REDE EN AANSCHOUWING IN DE WISKUNDE

E. W. BETH

REDE EN AANSCHOUWING IN DE WISKUNDE

REDE EN AANSCHOUWING IN DE WISKUNDE

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE LETTEREN EN WIJSBEGEERTE AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS DR. C. W. VOLLGRAFF, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE TE VERDEDIGEN OP VRIJDAG 22 NOVEMBER 1935, DES NAMIDDAGS TE 4 UUR

DOOR

EVERT WILLEM BETH

GEBOREN TE STAD ALMELO

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

De afsluiting van mijn academische studie verschaft mij een welkome aanleiding, mijn dank uit te spreken aan allen, die tot mijn wetenschappelijke vorming hebben bijgedragen.

Hooggeleerde WOLFF, Hooggeleerde BARRAU, Hooggeleerde KRAMERS, Hooggeleerde ORNSTEIN, Hooggeleerde NIJLAND, de herinnering aan het vele, dat ik op Uwe lessen en bij andere gelegenheden van U heb mogen leeren, stemt mij tot de grootste dankbaarheid. Hooggeleerde DE VRIES, ik beschouw het als een bijzonder voorrecht, dat ik, zij het slechts kort, in de gelegenheid ben geweest, ook U te hooren.

Zeer Geleerde BOCKWINKEL, Uw boeiend onderricht heeft veel bijgedragen tot het wekken van mijn belangstelling voor de wiskunde; ik acht het mijn plicht, U daarvoor hier te danken.

Mijn verblijf te Leiden laat bij mij de aangenaamste herinneringen achter; aan allen, van wier onderwijs ik aldaar gebruik heb mogen maken, voel ik mij ten zeerste verplicht. Hooggeleerde VAN DER WOUDE, sta mij toe, U in het bijzonder dank te zeggen voor Uw lessen en voor Uw omgang en steun.

Ik dank verder de Nederlandsche Afdeeling van de Commissie voor Intellectueele Toenadering tusschen Nederland en België, die het mij mogelijk heeft gemaakt, mijn studie te Brussel voort te zetten. Hooggeleerde BARZIN, Hooggeleerde ERRERA, de gelegenheid, die Gij mij hebt willen schenken tot verdieping van mijn kennis, stel ik ten zeerste op prijs. Aan allen, die er toe hebben medegewerkt, mijn verblijf te Brussel zoo aangenaam en vruchtdragend mogelijk te maken, betuig ik bij dezen gaarne mijn grootste erkentelijkheid.

Hooggeleerde FRANKEN, niet alleen door de welwillendheid en de belangstelling, die Gij mij hebt betoond, door als mijn promotor te willen optreden, maar ook door de aangename wijze, waarop Gij mijn studie hebt willen regelen, en door de leerzame gesprekken, die aan vorm en inhoud van dit proefschrift en tevens aan mijn wijsgeerige vorming ten goede zijn gekomen, hebt Gij mij tot de grootste dankbaarheid verplicht; het schenkt mij bijzondere voldoening, daaraan bij deze gelegenheid uitdrukking te kunnen geven.

AAN MIJNE OUDERS.

INHOUD.

A. ALGEMEENE ORIENTEERING.

B. METHODENLEER.

C. PSYCHOLOGIE.

D. KENLEER.

A. ALGEMEENE ORIENTEERING.

HOOFDSTUK I.

Inleiding.

Het onderzoek, dat wij met een enkel woord willen inleiden, is een bewerking van het door ons ingezonden antwoord op de door de Faculteit der Letteren en Wijsbegeerte van de Rijksuniversiteit te Utrecht uitgeschreven prijsvraag:

„*Of de noodzakelijkheid van de ruimte als aanschouwingsvorm a priori vervalt, doordat de meetkunde zuiver logisch kan worden opgebouwd*",

welk antwoord een eervolle vermelding mocht verwerven.

Deze bewerking betreft zoowel den opzet van het antwoord als de uitvoering in détails, echter niet het methodisch gezichtspunt, dat ons bij de beantwoording leidde.

Het zij ons vergund, van den gang van ons onderzoek een overzicht te geven, en daarbij tevens in te gaan op den algemeen wijsgeerigen grondslag, waarop wij ons hebben geplaatst.

De prijsvraag was ten duidelijkste gesteld naar aanleiding van de moeilijkheden, waartoe in onze dagen, tengevolge van de ontwikkeling inzonderheid van de z.g. „exacte wetenschappen", de uitvoering van de door KANT aan de wijsbegeerte gestelde opgaven blijkt te leiden.

In een „Algemeene Orienteering" geven wij daarom eerst een uiteenzetting van KANT's standpunt, meer in het bijzonder ten aanzien van het aanschouwingsbegrip. Daarop volgt een overzicht van nieuwere opvattingen in zake het ruimtebegrip (GAUSS, RIEMANN, HELMHOLTZ), die, zooals bekend is, op de moderne ontwikkeling van wiskunde en natuurwetenschap in hooge mate van invloed zijn geweest. De moderne kritiek op KANT's wijsbegeerte van de wiskunde wordt gedemonstreerd door de analyse van een artikel van één harer bekwaamste vertegenwoordigers, L. COUTURAT; wij beperken ons tot dit éene voorbeeld, omdat hier de bezwaren, die men van modern standpunt tegen KANT kan aanvoeren, met groote helderheid en tevens met groote beheersching van KANT's werk zijn uiteengezet.

Na deze drie voorbereidende hoofdstukken gaan wij over tot den opbouw achtereenvolgens van een methodenleer en van een psychologie der zuivere en toegepaste wiskunde.

De *methodenleer* houdt zich bezig met de logische structuur van de wetenschappen (zoowel in statischen als in dynamischen zin); die structuur wordt onderzocht voor de wiskunde zoowel als voor de ervaringswetenschappen, en overeenstemming zoowel als onderscheid tusschen beide komen aan het licht.

Toch ligt niet in dit structuurverschil de wortel van de algeheele ongelijksoortigheid van wiskunde eenerzijds, ervaringswetenschap anderzijds: dit verschil ligt veel dieper en wel in de verschillende *evidentie*, die aan de resultaten ervan toekomt [1]). Dit verschil tusschen de evidentie van de mathesis en die van de ervaringswetenschap is er echter niet een van graad, maar een van karakter.

De evidentie als verificatie toch staat aan den oorsprong van alle wetenschappelijke en niet-wetenschappelijke objectivatie; tegenover het oer-factum van de evidentie staan echter de formeele hulpmiddelen van de methodenleer machteloos.

Toch eischt de „bedrieglijkheid" van de evidentie een nadere fundeering van haar toepassing in de wetenschap; naast de „objectieve fundeering" met behulp van logische methoden moet treden een „subjectieve fundeering" met behulp van psychologische methoden. Op een uiteenzetting van den aard dier methoden volgt een bespreking van hun resultaat.

Overeenkomstig het in de wetenschappen aanwezige analytisch en synthetisch element moesten we een objectieve (logische) zoowel als een subjectieve (psychologische) fundeering leveren; ook al zijn die echter gegeven, toch blijven analyse en synthese voorloopig tamelijk vreemd naast elkaar staan.

De subjectieve en de objectieve fundeering als een eenheid te doen zien en zoo tevens de innige vervlechting van analyse en synthese in de wetenschappen begrijpelijk te maken is de taak

---

[1]) Verg. LEIBNIZ' onderscheiding van „vérités de raison" en „vérités de fait", waarmee KANT's onderscheiding van *a priori* en *a posteriori* analogie toont.

van de *kenleer*; we geven in een laatste hoofdstuk de toepassing van de verkregen resultaten op de kentheoretische probleemstelling; in het bijzonder wordt daarbij het synthetisch element in de wiskunde getoond.

Wanneer men zegt: „de wiskunde (en dus ook de meetkunde) wordt zuiver logisch opgebouwd", dan moet „zuiver logisch" dus niet worden begrepen als *analytisch*, doch slechts als *a priori*.

De ruimte als aanschouwingsvorm komt ter sprake bij de subjectieve fundeering van de ervaringswetenschap, bij het onderzoek naar de structuur van het waarnemingsbewustzijn.

Haar eigenschappen kunnen *a priori* worden vastgesteld; men kan dus zeggen: de ruimte is een aanschouwingsvorm *a priori*, en in zooverre komen onze resultaten met KANT's opvattingen overeen.

Bij KANT echter is de ruimte tevens subjectieve grondslag voor de meetkunde: deze beteekenis kunnen wij haar niet toekennen. Zelfs is de bepaling van de structuur van het waarnemingsbewustzijn zonder meetkunde niet eens mogelijk.

De meetkunde is dus onafhankelijk, niet alleen van den inhoud van het waarnemingsbewustzijn (de „waarneming"), maar ook van zijn structuur.

In het volgende wordt tevens een overzicht gegeven van eenige der belangrijkste onderzoekingen, die op het terrein van de (philosophische, mathematische, physische, psychologische) ruimteleer zijn verricht. De zoo verkregen inzichten worden dan zooveel mogelijk zelfstandig verder ontwikkeld. In het begin draagt dit werk daarom een kritisch-refereerend karakter, terwijl verderop steeds meer wordt getracht uit het verkregen standpunt verder gaande conclusies te trekken.

Onze methode van philosopheeren onderstelt een ons kritisch orienteeren aan de resultaten der positieve wetenschappen. Wij zullen dientengevolge ons standpunt hebben te bepalen ten opzichte van twee denkwijzen vooral: het *kriticisme* en het *positivisme*. Zooals reeds gebleken zal zijn, hebben wij in het bijzonder rekening gehouden met de philosophie van KANT zelf. In dit verband wijzen we nog even op de handhaving van de synthetische oordeelen *a priori*.

In de wiskunde zijn alle existentiestellingen synthetisch a priori: immers de wiskunde zal a priori blijken en géén existentiebewijs kan analytisch worden gevoerd [1]).

In de natuurkunde treden synthetische oordeelen a priori op als formuleering van het „programma" eener theorie. Het zou ons evenwel te ver voeren om hier deze gedachte nader uit te werken.

Van geringer invloed op ons werk zijn geweest de nieuwere kriticistische scholen. Een bezwaar is nl., dat de belangrijkste werken buitengewoon breed zijn opgezet, waarbij de toepassing op speciale problemen òf geheel achterwege blijft (b.v. RICKERT „Der Gegenstand der Erkenntnis"), òf wel zéér algemeen wordt gehouden (b.v. GÖRLAND „Prologik"), òf ernstige gebreken vertoont (b.v. COHEN „Kant's Theorie der Erfahrung", NATORP „Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften"), zoodat men, na kennis genomen te hebben van het vele, dat hier te leeren is, toch het gevoel behoudt, bij het beantwoorden van zulke problemen geheel op eigen arbeid aangewezen te zijn. Een gunstige uitzondering maakt in vele opzichten CASSIRER's „Philosophie der Symbolischen Formen" (voor de hier besproken problemen raadpleegt men met vrucht het derde deel van dit werk); ook hier echter ontbreekt vaak een juist begrip, inzonderheid van intuitionisme en formalisme.

De meest consequente moderne positivistische school, de „Wiener Kreis", gaat inzonderheid uit van de mathematische physica en de logistiek in haar nieuwste ontwikkeling. Enkelen hieruit hebben tot die ontwikkeling belangrijke bijdragen geleverd en in het algemeen onderscheiden hun publicaties zich (ook vergeleken bij die van de Marburgsche school) door souvereine beheersching van dit gebied.

Voor deze denkers is de methode van de natuurwetenschap de wetenschappelijke methode bij uitnemendheid („Physikalismus"). De onderscheiding tusschen „natuur-" en „geesteswetenschap" wordt opgeheven („Einheitswissenschaft").

Belangrijk en sympathiek is voor ons de „Wiener Kreis" om

---

[1]) Een analytisch existentiebewijs bezit principieel dezelfde structuur als het „ontologisch godsbewijs" van ANSELMUS van CANTERBURY en gaat dus aan dezelfde wetenschappelijke euvelen mank.

zijn antimetaphysisch streven; toch mag niet worden verzwegen, dat dit streven aan ernstige eenzijdigheid mank gaat. Zoo wordt b.v. de fundamenteele problematiek, die aan de evidentie inhaerent is, eenvoudig genegeerd. Een gevolg hiervan is een onbevredigende opvatting van logica en wiskunde. De „Wiener Kreis" is nl. van meening, dat deze wetenschappen bestaan uit louter *tautologieën* [1]), d.w.z. uit oordeelen, die uitsluitend aan hun vorm (en niet aan een verificatieproces) hun geldigheid ontleenen. Logica en wiskunde hebben geen zelfstandige betrekking tot de „werkelijkheid"; ze behandelen de wetenschappelijke taal.

Deze, o.i. onjuiste, opvatting over logica en wiskunde, ontleent de „Wiener Kreis" aan WITTGENSTEIN's interpretatie („Tractatus logica-philosophicus") der RUSSELL-WHITEHEAD-sche logistiek („Principia Mathematica"); de wijsgeerige zwakten van dit systeem worden evenwel niet voldoende doorzien.

Met het oer-factum der mathematische evidentie houden daarentegen op behoorlijke, zij het uiteenloopende, wijze rekening het *formalisme* en het *intuitionisme*.

Uit het voorgaande zal reeds gebleken zijn, dat wij ons bij ons onderzoek op een zeer breede basis hebben gesteld; uit de verkregen algemeene inzichten vloeit het resultaat, waartoe wij komen, zonder groote moeite voort.

Noodzakelijk is het, een scherp onderscheid te maken tusschen drie gedaanten, waaronder het ruimtebegrip zich aandient:

1) de mathematische ruimte,
2) de physische ruimte,
3) de aanschouwingsruimte.

De moeilijkheden, die de behandeling van het ruimteprobleem voor de philosophie opleverde, kunnen wij (met CARNAP [2])) voor een groot deel toeschrijven aan het feit, dat men deze drie begrippen nooit voldoende uit elkaar heeft gehouden. Dit is weer toe te schrijven aan de wijze, waarop de drie vormen van het ruimtebegrip zich in de historie hebben ontwikkeld.

Het *mathematisch ruimtebegrip* is niet anders dan het object van dien tak van de wiskunde, dien men als *meetkunde* betitelt.

---

1) Zie Hoofdstuk V, § 1.

2) R. CARNAP: „Der Raum".

We zullen zien, dat de meetkunde van de huidige wiskunde niet langer een nauwkeurig omschreven onderdeel vormt, maar dat het een zaak is van voelen en overlevering, wat men als meetkunde wil beschouwen en wat niet. De vraag naar de grondslagen van de meetkunde gaat dus onder in de vraag naar de grondslagen van de wiskunde in het algemeen.

