laquelle les problèmes techniques et formalistes se font valoir. Son intérêt pour « l'intuition », « le concret » et « le réel » va de front avec la pensée que la mathématique est autant que la logique un jeu de symboles. Car selon lui c'est ce jeu même qui exige « une physique de signes solides » (82). De manière ingénieuse, il démêle différents types de problèmes et « plans de pensée ». Ses solutions aux problèmes traités ne sont toutefois pas toujours satisfaisantes. C'est ainsi qu'il soulève contre la théorie des nombres cardinaux de RUSSELL l'objection que la notion générale « d'ensemble » ne devient claire qu'à mesure que l'on dispose de la possibilité du bon ordre : c'est pourquoi la théorie des ensembles supposerait déjà le schéma de l'ordre linéaire (83).

Charles SERRUS, qui dans son *Essai sur la Signification de la Logique* (1939) et son *Traité de Logique* (1945), a tâché de démontrer la nécessité d'une logique intuitive des relations, a beaucoup moins de considération pour la logique formelle que POIRIER. La logique intuitive des relations est en dehors de la tradition d'ARISTOTE. « La logique des relations procédait d'un autre courant, que nous devons faire remonter à DESCARTES. Ici, plus de compromissions ni de tendresse à l'égard du syllogisme (..). Il fallait oser, comme DESCARTES, la refonte de la logique » (84). Pour SERRUS, la logique formelle est une logique de propositions ; elle se préoccupe surtout du problème de la déduction. La logique des relations par contre, dépend également de « la considération de l'objet » (85). GOBLOT lui aussi, préconisait encore trop la logique aristotélicienne (86).

Jean LAPORTE qui, dans son ouvrage *L'idée de Nécessité* (1941), traite entre autres de « La Nécessité Logico-Mathématique », se reporte entièrement à la théorie de déduction de GOBLOT. Afin de montrer que la déduction mène en effet à de nouveaux résultats, il n'hésite pas à faire appel à la trouvaille $\sqrt{29\,929} = 173$, qui nous apprend quelque chose que nous ne savions pas encore (87).

Finalement, il convient de mentionner ici *La Philosophie des Mathématiques* (1949) d'André DARBON, qui est une édition posthume d'une série de cours sur la logistique de RUSSELL. DARBON souligne lui

---

(82) l.c., p. 14.
(83) l.c., p. 108.
(84) Ch. SERRUS [1], p. 17.
(85) SERRUS [2], p. 15.
(86) SERRUS [2], p. 375.
(87) J. LAPORTE [1], p. 83.

aussi, l'importance d'expériences concrètes pour la logique (88). Eu égard aux axiomes de PEANO, il soulève la question suivante : « Pourquoi les a-t-on groupés ainsi, ceux-là et non pas d'autres ? Pourquoi ce choix ? » (89). La réponse est que sous « la pensée logique » se cache « une pensée confuse ». « Et comme la seconde a une histoire et s'est formée au cours de l'histoire, la première qui ne peut se passer de son concours, n'a pas le droit de renier l'histoire ni de feindre qu'elle recommence sur nouveaux frais ou écrive sur une page blanche » (90).

Selon DARBON, une théorie mathématique est comparable à une œuvre d'art. Les deux sont imprévisibles. « Pour bien retenir cette analogie, nous définirons d'un mot les mathématiques en disant qu'elles sont un art rationnel. En tant qu'elles s'apparentent à l'art, elles dépassent la compétence de la logique » (91).

* * *

Je me rends compte que l'aperçu que j'ai essayé d'ébaucher ci-dessus n'est pas complet, ne fût-ce que parce qu'il ne rend pas justice à tous les philosophes qui y sont nommés. Mon objectif a été d'étudier leur œuvre sous un certain angle afin de révéler les thèmes principaux des discussions autour du problème de logique et d'intuition dans la philosophie française.

J'ose néanmoins espérer que j'ai réussi à montrer à quel point les philosophes français ont tendance à éviter un traitement approprié des questions purement formelles. Ils rendent l'exact relatif. En parlant de la logique, ils parlent souvent à la fois de ce qui précède la logique, ou de ce qui la suit, ou bien de ce qui est au-dessous, au-delà ou au-dessus de la logique. Ainsi que le fait André DARBON, ils reprochent à la logistique de ne pas vouer suffisamment d'attention au « rationnel au delà du logique », au « réel au delà du conventionnel » (92). La

---

(88) A. DARBON [1], pp. 47-49.

(89) l.c., p. 62.

(90) l.c., p. 63.

(91) l.c., p. 176. DARBON remarque, en outre, que la mathématique n'est pas une science formelle, mais qu'elle se rapporte à un objet, « représenté d'abord d'une façon plus intuitive, et comme un tout confus (..). Ce qui appartient en propre à la pensée mathématique, c'est la construction des concepts mathématiques, l'invention des thèmes. La logique n'est pas invention, il n'y a pas de logique de l'invention » (l.c., p. 174).

(92) Du moins selon la caractéristique de R. POIRIER dans son avant-propos à DARBON [1], p. VI.

logistique n'est évidemment pas une panacée à tous les maux philosophiques. Cependant, l'on est surpris de voir comment en France c'est précisément le problème de la déduction qui a été abordé à maintes reprises (c'est là évidemment un des thèmes centraux de la philosophie française), alors qu'en même temps le problème de la logique formelle est minorisé (93). Intuition et invention sont opposées à la logique.

Même au 20e siècle encore, la logistique a peu d'étudiants ou même de disciples. Ce sont sans doute encore PASCAL et DESCARTES qui en sont en partie responsables. Grâce à leur travail important dans le domaine des sciences exactes, ils avaient acquis une grande autorité. Leur influence a d'ailleurs toujours été maintenue par les philosophes modernes. Un autre facteur est peut-être l'intervention d'un nombre de circonstances fortuites : la mort prématurée de H. DUFUMIER, J. NICOD et surtout de J. HERBRAND.

Toutefois, nous remarquons que dans leur aperçu *La Logique en France au Vingtième Siècle* (94), Marcel BOLL et Jacques REINHART jugent l'influence de POINCARÉ la cause principale de la stagnation dans l'étude de la logistique (95). Il est en effet évident que POINCARÉ influença les conceptions des mathématiciens à l'égard de leur métier et qu'il a ainsi entravé parmi eux la naissance de l'intérêt pour la logistique. Le fait est qu'il n'y a pas eu un autre homme muni d'une autorité comparable qui ait présenté la logistique sous un jour plus favorable.

Ce n'est que vers l'an 1940 qu'un changement s'opéra. Il convient de signaler sous ce rapport en premier lieu les études de P. FÉVRIER et de J. L. DESTOUCHES (1936 et après) (95a). L'ouvrage de Jean CAVAILLÈS, *Méthode Axiomatique et Formalisme* (1938), mérite aussi d'être mentionné, même si ses observations critiques ne sont pas toutes satisfaisantes.

Ensuite, un revirement se produisit parmi les mathématiciens eux-mêmes. En 1939, J. DIEUDONNÉ fait paraître un article dans la Revue Scientifique (*Les Méthodes Axiomatiques et les Fondements des Mathématiques*) dans lequel il donne un aperçu très approbatif des efforts de l'axiomatique moderne. Selon lui, l'intuition ne joue un rôle que dans la découverte et non pas dans la construction logique. Seule la logique stricte règne ici (96). « Les mathématiques deviennent un *jeu,* dont les

---

(93) Cf. aussi D. ROUSTAN [1].
(94) Dans M. FARBER [1]. Cf. aussi P. DESTOUCHES [1].
(95) FARBER [1], p. 201.
(95a) Voir par ex. P. FÉVRIER [1].
(96) J. DIEUDONNÉ [1], p. 225.

pièces sont des signes graphiques se distinguant les uns des autres par leur forme » (97). Henri CARTAN consacre lui aussi, dans le même périodique, une étude (*Sur le Fondement logique des Mathématiques,* 1943) de tendance positive face à l'objectif qu'il caractérise ainsi : « Edifier entièrement la mathématique sur la logique seule » (98). Ce sont des pensées comme celles-ci qui ont conduit à l'œuvre de N. BOURBAKI, *Eléments de Mathématiques* (depuis 1938). Maintenant, il y a beaucoup de logiciens en France.

Il va de soi que la tendance intuitionniste de la philosophie et de la théorie des sciences en France n'a pas été aussitôt éliminée par ce nouveau développement. C'est ainsi que G. BOULIGAND, quoiqu'il soit étroitement mêlé à la modernisation des mathématiques, fait ressortir les droits et les mérites de l'intuition (99). Il cherche même à se relier à A. COURNOT : « Pour reprendre ici, en les adaptant à nos conceptions, certains mots expressifs employés au siècle dernier par COURNOT, il n'y a pas *d'ordre logique* parfaitement isolable, ce qui se manifeste vraiment, c'est *l'ordre rationnel* inspiré par le souci de la vraie raison des choses. Et c'est par des intuitions que cet ordre nous est progressivement révélé, alors même qu'on voudrait se cantonner très étroitement dans la seule logique » (100). Et même BOURBAKI a soutenu que la logique représente la face la moins intéressante de l'axiomatique, « *ce n'en est qu'une face,* et la moins intéressante » (101). Aussi n'est-il pas étonnant que parmi les philosophes, les opinions traditionnelles continuent à exister. Encore en 1947, A. KOYRÉ écrivit : « Que la logique symbolique forme une discipline hybride, aussi ennuyeuse que stérile. Car la prétention d'avoir porté la pensée logique à un degré de précision et d'exactitude jamais atteint dans le passé paraît assez peu justifiée. Personnellement, nous avons plutôt l'impression du contraire ; nous avons l'impression que l'emploi d'algorithmes encombrants et mal commodes ne fait que l'alourdir et n'est pour elle qu'une source de confusion » (102).

En dépit des progrès qui ont eu lieu, on a somme toute, l'impression qu'en France la logique formelle n'a toujours pas la place qui lui revient si l'on tient compte des résultats qu'elle permet d'atteindre.

---

(97) DIEUDONNÉ [1], p. 225.
(98) H. CARTAN [1], p. 11.
(99) P. ex. dans G. BOULIGAND [1] et [2].
(100) F. LE LIONNAIS [1], p. 73.
(101) F. LE LIONNAIS [1], p. 37.
(102) A. KOYRÉ [1], p. 7. Le même auteur soutenait dans KOYRÉ [2] que la définition logistique du nombre cardinal est paradoxale. RUSSELL lui répondit que c'était précisément la théorie des types qui obviait à ses objections (RUSSELL [18]).

BIBLIOGRAPHIE

Dans cette bibliographie ont été insérés en principe seuls les titres mentionnés ou cités dans le texte. Pour être complet, quelques titres qui se rapportent directement au sujet ont toutefois été ajoutés.

F. ALQUIÉ e.a. [1]. — *Descartes.* Cahiers de Royaumont, Phil. n° II, Paris, 1957.

P. APPELL [1]. — *Henri Poincaré.* Paris, 1925.

R. BAIRE [1]. — Voir HADAMARD.

E. BALLUE [1]. — *Le Nombre entier considéré comme fondement de l'Analyse mathématique.* Revue de Métaphysique et de Morale 2 (1894), pp. 317-328.

B. BAUCH [1]. — *Erfahrung und Geometrie in ihrem erkenntnistheoretischen Verhältnis.* Kantstudien 12 (1907), pp. 213-235.

L.J. BECK [1]. — *The Method of Descartes. A Study of the Regulae.* Oxford, 1952.

E.T. BELL [1]. — *The Development of Mathematics.* 2e éd., New York-London, 1945.

A. BELLIVIER [1]. — *Henri Poincaré ou la Vocation Souveraine.* Paris, 1956.

H. BERGSON [1]. — *L'Evolution Créatrice.* 80e éd., Paris, 1957.

H. BERGSON [2]. — *L'Intuition Philosophique,* Revue de Métaphysique et de Morale 19 (1911), pp. 809-827.

P. BERNAYS [1]. — Voir HILBERT.

F. BERNSTEIN [1]. — *Uber die Reihe der transfiniten Ordnungszahlen.* - Math. Ann. 60 (1905), pp. 187-193.

R. BERTHELOT [1]. — *Un Romantisme utilitaire,* vol. I : *Le Pragmatisme chez Nietzsche et chez Poincaré.* Paris, 1911.

E.W. BETH [1]. — Rede en Aanschouwing in de Wiskunde. Thèse. Groningen, 1935.

E.W BETH [2]. — *Inleiding tot de Wijsbegeerte der Wiskunde.* Antwerpen, 1940.

E.W. BETH [3]. — *Wijsbegeerte der Wiskunde.* Antwerpen, 1948.

E.W. BETH [4]. — *Geschiedenis der Logica.* 2e éd., Den Haag, 1948.

E.W. BETH [5]. — *Wijsgerige Ruimteleer.* Antwerpen, 1950.

E.W. BETH [6]. — *Les Fondements Logiques des Mathématiques.* 2e éd., Paris-Louvain, 1955.

E.W. BETH [7]. — *The Foundations of Mathematics.* Amsterdam, 1959.

E.W. BETH [8]. — *Hundred Years of Symbolic Logic. A Retrospect on the occasion of the Boole-De Morgan Centenary.* Dialectica 1 (1947), pp. 331-344.

E.W. BETH [9]. — *Kants Einteilung der Urteile in analytische und synthetische.* Alg. Ned. Tijdschr. v. Wijsb. en Psych. 46 (1953-54), pp. 253-264.

E.W. BETH [10]. — *Poincaré et la Philosophie.* Dans : *Livre du Centenaire,* pp. 232-238.

E.W. BETH [11]. — *In Memoriam Gerrit Mannoury.* Euclides 32 (1956-57), pp. 298-300.

E.W. BETH [12]. — *On Mannoury's Method.* Synthese 10a (s.d.), pp. 432-439.

E.W. BETH [13]. — *Le Savoir Déductif dans la Pensée Cartésienne,* dans:

F. ALQUIÉ e.a. [1], pp. 141-153, 164-165.

E.W. BETH [14]. — Voir M.G. BEUMER [1].

E.W. BETH et J. PIAGET [1]. — *Epistémologie Mathématique et Psychologie.* Paris, 1961.

M.G. BEUMER [1]. — *Een historische bijzonderheid uit het leven van Gottlob Frege.* Simon Stevin 25 (1946-1947), pp. 146-149. Avec un Appendice de E.W. BETH, l.c., pp. 150-151.

Bibliothèque du Congrès International de Philosophie, t. 3. Paris, 1901.

I.M. BOCHENSKI [1]. — *Formale Logik.* Freiburg-München, 1956.

M. BÔCHER [1]. — *The fundamental Conceptions and Methods of Mathematics.* Bull. of the Amer. Math. Soc. 11 (1905), pp. 115-135.

P. BOCKSTAELE [1]. — *Het Intuitionisme bij de Franse Wiskundigen.* Brussel, 1949.

M. BOLL et J. REINHART [1]. — *La Logique en France au Vingtième Siècle,* dans : M. FARBER [1], pp. 193-215.

B. BOLZANO [1]. — *Die Paradoxien des Unendlichen.* 2e éd., Berlin, 1899.

G. BOOLE [1]. — *The Mathematical Analysis of Logic.* London-Cambridge, 1847.

E. BOREL [1]. — *Leçons sur la Théorie des Fonctions.* 3e éd., Paris, 1928.

E. BOREL [2]. — *Quelques Remarques sur les Principes de la Théorie des Ensembles.* Math. Ann. 60 (1905), pp. 194-195.

E. BOREL [3]. — *La Logique et l'Intuition en Mathématiques.* Revue de Métaphysique et de Morale 15 (1907), pp. 273-283.

E. BOREL [4]. — *L'Evolution de l'Intelligence géométrique.* Revue de Métaphysique et de Morale 15 (1907), pp. 747-754.

E. BOREL [5]. — Compte rendu de l'article de POINCARÉ : *La Logique de l'Infini* (Revue de Métaphysique et de Morale 17). Revue du Mois 8 (1909), p. 504.

E. BOREL [6]. — Voir HADAMARD.

O. BOTTEMA [1]. — *Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie.* Math.-phys. Semesterberichte zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Univ. 9 (1962), pp. 164-168.

G. BOULIGAND [1]. — *Les Aspects Intuitifs de la Mathématique.* Paris, s.d. (1944).

G. BOULIGAND [2]. — *Cheminements intuitifs vers quelques organes essentiels de la Mathématique.* Dans : F. LE LIONNAIS [1], pp. 66-74.

N. BOURBAKI [1]. — *Eléments des Mathématiques.* Paris, depuis 1938.

N. BOURBAKI [2]. — *L'Architecture des Mathématiques.* Dans : F. LE LIONNAIS [1], pp. 35-47.

P. BOUTROUX [1]. — *Sur la Notion de Correspondance dans l'Analyse Mathématique.* Revue de Métaphysique et de Morale 12 (1904), pp. 909-920.

P. BOUTROUX [2]. — *Correspondance Mathématique et Relation Logique.* Revue de Métaphysique et de Morale 13 (1905), pp. 620-637.

P. BOUTROUX [3]. — *Henri Poincaré : L'Œuvre Philosophique.* Revue du Mois 15 (1913), pp. 155-183. Egalement dans : P. BOUTROUX e.a., *Henri Poincaré : L'Œuvre Scientifique, L'Œuvre Philosophique.* Paris, 1914.

E. BRÉHIER [1]. — *Histoire de la Philosophie,* tome II, vol. 3, 4. Paris, 1948.

L.E.J. BROUWER [1]. — *Over de Grondslagen der Wiskunde.* Thèse. Amsterdam-Leipzig, 1907.

L.E.J. BROUWER [2]. — *De Onbetrouwbaarheid der Logische Principes.* Tijdschr. v. Wijsb. 2 (1908), pp. 152-158.

L.E.J. BROUWER [3]. — *Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus.* Proc. Acad. van Wet. 31 (1927), pp. 374-379.

L. BRUNSCHVICG [1]. — *Les Etapes de la Philosophie Mathématique.* Paris, 1912.

L. BRUNSCHVICG [2]. — *Le Progrès de la Conscience dans la Philosophie occidentale.* Paris, 1927.

L. BRUNSCHVICG [3]. — *Ecrits Philosophiques,* vol. 2 (*L'Orientation du Rationalisme*). Paris, 1954.

L. BRUNSCHVICG [4]. — *La Notion moderne d'intuition et la philosophie des mathématiques.* Revue de Métaphysique et de Morale 19 (1911), pp. 145-176.