Op deze vraag bestaan, zooals we al opmerkten, elk voor zich volkomen aanvaardbare antwoorden, en wel:

1) de *formalistische opvatting* van de wiskunde als een stelsel zinlooze, zij het volgens zekere vaste regels opgebouwde, teekencombinaties;

2) de *intuitionistische opvatting* van de wiskunde als een in de mathematische oerintuitie opgetrokken constructie.

We zullen zien, dat op de consequent doorgevoerde formalistische opvatting geen weerlegging vat heeft. Een zuiver zinledige mathesis kan evenwel klaarblijkelijk nimmer „toegepast" worden. Wil men de formalistische teekencombinaties toepassen, dan moet men ze „duiden", dat wil zeggen laten zien, dat ze stellingen uit een „zinvolle" mathesis vertolken, wat nu evenwel slechts tot op een zekere hoogte het geval blijkt. Aangezien wij tevens tot taak hebben, de toepassing der mathesis in het natuurkennen te onderzoeken, kunnen wij alleen iets aanvangen met een zinvolle mathesis, zoodat we aan het volgende de intuitionistische opvatting ten grondslag hebben gelegd. Daarmee is dan tevens een antwoord gegeven op de vraag, wat men te verstaan heeft onder een „zuiver logische" opbouw van de meetkunde.

Bij de moderne ontwikkeling van de physica kwam weer de vraag naar voren naar de verhouding van ervaring en meetkunde. De beantwoording van deze vraag wordt bemoeilijkt, doordat men niet meer van *de* meetkunde kan spreken; meerdere meetkunden dienen zich aan, die logisch denzelfden graad van consistentie blijken te bezitten. Daardoor kan men niet langer de mathematische geldigheid van de meetkundige oordeelen met KANT verklaren uit hun transcendentale aprioriteit. Wij zullen laten zien, hoe men de metrische eigenschappen van de *physische ruimte* inderdaad als gegevens van de ervaring kan interpreteeren; men doet daarmee aan de methode der kritische philosophie geen geweld aan: inderdaad schrijft het factum der natuurwetenschap (EINSTEIN) deze interpretatie gebiedend vóór.

Stellen we nu met KANT de vraag naar de mogelijkheid van natuurwetenschap, dan blijkt, dat voor elk waarnemingsoordeel karakteristiek is een zeker *formeel element* [1]). Dit formeel element biedt het aangrijpingspunt voor een systematisch-wetenschappelijke bewerking van het ervaringsgegeven. Kort gezegd vormen de gezichtspunten en grondbegrippen, die bij deze bewerking vooropgesteld worden, het „*a priori*" der natuurwetenschap.

Zoo komen we ten slotte tot de vraag: hoe wordt het in elk ervaringsoordeel aanwezig formeel element door het subject doorleefd? Het antwoord luidt: als zekere, voor het subject karakteristieke, aanschouwingsvormen. En onder deze aanschouwingsvormen vinden we dan de *aanschouwingsruimte*. De eigenschappen dezer aanschouwingsruimte op te sporen is nu evenwel niet langer de taak der zuivere wiskunde; dat is een probleem van de psychologie, nauwkeuriger van de kennispsychologie.

---

[1]) Het formeel element komt overeen met de vaste structuur van het waarnemingsbewustzijn, het materieel element met den veranderlijken inhoud.

HOOFDSTUK II.

De Aanschouwing als Kentheoretisch Probleem bij Kant.

§ 1. Ter inleiding van onze ontleding van het aanschouwingsbegrip beschouwen we dit begrip uit kentheoretisch oogpunt. Hieraan ga vooraf een korte uiteenzetting van de systematische positie van de kentheoretische probleemstelling in het algemeen.

Scherp dient men de kentheorie te onderscheiden van de logica. De taak van de logica is de bepaling van het begrip wetenschap, het onderzoek van de wetenschappelijke methode als zoodanig, en de toetsing van al hetgene, dat zich als wetenschap aandient, aan de resultaten van die bepaling en van dat onderzoek. De logica beschouwt dus de wetenschap als een object, waarvan wel de algemeene eigenschappen, de structuur, gezocht worden, maar niet de oorsprong. Vraagt men naar den „oorsprong" van de wetenschap, dan komt haar betrekking tot een subject, tot een bewustzijn, aan de orde. Uit deze betrekking van de wetenschap tot een bewustzijn, waarin het phaenomeen der kennis bestaat, ontstaan alle specifiek kentheoretische problemen, als die van de „betrouwbaarheid" en van eventueele „grenzen" van de wetenschap.

Het hoofdprobleem van de kentheorie is dus zóó te formuleeren: wat is de betrekking van de wetenschap tot het bewustzijn en onder welke voorwaarden is ze mogelijk?

Voordat deze vraag beantwoord kan worden, zal men eenig inzicht moeten hebben verkregen in de structuur van de beide relata, wetenschap en bewustzijn, die door de kenrelatie verbonden worden. Aan den opbouw van een kenleer zal dus opbouw van logica en van psychologie tot een zekere hoogte moeten voorafgaan.

§ 2. Van objectieve en subjectieve wetenschapsbeschouwing, van logica en kentheorie, is dus de eerste de meest fundamenteele.

Toch is de kentheorie de oudste, en ook wel, menschelijk gesproken, de meest interessante. In haar oudste gedaanten is de kentheoretische bezinning geheel door metaphysica beheerscht. Voor een wetenschappelijke behandeling van de kentheoretische problemen was noodig, dat het bewustzijnsphaenomeen, het phaenomeen van de subjectiviteit in zijn zelfstandigheid, en daardoor tevens in de eraan eigen problematiek, werd ontdekt.

Deze ontdekking bleef aan de moderne wijsbegeerte, in het bijzonder aan DESCARTES, voorbehouden. Met DESCARTES begint dan ook de ontwikkeling van de moderne kenleer, die in het systeem van KANT haar hoogtepunt vindt.

§ 3. Van KANT's kenleer willen we enkele, voor ons vooral belangrijke, punten, in het bijzonder de behandeling van het aanschouwingsbegrip en de toepassing daarvan op de ruimteleer, samenvattend weergeven.

De groote moeilijkheden van een juiste interpretatie van KANT's werk zijn te bekend, dan dat wij hierop te dezer plaatse nog uitvoerig zouden behoeven in te gaan. Eén van de oorzaken van die, bijna onoverkomenlijke, moeilijkheden willen we echter nog in het kort aangeven, omdat ze in het bijzonder voor zijn leer van de ruimteaanschouwing zoo verstrekkende gevolgen heeft gehad.

KANT heeft blijk gegeven, de taak van de formeele logica te beperkt te zien, toen hij de „formeele logica" in haar traditioneelen vorm (in hoofdzaak afkomstig van ARISTOTELES) aan zijn systeem ten grondslag legde. Bekend is zijn opvatting, dat de logica in een „beharrlichen Zustand" verkeerde en dat deze omstandigheid zakelijk verantwoord was. Specifiek logische problemen aangaande de grondslagen van de wiskunde, w.o. bijvoorbeeld de vraag, welke rol de formeele deductie in de opbouw van de wiskunde spelen moet, worden door KANT niet als zoodanig herkend en dientengevolge in de kenleer ondergebracht. Dit is dááraan toe te schrijven, dat KANT tot het stellen van die vraag door kentheoretische overwegingen werd geleid.

Zoo komt KANT tot de, later terecht bestreden, opvatting, dat de grondstellingen, die de meetkunde logisch fundeeren, tevens als „a priori" de structuur van ons kenvermogen tot uitdrukking brengen en daarom met het bewustzijn van hun noodzakelijkheid en onaantastbaarheid verbonden zijn.

§ 4. Wat verstaat KANT onder „Anschauung"? Men zoekt tevergeefs aan den aanvang der „Kritik" een uitvoerige definitie; men vindt echter verderop eenige aanduidingen. De meeste hiervan zijn in overeenstemming met de uitvoeriger definities der „Logik":

„Alle Erkenntnisse, das heisst: alle mit Bewusstseyn auf ein Object bezogene Vorstellungen sind entweder *Anschauungen* oder *Begriffe*. — Die Anschauung ist eine *einzelne* Vorstellung, der Begriff eine *allgemeine* oder *reflectirte*." (S. 139)[1]. „Alle unsre Erkentnisse nemlich sind, . . ., entweder *Anschauungen* oder *Begriffe*. Die erstern haben ihre Quelle in der *Sinnlichkeit* — die letztern im *Verstande*. —" (S. 41).

Hier is de „Anschauung" een bepaald soort kennis. Op andere plaatsen evenwel is ze in het bijzonder de materie dier kennis (in tegenstelling tot den vorm) en ook wel het vermogen ertoe. Ook hier dus weer veel aanleiding tot moeilijkheden en misverstand. Dit daar gelaten, bezitten we nu definities van

„Anschauung"
„Begriff"
„Sinnlichkeit"
„Verstand".

KANT vervolgt echter met de woorden

„Beyde Grundvermögen lassen sich freylich auch noch . . . auf eine andre Art definiren; nemlich, die Sinnlichkeit als ein Vermögen der *Rezeptivität*, der Verstand als ein Vermögen der *Spontaneität*. Allein diese Erkenntnisart ist nicht logisch, sondern *metaphysisch*. —" [2]) (S. 45).

In totaal maakt KANT dus in onze kennis een tweevoudige onderscheiding:

---

[1]) De citaten uit KANT's „Logik" hebben betrekking op de oorspronkelijke uitgave.

[2]) In aansluiting hieraan heft de Marburgsche School van Neokantianen de onderscheiding van logica en kenleer geheel op. O.i. is hiermee de helderheid van de probleemstelling niet gediend. De onderscheiding van kenleer en logica wordt b.v. wel behouden door OVINK, die ook recht doet aan de samenwerking van logica en psychologie in den opbouw van de kenleer.

bijzonder (einzeln)	—	algemeen (allgemein)
receptief	—	spontaan.

Men zou zich dus vier vormen van kenvermogen kunnen voorstellen, correspondeerend met de verschillende combinaties

1) bijzonder, receptief	3) algemeen, receptief
2) bijzonder, spontaan	4) algemeen, spontaan.

De mogelijkheid van 3) is de grondstelling van het *Platonisme* (verg. in den modernen tijd DESCARTES en HUSSERL). Voorts onderscheidt KANT in aansluiting aan BERKELEY 2) en 4) als „intellectus archetypus" en „intellectus ectypus" [1]).

De mogelijkheden 2) en 3) worden nu in de „Kritik" als „intellektuelle Anschauung" uitdrukkelijk aan den mensch ontzegd. Ze zijn op zichzelf echter geenszins ondenkbaar. KANT schrijft dezen vorm van kenvermogen aan het „Urwesen" toe (B 72). Voor den mensch blijven er dus twee vormen van kenvermogen over:

1) de „Sinnlichkeit", het vermogen tot receptieve, bijzondere „Erkenntnisse".

2) de „Verstand", het vermogen tot spontane, algemeene „Erkenntnisse".

Triviaal is voor KANT, dat de „Sinnlichheit" *a posteriori* kan „anschauen". Men moet echter tevens aannemen, dat ze in staat is *a priori* „anzuschauen". Ziehier voor KANT het groote resultaat van de „transzendentale Aesthetik", dat de onderstelling van een „intellektuelle Anschauung" overbodig maakt [2]).

Het resultaat van die „Anschauung" zijn nu ruimte en tijd, de „Anschauungsformen". Want voor KANT zijn ruimte en tijd geen „Begriffe", maar „Anschauungen". De argumenten geeft KANT in de „Metaphysische Erörterungen" (A 24, B 39, A 31, B 47): er is maar één ruimte en er is maar één tijd. „Die Vorstellung, die nur durch einen einzigen Gegenstand gegeben werden kann, ist aber Anschauung" [3]).

---

[1]) Zie hiervoor brief aan Herz 21 Febr. 1772 (Ak. X) en ook „Was heisst, sich ihm Denken orientieren?" (1786).

[2]) Zie „Prolegomena 207 n.

[3]) Dit is VAIHINGER klaarblijkelijk ontgaan; immers hij schrijft: „die Formen unserer Anschauung brauchen selbst noch keine Anschauungen zu sein."

Tot zoover kan KANT's uiteenzetting ook heden nog worden aanvaard, al zouden wij heden deze zaken anders formuleeren. Men vergelijke b.v. den „Physikalismus" van den „Wiener Kreis": „Sowohl die Protokollsätze, als auch die Nichtprotokollsätze sind in der *räumlich-zeitlichen Terminologie* (*Physikalismus*) abgefasst" [1]). Hier worden ruimte en tijd echter niet in de kenleer, doch reeds in de „Wissenschaftslogik" ingevoerd; dit hangt samen met de these van den „Physikalismus", dat de taal van de natuurwetenschap voor alle wetenschappen logisch fundamenteel is [2]).

De „Transzendentale Erörterung des Begriffs vom Raume" echter (daaronder begrepen de woorden „Hieraus folgt . . . Gewissheit abgeleitet" in de voorafgaande „Metaphysische Erörterung" (al. 4) op A 24, al. 3) op B 39), die systematisch in § 3 thuis hooren, maar daarheen in uitgave B niet zijn overgeplaatst), stuit bij den modernen lezer, o.i. terecht, op onoverkomelijke bezwaren. Voordat wij deze uiteen zetten, willen wij echter wijzen op een merkwaardige opvatting, die achter KANT's betoog ligt, en daarvan in het kort een analyse geven.

§ 5. Het is de opvatting, dat er in ruimte en tijd iets is, dat zich door het discursieve „Verstand" niet laat vatten, dat met het Denken in wezen incongruent is [3]).

Zooals bekend mag worden geacht is deze opvatting reeds in de Grieksche philosophie gangbaar, en werd ze op de meest treffende en geniale wijze vertolkt door ZENO den Eleaat. Wij

---

[1]) O. NEURATH „Einheitswissenschaft und Psychologie" („Einheitswissenschaft Heft 1, Wien 1933) blz. 7.

[2]) Deze these is evenwel een dogma, psychologisch te verklaren uit de suggestie, die van de volkomenheid der moderne natuurwetenschap uitgaat. De beteekenis van de taal voor de wetenschap wordt principieel overschat; hiermee hangt samen een verkeerd inzicht in het wezen der wiskunde. Men ziet niet in, waarom de beoefenaars van een tak van wetenschap niet zelf de taal mogen vaststellen, waarin zij elkander de resultaten van hun onderzoek willen meedeelen.