L. BRUNSCHVICG [5]. — *L'Œuvre de Henri Poincaré : Le Philosophe.* Revue de Métaphysique et de Morale 21 (1913), pp. 585-616.

C. BURALI-FORTI [1]. — *Logica Matematica.* 2e éd., Milano, 1919.

C. BURALI-FORTI [2]. — *Le Classi Finite.* Atti 32 (1896), pp. 34-52.

C. BURALI-FORTI [3]. — *Una Questione sui numeri transfiniti.* Rend. Circolo matem. di Palermo 11 (1897), pp. 154-164.

A. CALINON [1]. — *Les espaces géométriques.* Revue philosophique de Fr. et de l'Etranger 27 (1899), pp. 588-595.

R. CARNAP [1]. — *Die logizistische Grundlegung der Mathematik.* Erkenntnis 2 (1931), pp. 91-105.

H. CARTAN [1]. — *Sur le Fondement logique des Mathématiques.* Revue Scient. 81 (1943), pp. 3-11.

U. CASSINA [1]. — *L'Idéographie de Peano du point de vue de la théorie du langage.* Riv. di Mat. della Univ. Parma 4 (1953), pp. 195-205.

E. CASSIRER [1]. — *Philosophie der symbolischen Formen,* III. Bd. 2. Aufl., Oxford, 1954.

E. CASSIRER [2]. — *Kant und die moderne Mathematik.* Kantstudien 12 (1907), pp. 1-49.

P.G. CATH [1]. — *Jules Henri Poincaré.* Euclides 30 (1954-55), pp. 265-275.

J. CAVAILLÈS [1]. — *Méthode Axiomatique et Formalisme.* Thèse. 3 Vol. Paris, 1938.

A. CECCHINI [1]. — *Il Concetto di convenzione matematica in Henry* (sic) *Poincaré.* Torino, 1951.

H. COHEN [1]. — *Kants Theorie der Erfahrung.* 2e éd., Berlin, 1885.

A. COMBEBIAC [1]. — *L'espace est-il euclidien ?* L'enseign. Math. 5 (1903), pp. 157-177 et 262-278.

Compte rendu du 2e Congrès Int. des Mathématiciens, Paris, 1902.

A. COURNOT [1]. — *Essai sur les Fondements de nos Connaissances et sur les Caractères de la Critique Philosophique.* 3e éd., Paris, 1922.

L. COUTURAT [1]. — *De l'Infini mathématique.* Thèse. Paris, 1896.

L. COUTURAT [2]. — *La Logique de Leibniz d'après des documents inédits.* Paris, 1901.

L. COUTURAT [3]. — *Opuscules et Fragments inédits de Leibniz.* Paris, 1903.

L. COUTURAT [4]. — *Les Principes des Mathématiques.* Paris, 1905. D'abord dans la Revue de Métaphysique et de Morale 12 (1904), pp. 19-50, 211-240, 664-698, 810-844 ; Revue de Métaphysique et de Morale 13 (1905), pp. 224-256 ; Revue de Métaphysique et de Morale 12, pp. 321-383.

L. COUTURAT [5]. — *L'Algèbre de la Logique.* Paris, 1905.

L. COUTURAT [6]. — *L'Année Philosophique de F. Pillon,* 2e année, 1891 (compte rendu). Revue de Métaphysique et de Morale 1 (1893), pp. 63-85.

L. COUTURAT [7]. — *Note sur la géométrie non-euclidienne et la relativité de l'espace.* Revue de Métaphysique et de Morale 1 (1893), pp. 302-309.

L. COUTURAT [8]. — *Etudes sur l'espace et le temps de MM. Lechalas, Poincaré, Delboef, Bergson, L. Weber et Evellin.* Revue de Métaphysique et de Morale 4 (1896), pp. 646-669.

L. COUTURAT [9]. — *La Logique mathématique de M. Peano.* Revue de Métaphysique et de Morale 7 (1899), pp. 616-646.

L. COUTURAT [10]. — *Sur une définition logique du nombre.* Revue de Métaphysique et de Morale 8 (1900), pp. 23-36.

L. COUTURAT [11]. — *L'Algèbre universelle de M. Whitehead.* Revue de Métaphysique et de Morale 8 (1900), pp. 323-362.

L. COUTURAT [12]. — *Kant et la Mathématique moderne.* Bull. de la Soc. française de Phil. 4 (1904), pp. 125-234.

L. COUTURAT [13]. — *La Philosophie des Mathématiques de Kant.* Revue de Métaphysique et de Morale 12 1904), pp. 321-383. Quelque peu modifié, également dans : *Les Principes des Mathématiques* (Appendice).

L. COUTURAT [14]. — *Deuxième Congrès de Phil., Genève. Comptes Rendus Critiques, section 2 (Logique et Philosophie des Sciences).* Revue de Métaphysique et de Morale 12 (1904), pp. 1037-1077.

L. COUTURAT [15]. — *Sur l'utilité de la logique algorithmique.* Dans : *Rapports et Comptes Rendus du 2e C.I. Ph.*, pp. 706-711.

L. COUTURAT [16]. — *Les Définitions Mathématiques.* L'Enseignement Math. 7 (1905), pp. 27-40.

L. COUTURAT [17]. — *Définitions et Démonstrations mathématiques.* - L'Enseignement Math. 7 (1905), pp. 104-121.

L. COUTURAT [18]. — *Pour la Logistique.* Revue de Métaphysique et de Morale 14 (1906), pp. 208-250.

L. COUTURAT [19]. — *La Logique et la Philosophie contemporaine.* Revue de Métaphysique et de Morale 14 (1906), pp. 318-341. A paru séparément aussi : Paris, 1906.

L. COUTURAT [20]. — *Logistique et Intuition.* Revue de Métaphysique et de Morale 21 (1913), pp. 260-268.

L. COUTURAT [21]. — *Die Prinzipien der Logik,* dans : *Encyclopädie der philosophischen Wissenschaften,* 1. Band, *Logik,* pp. 137-201. Tübingen, 1912.

B. CROCE [1]. — *Lineamenti di una logica come scienza del concetto puro.* Napoli, 1905.

B. CROCE [2]. — *Logica come scienza del concetto puro.* 7e éd., Bari, 1947.

T. DANTZIG [1]. — *Henri Poincaré. Critic of Crisis.* New York, 1954.

A. DARBON [1]. — *La Philosophie des Mathématiques. Etude sur la Logistique de Russell.* Paris, 1949.

G. DARBOUX [1]. — *Eloge Historique d'Henri Poincaré.* Paris, 1913. Egalement dans POINCARÉ, *Œuvres,* tome II, pp. VII-LXXI.

R. DAVAL et G.-T. GUILBAUD [1]. — *Le Raisonnement Mathématique.* Paris, 1945.

R. DEDEKIND [1]. — *Was sind und was sollen die Zahlen ?* Braunschweig, 1887.

J.R.L. DELBOEF [1]. — *Logique algorithmique.* Liège-Bruxelles, 1877.

V. DELBOS [1]. — *La Philosophie Française.* Paris, 1919.

A. DE MORGAN [1]. — *Formal Logic : or the Calculus of Inference, necessary and probable.* London, 1847.

R. DESCARTES [1]. — *Regulae ad directionem ingenii,* dans : *Œuvres de D.*, publiées par Charles Adam et Paul Tannery, vol. X (1908).

R. DESCARTES [2]. — *Règles pour la direction de l'Esprit,* trad. par J. Sirven, 2e éd., Paris, 1951.

R. DESCARTES [3]. — *Discours de la Méthode.* Texte et Commentaire par E. Gilson. Paris, 1925.

P. DESTOUCHES [1]. — *La Logique symbolique en France et les récentes Journées de Logique.* Revue Phil. de la France et de l'Etranger 136 (1946), pp. 221-225.

J. DIEUDONNÉ [1]. — *Les Méthodes axiomatiques et les Fondements des Mathématiques.* Revue Scient. 77 (1939), pp. 224-232.

H. DUFUMIER [1]. — *Les théories logico-métaphysiques de MM. B. Russell et G.E. Moore.* Revue de Métaphysique et de Morale 17 (1909), pp. 620-653.

H. DUFUMIER [2]. — *La Philosophie des Mathématiques de MM .Russell et Whitehead.* Revue de Métaphysique et de Morale, 20 (1912), pp. 538-566.

J.M.C. DUHAMEL [1]. — *Des Méthodes dans les Sciences de Raisonnement.* 2 vol. Paris, 1865-66.

E. DUPRÉEL [1]. — *Convention et Raison.* Revue de Métaphysique et de Morale 33 (1926), pp. 283-310.

F. ENGEL [1]. — Voir LIE.

F. ENRIQUES [1]. — *Problemi della Scienza.* Bologna, 1906. Traduction française de la première partie, intitulée : *Les Problèmes de la Science et la Logique* (Paris, 1909) ; de la seconde partie, intitulée : *Les Concepts fondamentaux de la Science* (Paris, 1913).