[3]) Voor een uiteenzetting dier opvatting zie BOLLAND: „Aanschouwing en Verstand"; wij citeeren slechts:

p. 4. „Het is anders gemakkelijk genoeg te bevroeden, dat de menschelijke „wetenschap" in het eerste het beste aanschouwde continuum voor een onoplosbaar raadsel staat."

p. 43. „Aanschouwing en verstand hebben iets onderling onmeetbaars . . ."

p. 45. „Wij mogen stellen, dat reeds in de gewone meetkunde niemand toekomt zonder iets, dat van het standpunt der onvermengde onvervalschte logica niets anders dan methodisch geordende onzin, verstandig onverstand kan zijn."

willen niet trachten, ZENO's subtiele bewijsvoering hier te reproduceeren; trouwens, reeds omtrent inhoud en beteekenis daarvan bestaat verschil van meening. Van belang zijn echter vooral de zeer uiteenloopende gevolgtrekkingen, die men uit de Eleatische paralogismen heeft meenen te kunnen trekken.

ZENO zelf stond op het standpunt van zijn leermeester en vriend PARMENIDES, die leerde, dat *Zijn* en *Denken* hetzelfde is. Wat zich niet laat denken, dat kan slechts in schijn bestaan. Ruimtelijke uitgebreidheid, duur, verandering, beweging, kortom, de veelheid en hare gevolgen, berusten slechts op zinsbedrog; dàt, meende blijkbaar ZENO te mogen besluiten, leerden zijn paralogismen; het Zijnde was dus Een en onveranderlijk.

Een zoo extremistische leer evenwel, die een uitgebreid terrein van wetenschap, de wetenschap der natuur, eenvoudig waardeloos maakte, kon natuurlijk op den duur zich in dien vorm niet handhaven; de groote beteekenis van de Eleatische school blijft gelegen in het wijzen op de problemen, die het ruimtebegrip meebrengt, niet in de oplossing, die zij daarvan gaf.

Van ontologisch standpunt lag voor de hand een andere oplossing van de door ZENO aangewezen moeilijkheden: neem naast het Denken een ànder vermogen aan, dat den mensch kennis zou kunnen verschaffen van het Zijnde; daarbij stond van te voren vast, op grond van de heerschende overtuiging van de bedrieglijkheid van de zinnen, dat de zintuiglijke waarneming die kennis *niet* kon verschaffen.

Zoo kwam men noodzakelijk tot de onderstelling van een „Aanschouwing" van intellectueel karakter, van een vermogen dus tot receptieve en tegelijk algemeene kennis *a priori* (ideeënleer van PLATO; DESCARTES).

Bij deze oplossing knoopt KANT aan; hij neemt haar evenwel niet over dan na de ingrijpende wijzigingen, waartoe eenerzijds de ontwikkeling van de mathematische natuurwetenschap (NEWTON), anderzijds zijn opvattingen aangaande den mensch hem noodzaakten. Hoofdzakelijk bestaan ze in de verwerping van de onderstelling van „intellektuelle Anschauung" voor den mensch; het is de „Sinnlichkeit", die ons de „Anschauungen" levert [1]),

[1]) De aan de „Sinnlichkeit" ontsproten *voorstellingen* heeten bij KANT „Anschauung"; echter wordt ook vaak het *vermogen*, dergelijke voorstellingen te bezitten, aangeduid als „Anschauung", aanschouwing, „intuition"; verg. DESCARTES, BOLLAND (Zie Aanhangsel I).

en KANT laakt scherp den „schwärmerischen Idealismus", die „sich gar nicht einfallen liess, dass Sinne auch *a priori* anschauen sollten" (Prolegomena 207 n) —.

Intusschen bleek de incongruentie tusschen ruimte- en tijdvoorstelling eenerzijds, en Denken anderzijds, door ZENO gesignaleerd, in werkelijkheid niet te bestaan. Wat immers was het geval; wat ZENO (evenals de „formeele logica" tot het ontstaan van de z.g. „mathematische logica", beter „logistiek" genoemd, toe) onder „Denken" verstond, was slechts toepassing van eenvoudige eigenschappen van en relaties tusschen eindige klassen.

Het eenvoudigste mathematische systeem is de eindige klasse; op de beschouwing van eindige klassen berust dan ook het „natuurlijke redeneeren" [1]) en eveneens de structuur van de „natuurlijke talen" wordt erdoor in hooge mate bepaald; ten slotte levert de eindige klasse het eenvoudigste wetenschappelijke verklaringsprincipe.

Het zal dan ook geen verwondering wekken, dat de oudste eenigermate wetenschappelijke verklaringen van den kosmos geheel in den ban van dit principe staan: zoowel het *natuurlijk getal* (PYTHAGORAS), de *vier elementen* (EMPEDOKLES), de *atomistiek* (DEMOKRITOS), zijn als verklaringsprincipes van het ruimere principe der eindige klasse slechts verbijzonderingen.

En al richtte ZENO's dialectiek zich in het bijzonder tegen de atomistiek (hij laat nl. zien, dat deze theorie van de structuur van het continuum geen bevredigende verklaring kan geven), men ging op den duur inzien, dat haar strekking een algemeenere was (de ontdekking van de irrationeele verhouding toonde eveneens de onhoudbaarheid van het natuurlijk getal als universeel verklaringsprincipe); men begreep, dat het apparaat van de logica

---

[1]) ARISTOTELES is de eerste geweest, die de wetten van dit „natuurlijke redeneeren" systematisch heeft ontwikkeld; als bekend is na hem meer dan tweeduizend jaar lang verdere ontwikkeling van de formeele logica uitgebleven.

Dat ARISTOTELES enkel het oog heeft op eindige klassen, kan nog ten overvloede blijken uit de voorbeelden, die hij telkens aanvoert, en uit zijn loochening van het actueel oneindige. Zijn standpunt ten opzichte van het begrip van het continuum is dan ook het eleatische (E. J. DIJKSTERHUIS. „De Elementen van Euclides", dl. I, afd. I).

der eindige klassen geen inzicht kon verschaffen in den bouw van het continuum.

Voor die onderzoekers, van ZENO en ARISTOTELES tot KANT en later, die meenden, dat het logisch redeneeren, als techniek van het Denken, voor eeuwig binnen dit beperkte terrein opgesloten was („Es giebt nur wenige Wissenschaften, die in einem beharrlichen Zustand kommen können . . . Zu diesen gehört die Logik; „Logik" S. 118) was hiermee uitgemaakt, dat alle hoop, rationeel inzicht in de structuur van het continuum te verkrijgen, noodzakelijk ijdel zou moeten blijven; wat, zooals we gezien hebben, voor den radicalen rationalist ZENO voldoende aanleiding was, de realiteit van al datgene, dat, zooals ruimtelijke uitgebreidheid, duur, verandering en beweging, van de denkbaarheid van het continuum afhankelijk is, te loochenen, voor anderen echter, een nieuwe kenbron in te voeren.

En toch was reeds sinds lang het zoo zeer gewenschte inzicht verkregen: het tiende Boek van EUCLIDES' „Elementen" bevat een aan hooge eischen van exactheid voldoende theorie van de irrationeele verhoudingen, die door THEAITETOS en EUDOXOS ontwikkeld heet [1]).

§ 6. Zoo zien we reeds de ontwikkeling van de Grieksche wiskunde in sterke mate beinvloed door twee gedachtenrichtingen, die nog heden ten dage, zij het niet ongewijzigd, tegenover elkaar staan: aan de eene zijde de opvatting, dat in de meetkunde het Verstand een aanschouwelijk gegeven veelheid ordent (later de „empiristische" opvatting: GAUSS, HELMHOLTZ). Aan de andere zijde de leer, dat de meetkundige stellingen niet in het Verstand, maar in een daarvan onderscheiden kenvermogen van den mensch, in de structuur van de „Sinnlichkeit", hun fundament zouden vinden.

De laatste opvatting werd door KANT in zijn „Kritik der reinen Vernunft" verdedigd, maar daartegen rees, zooals we zullen zien, tengevolge van de moderne ontwikkeling van wiskunde en natuurwetenschap (niet-Euclidische meetkunde, relativiteitstheorie), hoe langer hoe meer verzet.

---

[1]) Voor nadere historische bijzonderheden: E. J. DIJKSTERHUIS, l.c.

Zonder twijfel beschikt de mensch over een „receptief” kenvermogen. De klove tusschen „rationeele” en „empirische” kennis is voor hem niet te overbruggen. Eveneens moet men KANT gelijk geven, wanneer hij leert, dat aan al onze waarnemingen zekere vormen (aanschouwingsvormen) inhaerent zijn. Aan al onze waarnemingen is zeker de ruimtelijkheid inhaerent.

A priori evenwel bezitten wij enkel en alleen de aanschouwing van de ruimte in hare totaliteit. Al onze voorstellingen *in* de ruimte zijn afhankelijk van of intentioneel gericht op waarnemingen. Dit geldt evenzeer van onze fantasie- of herinneringsbeelden van voorwerpen, als van aanschouwelijke voorstellingen van meetkundige figuren. Ook is onze aanschouwelijke voorstelling van meetkundige figuren geenszins adaequaat te achten. Een lijn wordt voorgesteld als streep, een punt als stip. Aan zulke onscherpe voorstellingen kunnen natuurlijk streng geldige stellingen niet ontleend worden.

Zijn *al* onze ruimtelijke voorstellingen met dit gebrek aan scherpte behept? Neen: wij bezitten een scherpe (waarschijnlijk op haptische gewaarwordingen intendeerende) voorstelling van de relatie „binnen” tusschen ruimtedeelen. Van deze relatie kennen wij met volkomen zekerheid de volgende eigenschappen:

$$AbA.$$

$$(AbB \mathbin{\&} BbC) \rightarrow AbC.$$

Men definieert

$$A = B \underset{\text{Df.}}{=} AbB \mathbin{\&} BbA.$$[1])

Wil men evenwel een niet al te rudimentaire meetkunde opbouwen, dan moet men nadere onderstellingen toelaten, die echter niet de aan de ruimtevoorstellingen eigen evidentie bezitten. Deze onderstellingen laten nu toe het begrip „punt” formeel te definieeren; de „aanschouwingsruimte” wordt dan een „puntverzameling”, waarin de axioma’s van HAUSDORFF van kracht zijn. Men heeft dan een meetkunde verkregen, waarin

---

[1]) De letters A, B, C, ... stellen ruimtedeelen voor, en AbB wil zeggen: A ligt binnen B. Voor een nadere uiteenzetting van deze wijze, een meetkunde op te bouwen, zie men: NICOD: „La Géométrie dans le Monde sensible”, Parijs 1924.

(hoewel er al meer in aangenomen is, dan, strikt genomen, door de aanschouwing gedekt wordt) toch nog geen sprake is van metriek of zelfs dimensietal. Bij de mathematische behandeling moet men gebruik maken van het aan onze aanschouwing vreemde begrip „oneindig". Zoo wordt reeds het punt gedefinieerd door een oneindig proces.

Uit dit alles volgt, dat de aanschouwing geen basis kan geven voor de *strenge* geldigheid van de Euclidische Meetkunde, dat wij evenwel van de ruimte als aanschouwingsvorm wel streng geldige kennis *a priori* kunnen bezitten.

Tot zoover de uiteenzetting van die onderdeelen van KANT's theorie van de wiskundige kennis, die op de latere onderzoekers van invloed zijn geweest. Deze invloed is nl. vooral uitgegaan van de „transzendentale Ästhetik". Houdt men echter met dit gedeelte van KANT's systeem te eenzijdig rekening, dan komen de verdiensten hiervan niet volledig tot hun recht. In het bijzonder loopt men dan gevaar, „Sinnlichkeit" en „Verstand" te veel te beschouwen als afgescheiden „vermogens" van het bewustzijn (KANT geeft tot dat misverstand door zijn uitdrukkingswijze trouwens ruimschoots aanleiding), in plaats van als *functies*, die aan den opbouw van de bewustzijnseenheid samenwerken.

In zijn „Schematismus der reinen Verstandesbegriffe" slaat KANT tusschen „Sinnlichkeit" en „Verstand" een brug, en wel als volgt: „In allen Subsumtionen eines Gegenstandes unter einen Begriff muss die Vorstellung des ersteren mit der letzteren *gleichartig* sein . . . Nun ist klar: dass es ein Drittes geben müsse, was einerseits mit der Kategorie, andererseits mit der Erscheinung in Gleichartigkeit stehen muss, und die Anwendung der ersteren auf die letzte möglich macht. Diese vermittelnde Vorstellung muss rein (ohne alles Empirische) und doch einerseits *intellektuell*, andererseits *sinnlich* sein. Eine solche ist das *transzendentale Schema* . . . Das Schema ist . . . ein Produkt der Einbildungskraft; aber . . . doch vom Bilde zu unterscheiden . . . Diese Vorstellung nun von einem allgemeinen Verfahren der Einbildungskraft, einem Begriff sein Bild zu verschaffen, nenne ich das Schema zu diesem Begriffe" (A 137—140).

„Das reine Bild aller Grössen (*quantorum*) vor dem äussern Sinne, ist der Raum, aller Gegenstände der Sinne aber überhaupt, die Zeit. Das reine *Schema* der *Grösse* aber (*quantitatis*) als eines Begriffs des Verstandes, ist die *Zahl*, welche eine Vorstellung ist, die die sukzessive Addition von Einem zu Einem (gleichartigen) zusammenbefasst" (A 142).

Ook later nog komt KANT op het probleem van de mathematische objectiviteit terug:

„Der Raum hat drei Abmessungen, zwischen zwei Punkten kann nur eine gerade Linie sein usw. Obgleich alle diese Grundsätze, und die Vorstellung des Gegenstandes, womit sich jene Wissenschaft beschäftigt, völlig *a priori* im Gemüt erzeugt werden, so würden sie doch gar nichts bedeuten, könnten wir nicht immer an Erscheinungen (empirischen Gegenständen) ihre Bedeutung darlegen. Daher erfordert man auch, einen abgesonderten Begriff *sinnlich zu machen*, d.i. das ihm korrespondierende Object in der Anschauung darzulegen, weil, ohne dieses, der Begriff, (wie man sagt) ohne *Sinn*, d.i. ohne Bedeutung bleiben würde. Die Mathematik erfüllt diese Forderung durch die Konstruktion der Gestalt, welche eine den Sinnen gegenwärtigen (obzwar *a priori* zustande gebrachte) Erscheinung ist. Der Begriff der Grösse sucht in eben der Wissenschaft seine Haltung und Sinn in der Zahl, diese aber an den Fingern, den Korallen des Rechenbretts, oder den Strichen und Punkten, die vor Augen gestellt werden" (A. 240).

Er is in deze uiteenzettingen een allerbelangrijkste correctie van de theorie van „transzendentale Ästhetik" te vinden; de daar (bedoeld of onbedoeld) gegeven voorstelling van zaken was immers de volgende: aan de „Sinnlichkeit" zijn de mathematische (meetkundige) objecten onmiddellijk en *a priori* gegeven. Door die gegevenheid treden dan de mathematische eigenschappen (axioma's van EUCLIDES) met volledige evidentie aan den dag.