F. Enriques [2]. — *La Théorie de la Connaissance Scientifique de Kant à nos jours.* Paris, 1938.

E. Faguet [1]. — *La Philosophie de M. Henri Poincaré.* La Revue Latine 7 (1908), pp. 1-14.

G. Fano [1]. — *Sui Postulati fondamentali della geometria proiettiva etc.* Giornale di Mat. 30 (1892), pp. 106-132.

M. Farber (éd.) [1]. — *L'Activité Philosophique Contemporaine en France et aux Etats-Unis,* tome second : *La philosophie française.* Paris, 1950.

H. Feigl [1]. — *Some Major Issues and Developments in the Philosophy of Science of logical Empirism,* dans : H. Feigl et M. Scriven (ed.), *Minnesota Studies in the Philosophy of Science,* vol. I, Minneapolis, 1956, pp. 3-37.

P. Février [1]. — *Sur une forme générale de la définition d'une logique.* Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Ac. des Sciences (Paris), vol. 204 (1937), pp. 958-959.

R. Feys [1]. — *Peano et Burali-Forti précurseurs de la logique combinatoire.* Actes du 11e Congr. Int. de Phil., vol. V, A'dam-Louvain, 1953, pp. 70-72.

G. Frege [1]. — *Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* Halle, 1879.

G. Frege [2]. — *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch - mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* Breslau, 1884.

G. Frege [3]. — *Grundgesetze der Arithmetik ; begriffsschriftlich abgeleitet.* 2 vol. Jena, 1893, 1903.

G. Frege [4]. — *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege.* Edited by P. Geach et M. Black. Oxford, 1952.

G. Frege [5]. — *Le nombre entier* Revue de Métaphysique et de Morale 3 (1895), pp. 73-78.

G. Frege [6]. — *Uber die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene.* Ber. der math-phys. Cl. der Kgl. Sächs. Ges. der Wiss. 48 (1897), pp. 361-378.

G. Frege [7]. — *Lettera del sig. G. Frege all'Editore,* RdM 6 (1896-1899), pp. 53-60.

G. Frege [8]. — *Ein unbekannter Brief von G.F. über Hilberts erste Vorlesung über die Grundlagen der Geometrie.* Hrsg. von Max Steck. Heidelberg, 1940.

G. Frege [9]. — *Uber die Grundlagen der Geometrie.* Jahrbücher der Dt. Mathemat. Ver. 12 (1903), pp. 319-324, 368-375 (Troisième partie dans: l.c. 15, 1906).

H. Freudenthal [1]. — *Lincos. Design of a Language for Cosmic Intercourse.* Amsterdam, 1960 (en particulier pp. 33-40).

H. Freudenthal [2]. — *Zur Geschichte der Vollständigen Induktion.* Arch. Intern. d'Hist. des Sciences 32 (1953), pp. 17-37.

H. Freudenthal [3]. — *De Ruimteopvatting in de exacte wetenschappen van Kant tot heden.* Euclides 31 (1955-56), pp. 165-182.

H. Freudenthal [4]. — *Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems.* Dans : J. Naas et K. Schröder [1], pp. 92-97.

H. Freudenthal [5]. — *Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems.* Math. Zeitschr. 63 (1955-56), pp. 374-405.

H. Freudenthal [6]. — *Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie.* Zugleich eine Besprechung der 8. Auflage von Hilbert's *Gr. der Geom.* Nieuw Archief v. Wisk., 3e série, 5 (1957), pp. 105-142.

H. Freudenthal [7]. — *Die Grundlagen der Geometrie um die Wende des 19. Jahrhunderts.* Math.-Phys. Semesterber. zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Univ. 7 (1960), pp. 2-25.

H. Freudenthal [8]. — *Zu Herrn Bottema's Kritik.* Ibid. 10 (1963), pp. 114-117.

C.F. Gauss [1]. — *Werke,* Göttingen, etc., 1863-1929.

M. Gergonne [1]. — *Essai sur la théorie des définitions.* Annales de Mathématiques 9 (1818-19), pp. 1-36.

E. Goblot [1]. — *Essai sur la Classification des Sciences*. Thèse. Paris, 1898.

E. Goblot [2]. — *Traité de Logique*. 9e éd., Paris, 1952.

E. Goblot [3]. — *La Démonstration Mathématique. Critique de la Théorie de M. Poincaré*. L'Année Psychologique 14 (1908), pp. 264-283.

E. Goblot [4]. — *Déduction et Syllogisme*. Revue de Métaphysique et de Morale 18 (1910), pp. 478-490.

E. Goblot [5]. — *Les jugements hypothétiques*. Revue de Métaphysique et de Morale 19 (1911), pp. 199-210.

E. Goblot [6]. — *Théorie nouvelle du Raisonnement déductif*. Revue de Métaphysique et de Morale 19 (1911), pp. 523-525.

F. Gonseth [1]. — *Les Fondements des Mathématiques. De la géométrie d'Euclide à la relativité générale et à l'intuitionisme*. Paris, 1926.

H. Grassmann [1]. — *Die Ausdehnungslehre*. Berlin, 1844, 1862.

H. Grassmann [2] .— *Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten*, Tl. I: *Lehrbuch der Arithmetik*. Stettin, 1860.

A. Grünbaum [1]. — *Conventionalism in Geometry*. Dans: L. Henkin, P. Suppes, A. Tarski (éd.), *The Axiomatic Method* (A'dam, 1959), pp. 204-222.

A. Grünbaum [2]. — *Geometry, Chronometry, and Empiricism*. Dans. H. Feigl et G. Maxwell (éd.), *Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, vol. III, Minneapolis, 1962, pp. 405-526.

G.-T. Guilbaud [1]. — Voir Daval.

J. Hadamard [1]. — *Note sur l'induction et la généralisation en mathématiques*. Dans: *Bibliothèque*, pp. 441-444.

J. Hadamard [2]. — *La logistique et la notion du nombre entier*. RgSpa 17 (1906), pp. 906-909.

J. Hadamard, R. Baire, H. Lebesgue, E. Borel [1]. — *Cinq lettres sur la théorie des ensembles*. Bull. de la Soc. Math. de France 33 (1905), pp. 261-273. Egalement dans E. Borel [1].

H. von Helmholtz [1]. — *Schriften zur Erkenntnistheorie*, herausg. v. P. Hertz und M. Schlick. Berlin, 1921.

H. von Helmholtz [2]. — *Wissenschaftliche Abhandlungen*, 3 vol. Leipzig, 1882-95.

Jeanne Hersch [1]. — *L'Obstacle du Langage*. Dans: A. Béguin et P. Thévénaz (éd.), *Henri Bergson* (Neuchâtel, 1943).

A. Heyting [1]. — *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus, Beweistheorie*. Berlin, 1934. Traduction française, intitulée: *Les Fondements des Mathématiques, Intuitionnisme, Théorie de la Démonstration*. Paris, 1955 (avec quelques additions).

A. Heyting [2]. — *Intuitionism. An Introduction*. Amsterdam, 1956.

A. Heyting [3]. — *Die Intuitionistische Grundlegung der Mathematik*. Erkenntnis 2 (1931), pp. 106-115.

D. Hilbert [1]. — *Grundlagen der Geometrie*. 6e éd., Berlin - Leipzig, 1923.

D. Hilbert [2]. — *Uber den Zahlbegriff*. Jahresbericht der Dt. Math. Ver. 8 (1900). Egalement dans : Hilbert [1], Appendice VI, pp. 237-242.

D. Hilbert [3]. — *Mathematische Probleme*. Dans: Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-physikalische Klasse 1900, pp. 253-297. En traduction française dans *Compte Rendu du 2 CIM*.

D. Hilbert [4]. — *Uber die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*. Verh. III. Intern. Math. Kongress (Leipzig 1905). Egalement dans: Hilbert [1], Appendice VII, pp. 243-258. Traduction française intitulée · *Sur les fondements de la logique et de l'arithmétique*, par P. Boutroux, dans L'Enseign. Math. 7 (1905), pp. 89-103.

D. Hilbert [5]. — *Axiomatisches Denken*. Math. Annalem 78 (1918), pp. 405-415. Egalement dans : *Ges. Abhandlungen*. III, Berlin, 1935.

D. HILBERT [6]. — *Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung.* Abhandlungen aus dem Math. Sem. der Hamburgischen Univ. I (1922), pp. 157-177. Egalement dans : *Ges. Abhandlungen* III, Berlin, 1935.

D. HILBERT et P. BERNAYS [1]. — *Grundlagen der Mathematik.* 2 vol. Berlin, 1934-1939.

E. HUSSERL [1]. — *Philosophie der Arithmetik.* Bd. I. Halle, 1891.

P. JANET [1]. — *De la Valeur du Syllogisme.* Revue Philosophique de la France et de l'Etranger 12 (1881), pp. 105-118.

J. JÖRGENSEN [1]. — *A Treatise of Formal Logic. Its evolution and main branches, with its relations to Mathematics and Philosophy.* 3 vol. Kopenhagen-London, 1931.

J. JÖRGENSEN [2]. — *Einige Hauptpunkte der Entwicklung der formalen Logik seit Boole.* Erkenntnis 5 (1935), pp. 131-142.

P.E.B. JOURDAIN [1]. — *The Development of the Theories of mathematical Logic and the principles of Mathematics.* The Quart. Journal of pure and app. Math. 41 (1910), pp. 324-352 ; 43 (1912), pp. 219-314 ; 44 (1913), pp. 113-128. En particulier 1912.