Hier evenwel blijkt KANT van een andere opvatting: de mathematische objecten worden door de „Einbildungskraft" in de „Anschauung" opgebouwd volgens door den „Verstand" *a priori* vastgestelde wetten. Wanneer men daarbij aan den „Verstand" maar genoeg vrijheid toekent, blijkt de opbouw van verschillende meetkundige systemen mogelijk; de nadere uitwerking van deze gedachte, waarop we later ingaan, bleef aan een latere periode voorbehouden. Wij denken hier in het bijzonder aan de verderop te bespreken methode van de *arithmetisatie*, die tegenwoordig een rationeele bewerking van het aanschouwelijk gegevene mogelijk maakt, en zoo het vage en onbepaalde van de aanschouwing voor een streng begripsmatige behandeling toegankelijk maakt. Zonder op het volgende vooruit te loopen, kunnen we dezen gedachtengang echter niet verder vervolgen.

HOOFDSTUK III.

De Ruimte als Aanschouwingsvorm en het Ruimtebegrip van de Natuurwetenschap.

§ 1. Ter inleiding in de nieuwere opvattingen over de rol van het ruimtebegrip in den opbouw van het wereldbeeld der natuurwetenschap, willen we in het kort de gedachten weergeven van eenige zeer grooten onder hen, die voor die opvattingen de grondslagen hebben gelegd: GAUSS, RIEMANN, HELMHOLTZ, POINCARÉ.

Zooals men weet, dateert GAUSS' belangstelling voor deze problemen reeds uit de laatste jaren van de achttiende eeuw. RIEMANN's beroemde rede „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen'' werd gehouden in 1854. In 1866 pas verschijnt ze in druk, ongeveer tegelijk met de eerste publicaties van HELMHOLTZ op dit gebied. Onder den invloed van dezen laatsten, ongewoon veelzijdigen, geleerde richt nu de philosophische wereld haar blik op deze onderzoekingen. Ook wordt haar aandacht gevestigd op de oudere ontdekkingen van BOLYAI, LOBATSCHEWSKY en GAUSS over de niet-Euclidische meetkunde („metageometrie'').

Omstreeks 1870 begint dan van de hand van philosophen kritiek hierop te verschijnen; vooral in den beginne echter verraadt deze maar al te vaak een te gering begrip voor de werkelijke waarde van hetgeen door de wiskundigen werd gevonden en van de methoden, die zij daartoe moesten toepassen. Als voorbeeld geven we hier een overzicht van RIEMANN's rede [1]) en van de kritiek daarop gegeven door COHEN in zijn Kant-commentaar [2]).

§ 2. RIEMANN leidt zijn werk als volgt in:

„Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Grösse aus allgemeinen Grössenbegriffen zu construiren. Es wird daraus hervorgehen, dass eine mehrfach ausgedehnte Grösse verschiedener Massverhältnisse

---

[1]) geciteerd volgens de „Gesammelte mathematische Werke[1]'' Leipzig 1876.

[2]) „Kants Theorie der Erfahrung[2]'' Berlijn 1885.

fähig ist und der Raum also nur einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Grösse bildet. Hiervon aber ist eine nothwendige Folge, dass die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Grössenbegriffen ableiten lassen, sondern dass diejenigen Eigenschaften, durch welche sich der Raum von anderen denkbaren dreifach ausgedehnten Grössen unterscheidet, nur aus der Erfahrung entnommen werden können. Hieraus entsteht die Aufgabe, die einfachsten Thatsachen aufzusuchen, aus denen sich die Massverhältnisse des Raumes bestimmen lassen . . ." „Indem ich nun von diesen Aufgaben zunächst die erste, die Entwicklung des Begriffs mehrfach ausgedehnter Grössen, zu lösen versuche, glaube ich um so mehr auf eine nachsichtige Beurtheilung Anspruch machen zu dürfen, da ich in dergleichen Arbeiten philosophischer Natur, wo die Schwierigkeiten mehr in den Begriffen, als in der Construction liegen, wenig geübt bin und ich ausser einigen ganz kurzen Andeutungen, welche Herr Geheimer Hofrath GAUSS in der zweiten Abhandlung über die biquadratischen Reste, in den Göttingischen gelehrten Anzeigen und in seiner Jubiläumschrift darüber gegeben hat, und einigen philosophischen Untersuchungen HERBART's, durchaus keine Vorarbeiten benutzen konnte" (S. 254/255).

Hoe het stond met RIEMANN's verhouding tot HERBART's philosophie, leeren wij uit de „philosophische geloofsbelijdenis" (Werke 477):

„Der Verfasser ist Herbartianer in Psychologie und Erkenntnisstheorie (Methodologie und Eidolologie), HERBART's Naturphilosophie und den darauf bezüglichen metaphysischen Disciplinen (Ontologie und Synechologie) kann er meistens nicht sich anschliessen."

Hieruit blijkt duidelijk, dat COHEN, wanneer hij schrijft:

„Von diesem seinem allgemeinen philosophischen Standpunkt aus können wir allein zu einem Verständniss seiner Raumtheorie gelangen" (l.c. S. 223)

den invloed der Herbartsche (en zelfs in 't algemeen den invloed van eenige) philosophie op RIEMANN's werk overschat. Daardoor zoekt COHEN meer te halen uit het woord *Mannigfaltigkeit* dan RIEMANN er in wil leggen. („Grössenbegriffe sind nur da möglich, wo sich ein allgemeiner Begriff vorfindet, der verschiedene Bestimmungsweisen zulässt. Je nachdem unter diesen Bestimmungsweisen von einer zu einer andern ein stetiger

Übergang stattfindet oder nicht, bilden sie eine stetige oder discrete. Mannigfaltigkeit"; Werke S. 255).

Al onmiddellijk maakt COHEN bezwaar tegen de doelstelling: „den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Grösse aus allgemeinen Grössenbegriffen zu construiren," en wel met de woorden:

„Der Begriff der Grösse soll demnach als der allgemeinste zu Grunde gelegt werden. Dagegen sind wir hier bemüht, in einer bestimmten Bedeutung den Raum als erste Bedingung aller mathematischen Naturerkenntniss anzusetzen" (S. 223).

Klaarblijkelijk ontgaat het COHEN, dat RIEMANN *twee* problemen stelt, nl. dat van de mathematische structuur van de ruimte en dat van de verhouding van het mathematisch ruimtebegrip tot andere wetenschappen. Voor de oplossing van het eerste probleem legt hij den grondslag. Zijn beantwoording van het tweede blijft in het algemeene, waarvoor hij zich, zooals we zagen, verontschuldigt.

COHEN vervolgt nu:

„Es ist als Mangel zu bezeichnen, dass RIEMANN weder den Begriff der Mannigfaltigkeit, noch den der Grösse definirt hat." (S. 224).

Wij willen deze opmerking weerleggen aan de hand van eenige citaten. RIEMANN's definitie van de „Mannigfaltigkeit" werd reeds op de vorige bladzijde besproken. Bijna onnoodig op te merken, dat deze Mannigfaltigkeit niets te maken heeft met die uit RIEMANN's fragment „Zur Psychologie und Metaphysik" (Werke S. 477) of met het „Mannigfaltige" bij KANT.

De definitie van het begrip „Grösse" geschiedt als volgt: „Bestimmte, durch ein Merkmal oder eine Grenze unterschiedene Theile einer Mannigfaltigkeit heissen Quanta. . . . . wo die Grössen . . . als Gebiete in einer Mannigfaltigkeit betrachtet werden" (S. 256).

Uit den tweeden zin volgt, dat in den eersten „Quantum" synoniem is met „Grösse".

Hetzelfde begrip der „Grösse" en dezelfde opvatting van haar fundamenteele beteekenis vinden we trouwens bij KANT en bij GAUSS. Bij den eerste (B. 203, A. 714) treffen we zelfs het gebruik aan van „Quantum" als synoniem. Met genoemde opvatting gaat de nieuwere wiskunde niet meer accoord; immers zij bepaalt zich niet tot de theorie der „quanta", doch behandelt ook geheel andersoortige objecten.

De moderne wiskunde zou in elk geval van het begrip der „Grösse" een scherpere bepaling verlangen dan KANT, GAUSS of RIEMANN geven; om te laten zien, hoe dicht RIEMANN eigenlijk nog staat bij zijn voorgangers, geven we nog een tweetal citaten:

„Die Form der mathematischen Erkenntnis ist die Ursache, dass diese lediglich auf Quanta gehen kann. Denn nur der Begriff von Grössen lässt sich konstruieren . . ." (KANT A 714). „Gegenstände der Mathematik sind alle extensive Grössen (solche, bei denen sich Theile denken lassen) . . . Der Raum oder die Geometrische Grösse, welche Linien, Flächen, Körper und Winkel unter sich begreift . . . . die Mathematik betrachtet die Grössen nur in Beziehung auf einander" [1]).

De mathematische probleemstelling, die we in RIEMANN's werk vonden, is aanleiding geworden tot de ontwikkeling van een geheele reeks mathematische wetenschappen, die een buitengewonen rijkdom aan resultaten hebben opgeleverd. Wij noemen hier slechts de „RIEMANNsche meetkunde", de leer der transformatiegroepen (LIE) en in den jongsten tijd de dimensietheorie (BROUWER, URYSOHN, MENGER). Ze getuigen alle van de groote vruchtbaarheid van RIEMANN's gedachtengang [2]).

§ 2. We kunnen nu overgaan tot een beschouwing van RIEMANN's beantwoording van de kentheoretische vraag over de verhouding van meetkunde en natuurwetenschap; een interessant historisch feit willen we in het voorbijgaan vermelden: RIEMANN is hier een voorlooper van de algemeene relativiteitstheorie.

Aan de hand van een citaat (Werke p. 491, uit de „Fragmente philosophischen Inhalts") kunnen we RIEMANN's kentheoretische opvattingen als volgt weergeven:

„I. Wann ist unsere Auffassung der Welt wahr?

„Wenn der Zusammenhang unserer Vorstellungen dem Zusammenhang der Dinge entspricht."

. . . . . .

II. Woraus soll der Zusammenhang der Dinge gefunden werden? „Aus dem Zusammenhange der Erscheinungen." Die Vorstellung von Sinnendingen in bestimmten räumlichen und zeitlichen Verhältnissen ist dasjenige, was beim absichtlichen

---

[1]) GAUSS: „Zur Metaphysik der Mathematik". Werke Bd. XII p. 55.

[2]) Zie voor nadere litteratuuraanduiding de litteratuurlijst aan het slot.

Nachdenken über die Natur vorgefunden wird oder für dasselbe *gegeben* ist. Es ist jedoch bekanntlich die *Qualität* der Merkmale der Sinnendinge, Farbe, Klang, Ton, Geruch, Geschmack, Wärme oder Kälte, etwas lediglich unserer Empfindung Entnommenes, ausser uns nicht Existirendes. Dasjenige, woraus der Zusammenhang der Dinge erkannt werden muss, sind also *quantitative* Verhältnisse, die räumlichen und zeitlichen Verhältnisse der Sinnendinge und die Intensitätsverhältnisse der Merkmale und ihrer Qualitätsunterschiede.

Aus dem Nachdenken über den beobachteten Zusammenhang dieser Grössenverhältnisse muss sich die Erkenntniss des Zusammenhangs der Dinge ergeben."

Van dit gezichtspunt uit moet men nu de ook door COHEN aangehaalde woorden (Werke S. 254,255) begrijpen. „Hiervon aber ist eine nothwendige Folge, dass die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Grössenbegriffen ableiten lassen, sondern dass diejenigen Eigenschaften, durch welche sich der Raum von andern denkbaren dreifach ausgedehnten Grössen unterscheidet, nur aus der Erfahrung entnommen werden können."

Hierover zegt COHEN:

„Hier ist der schwankende unklare Ausdruck der Erfahrung recipirt, mit dem HERBART über KANT zu den ENGLÄNDERN zurückgegangen ist. Wenn der Raum eine besondere Grössenart darstellt, so werden die Bedingungen derselben aus der Geometrie abzuleiten sein, und nur im Verhältniss und in Rücksicht auf eine allgemeine Grössenlehre" (S. 226).

Deze tegenwerping is wel uiterst zwak. Na de beantwoording van de mathematische probleemstelling hebben „Geometrie" en „allgemeine Grössenlehre" hun taak als mathematische wetenschappen verricht. Het resultaat van hun bemoeiingen is evenwel niet ondubbelzinnig bepaald: van mathematisch standpunt zijn een groot aantal meetkunden mogelijk. Slechts één hiervan, met ook mathematisch scherp definieerbare bijzondere eigenschappen, wordt in de natuurwetenschappen gebezigd; dat is een „ervaringsfeit", zooals RIEMANN terecht opmerkt.

De vraag is nu echter, hoe dit optreden van een bijzonderen ruimtevorm kentheoretisch is te interpreteeren. Zijn de hiervoor karakteristieke eigenschappen aan de waarneming, aan de „stof" der ervaring, inhaerent, of zijn ze voor de ervaring als zoodanig formeel-constitutief?

Ziedaar een vraag, die RIEMANN nog niet opwerpt, maar die, in nauwe aansluiting aan KANT's theorie van de ruimte, door GAUSS en HELMHOLTZ werd gesteld.

§ 3. Zooals bekend, zijn voor KANT de stellingen van de meetkunde voor de ervaring formeel-constitutief. Zijn voornaamste argument was de apodictische geldigheid van deze stellingen [1]), die naar zijn meening anders moeilijk te rijmen viel met het feit, dat ze niet formeel-logisch waren te deduceeren.

Immers, dat laatste wist KANT; hij wist zelfs, dat er meetkunden waren met eigenschappen, die van die der Euclidische meetkunde in vele opzichten afwijken: hij had nl. zulke meetkunden in zijn „Gedanken der wahren Schätzung der lebendigen Kraft" zelf opgebouwd [2]).

En toch waren dat voor hem, naast de Euclidische meetkunde, slechts kunstmatig in elkaar gezette hersenspinsels, zonder apodicticiteit.

Waaraan, zoo vroeg KANT zich af, kon deze laatste haar apodictische zekerheid toch wel ontleenen? Niet aan de ervaring, want die geeft slechts „komparative Allgemeinheit". De eenige oplossing was: aan haar transcendentale aprioriteit, aan haar constitutieve functie bij de totstandkoming van de ervaring.

§ 4. GAUSS en HELMHOLTZ stellen nu de vraag, of de stellingen van de Euclidische meetkunde inderdaad wel *alle* apodictische zekerheid bezitten. Aanleiding was hiertoe hun onderzoek van de niet-Euclidische meetkunde; het ging hun, zooals het iedereen pleegt te gaan, die zich met niet-Euclidische meetkunde een voldoend langen tijd bezig houdt: de stellingen krijgen op den duur denzelfden graad van aanschouwelijkheid, van evidentie, die voordien alleen de stellingen van de Euclidische meetkunde bezaten, tenminste zoo lang men zich beperkt tot ruimten van 2 of 3 dimensies; een dergelijke aanschouwelijkheid krijgen de

---

[1]) „Denn die geometrischen Sätze sind insgesamt apodiktisch, d.i. mit dem Bewusstsein ihrer Notwendigkeit verbunden, z.B. der Raum hat nur drei Abmessungen; . . ." (B. 40).

[2]) Zie hierover het artikel van Prof. DE VLEESCHAUWER in „Euclides" (10e jaargang).

stellingen over ruimten van meer dan 3 dimensies zelden of nooit.

Het schijnt dus wel, alsof er tusschen het parallelenpostulaat en het axioma der driedimensionaliteit een verschil in evidentie is; die meening wordt nog versterkt door de opmerking, dat wiskundigen van alle tijden getracht hebben, het parallelenpostulaat te *bewijzen*; dat deze pogingen falen moesten, weten wij thans op grond van de mogelijkheid van een niet-Euclidische meetkunde.

Men moet dus met de mogelijkheid rekening houden, dat niet *alle* stellingen der Euclidische meetkunde apodicticiteit bezitten. Waarop berust dan echter hun toepasbaarheid in de natuurwetenschap? Laten wij eerst GAUSS' antwoord vernemen.

„,.. Ich komme immer mehr zu der Uberzeugung, dass die Nothwendigkeit unserer Geometrie nicht bewiesen werden kann,... Bis dahin müsste man die Geometrie nicht mit der Arithmetik, die rein a priori steht, sondern etwa mit der Mechanik in gleichen Rang setzen" (Brief aan OLBERS, 28 April 1817, Werke Bd. 8 S. 177).

„Dieser Unterschied zwischen rechts und links ist, so bald man vorwärts und rückwärts in der Ebene und oben und unter in Beziehung auf den beiden Seiten der Ebene einmal (nach Gefallen) festgesetzt hat, in sich völlig bestimmt, wenn wir gleich unsere Anschauung dieses Unterschiedes andern *nur* durch Nachweisung an wirklich vorhandenen materiellen Dingen mittheilen können [1]) (Werke Bd. 2 S. 177).

„ . . . Gerade in der Unmöglichkeit, zwischen Σ und S a priori zu entscheiden, liegt der klarste Beweis, dass Kant Unrecht hatte zu behaupten, der Raum sei nur Form unserer Anschauung" (Brief aan BOLYAI SR., 6 Maart 1832; BOLYAI JR. had in zijn „Appendix" de Euklidische meetkunde aangeduid door Σ, de „absolute" of niet-Euklidische door S).

„Das der Raum . . . eine reelle Bedeutung" *kon* bezitten, had KANT in zijn eerder geciteerde „Gedanken . . ." getoond, in te zien. Hij legt daar nl. verband tusschen het dimensie-tal drie

---

[1]) „Beide Bemerkungen hat schon KANT gemacht, aber man begreift nicht wie dieser scharfsinnige Philosoph in der ersteren einen Beweis für seine Meinung dass der Raum *nur* Form unserer äussern Anschauung sei, zu finden glauben konnte, da die zweite so klar das Gegentheil, und dass der Raum unabhängig von unserer Anschauungsart eine reelle Bedeutung haben muss, beweiset."

van onze ruimte en den vorm van NEWTON's attractiewet, en loopt daarbij met RIEMANN (die, in zijn reeds behandelde rede, zegt: „Es muss also entweder das dem Raume zugrunde liegende Wirkliche eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Massverhältnisse ausserhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften gesucht werden") vooruit op EINSTEIN's relativiteitstheorie. Dit standpunt heeft hij evenwel later, bij de opstelling van het systeem van de kritische philosophie verlaten, daar hij meende, dat het onvereenigbaar was met zijn opvatting van de ruimte als aanschouwingsvorm a priori.

GAUSS merkt op, dat hier geen alternatief behoeft te bestaan: òf „Anschauungsform", òf „reelle Bedeutung", maar dat het ruimtebegrip wel eens een dubbele functie zou kunnen vervullen. Zullen dan echter de eigenschappen, die aan de ruimte in beide functies toekomen, dezelfde zijn, en, kentheoretisch beschouwd, denzelfden „oorsprong" bezitten? Dat is een delicate kwestie; GAUSS schijnt van meening, dat sommige eigenschappen van de ruimte aan de aanschouwing inhaerent zijn, dat echter andere op ervaring berusten. Zoo heeft hij zelfs een driehoek (de bergtoppen Brocken—Hohenhagen—Inselsberg) opgemeten, ten einde vast te stellen, of inderdaad de som van de hoeken 180° bedroeg: de fouten der waarneming in aanmerking genomen, bleek dit werkelijk het geval te zijn.

§ 5. Deze probleemstelling is verder bewerkt door HELMHOLTZ. HERMANN VON HELMHOLTZ (1821—1894) kwam als gevolg van zijn physiologische onderzoekingen (waarbij hij in JOH. MÜLLER een voorganger had) tot de studie van de kennistheorie en zoo tevens tot het aanvatten van het ruimteprobleem. Onbekend met het werk van RIEMANN (dat immers pas in 1867 verscheen) publiceerde hij in 1866: „Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie"; toen hij met RIEMANN's reeds besproken voordracht bekend was geworden, deed hij in 1868 een tweede verhandeling verschijnen: „Ueber die Thatsachen die der Geometrie zum Grunde liegen." Hierin wordt de voorgaande verhandeling op een belangrijk punt verbeterd.

In deze beide verhandelingen is een belangrijke aanvulling van RIEMANN's resultaten voorhanden. HELMHOLTZ lost hier nl.

het „homogeniteitsprobleem" [1]) voor de ruimte op. Enkele mathematische tekortkomingen zijn naderhand nog door SOPHUS LIE aangevuld.

Bij deze belangrijke mathematische successen is HELMHOLTZ niet blijven staan. Voor hem kwam het in de eerste plaats aan op de philosophische consequenties, die uit zijn resultaten voortvloeiden. Hij toetste, evenals GAUSS, de ruimteleer van KANT aan de nieuwere inzichten in de meetkunde. Zijn resultaten legde hij neer in „Über den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze; Antwort gegen Herrn Professor LAND" (Wissenschaftliche Abhandlungen Bd II, p. 640). Als polemiek tegen LAND heeft dit werk zijn actualiteit verloren. Het interesseert ons hier alleen om de duidelijke uiteenzetting, die HELMHOLTZ van zijn eigen denkbeelden geeft. Wij geven enkele citaten, die weinig commentaar zullen behoeven.

„Ich halte dafür, dass durch die neueren Untersuchungen über die erweiterten Formen der Geometrie, oder durch die sogenannten *metageometrischen* Untersuchungen, folgende Sätze festgestellt sind:

„1) KANT's Beweis für den Ursprung a priori der geometrischen Axiome, welcher darauf basirt ist, dass keine von denselben abweichenden Raumverhältnisse in der Anschauung auch nur vorgestellt werden können, ist unzureichend, da die als Grund angeführte Behauptung thatsächlich unrichtig ist . . ."

„Uebrigens ist es ein Missverständniss von Herrn Professor LAND, wenn er glaubt, ich hätte gegen die Auffassung des Raumes als einer uns Menschen a priori gegebenen, für uns nothwendigen, also in KANT's Sinne transcendentalen Form der Anschauung widerspruch erheben wollen . . . Aber der Raum kann eine solche Form der Anschauung im KANT'schen Sinne sein, ohne dass diese Form der Anschauung nothwendig die Axiome einschliesst."

---

1) Dit probleem is door LIE als volgt geformuleerd:

„*Es sollen solche Eigenschaften gefunden werden, die sowohl der Schaar der Euklidischen als den beiden Schaaren von Nicht-Euklidischen Bewegungen zukommen, und durch die diese drei Schaaren von allen anderen möglichen Schaaren von Bewegungen einer Zahlenmannigfaltigkeit ausgezeichnet sind* (LIE, „Theorie der Transformationsgruppen" Bd. III S. 397; zie ook: WEYL „Mathematische Analyse des Raumproblems".)

„KANT's Lehre von den a priori gegebenen Formen der Anschauung ist ein sehr glücklicher Ausdruck des Sachverhältnisses; aber diese Formen müssen wirklich inhaltsleer und frei genug sein, um jeden Inhalt, der überhaupt in die betreffende Form der Wahrnehmung eintreten kann, aufzunehmen."

„2) Wenn trotz der Mangelhaftigkeit des Beweises die Annahme festgehalten wird, dass die Axiome als Gesetze unserer Raumanschauung wirklich a priori gegeben wären, so würden zweierlei Arten der Gleichwerthigkeit von Raumgrössen unterscheiden werden müssen, nämlich

1) Die *subjektive Gleichheit* in der hypothetischen transcendentalen Anschauung.

2) Die *objektive Gleichwerthigkeit* der reellen Substrate solcher Raumgrössen, welche sich im Ablauf physischer Verhältnisse und Vorgänge bewährt.

„Dass die letztere mit der ersteren zusammenfiele, könnte nur durch Erfahrung bewiesen werden. Nur auf die letztere käme es an bei unserem wissenschaftlichen und praktischen Verhalten der objektiven Welt gegenüber. Wenn beide nicht übereinstimmten, würden die ersteren nur den Wert eines *falschen Scheines* haben."

De oplossing van deze moeilijkheid geeft HELMHOLTZ zelf. „Aber der Raum kann eine solche Form der Anschauung im KANT'schen Sinne sein, ohne dass diese Form der Anschauung nothwendig die Axiome einschliesst."

We zien hier dus een confrontatie van de aanschouwingsruimte met wat wij thans de physische ruimte noemen. In de aanschouwingsruimte heerscht slechts „subjektive Gleichheit" in de physische ruimte heerscht de „objektive" Gleichwerthigkeit." We komen hierop in ander verband terug [1]).

Samenvattend kunnen we zeggen, dat HELMHOLTZ' arbeid van de grootste beteekenis is geweest voor de ontwikkeling van het mathematisch, physisch en psychologisch ruimtebegrip. Deze drievoudige onderscheiding komt evenwel bij hem nog niet volkomen tot haar recht.

Ook is het een groote verdienste van HELMHOLTZ, opnieuw de aandacht te hebben gevestigd op KANT's wijsbegeerte, waarvan de invloed destijds duchtig geslonken was. De kennis van die

---

[1]) Zie § 7 van dit Hoofdstuk.

wijsbegeerte is zonder twijfel aan de onderzoekingen van GAUSS en HELMHOLTZ ten goede gekomen, al zijn zij dan ook geen rechtzinnige belijders van de leer.

HELMHOLTZ is zeker in de eerste plaats de man geweest, die door zijn veelzijdigheid de studie van de ruimteleer in al haar onderscheidene aspecten heeft vernieuwd, en die ook in breede (vooral ook philosophische) kringen de belangstelling voor al deze vragen opnieuw heeft gewekt. Door hem b.v. eerst is de niet-Euclidische meetkunde algemeen bekend geworden, die tot zooveel polemiek aanleiding zou geven.

§ 6. POINCARÉ heeft een derde mogelijkheid aangewezen voor den oorsprong van de meetkundige eigenschappen: de conventie („La Science et l'Hypothèse", Ch. 5).

Conventie, dat wil zeggen vastlegging door een daad van (methodische) willekeur, speelt in de natuurwetenschap inderdaad een rol; men denke b.v. aan de keuze van de maateenheden. Hierin bestaat een groote mate van vrijheid, waarvan op oordeelkundige wijze gebruik dient te worden gemaakt.

Het gaat dan ook niet aan, POINCARÉ's „conventionalisme" (dat trouwens in zijn wijsgeerige opvattingen een veel geringere plaats inneemt dan men gemeenlijk denkt) als een vorm van subjectivisme te veroordeelen.

POINCARÉ doet opmerken, dat bij proeven als die van GAUSS noodzakelijk zekere conventies zijn verondersteld. Wanneer GAUSS eens zou hebben gevonden, dat de som van de hoeken van zijn driehoek van 180° verschilde, dan behoefde hij nog niet aan te nemen, dat de ruimte niet-Euclidisch was: hij kon de afwijking ook verklaren door de onderstelling, dat de lichtstralen (die bij zijn proef een wezenlijk element waren) zich niet volkomen rechtlijnig voortplanten. Omgekeerd bewijst zijn proef alleen iets op grond van de conventie, dat rechte lijnen geidentificeerd worden met banen van lichtstralen.

§ 7. De conventies, die mede de meetkundige eigenschappen van de natuurkundige ruimte bepalen, sluiten zich aan bij de fictie van het „ideale vaste lichaam" van de Euclidische meetkunde. Zooals bekend is, wijken de in de natuur werkelijk voorkomende vaste lichamen van dit ideaal vrij aanmerkelijk af. Deze afwijkingen zijn natuurverschijnselen; men moet ze dus causaal behandelen.

Daartoe gaan we ze eerst classificeeren. We onderscheiden:

1) de specifieke; deze loopen voor de verschillende lichamen uiteen, en hangen af van vorm en materiaal van het beschouwde lichaam. Oorzakelijk worden ze onderscheiden als

mechanische deformatie,
thermische uitzetting,
magnetostrictie, enz.

2) de niet-specifieke; men ziet zich genoodzaakt, afwijkingen in de lichamen aan te nemen, die van hun specifieke eigenschappen niet afhangen. Deze worden weer onderscheiden in

2*a*) niet-specifieke afwijkingen, afhankelijk van den bewegingstoestand van het beschouwde lichaam („contractie van LORENTZ-FITZGERALD"),

2*b*) niet-specifieke afwijkingen, alleen afhankelijk van plaats en tijd. Van deze laatste afwijkingen is de oorzaak natuurlijk niet in het lichaam zelf te zoeken. Want dan zouden toch specifieke verschillen moeten optreden. Men poneert als oorzaak zekere „metrische" eigenschappen van de ruimte, die daardoor dus inderdaad een „reelle Bedeutung" verkrijgt. Het in de ruimte voorkomend „metrisch veld" wordt beschreven door zekere grootheden g_{ik}, die afhangen van de verdeeling van de materie in de ruimte. De metrische eigenschappen van de ruimte bepalen dus de gedragingen van de materie, de materie bepaalt echter omgekeerd de metrische eigenschappen van de ruimte.

„Nach EINSTEIN ist die metrische Struktur der Welt nicht homogen. Wie ist das möglich, da doch Raum und Zeit Formen der Erscheinungen sind? Allein dadurch, dass *die metrische Struktur nicht apriori fest gegeben ist, sondern ein Zustandsfeld von physikalischer Realität, das in kausaler Abhängigkeit steht vom Zustand der Materie.* Das Wirkliche zieht in den Raum nicht ein wie in eine rechtwinklig-gleichförmige Mietskaserne, an welcher all sein wechselvolles Kräftespiel spurlos vorübergeht, sondern wie die Schnecke baut und gestaltet die Materie selbst sich dies ihr Haus" (WEYL „Mathematische Analyse des Raumproblems" S. 44).