P.E.B. JOURDAIN [2]. — *On a Proof that every aggregate can be well-ordered.* Math. Ann. 60 (1905), pp. 465-470.

I. KANT [1]. — *Kritik der reinen Vernunft.* Dans : *Werke,* hrs.geg. von E. CASSIRER u.a. Berlin, 1912-22, Bd. III. « A » se réfère à la première édition (1781), « B » à la deuxième édition (1787).

I. KANT [2]. — *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können.* Dans : *Werke* (voir ci-dessus), Bd. IV.

N. KEMP Smith [1]. — *New Studies in the Philosophy of Descartes. Descartes as Pioneer.* London, 1952.

S.C. KLEENE [1]. — *Introduction to Metamathematics.* A'dam-Groningen, 1959.

F. KLEIN [1]. — *Gesammelte mathematische Abhandlungen.* 3 vol. Berlin, 1921-1923.

W. et M. KNEALE [1]. — *The Development of Logic.* Oxford, 1962.

J. KÖNIG [1]. — *Uber die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuum-problem.* Math. Ann. 61 (1905), pp. 156-160 ; 63 (1907), pp. 217-221.

J. KÖNIG [2]. — *Zum Koninuum-Problem.* Math. Ann. 60 (1905), pp. 177-180. *Berichtigung,* p. 462.

A. KOYRÉ [1]. — *Epiménide le Menteur.* Paris, 1947.

A. KOYRÉ [2]. — *Sur les Nombres de M. Russell.* Revue de Métaphysique et de Morale 20 (1912), pp. 722-724.

V. KRAFT [1]. — *Mathematik, Logik und Erfahrung.* Wien, 1947.

F. KUNTZE [1]. — *Zum Gedächtnis an Henri Poincaré.* Kantstudien 17 (1912), pp. 337-348.

G. LACHELAS [1]. — *Note sur la nature du raisonnement mathématique.* Revue de Métaphysique et de Morale 2 (1894), pp. 709-718.

J. LACHELIER [1]. — *Œuvres.* 2 vol. Paris, 1933.

J. LACHELIER [2]. — *Etudes sur le Syllogisme.* Paris, 1907.

A. LALANDE [1]. — *Vocabulaire Technique et Critique de la Philosophie.* 7e éd., Paris, 1956.

A. LALANDE [2]. — *L'Œuvre de Louis Couturat.* Revue de Métaphysique et de Morale 22 (1914-15), pp. 644-688.

J. LAPORTE [1]. — *L'Idée de Nécessité.* Paris, 1941.

H. LAURENT [1]. — *Les principes fondamentaux de la théorie des nombres et de la géométrie.* Paris, 1902.

A. LAUTMAN [1]. — *Essai sur les Notions de Structure et d'Existence en mathématiques.* Thèse. Paris, 1937.

H. LEBESGUE [1]. — *Leçons sur l'Intégration et la Recherche des fonctions primitives.* 2e éd., Paris, 1928.

H. LEBESGUE [2]. — Voir HADAMARD.

E. LEBON [1]. — *Henri Poincaré. Biographie, Bibliographie analytique des écrits.* 2e éd., Paris, 1912.

F. LE LIONNAIS (éd.) [1]. — *Les grands courants de la pensée mathématique.* Paris, 1948.

L. LIARD [1]. — *Les Logiciens anglais contemporains.* Paris, 1878.

S. LIE et F. ENGEL [1]. — *Theorie der Transformationsgruppen, III. Band.* Leipzig, 1893.

Livre (Le) du Centenaire de la naissance de Henri Poincaré, 1854-1954. Paris, 1955. Egalement dans : POINCARÉ [6], vol. XI.

N.I. LOBATCHEFSKI [1]. — *Zwei geometrische Abhandlungen,* aus dem Russischen übersetzt etc. von Fr. Engel. Leipzig, 1899.

G. MANNOURY [1] .— *Methodologisches und Philosophisches zur Elementar-Mathematik.* Haarlem, 1909.

G. MANNOURY [2]. — *Les Fondements Psycho-Linguistiques des Mathématiques.* Bussum-Neuchâtel, 1947.

E. MEUNIER [1]. — *Henri Poincarés Theorie der wissenschaftlichen Methodik.* Diss. München, 1919.

E. MEYERSON [1]. — *Du Cheminement de la Pensée.* 3 vol. Paris, 1931.

E. MEYERSON [2]. — *De l'Explication dans les Sciences.* 2 vol. Paris, 1921.

G. MILHAUD [1]. — *Essai sur les Conditions et les Limites de la Certitude Logique.* Paris, 1894.

G. MILHAUD [2]. — *Le Rationnel.* Paris, 1898.

G. MILHAUD [3]. — *La Science et l'Hypothèse, par M. H. Poincaré.* Revue de Métaphysique et de Morale 11 (1903), pp. 773-791.

G. MITTAG-LEFFLER (éd.) [1]. — *Henri Poincaré in memoriam.* Acta Mathematica 38 (1921).

J. NAAS et K. SCHRÖDER (Hrsg.) [1]. — *Der Begriff des Raumes in der Geometrie. Bericht van der Riemann Tagung des Forschungsinstituts für Mathematik.* Berlin, 1957.

P. NATORP [1]. — *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften.* Leipzig-Berlin, 1910.

J. von NEUMANN [1]. — *Die formalistische Grundlegung der Mathematik.* Erkenntnis 2 (1931), pp. 116-121.

Ch. NORDMANN [1]. — *Henri Poincaré. Son Œuvre scientifique, sa Philosophie.* Revue des deux Mondes. 82, 6, 11 (1912), pp. 331-368.

L. OLIVIER [1]. — *La logistique et l'induction complète. La notion de correspondance.* RgSpa 17 (1906), pp. 161-162.

A. PADOA [1]. — *Un nouveau système irréductible de postulats pour l'algèbre.* Dans : *Compte Rendu du 2 CIM,* pp. 249-256.

A. PADOA [2]. — *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque.* Dans : *Bibliothèque du CIP,* pp. 309-365.

A. PADOA [3]. — Le *Problème N° 2 de M. David Hilbert.* L'Enseign. Math. 5 (1903), pp. 85-91.

A. PADOA [4]. — *Théorie des Nombres entiers absolus.* RdM 8 (1902), pp. 45-54.

A. PADOA [5]. — *D'où convient-il de commencer l'arithmétique ?* Revue de Métaphysique et de Morale 19 (1911), pp. 549-554.

A. PADOA [6]. — *La Logique déductive dans sa dernière phase de développement.* Revue de Métaphysique et de Morale 19 (1911), pp. 828-883 ; 20 (1912), pp. 48-67, 207-231. A paru plus tard séparément. Paris, 1912.

A. PADOA [7]. — *La Valeur et les Rôles du Principe d'Induction Mathématique.* Dans : *Proceedings of 5 CIM,* vol. II (Cambridge, 1913), pp. 471-479.

A. PADOA [8]. — *Ce que la logique doit à Peano.* Dans : *Actes du CIP scientifique,* fasc. 8 (Paris, 1936), pp. 31-37.

D. PARODI [1]. — *Intuition et Raison.* Revue de Métaphysique et de Morale 19 (1911), pp. 555-559.

M. PASCH [1]. — *Vorlesungen über neuere Geometrie.* Leipzig, 1882.

M. PASCH [2]. — *Mathematik am Ursprung. Gesammelte Abhandlungen über Grundfragen der Mathematik.* Leipzig, 1927.

G. PEANO [1]. — *Calcolo Geometrico, secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, proceduto dalle operazioni della logica deduttiva.* Torino, 1888.

G. PEANO [2]. — *Arithmetices Principia, nova methodo exposita.* Torino, 1889.

G. PEANO [3]. — *I Principii di Geometria, logicamente esposti.* Torino, 1889.

G. PEANO [4]. — *Notations de logique mathématique. Introduction au Formulaire de Mathématiques.* Torino, 1894.

G. PEANO (e.a.) [5]. — *Formulaire de Mathématiques,* tome I. Torino, 1895.
— tome II. Torino, 1897, 1898, 1899.
— tome III. Torino, 1901.
Formulaire Mathématique, tome IV, Torino, 1902, 1903.
Formulario Matematico, tome V. Torino, 1905-1908.

G. PEANO [6]. — *Principii di Logica matematica.* RdM 1 (1891), pp. 1-9.

G. PEANO [7]. — *Formole di Logica matematica.* RdM 1 (1891), pp. 24-31 ; 182-184.

G. PEANO [8]. — *Sul Concetto di numero,* Nota I : RdM 1 (1891), pp. 87-102 ; nota II : l.c., pp. 256-267.

G. PEANO [9]. — *Sui fondamenti della Geometria.* RdM 4 (1894), pp. 51-90.

G. PEANO [10]. — *Sur la définition de la limite d'une fonction. Exercice de logique mathématique.* AJM 17 (1895), pp. 37-68.

G. PEANO [11]. — *Studii di logica matematica.* Dans : Atti 32 (1896), pp. 361-379.

G. PEANO [12]. — *Riposta* (à FREGE). RdM 6 (1896-99), pp. 60-61.

G. PEANO [13]. — *Les définitions mathématiques.* Dans : *Bibliothèque,* pp. 279-288.

G. PEANO [14]. — *Super Theorema de Cantor - Bernstein.* RdM 8 (1902-1906), pp. 136-143.

G. PEANO [15]. — *Additione* (à l'article précédent). RdM 8 (1902-1906), pp. 143-157.

C.S. PEIRCE [1]. — *On the Logic of Number.* AJM 4 (1881), pp. 85-95.