Samenvattend kunnen we het resultaat van de nieuwere onderzoekingen over de ruimteleer als volgt weergeven; er is geen alternatief van den vorm: de ruimte en haar eigenschappen zijn òf aanschouwelijk gegeven en *a priori*, òf van empirischen oorsprong, maar het is mogelijk, dat de ruimte een dubbele functie vervult en haar eigenschappen dus niet alle denzelfden oorsprong bezitten; naast aanschouwing en ervaring is ook nog conventie denkbaar als bron van meetkundige kennis.

HOOFDSTUK IV.

Moderne Kritiek op Kant's Wijsbegeerte van de Wiskunde.

§ 1. Na eerst aanhanger van KANT's philosophie te zijn geweest, is COUTURAT, onder den invloed van RUSSELL's onderzoekingen, later tegenover haar komen te staan. Aan zijn nieuw verkregen standpunt heeft hij uiting gegeven in een rede ter herdenking van KANT's honderdsten sterfdag [1]), die we hier, als vertegenwoordigende de moderne kritiek op KANT's wijsbegeerte van de wiskunde, aan een eenigszins uitvoerige analyse willen onderwerpen.

Deze kritiek richt zich in hoofdzaak tegen het sterkste argument, door KANT aangevoerd: het synthetisch karakter van de mathematische oordeelen [2]).

COUTURAT wijst op het gebrek aan scherpte van KANT's definitie der analytische oordeelen en vervangt deze (met FREGE en HEYMANS) door de volgende: „Un jugement est analytique, lorsqu'il peut se déduire uniquement des définitions et des principes de la Logique."

Zoo komen van zelf de definities in de wiskunde aan de orde. „. . . nous constatons que toutes les définitions mathématiques sont purement *nominales* . . . Une définition . . . c'est une *convention* qui porte uniquement sur l'emploi d'un signe simple substitué à un ensemble de signes." De opzet van de kritiek wordt nu zóó omschreven: „. . . nous ne considérons comme mathématiques pures que l'Arithmétique d'une part, et la

---

1) „La Philosophie des Mathématiques de Kant" (RMM 12, 1904). H. POINCARÉ schreef daaromtrent: „j'ai entendu mon voisin dire à demi-voix: „On voit bien que c'est le centenaire de la *mort* de Kant"" („Les Mathématiques et la Logique", RMM 13, 1905).

2) Zie reeds het motto: „Wenn die mathematische Urtheile nicht synthetisch sind, so fehlt Kant's ganzer Vernunftkritik der Boden" (ZIMMERMANN: „Kants mathematisches Vorurteil", Sitzungsber. d. Wiener Ak., phil. h. Kl., Bd. 67 (1871); h. o. nader: F. A. LANGE: „Geschichte des Materialismus", 2. Buch, 1. Abschr., I).

Géométrie d'autre part, et nous examinerons tour à tour les propositions de ces deux sciences, pour rechercher leur caractère synthétique ou analytique."

§ 2. Zoo komt dus eerst KANT's theorie van de rekenkunde aan de orde, te beginnen met het klassieke voorbeeld,

$$7 + 5 = 12,$$

van een synthetisch oordeel (B 15). COUTURAT merkt op, dat, wil men alle oordeelen van dezen vorm als „immédiatement certaines", „évidents" en „indémontrables" beschouwen, men aan de rekenkunde een oneindig aantal axioma's ten grondslag moet leggen, iets, dat, naar zijn meening, als onmogelijk moet worden beschouwd.

Eén argument ten gunste van het synthetisch karakter van de rekenkundige oordeelen blijft dan nog over: „c'est la conception du nombre, telle qu'elle résulte de la théorie du schématisme. Ainsi, en tant que schème, le nombre est intermédiaire entre la sensibilité et l'entendement: il est à la fois intellectuel et intuitif . . . que vient faire le schème entre ce concept et son image? S'il est un produit de l'imagination, il ne peut être que confus comme l'image même; s'il est une méthode *générale* de construction, il ne diffère pas du concept; dans tous les cas, on ne voit pas comment il peut faciliter la comparaison et le rapprochement du concept et de l'image."

Ook de theorie van het schematisme bewijst voor COUTURAT noch voor het begrip der *grootte*, noch voor het *getal* eenige afhankelijkheid van de aanschouwing: „. . . la notion de grandeur est, en soi, distincte de l'espace et du temps, puisque ces deux formes d'intuition ne font que lui prêter des images ou des schèmes. Or la mathématique est, selon KANT, la science de la grandeur en général; donc comme telle, elle est indépendante de l'espace et du temps; elle ne repose pas sur l'intuition mais sur le concept *a priori* de grandeur. Seulement, on peut en dire autant du nombre . . . Concluons donc que les sciences du nombre et de la grandeur sont des sciences rationnelles pures, indépendantes de l'intuition."

Naar aanleiding van KANT's beschouwing der algebra (A 716 vv.) merkt COUTURAT op: „Il n'est pas vrai qu'en Algèbre on raisonne sur les signes; on raisonne toujours sur les idées qu'ils réprésentent."

Van algemeene strekking is nog de volgende opmerking:

„Il est étrange de voir Kant faire consister, comme un simple empiriste „l'évidence" dans la „certitude intuitive", faire appel au témoignage des „yeux" pour „préserver toutes les déductions de l'erreur", et ne reconnaître comme démonstrations que celles qui s'appuient sur l'intuition."

§ 3. Iets uitvoeriger gaan we in op COUTURAT's kritiek van de kantiaansche theorie der meetkunde:

„Il semble que, selon Kant, on ne puisse pas démontrer une théorème de Géométrie sans construire une figure et mener des lignes auxiliaires, et que toute construction implique nécessairement un appel à l'intuition. Or ni l'une ni l'autre de ces propositions n'est justifiée. Pour commencer par la seconde, une démonstration géométrique n'est valable que si elle ne repose pas sur un appel à l'intuition: tout le monde sait, qu'il ne faut jamais invoquer les propriétés apparents de la figure, et que l'on peut commettre ainsi des sophismes dont quelques-uns sont classiques . . . D'ailleurs, quand on parle de construire telle ou telle figure, c'est là une façon de parler anthropomorphique, une métaphore empruntée à la pratique: les figures que l'on trace . . . existent déjà idéalement, en tant qu'elles sont déterminées par les données de la question [1]) . . . Ainsi, lors même que les constructions seraient indispensables, elles n'impliqueraient pas un appel à l'intuition. Mais elles ne sont pas si indispensables qu'on le croit . . ."

Hier is KANT's meening zeer onzuiver wéérgegeven; voor KANT is een meetkundig bewijs niet identiek met een „blik op de figuur":

„Dem ersten, der den *gleichseitigen Triangel* demonstrierte, dem ging ein Licht auf; denn er fand, dass er nicht dem, was er in der Figur sahe, oder auch dem blossene Begriffe derselben nachspüren und gleichsam davon ihre Eigenschaften ablernen, sondern durch das, was er nach Begriffen selbst *a priori* hineindachte und darstellte, (durch Konstruktion) hervorbringen müsse . . ." (B XI).

---

[1]) Men lette op COUTURAT's begripsrealisme, dat in deze woorden tot uiting komt.

Couturat maakt, aansluitend bij Vaihinger nog de volgende interessante opmerking:

„Toutes ces inconséquences proviennent de la confusion perpétuelle (fort bien mise en lumière par M. Vaihinger) entre la forme de l'intuition et l'intuition pure. Il n'y a aucune raison pour que la forme de l'intuition soit elle-même une intuition. On pourrait peut-être résoudre par là les difficultés de la doctrine kantienne: l'espace et le temps seraient des formes d'intuition, mais des formes intellectuelles et non sensibles."

Helder zet Couturat uiteen, dat de z.g. paradox der symmetrische figuren geen paradox is, om daarna het tweede deel van zijn onderzoek als volgt te besluiten:

„Ce qui est sûr, c'est que les postulats de la Géométrie ne peuvent pas se déduire, comme les axiomes de l'Arithmétique, des principes de la Logique: et la preuve en est qu'il n'y a qu'une Arithmétique, tandis qu'il y a plusieurs Géométries ... il faut nécessairement faire un choix ... Notre choix (sera) guidé par la „commodité". Or, comme il s'agit ... d'une commodité intellectuelle, on peut présumer que ces raisons de „commodité", se réduiraient à des raisons ... rationnelles, c'est-à-dire à des jugements synthétiques *a priori* ... cette thèse donnerait bien plutôt raison à l'intellectualisme leibnizien qu'à l'„intuitionisme" kantien. Néanmoins, à coté de ces postulats d'un caractère intellectuel, il y en a au moins un, celui relatif au nombre des dimensions de notre espace, qui ne paraît ... avoir aucune raison d'être intelligible ... Si donc il y a un postulat qui paraisse justifier la doctrine kantienne, c'est bien celui-la".

„... tandis que l'Arithmétique dément la théorie kantienne, c'est dans la Géométrie que cette théorie a le plus de chances de subsister. Ce résultat est contraire à l'opinion d'un grand nombre de mathématiciens, qui prétendent que l'invention des géométries non euclidiennes à réfuté la doctrine kantienne ... ce qui a ruiné la philosophie kantienne des mathématiques, ce n'est pas la Géométrie non euclidienne mais la reconstruction logique de l'analyse, ce que M. Klein a appelé *l'arithmétisation des mathématiques*. ..... les progrès de la Logique et de la Mathématique au XIXe siécle ont infirmé la théorie kantienne et donné raison à Leibniz."

§ 4. We beschikken op het oogenblik nog niet over het materiaal, noodig voor een uitvoerige antikritiek, maar willen dit hoofdstuk toch niet besluiten, alvorens naar aanleiding van COUTURAT's betoog nog enkele opmerkingen te hebben gemaakt.

Niemand zal ontkennen, dat COUTURAT met groote scherpzinnigheid in KANT's werk inconsequenties heeft aangewezen, en punten, waarin KANT's formuleering of betoog leemten bevat, of beweringen, die door de moderne ontwikkeling zijn achterhaald. Zulke punten zijn er in COUTURAT's betoog evenwel ook, en op een aantal daarvan willen we in het kort even wijzen.

Ten eerste is daar de bewering, dat in de wiskunde enkel nominale definities zouden voorkomen; deze berust op een misvatting, die teruggaat tot PEANO's axiomatiek van de rekenkunde. PEANO meende nl. som en product van natuurlijke getallen nominaal te definieeren. Nieuwere onderzoekingen hebben echter bewezen, dat deze z.g. recurrente definities een veel gecompliceerder karakter bezitten [1]).

Het is verder volstrekt niet zoo ongerijmd, als het wellicht lijkt, een theorie op een oneindig aantal axioma's te fundeeren, mits in elk bewijs afzonderlijk het aantal gebruikte axioma's eindig is. ACKERMANN en HERBRAND b.v. hebben voor de rekenkunde oneindige axiomastelsels gegeven.

De axioma's van de rekenkunde, meent COUTURAT, zijn uit de principes van de logica af te leiden; deze afleiding [2]) echter, reeds door POINCARÉ streng gekritiseerd, is in de nieuwere onderzoekingen over de grondslagen van de rekenkunde verlaten; was ze mogelijk, dan zou het niet zoo veel moeite kosten, de contradictieloosheid van de rekenkunde te bewijzen.

Het is dan ook niet waar, dat er meerdere meetkunden, doch maar één rekenkunde zou zijn; inderdaad kan men door variatie van de axioma's meerdere rekenkunden opbouwen.

Na dit alles kan men reeds vermoeden, dat COUTURAT's vernietigend oordeel over KANT's wijsbegeerte eenigszins voorbarig was.

---

1) Zie het Aanhangsel II, waar ook nadere litteratuur is aangegeven.

2) afkomstig van FREGE: „Grundgesetze der Arithmetik"; zie hierover BACHMANN: „Untersuchungen zur Grundlegung der Arithmetik", Leipzig 1934.

B. METHODENLEER.

HOOFDSTUK V.

De moderne formeele Logica en haar Toepassing op de Methodenleer van de Wiskunde.

Een uiteenzetting van de historische ontwikkeling van de moderne formeele logica of *logistiek* (ook wel „mathematische" of „symbolische logica" genoemd; wij achten echter deze namen, die licht aanleiding geven tot verkeerd begrip van de zaak, minder gelukkig) moge hier achterwege blijven [1]); wij geven in het volgende in hoofdtrekken en op strikt elementaire wijze een opbouw van deze zoo interessante theorie.

§ 1. *De Oordeelslogica.* De oordeelslogica gaat uit van een aantal symbolen, t.w.

$$-, \; v, \; \&, \; \rightarrow$$ [2])

(de „logische constanten"), en van een onbepaald aantal letters

$$p, \; q, \; r, \; \ldots$$

(de „logische variabelen" of „elementaire oordeelen").

Door logische variabelen samen te voegen door middel van logische constanten ontstaan „logische uitdrukkingen" of „oordeelen"; opgemerkt worde, dat de term „logische uitdrukking" of „oordeel" ook op de logische variabelen of elementaire oordeelen van toepassing is, maar niet op de logische constanten.

Het begrip „logische uitdrukking" wordt nu op grond van de volgende recursieve en constructieve definitie [3]) nog nader omschreven:

---

[1]) Men zie b.v. JORGENSEN: „A Treatise of Formal Logic", SCHOLZ: „Geschichte der Logik".

[2]) De „beteekenis" van deze symbolen (resp. „niet", „of", „en", „als . . . dan . . .") doet thans nog niet ter zake.

[3]) Zie „Aanhangsel II".

1) Zijn A en B logische uitdrukkingen, dan ook

$\bar{A}$, $\bar{B}$ („niet-A", „niet-B"),

AvB („A of B"), hl2.66

$A \mathbin{\&} B$ („A en B"),

$A \rightarrow B$ („als A, dan B").

2) Een logische variabele is een logische uitdrukking.

3) Elke logische uitdrukking is uit logische variabelen te verkrijgen door daarop regel 1) vaak genoeg toe te passen.

Men gaat b.v. uit van de logische variabelen

$$p,\ q;$$

volgens de regels 1) en 2) zijn dan ook

$$\bar{p},\ \bar{q},\ pvq,\ p \mathbin{\&} q,\ p \rightarrow q,\ qvp,\ q \mathbin{\&} p,\ q \rightarrow p,$$

$$pvp,\ p \mathbin{\&} p,\ p \rightarrow p,\ qvq,\ q \mathbin{\&} q,\ q \rightarrow q$$

logische uitdrukkingen; op deze en op de logische variabelen p, q (en eventueel nieuwe logische variabelen $r, \ldots$) kunnen we nogmaals de regel 2) toepassen; zoo ontstaan steeds ingewikkelder logische uitdrukkingen.