J. PIAGET [1]. — Voir BETH.

E. PICARD [1]. — *L'œuvre de Henri Poincaré.* Paris, 1913.

M. PIERI [1]. — *Sui principî che reggono la Geometria di posizione.* Dans: Atti 30 (1894), pp. 607-641 ; 31 (1895), pp. 381-399 et 457-470.

M. PIERI [2]. — *Sugli enti primitivi della Geometria Projettiva astratta.* Atti 32 (1896), pp. 231-239.

M. PIERI [3]. — *Un sistema di postulati per la geometria projettiva astratta degli iperspazî.* RdM 6 (1896 1899), pp. 9-16.

M. PIERI [4]. — *Nuovo modo di svolgere deduttivamente la geometria projettiva.* Rendiconti del R. Istituto Lombardo 31_2 (1898).

M. PIERI [5]. — *I Principii della Geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo.* Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino, serie 2a, 48 (1899), pp. 1-62.

M. PIERI [6]. — *Della Geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo. Monografia del punto e del moto.* Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino 49 (1900), pp. 173-222.

M. PIERI [7]. — *La Géométrie envisagée comme un système purement logique.* Dans : *Bibliothèque du CIP,* pp. 367-404.

M. PIERI [8]. — *Circa il teorema fondamentale di Staudt.* Atti 39 (1904), pp. 313-331.

M. PIERI [9]. — *Sur la compatibilité des axiomes de l'arithmétique.* Revue de Métaphysique et de Morale 14 (1906), pp. 196-207.

H. POINCARÉ [1]. — *La Science et l'Hypothèse.* Paris, s.d. (1902). Bibl. de Phil. Scient.

H. POINCARÉ [2]. — *La Valeur de la Science.* Paris, s.d. (1905). Bibl. de Phil. Scient.

H. POINCARÉ [3]. — *Science et Méthode.* Paris, 1908. Bibl. de Phil. Scient.

H. POINCARÉ [4]. — *Savants et Ecrivains.* Paris, 1910. Bibl. de Phil. Scient.

H. POINCARÉ [5]. — *Dernières Pensées.* Paris, 1913. Bibl. de Phil. Scient.

H. POINCARÉ [6]. — *Œuvres,* 11 vol. Paris, 1934-56.

H. POINCARÉ [7]. — *Sur les hypothèses fondamentales de la Géométrie.* Bulletin de la Soc. Math. de France 15 (1886-87), pp. 203-216. Egalement dans *Œuvres* XI, pp. 79-91.

H. POINCARÉ [8]. — *Les Géométries non euclidiennes.* RgSpa 2 (1891), pp. 769-774 (Sous forme modifiée dans *SH,* ch. III).

H. POINCARÉ [9]. — *Lettre à M. Mouret sur les géométries non eucli-*

diennes. RgSpa 3 (1892), pp. 74-75. Sous forme modifiée dans *SH*, ch. II et IV, pp. 34-35, 83-87.

H. Poincaré [10]. — *Le Continu Mathématique*. Revue de Métaphysique et de Morale 1 (1893), pp. 26-34. Sous forme modifiée dans *SH*, ch. II, pp. 29-44.

H. Poincaré [11]. — *Sur la Nature du Raisonnement mathématique*. Revue de Métaphysique et de Morale 2 (1894), pp. 371-384. Sous forme modifiée dans *SH*, ch. I.

H. Poincaré [12]. — *L'Espace et la Géométrie*. Revue de Métaphysique et de Morale 3 (1895), pp. 631-646. Sous forme modifiée dans *SH*, ch. IV.

H. Poincaré [13]. — *Réponse à quelques critiques*. Revue de Métaphysique et de Morale 5 (1897), pp. 59-70.

H. Poincaré [14]. — *Sur les Rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique*. Acta Mathematica 21 (1897), pp. 331-341. Sous forme quelque peu modifiée dans *VS*, ch. V.

H. Poincaré [15]. — *On the Foundations of Geometry*. The Monist 9 (1898-99), pp. 1-43. Traduction française intitulée *Des fondements de la géométrie*, Paris, 1921.

H. Poincaré [16]. — *Réflexions sur le Calcul des probabilités*. RgSpa 10 (1899), pp. 262-269. Sous forme modifiée dans *SH*, ch. XI.

H. Poincaré [17]. — *La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement*. L'Enseign. Math. 1 (1899), pp. 157-162. Egalement dans *Œuvres* XI, pp. 129-133.

H. Poincaré [18]. — *Des Fondements de la géométrie, à propos d'un livre de M. Russell*. Revue de Métaphysique et de Morale 7 (1899), pp. 251-279.

H. Poincaré [19]. — *Sur les Principes de la géométrie*. Revue de Métaphysique et de Morale 8 (1900), pp. 73-86.

H. Poincaré [20]. — *Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques*. Dans : *Compte rendu du 2 CIM*, pp. 115-130. Sous forme quelque peu modifiée dans *VS*, ch. I.

H. Poincaré [21]. — *Sur les Rapports de la physique expérimentale et de la physique mathématique*. Dans : *Rapports présentés au Congr. Int. de Phys.*, t. I (Paris, 1901), pp. 1-29. Sous forme quelque peu modifiée également dans *SH*, ch. IX et X.

H. Poincaré [22]. — *Sur la valeur objective de la science*. Revue de Métaphysique et de Morale 10 (1902), pp. 263-293. Sous forme quelque peu modifiée et amplifiée également dans *VS*, ch. X et XI.

H. Poincaré [23]. — Compte rendu de Hilbert, *Les fondements de la géométrie*. Bull. des Sciences math., 2e série, t. 26 (1902), pp. 249-272. Egalement dans *Œuvres* XI, pp. 92-113. Rectification : ibid. t. 27 (1903), p. 115.

H. Poincaré [24]. — *L'Espace et ses trois dimensions*. Revue de Métaphysique et de Morale 11 (1903), pp. 281-301 et 407-429. Sous forme quelque peu modifiée dans *VS*, ch. III et IV.

H. Poincaré [25]. — *Rapport sur les Travaux de M. Hilbert, présenté au troisième concours du prix Lobatchefsky*. Paris, 1904. A paru d'abord dans Bull. de la Soc. physico-mathématique de Kasan, 2e série, t. 14 (1904), pp. 10-48.

H. Poincaré [26]. — *Les définitions générales en mathématiques*. L'Enseign. Math. 6 (1904), pp. 257-283 ; Conférences du Musée pédagogique 1904, pp. 1-18. Sous forme quelque peu modifiée également dans *SM* II, ch. II.

H. Poincaré [27]. — *Les Mathématiques et la Logique*. Revue de Métaphysique et de Morale 13 (1905), pp. 815-835, et 14 (1906), pp. 17-34. Sous forme modifiée et abrégée également dans *SM* II,, chap. III et IV.

H. Poincaré [28]. — *Les Mathématiques et la Logique*. Revue de Métaphysique et de Morale 14 (1906), pp. 294-317. Sous forme modifiée et abrégée également dans *SM* II, chap. V.

H. Poincaré [29]. — *A propos de la logistique*. Revue de Métaphysique et de Morale 14 (1906), pp. 866-868.

H. POINCARÉ [30]. — *Letter to M. G.F. Stout.* Mind, n.s., 15 (1906), pp. 141-143.

H. POINCARÉ [31]. — *Le Hasard.* Revue du Mois 3 (1907), pp. 257-276. Egalement dans *SM* I, chap. IV.

H. POINCARÉ [32]. — *La Relativité de l'Espace,* L'Année Psychologique 13 (1907), pp. 1-17. Sous forme quelque peu modifiée également dans *SM* I, chap. I.

H. POINCARÉ [33]. — *L'Invention mathématique.* L'Enseign. Math. 10 (1908), pp. 357-371. Egalement dans *SM* I, chap. III ; Bulletin de l'Institut gén. psychologique 8 (1908), pp. 175-187 ; Revue du Mois 6 (1908), pp. 9-21 ; RgSpa 19 (1908), pp. 521-526.

H. POINCARÉ [34]. — *L'Avenir des Mathématiques.* RgSpa 19 (1908), pp. 930-939. Sous forme quelque peu modifiée également dans *SM* I, chap. II.

H. POINCARÉ [35]. — *La Logique de l'Infini.* Revue de Métaphysique et de Morale 17 (1909), pp. 461-482. Egalement dans *DP,* chap. IV.

H. POINCARÉ [36]. — *Réflexions sur les deux notes précédentes.* Acta Mathematica 32 (1909), pp. 195-200. Réaction aux articles A. SCHOENFLIESS [2] et E. ZERMELO [4]. Egalement dans *Œuvres XI,* pp. 114-119.

H. POINCARÉ [37]. — *Uber transfinite Zahlen.* Dans : H. POINCARÉ, *Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematische Physik.* (Leipzig-Berlin, 1910), pp. 43-48. Egalement dans *Œuvres* XI, pp. 120-124. Traduction française : Acta Math. 32 (1909), pp. 195-200.

H. POINCARÉ [38]. — *Pourquoi l'espace a trois dimensions.* Revue de Métaphysique et de Morale 20 (1912), pp. 483-504. Egalement dans *DP,* chap. III.

H. POINCARÉ [39]. — *La Logique de l'Infini.* Scientia (Rivista di Scienza) 12 (1912), pp. 1-11. Sous le titre de : *Les mathématiques et la logique* également dans *DP,* chap. V.

H. POINCARÉ [40]. — *L'Espace et le Temps.* Scientia (Rivista di Scienza) 12 (1912), pp. 159-171. Egalement dans *DP,* chap. II.

H. POINCARÉ [41]. — *Analyse des Travaux Scientifiques de Henri Poincaré,* par lui-même. 6e Partie, §§ 26 et 27. Dans : Mittag-Leffler, pp. 126-127.

R. POIRIER [1]. — *Essai sur quelques caractères des notions d'espace et de temps.* Thèse. Paris, 1931.

R. POIRIER [2]. — *Le Nombre.* Paris, 1938.

R. POIRIER [3]. — *Henri Poincaré et le problème de la valeur de la science.* Dans : *Livre du Centenaire,* pp. 176-202.

W.V. QUINE [1]. — *On Frege's Way out.* Mind, n.s., 64 (1955), pp. 145-159.

E. RABIER [1]. — *Logique.* Paris, 1886.

G. RAGEOT [1]. — *La philosophie d'un géomètre : Henri Poincaré.* La Revue de Paris 13 (1906), pp. 827-851.

F.P. RAMSAY [1]. — *The foundations of mathematics and other logical essays.* New York-London, 1931.

Rapports et Comptes Rendus du 2e Congrès Intern. de Philosophie. Genève, 1905.

H. REICHENBACH [1]. — *Philosophie der Raum-Zeit-Lehre.* Berlin-Leipzig, 1928.

H. REICHENBACH [2]. — *The Rise of Scientific Philosophy.* 4e éd., Berkeley-Los Angeles, 1957.

J. REINHART [1]. — Voir BOLL.

Ch. RENOUVIER [1]. — *Essais de Critique générale. Premier Essai.* 2e éd. Paris, 1875 (*Traité de Logique générale et de logique formelle*).

Ch. RENOUVIER [2]. — *La Philosophie de la Règle et du Compas.* Dans : *L'Année Philosophique de F. Pillon,* 2e année, 1891, pp. 1-66.

J. RICHARD [1]. — *Sur la Philosophie des mathématiques,* Paris, 1903.

J. RICHARD [2]. — *Les Principes des Mathématiques et le Problème des Ensembles.* RgSpa 16 (1905), pp. 541-543.

J. RICHARD [3]. — *A Propos de la Logistique.* RgSpa 17 (1906), pp. 957-958.

J. RICHARD [4]. — *Sur la logique et la notion de nombre entier.* L'Enseign. Math. 9 (1907), pp. 39-44.

J. Richard [5]. — *Sur un paradoxe de la théorie des ensembles et sur l'axiome de Zermelo.* L'Enseign. Math. 9 (1907), pp. 94-98.

J. Richard [6]. — *Sur la nature des axiomes de la géométrie.* L'Enseign. Math. 9 (1907), pp. 463-473 et 10 (1908), pp. 60-65.

B. Riemann [1]. — *Uber die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen.* Neu herausgegeben und erläutert von H. Weyl, Berlin, 1919.

B. Riemann [2]. — *Gesammelte Mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass.* Leipzig, 1876.

G. Riquier [1]. — *De l'Idée de nombre considérée comme fondement des sciences.* Revue de Métaphysique et de Morale 1 (1893), pp. 346-368.

G. Riquier [2]. — *Des axiomes mathématiques.* Revue de Métaphysique et de Morale 3 (1895), pp. 269-284.

L. Rougier [1]. — *La Philosophie géométrique de Henri Poincaré.* Thèse. Paris, 1920.

L. Rougier [2]. — *La Structure des théories déductives, Théorie nouvelle de la déduction.* Paris, 1921.

L. Rougier [3]. — *Henri Poincaré et la mort des vérités nécessaires.* La Phalange 8 (20-7-1913), pp. 1-20.

L. Rougier [4]. — *La démonstration géométrique et le raisonnement déductif.* Revue de Métaphysique et de Morale 23 (1916), pp. 809-858.

L. Rougier [5]. — *A propos de la démonstration géométrique. Réponse à M. Goblot.* Revue de Métaphysique et de Morale 26 (1919), pp. 517-521.

D. Roustan [1]. — *Déduction et Intuition.* Revue de Métaphysique et de Morale 19 (1911), pp. 579-592.

B. Russell [1]. — *An Essai on the Foundations of Geometry.* New ed. New York, 1956.

B. Russell [2]. — *A Critical exposition of the philosophy of Leibniz.* Cambridge, 1900.

B. Russell [3]. — *The Principles of Mathematics.* 2e éd., London, 1937.

B. Russell [4]. — Voir Whitehead.

B. Russell [5]. — *My Philosophical Development.* London, 1959.

B. Russell [6]. — *Les axiomes propres à Euclide sont-ils empiriques?* Revue de Métaphysique et de Morale 6 (1898), pp. 759-776.

B. Russell [7]. — *Sur les axiomes de la géométrie.* Revue de Métaphysique et de Morale 7 (1899), pp. 684-707.

B. Russell [8]. — *Recent Works on the Principles of Mathematics.* The international Monthly 4 (1901), pp. 83-101. Sous le titre de *Mathematics and the Metaphysicians* également dans : B. Russell, *Mysticism and Logic and Other Essays,* Penguin Books, 1953, ch. V.

B. Russell [9]. — *Sur la logique des relations avec des applications à la théorie des séries.* RdM 7 (1900-1901), pp. 115-148.

B. Russell [10]. — *On denoting.* Mind, n.s., 14 (1905), pp. 479-493.

B. Russell [11]. — *Sur la relation des mathématiques à la logistique.* Revue de Métaphysique et de Morale 13 (1905), pp. 906-917.

B. Russell [12]. — Compte rendu de *SH.* Mind, n.s., 14 (1905), pp. 412-418. Polémique Poincaré - Russell à propos de ce compte rendu dans Mind 15 (1906), pp. 141-143.

B. Russell [13]. — *On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types.* Proc. of the London Math. Society, 2nd series, 4 (1906), pp. 29-53.

B. Russell [14]. — *Les Paradoxes de la logique.* Revue de Métaphysique et de Morale 14 (1906), pp. 627-650.

B. Russell [15]. — *Mathematical Logic as based on the theory of types.* AJM 30 (1908), pp. 222-262.

B. Russell [16]. — *La théorie des types logiques.* RMM 18 (1910), pp. 263-301.

B. Russell [17]. — *L'Importance philosophique de la logistique.* Revue de Métaphysique et de Morale 19 (1911), pp. 281-291.

B. Russell [18]. — *Réponse à M. Koyré.* Revue de Métaphysique et de Morale 20 (1912), pp. 725-726.

P.A. Schilpp (éd.) [1]. — *Albert Einstein : Philosopher, Scientist.* Evanston-Chicago, 1949.

A. SCHOENFLIESS [1]. — *Uber wohlgeordnete Mengen*. Math. Ann. 60 (1905), pp. 181-186.

A. SCHOENFLIESS [2]. — *Uber eine vermeintliche Antinomie der Mengenlehre*. Acta Mathematica 32 (1909), pp. 177-184.

K. SCHRÖDER [1]. — Voir NAAS.

Ch. SERRUS [1]. — *Essai sur la signification de la logique*. Paris, 1939.

Ch. SERRUS [2]. — *Traité de logique*. Paris, 1945.

M.G. SITTIGNANI [1]. — *La verita scientifica secondo Henri Poincaré*. Atti del V. Congresso Int. di filosofia, Napoli, 1925, pp. 590-614.

A. SPAIER [1]. — *La Pensée concrète. Essai sur le Symbolisme Intellectuel*. Thèse. Paris, 1927.

A. SPAIER [2]. — *La Pensée et la Quantité. Essai sur la signification et la réalité des grandeurs*. Thèse. Paris, 1927.

J. TANNERY [1]. — *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, t. I. 2e éd., Paris, 1904.

E. TOULOUSE [1]. — *Henri Poincaré. Enquête Médico-Psychologique sur la supériorité intellectuelle*. Paris, 1910.

G. VACCA [1]. — *Sui precursori della logica matematica 2: J.D. Gergonne*. RdM 6 (1896-99), pp. 183-186.

G. VAILATI [1]. — *La logique mathématique et sa nouvelle phase de développement dans les écrits de M. J. Peano*. Revue de Métaphysique et de Morale 7 (1899), pp. 86-102.

G. VAILATI [2]. — Compte rendu de H. POINCARÉ [27]. Dans : *Scritti*, Leipzig-Firenze, 1911, pp. 710-711.

G. VERONESE [1]. — *Fondamenti di Geometria a più dimensioni e a più specie di unita rettilinea*. Padoa, 1891. Traduction allemande intitulée *Grundzüge der Geometrie* etc... Leipzig, 1894.