Opmerking: opdat duidelijk zichtbaar zij, op welke wijze een logische uitdrukking is ontstaan, moet men, wanneer A en B beide of één van beide méér dan één variabele bevatten, zoo'n uitdrukking tusschen haken zetten, voor men AvB, $A \mathbin{\&} B$, $A \rightarrow$ vormt.

Derhalve is

$$\overline{[(\bar{p}vq) \mathbin{\&} r]}\ v\ \{[(p \mathbin{\&} q)\ v\ (\bar{q} \mathbin{\&} r)\ ]v\bar{\bar{r}}\}$$

een correct gevormde logische uitdrukking,

$$(pv\bar{q}) \mathbin{\&} (qv\bar{r}) \rightarrow (r \mathbin{\&} \bar{p})$$

niet; staat boven een uitdrukking A een streep $\bar{\ }$, dan kan men de haken om A weglaten [1]); de uitdrukking van zooeven zou dan worden:

$$\overline{(\bar{p}vq) \mathbin{\&} r}\ v\ \{[(p \mathbin{\&} q)\ v\ (\bar{q} \mathbin{\&} r)]\ v\bar{\bar{r}}\}.$$

---

[1]) Men kan door geschikte afspraken het aantal haken nog meer beperken; aangezien de formules dan moeilijker te lezen zijn, doen we dit niet.

Evenals men aan een algebraïsche uitdrukking, b.v.

$$(x+y)\,[(z^2+w^2)+y]$$

door „substitutie" van getalwaarden voor x, y, z, w een getalwaarde toevoegt, kan men aan een logische uitdrukking door substitutie van zekere logische waarden voor p, q, r, ... een bepaalde logische waarde toekennen.

Men moet daartoe

1) Vaststellen, welke waarden men voor de variabelen p, q, r ... substitueert.

2) Aangeven, volgens welke regels men het resultaat van die substitutie „berekent".

Dit geschiedt als volgt; voor de variabelen p, q, r ... substitueert men één van de „*logische waarden*"

$$\lambda,\ \mu.$$

Verder geeft men de volgende tabellen

$$\begin{array}{c|cc} A & \lambda & \mu \\ \hline \overline{A} & \mu & \lambda \end{array}$$

$$A\ \&\ B\left\{\begin{array}{c|cc} A\backslash^{B} & \lambda & \mu \\ \hline \lambda & \lambda & \mu \\ \mu & \mu & \mu \end{array}\right. \qquad A v B\left\{\begin{array}{c|cc} A\backslash^{B} & \lambda & \mu \\ \hline \lambda & \lambda & \lambda \\ \mu & \lambda & \mu \end{array}\right.$$

$$A \rightarrow B\left\{\begin{array}{c|cc} A\backslash^{B} & \lambda & \mu \\ \hline \lambda & \lambda & \mu. \\ \mu & \lambda & \lambda \end{array}\right.$$

Wil men nu de waarde van een uitdrukking bij substitutie uitrekenen, dan neemt men eerst die deelen van de uitdrukking, die opgebouwd zijn uit één of twee variabelen met behulp van hoogstens één constante; in de uitdrukking, die we al eerder als voorbeeld genomen hebben, zijn dat:

$$\overline{p},\ q,\ r,\ p\ \&\ q,\ \overline{q},\ r,\ \overline{r}.$$

De waarden van die partieele uitdrukkingen bij substitutie vindt men in de tabellen. Daarna zoekt men de partieele uitdrukkingen, opgebouwd uit één of twee van de reeds bekende, met behulp van één logische constante. In ons voorbeeld dus

$$\bar{p}vq,\ \bar{q}\ \&\ r,\ \bar{\bar{r}}.$$

Daar de waarde van hun onderdeelen bekend is, kunnen we nu ook die samengestelde uitdrukkingen met behulp van de tabellen vinden. Zoo voortgaande krijgen we ten slotte de waarde van de geheele logische uitdrukking [1]).

De oordeelslogica houdt zich bezig met dìe functies, die de waarde λ bezitten voor elke substitutie voor de variabelen. Zulke functies zijn er, b.v.

$$p\ v\ \bar{p}$$
$$p \rightarrow p$$

enz.; men noemt ze „tautologieën". Van de oordeelslogica of leer van de tautologieën geven we nu de fundamenteele eigenschappen in het kort wéér.

1) Is de functie $A(p)$, waarin behalve p nog andere variabelen mogen voorkomen, een tautologie, dan is ook de functie $A(\boldsymbol{B})$, die ontstaat, wanneer de variabele p overal waar ze voorkomt, door eenzelfde, overigens willekeurige, functie $\boldsymbol{B}$ vervangt, ook een tautologie („Substitutieregel").

Voorbeeld:

$$pv\bar{p}$$

is een tautologie, dus ook

$$(q\ \&\ r)v\overline{(q\ \&\ r)}.$$

We geven deze bewerking als volgt schematisch weer:

$$\frac{A(p)}{A(\boldsymbol{B})} \qquad (\alpha)$$

(„Substitutieschema").

2) Zijn A en $A \rightarrow \boldsymbol{B}$ logische uitdrukkingen met de waarde λ, dan bezit ook $\boldsymbol{B}$ de waarde λ („Implicatieregel").

We geven deze bewerking als volgt schematisch weer:

$$\frac{\begin{array}{c}A\\ A \rightarrow \boldsymbol{B}\end{array}}{\boldsymbol{B}} \qquad (\beta)$$

(„Deductieschema", „modus ponens").

---

[1]) Men doorziet deze, slechts schijnbaar gecompliceerde, regels gemakkelijk, wanneer men denkt aan de volkomen analogie met de berekening van een algebraïsche uitdrukking bij substitutie van getalwaarden.

Zijn in het bijzonder A en $A \rightarrow B$ tautologieën, dan zal ook B een tautologie zijn. Voorbeeld:

$$pv\bar{p}$$

en

$$(pv\bar{p}) \rightarrow (p \rightarrow \bar{\bar{p}})$$

zijn tautologieën, dus ook

$$p \rightarrow \bar{\bar{p}}.$$

Uit deze tweede eigenschap volgt, dat de tautologieën (wanneer we voor $A \rightarrow B$ lezen: „uit A volgt B") een *deductief systeem* vormen: dat wil zeggen een systeem, dat tegelijk met de stellingen „A" en „uit A volgt B" ook de stelling „B" bevat.

Passen we op tautologieën de schema's van substitutie en implicatie toe, dan ontstaan dus steeds weer tautologieën; zijn er wellicht een aantal tautologieën, waaruit *alle* andere door herhaalde toepassing van die schema's zijn af te leiden, m.a.w. is een axiomatische behandeling van de oordeelslogica mogelijk?

Het antwoord op deze vraag luidt bevestigend. Als axioma's kunnen b.v. dienst doen de tautologieën:

$$(AvA) \rightarrow A \qquad \text{I}$$
$$A \rightarrow (AvB) \qquad \text{II}$$
$$(AvB) \rightarrow (BvA) \qquad \text{III}$$
$$(A \rightarrow B) \rightarrow [(CvA) \rightarrow (CvB)] \qquad \text{IV}$$

in combinatie met de volgende definities (de definitie van een logische uitdrukking stelt haar waarde gelijk aan die van een reeds bekende):

$$A \rightarrow B \underset{\text{Df.}}{=} \bar{A}vB \text{ [1]} \qquad (a)$$
$$A \mathbin{\&} B \underset{\text{Df.}}{=} \overline{\bar{A}v\bar{B}}. \qquad (b)$$

Men behoeft dus eigenlijk alleen $\bar{A}$ en AvB door tabellen te definieeren en kan daarna van $A \rightarrow B$ en van $A \mathbin{\&} B$ nominale definities geven.

---

[1]) Het teeken $P \underset{\text{Df.}}{=} Q$ leze men als volgt: „Het symbool P is synoniem met het symbool Q". Het symbool $\underset{\text{Df.}}{=}$ geeft dus aan, dat we met een nominale definitie te maken hebben.

§ 2. Uit de zoo verkregen opbouw van de oordeelslogica bewijst men zeer eenvoudig de contradictieloosheid; met andere woorden, men bewijst, dat twee logische uitdrukkingen A en $\overline{A}$ niet tegelijk tautologieën kunnen zijn.

Immers, laat A een tautologie zijn, d.w.z. een logische uitdrukking, die voor elke substitutie de waarde λ bezit; om $\overline{A}$ te berekenen, moet men eerst A vinden, om daarna met behulp van de eerste tabel $\overline{A}$ te bepalen. Maar A is steeds λ, dus $\overline{A}$ is steeds μ, dus zeker geen tautologie. De onderstelling, dat A en $\overline{A}$ beide tautologieën zouden zijn, leidt dus tot een contradictie.

§ 3. *De Begripslogica.* We nemen n oordeelen, b.v. $p_1, p_2, \ldots p_n$, die we aanduiden door

$$f(a_1),\ f(a_2), \ldots f(a_n),$$

en definieeren nu:

$$(x)f(x) \underset{\mathrm{Df.}}{=} f(a_1)\ \&\ f(a_2)\ \&\ \ldots\ \&\ f(a_n), \tag{c}$$

$$(Ex)f(x) \underset{\mathrm{Df.}}{=} f(a_1) v\, f(a_2) v \ldots v\, f(a_n). \tag{d}$$

Hieruit volgt, dat

$$(x)f(x) \rightarrow f(x), \tag{V}$$

$$f(x) \rightarrow (Ex)f(x), \tag{VI}$$

waarin $f(x)$ één van de oordeelen $f(a_1) \ldots f(a_n)$ aanduidt, tautologieën zijn. Verder geldt de volgende eigenschap: stelt in de schema's

$$\frac{A \rightarrow f(x)}{A \rightarrow (x)f(x)}\ (\gamma) \qquad\qquad \frac{f(x) \rightarrow A}{(Ex)f(x) \rightarrow A}\ (\delta)$$

A een oordeel voor, dat niet van x „afhangt'', en bezit het oordeel boven de streep voor elke waarde van x de waarde λ, dan bezit ook het oordeel onder de streep (dat niet meer van x afhangt!) de waarde λ.

§ 4. De tautologieën I—VI, de definities a en b, de schema's α—δ bepalen de z.g. *elementaire oordeels-* en *begripslogica.* Het zou ons niet moeilijk vallen, deze nog tot de relatielogica uit te breiden; waar het hier alleen om het principe van de zaak gaat, willen we daarop niet verder ingaan. Wel merken we nog even op, dat de begripslogica uit de oordeelslogica door de nominale definities *c* en *d* is afgeleid. Uit de contradictieloosheid van de oordeelslogica kunnen we daarom onmiddellijk tot die van de begripslogica besluiten.

§ 5. We hebben tot nu toe oordeels- en begripslogica opgebouwd als leege schemata: zin en toepassingsmogelijkheid van deze schemata willen we nu in deze § aan de orde stellen.

Al eerder hebben we opgemerkt, dat we voor „$A \rightarrow B$" kunnen lezen „uit *A* volgt *B*"; zoo kunnen we voor „$A \,\&\, B$" lezen „*A* en *B*", voor „AvB": „*A* of *B*". Hierbij is in het oog te houden, dat hier „*A* of *B*" óók waar heet, wanneer *A* en *B* *beide* waar zijn; zooals bekend, staat het natuurlijk taalgebruik in dit opzicht niet geheel vast.

Verder kan als een *waar* oordeel worden beschouwd een oordeel met de waarde λ.

De oordeels- en begripslogica leveren ons nu tautologieën, d.w.z. oordeelscombinaties, die waar zijn, onverschillig of de constitueerende oordeelen waar zijn of niet.

Om het gebied van de tautologie te overschrijden, zullen we dus moeten vaststellen, welke niet-tautologische oordeelen waar zijn; dit geschiedt nu zoo, dat een aantal oordeelen, de z.g. axioma's, „willekeurig" als waar wordt gesteld. De oordeels- en begripslogica (en, bij gecompliceerder systemen, de hier niet behandelde relatielogica) stelt ons dan in staat andere oordeelen te vormen (te „deduceeren"), die eveneens waar zullen zijn. Op die wijze ontstaat dan een formeel-deductief opgebouwde theorie.

We hebben hier enkele hoofdstukken uit de logistiek en hun toepassing op de theorievorming geheel „synthetisch" uiteengezet. De historische gang van zaken was echter geheel anders. Men begon zich omstreeks het midden van de vorige eeuw de opgave te stellen, meer dan voorheen zich rekenschap te geven van de onderstellingen, die voor den opbouw van een mathematische theorie moeten worden gemaakt en van de formeele regels van dien opbouw; men wilde zooals men het wel uitdrukt, de wiskunde „formaliseeren".

Het opsporen van de gemaakte onderstellingen voerde tot de axiomatiek; het vaststellen van de deductieregels tot de logistiek. Van de beoefenaars van de axiomatiek noemen we Peano (voor de rekenkunde), PASCH en HILBERT (voor de meetkunde); voor de logistiek noemen we uit een zeer groot aantal onderzoekers: BOOLE, PEIRCE, SCHRÖDER, FREGE, PEANO, RUSSELL. Een overgang tot een oudere periode vormen eenerzijds mannen als GAUSS, RIEMANN, HELMHOLTZ, DEDEKIND, anderzijds o.a. LEIBNIZ, LAMBERT, HAMILTON. RUSSELL publiceerde in 1902 zijn „Principles of Mathematics", daarna van 1910 af, in samenwerking met WHITEHEAD, de „Principia Mathematica", waarin de formalisatie van de belangrijkste deelen van de wiskunde werd gegeven. Dergelijke werken hebben in sterke mate de opvattingen in zake het probleem van de grondslagen der wiskunde beïnvloed. Hieraan willen wij in de volgende paragrafen een uitvoerige bespreking wijden.

§ 6. *Het Logicisme.*

LOUIS COUTURAT heeft naar aanleiding van RUSSELL'S „Principles of Mathematics" in de Revue de Métaphysique et de Morale een even enthousiaste als leesbare reeks artikelen doen verschijnen, getiteld „Les Principes des Mathématiques". Men vindt daarin (XIIme Année p. 46) een uiteenzetting van de resultaten der nieuwere logica. Behalve het aantoonen van de onjuistheid van vier der traditioneele modi van het syllogisme (t.w. Darapti, Felapton, Bamalip, Fesapo) [1]), dankt men haar ook de weerlegging van drie fundamenteele dwalingen van de klassieke logica, te weten:

1. de identiteit van de beginselen der identiteit, der contradictie en van het uitgesloten midden;
2. dat genoemde beginselen voldoende fundament voor de logica zouden zijn;
3. dat alle redeneerwijzen tot syllogismen te herleiden zouden zijn.