Ch. VOROVKA [1]. — *Ce qu'il y a de juste dans la critique de la logistique de H. Poincaré*. Atti del V. Congresso intern. di filosofia, Napoli, 1925, pp. 583-590.

F. WAISMANN [1]. — *Einführung in das mathematische Denken*, 2e éd., Wien, 1947. En particulier Chap. 8 : « Das Prinzip der vollständigen Induktion ».

Hao WANG [1]. — *The Axiomatization of Arithmetic*. JSL 22 (1957), pp. 145-158.

R.M. WENLEY [1]. — Compte Rendu de *VS*. Science, n.s., 27 (1908), pp. 386-389.

H. WEYL [1]. — *Mathematische Analyse des Raumproblems*, Berlin, 1923.

H. WEYL [2]. — *Philosophie der Mathematik und der Naturwissenschaft*. München - Berlin, 1926 (*Handbuch der Philosophie*, IIA).

A.N. WHITEHEAD [1]. — *The Axioms of Projective Geometry*. Cambridge, 1906.

A.N. WHITEHEAD et B. RUSSELL [1]. — *Principia Mathematica*. 3 vol. Cambridge, 1910-13.

A.N. WHITEHEAD [2]. — *On Cardinal Numbers*. AJM 24 (1902), pp. 367-394. Section III est de la main de RUSSELL.

A.N. WHITEHEAD [3]. — *Introduction logique à la géométrie*. Revue de Métaphysique et de Morale 15 (1907), pp. 34-39. Traduction d'une partie du ch. I de WHITEHEAD [1].

E.B. WILSON. — Compte rendu de *SH*. Bull. of the Amer. Math. Soc. 12 (1906), pp. 187-193.

M. WINTER [1]. — *La Méthode dans la philosophie des mathématiques*. Paris, 1911.

M. WINTER [2]. — *Note sur l'intuition en mathématique*. Revue de Métaphysique et de Morale 16 (1908), pp. 921-925.

E. ZERMELO [1]. — *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann*. Math. Ann. 59 (1904), pp. 514-516.

E. ZERMELO [2]. — *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*. Math. Ann. 65 (1908), pp. 107-128.

E. ZERMELO [3]. — *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I*. Math. Ann. 65 (1908), pp. 261-281.

E. ZERMELO [4]. — *Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète*. Acta Mathematica 32 (1909), pp. 185-193.

INDEX DES NOMS

TABLE DES MATIÈRES

ACHEVÉ D'IMPRIMER LE DIX MAI
MIL NEUF CENT SOIXANTE - SIX
SUR LES PRESSES DE L'IMPRIMERIE
LES ARTS GRAPHIQUES LORRAINS,
A NANCY-PULNOY, SOUS LE
NUMÉRO DE DÉPÔT LÉGAL 581

Imprimé en France

Dépôt légal - Ed. 1434. N° de code : 160-24

STELLINGEN

1. Hoewel de mening van Ph. E. B. Jourdain, dat Poincaré's artikelen over de logica van de wiskunde "are the work of a man who was primarily – perhaps almost exclusively – interested in the faculties of invention" niet geheel zonder grond is, moet zij toch als overdreven en onjuist worden beschouwd.

   Ph. E. B. Jourdain, *Henri Poincaré: Obituary*, The Monist 22 (1912), blz. 613–614.

2. Terecht rekent A. Heyting Poincaré niet slechts tot de voorlopers van het intuitionisme, maar ook tot die van Hilbert's bewijstheorie.

   A. Heyting, *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie.* Berlijn 1934, blz. 3.
   Dit proefschrift, blz. 129.

3. Poincaré's verwarring van de begrippen "empirisch" en "experimenteel" heeft in het verband van zijn uiteenzetting geen ernstige gevolgen.

   H. Poincaré, *La science et l'hypothèse.* Parijs z.j. (Bibl. de phil. scient.), blz. 65–66.
   H. Freudenthal, *Die Grundlagen der Geometrie um die Wende des 19. Jahrhunderts.* Mathem.-Physikalische Semesterberichte zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität, Bd. VII (1960), blz. 19.

4. Terecht betoogt N. R. Hanson, dat verscheidene voorstanders van het hypothetisch-deductieve wetenschapsmodel de rationele aspecten, die met het vinden van hypothesen verbonden zijn, onderschatten. Daarentegen is Hanson er niet in geslaagd aannemelijk te maken, dat deze aspecten met het H–D model niet bevredigend verantwoord kunnen worden.

   N. R. Hanson, *Is there a logic of scientific discovery?* In: H. Feigl en G. Maxwell (eds.), *Current issues in the philosophy of science*, New York 1961, blz. 20–35 (met *Comments* van P. K. Feyerabend en een *Rejoinder* van N. R. Hanson). Verg. ook:
   N. R. Hanson, *Retroductive inference.* In: B. Baumrin (ed.), *Philosophy of science, The Delaware Seminar* I (1961–1962). New York – Londen 1963, blz. 21–37.

5. Er bestaat een frappante analogie tussen L. E. J. Brouwer's opvatting omtrent de verhouding van de eigenlijke wiskunde tot de wiskundige taal, en Croce's standpunt betreffende de verhouding der eigenlijke esthetische activiteit tot de praktische activiteit der "estrinsecazione".

L. E. J. Brouwer, *De grondslagen der wiskunde.* Amsterdam–Leipzig 1907, blz. 169.
Benedetto Croce, *Estetica come scienza dell' espressione e linguistica generale.* Bari 1902, deel I, hfdst. XIII en XV.

6. De mening van S. Strasser, dat in de door hem geciteerde passage uit het werk van P. W. Bridgeman (lees: P. W. Bridgman) een vicieuze cirkel aan de dag treedt, berust op een vergissing.

S. Strasser, *Fenomenologie en empirische menskunde. Bijdrage tot een nieuw ideaal van wetenschappelijkheid.* Arnhem–Zeist 1962, blz. 151–152.

7. De studie van F. G. Asenjo, *Relations irreducible to classes*, vertoont vanuit het oogpunt van een strenge formalisering verscheidene gebreken.

F. G. Asenjo, *Relations irreducible to classes.* Notre Dame Journal of Formal Logic IV (1963), blz. 193–200.

8. Het is verwarrend alle "counterfactual conditionals" welke niet-nomologisch zijn, als "purely speculative" te bestempelen. Onjuist is het aan alle leden van deze groep een paradoxaal karakter toe te kennen.

Nicholas Rescher, *Hypothetical reasoning.* Amsterdam 1964 (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics), blz. 35–37.

9. Ten onrechte meent A. E. Loen in zijn studie *De oorsprong van de soorten*, dat de vraag "Wat verstaan wij onder evolutie?" moet worden vervangen door de vraag "Wat hebben wij onder evolutie te verstaan?". En op deze laatste vraag is het antwoord: "Onder evolutie hebben wij te verstaan wat evolutie in werkelijkheid is" nietszeggend.

De evolutietheorie na 100 jaar; een reeks voordrachten gehouden ter gelegenheid van de Universiteitsdag op 21 Maart 1959 te Utrecht. Haarlem 1959, blz. 2.

10. S. Dresden geeft een onjuiste weergave van de opvatting van J. Hospers omtrent het onderscheid van "truth-about" en "truth-to".

S. Dresden, *De literaire getuige.* Den Haag 1959, blz. 244–245.
J. Hospers, *Meaning and truth in the arts.* Chapel Hill [2]1948, blz. 163.

11. Tryggve Emond's analyse van de factoren, die een schilderij tot kunstwerk maken, evenals zijn voorstel deze factoren onder het hoofd "animated order" samen te vatten, verdienen in bijzondere mate de aandacht omdat hier de problematiek van de speculatieve esthetica opnieuw aan de orde wordt gesteld in het licht van de bijdrage der hedendaagse analytische filosofen.

Tryggve Emond, *On art and unity. A study in aesthetics related to painting.* Lund 1964.

12. In verscheidene beschouwingen over Thomas Mann's roman *Doktor Faustus. Das Leben des deutschen Tonsetzers Adrian Leverkühn erzählt von einem Freunde* wordt de figuur van Saul Fitelberg ten onrechte in ongunstige zin geïnterpreteerd. Verg. bijvoorbeeld:

Hans Mayer, *Thomas Mann, Werk und Entwicklung.* Berlijn 1950, blz. 369.
Jonas Lesser, *Thomas Mann in der Epoche seiner Vollendung.* München 1952, blz. 392.
Gunilla Bergsten, *Thomas Manns Doktor Faustus. Untersuchungen zu den Quellen und zur Struktur des Romans.* Stockholm 1963, blz. 32.

13. De opmerkingen van M. Rutten over de invloed van Whitehead en Poincaré op het werk van Karel van de Woestijne getuigen van onvoldoende begrip voor de verschillende standpunten in het wiskundig grondslagenonderzoek.

M. Rutten, *Het proza van Karel van de Woestijne.* Parijs 1959, blz. 355–394, i.h.b. blz. 362–364, 379–382.

14. Ook een volkomen deterministische opvatting omtrent de menselijke handelingen maakt het vellen van morele waardeoordelen met betrekking tot die handelingen niet zinloos.

15. Te zelden wordt bij een vacature in de wetenschappelijke staf van een Nederlandse Universiteit of Hogeschool gelegenheid tot solliciteren gegeven. In plaats van uitzondering zou dit regel moeten zijn.