In de inleiding nu maakt COUTURAT zich tot tolk van de aspiraties van een denkwijze, die men als logicisme betitelt; hij zegt nl. van RUSSELL'S „Principles":

„Cet ouvrage est en somme destiné à justifier la thèse capitale de l'identité de la Logique et de la Mathématique, en montrant que toutes les propositions de celle-ci reposent sur *neuf* notions

---

[1]) Zie Aanhangsel III.

indéfinissables et sur *vingt* principes indémontrables, qui sont les notions premières et les principes de la Logique même."

We hebben in het voorgaande (zeer in het kort) willen schetsen, hoe, op de basis van de groote successen der theoretische logica, de logicistische opvatting van de wiskunde ontstond. Het waren evenwel niet enkel successen, die de theoretische logica oogstte. Zij had ook zeer aanmerkelijke tegenslagen en wel in den vorm van het optreden van *paradoxen.*

Natuurlijk is het optreden van een paradox in de wiskunde voor de *theoretische logica* als wetenschap volstrekt geen ramp. Integendeel, het is van groote propagandistische waarde voor deze wetenschap; men leert er immers uit, dat men een nauwgezette analyse der redeneerwijzen moet nastreven.

Wel is het een ramp voor het *logicisme* als stelsel, wanneer, ondanks de pijnlijkste zorgvuldigheid in de symbolische operaties, zich toch ergens in het symbolensysteem een contradictie voordoet. Immers wordt daardoor het geheele systeem waardeloos, want in een contradictoor systeem kan men alles bewijzen.

Reeds bij de Grieken waren paradoxen bekend: met uitzondering van die van ZENO hadden ze slechts een anecdotisch karakter; men maakte er zich niet te ongerust over, daar men nog niet, zooals de logistici zouden doen, getracht had, logica en wiskunde te vereenigen tot één samenhangend deductief systeem. Men kon nog met een eenvoudig beroep op het gezond verstand de paradoxen links laten liggen. Toen evenwel de eerste antinomieën der verzamelingsleer bekend werden, brachten deze bij de logicistisch gezinde wiskundigen groote ontsteltenis teweeg.

Een van de karakteristiekste is de z.g. „paradox van RUSSELL"; we beschouwen eigenschappen van eigenschappen (of, wat op hetzelfde neerkomt [1]), klassen van klassen); een eigenschap kan b.v. de eigenschap bezitten, steeds een andere eigenschap in te sluiten.

---

[1]) De opvatting, dat er tusschen klassen en eigenschappen geen verschil bestaat, is tegenwoordig algemeen gangbaar (zie b.v. CARNAP: „Logische Syntax der Sprache") en behoeft geen nadere verdediging; een afzonderlijke theorie èn voor klassen èn voor eigenschappen (zooals b.v. de „Principia Mathematica" geven) is dus overbodig. Wij gebruiken dus de termen „klasse" en „eigenschap" zonder onderscheid.

Een eigenschap kan op zichzelf passen: zoo is b.v. de eigenschap „abstract" zelf abstract, e.d. Ook dit „op-zichzelf-passen" is een eigenschap, en wel één, die alleen voor eigenschappen zin heeft; evenzoo de eigenschap „niet op-zichzelf-passen". Past deze laatste eigenschap op zich zelf, ja of neen? Past ze op zichzelf, dan heeft ze de eigenschap „niet-op-zichzelf-passen", en past dus niet op zichzelf, en omgekeerd.

Men symboliseert deze contradictie als volgt: duidt α een eigenschap aan, en φ een eigenschap van een eigenschap; dan beteekent $\varphi(\alpha)$: „φ past op α"; men stelt nu de zooeven besproken eigenschap vóór door F:

$$F(\varphi) \underset{\text{Df.}}{=} \overline{\varphi(\varphi)}.$$

Substititie van F voor φ geeft dan

$$F(F) \underset{\text{Df.}}{=} \overline{F(F)}.$$

Het behoeft ons dus niet te verwonderen, dat van verschillende kanten pogingen in 't werk werden gesteld om de paradoxen onschadelijk te maken, en voor de toekomst het optreden van andere te voorkomen.

Russell gaf achtereenvolgens de „zigzag-theorie", de „theorie der grootte-begrenzing" en de „no-class" theorie. De laatste heeft hij uitgewerkt tot de typentheorie, waaraan we een enkel woord willen wijden. De klassen (verzamelingen of eigenschappen) worden hier volgens een „hierarchie" gerangschikt. Men gaat uit van zekere „individuen". Klassen van deze individuen heeten klassen van het eerste type. Klassen van klassen van het eerste type heeten klassen van het tweede type enz. . . . Men ziet nu gemakkelijk in, dat de paradox aangaande de klasse der klassen, die zichzelf niet bevatten, wordt opgelost. Een klasse kan *nooit* zich zelf bevatten, daar ze anders tot twee opvolgende typen zou behooren (de klasse der abstracte begrippen is dus geen klasse in den zin der typentheorie; evenmin de klasse aller klassen).

Hoe succesvol de typenleer ook moge zijn, ze behoudt het karakter eener theorie *ad hoc*. Het is in dit stadium niet in te zien, dat niet nog eens in een ander geval zich contradicties zouden kunnen voordoen; men moet dan maar afwachten of men in zulk een geval de theorie nogmaals door een geschikte inperking kan redden.

§ 7. *Het Intuitionisme.*

Toen, met de ontwikkeling van de mathematische logica, ook het logicisme zich tot een gesloten systeem begon te ontwikkelen, dat als ideaal stelde, de geheele wiskunde te ontwikkelen als een volgens zekere regels (de „wetten van de logica") opgebouwd symbolenstelsel, rees tegen dit streven verzet. Als eerste moderne „intuitionist" ontmoeten we KRONECKER, die de bekende stelling uitsprak: „Die ganzen Zahlen sind von Gott gemacht; alles andere ist Menschenwerk", en daarmede dus den eisch formuleerde de mathesis te *construeeren*, uitgaande van de intuitief gegeven getallenrij. Wat zoo niet te construeeren was, zou zinloos zijn.

In 1904 en 1905, toen COUTURAT een vurige verdediging van de logicistische opvatting der wiskunde publiceerde, die (trouwens geheel consequent) culmineerde in 't verwerpen van KANT's synthetische oordeelen *a priori*, was het (naast enkele anderen) POINCARÉ, die het opnam voor de intuitie (Revue de Mét. et de Morale 1905, 1906, ook in „la Science et la Méthode"). Volgens hem uit zich de intuitie in het toepassen der volledige inductie [1]); onder dit gezichtspunt onderzoekt hij nu werken van WHITEHEAD, RUSSELL, PEANO, BURALI-FORTI, HILBERT. Deze beschouwingen laten aan geest en ironie niets te wenschen over.

Toch gaan zij mank aan zekere oppervlakkigheid. Zoo heeft BROUWER later ook de woorden (gecit. art. p. 819): „en mathématiques le mot exister ne peut avoir qu'un sens, il signifie exempt de contradiction" terecht aangevallen als inconsequent [2]). POINCARÉ heeft dan ook de laatste consequenties van de intuitionistische beschouwingswijze niet getrokken. Daarom kon van zijn beschouwingen weinig invloed uitgaan. Tegenover het prestige, dat de logistische school verkregen had door de grootsche resultaten der theoretische logica, kon zelfs POINCARÉ's geweldige mathematische autoriteit weinig gewicht in de schaal leggen.

De eerste, die van de intuitionistische opvattingen de laatste consequenties heeft aanvaard, was onze landgenoot BROUWER. In zijn werk „Over de Grondslagen der Wiskunde" (1907) behandelt hij in drie hoofdstukken achtereenvolgens

---

[1]) Zie Aanhangsel II.

[2]) Kritiek op deze opvatting eveneens bij E. CASSIRER: „Kant und die moderne Mathematik", Kantstudien 12, 1907, S. 41.

De Opbouw der Wiskunde
Wiskunde en Ervaring
Wiskunde en Logica.

De „Opbouw der Wiskunde" is hier natuurlijk slechts schetsmatig uitgewerkt. Deze gaat uit van de stelling (p. 179):

„De wiskunde is een vrije schepping, onafhankelijk van de ervaring; zij ontwikkelt zich uit een enkele aprioristische oer-intuitie, die men zoowel kan noemen *constantheid in wisseling* als *eenheid in veelheid*".

Deze „oer-intuitie der wiskunde (en van alle werking van het intellect)" wordt nu (p. 8) nader beschreven „als het van qualiteit ontdane substraat van alle waarneming van verandering, een eenheid van continu en discreet, een mogelijkheid van samendenken van meerdere eenheden, verbonden door een „tusschen", dat door inschakeling van nieuwe eenheden zich nooit uitput".

Wij komen hierop in § 2 van hoofdstuk IX uitvoeriger terug.

Het tweede hoofdstuk, getiteld „Wiskunde en Ervaring" is voor ons zoo mogelijk van nog grooter beteekenis. De vraag naar de aprioriteit van de ruimteaanschouwing wordt hierin als volgt behandeld (p. 97):

„Nu de *aprioriteit*; men kan hiermee twee begrippen bedoelen, n.l.:

1⁰. Bestaan onafhankelijk van de ervaring.

2⁰. Noodzakelijke voorwaarde voor de mogelijkheid der wetenschap.

„Wordt het eerste bedoeld, dan volgt uit den intuitieven opbouw, dat de geheele wiskunde a priori is, en b.v. de niet-Euclidische evengoed als de Euclidische, de metrische meetkunde evengoed als de projectieve.

Wordt het tweede bedoeld, dan mogen we, daar wetenschappelijke ervaring haar oorsprong vindt in toepassing der intuitieve wiskunde op de „werkelijkheid", en er behalve ervaringswetenschap geen andere wetenschap bestaat, dan juist alleen de eigenschappen van die intuitieve wiskunde, niets anders a priori noemen, dan dat eene, wat aan alle wiskunde gemeen is, en dat aan den anderen kant toereikend is, om alle wiskunde op te bouwen, de intuitie van veeleenigheid, de oer-intuitie der wiskunde.

En daar deze samenvalt met de bewustwording van den tijd als verandering zonder meer, kunnen we ook zeggen:

Het eenige aprioristische element in de wetenschap is de tijd" [1]).

Verderop (p. 113) onderzoekt en verwerpt BROUWER nu, zooals te verwachten is, de ruimteleer van KANT.

In het derde hoofdstuk wordt de verhouding van wiskunde en logica onderzocht. We citeeren p. 127:

„Is dus de wiskunde niet afhankelijk van de logica, de logica is wèl afhankelijk van de wiskunde: vooreerst het *intuitief logisch redeneeren* is dat bijzondere wiskundige redeneeren, dat overblijft, als men bij het bekijken der wiskundige systemen zich uitsluitend beperkt tot relaties van *geheel en deel*..."

Belangrijk is verder nog op p. 129:

„Nu hebben de menschen, die alles wiskundig willen bekijken, dat ook gedaan met de wiskundige taal, en wel in vroeger eeuwen steeds uitsluitend met de taal der logische redeneeringen: de hieruit voortgekomen wetenschap is de *theoretische logica.* Eerst in de laatste twintig jaren is men de *wiskundige taal in het algemeen* op dezelfde wijze gaan bekijken: hierin bestaat... de logistiek. Zoowel theoretische logica als logistiek zijn dus empirische wetenschappen, en toepassingen der wiskunde, die... nog eerder tot de ethnographie, dan tot de psychologie moeten worden gerekend." En op p. 165:

„Dat in de taal, die de wiskunde begeleidt, de opvolging der woorden aan wetten gehoorzaamt, spreekt vanzelf; maar die wetten als de leidende bij den opbouw der wiskunde te beschouwen, daarin ligt de fout."

Met deze woorden is BROUWER's algemeen-wijsgeerig standpunt, naar wij meenen, voldoende toegelicht.

In „Het Wezen der Meetkunde" (1909) vinden we o.m. nogmaals een uiteenzetting van zijn opvatting inzake de aprioriteitsvraag; aangezien deze geen nieuwe gezichtspunten opent, gaan we er niet nader op in. Van groote beteekenis is het artikel: „Over de Onbetrouwbaarheid der logische Principes." Het principium tertii exclusi blijkt niet langer als een geoorloofd mathematisch bewijsmiddel te kunnen worden beschouwd. Het berust nl. op het in 1900 door HILBERT geformuleerde axioma van de oplosbaarheid van ieder wiskundig probleem.

Dit axioma vertolkt inderdaad een door haast ieder mathema-

---

[1]) Verg. KANT. B XVII.

ticus gedeelde overtuiging. Laat ons echter eens nagaan, op welke gronden die overtuiging berust.

Ze berust op de voorstelling, dat de mathematische objecten „bestaan" onafhankelijk van den denkenden geest; de driehoek, die geconstrueerd moet worden, het getal, dat moet worden berekend, *bestaan* al, zij het idealiter, en de opgave is slechts, dien driehoek of dat getal te leeren *kennen* [1]). Deze geesteshouding, die men vriendelijk als platonisme of begripsrealisme, onvriendelijk als „naiver Existentialabsolutismus" aanduidt, is psychologisch naar analogie van het naief realisme van de natuurobjecten volkomen te verklaren; men kan er andere opvattingen tegenover stellen, b.v. de opvatting, dat het denkend bewustzijn de wiskundige objecten zelf voortbrengt (het „intuitionisme" in engeren zin: KANT, BROUWER).

Het zal echter in het oog springen, hoe gewenscht het is, den opbouw van de wiskunde geheel onafhankelijk te doen zijn van ieder speciaal antwoord in deze metaphysische (kentheoretische) controverse. Men bezige dus, zoolang men voor het principium tertii exclusi of voor het axioma van HILBERT geen deugdelijker fundament bezit, geen dezer beide beginselen als mathematisch bewijsmiddel. Van deze conclusie heeft BROUWER ook de laatste consequenties aangedurfd. Het blijkt noodzakelijk, ongeveer de heele wiskunde van den grond af opnieuw op te bouwen. Van zoo'n intuitionistischen opbouw is het *uiterlijk kenmerk* het verwerpen van het principium tertii exclusi; het *eigenlijk karakter* wordt bepaald door de hooge mate van constructiviteit. In zijn verhandelingen „Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten" (1918—'19) en „Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten" (1923) heeft BROUWER voor dien opbouw den grondslag gelegd. Door BROUWER's leerlingen is deze opbouw in verschillende richtingen voortgezet (DE LOOR, BELINFANTE, HEYTING).

HEYTING heeft de intuitionistische wiskunde formeel-logisch onderzocht („Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik" I, II, III, 1930). Tengevolge van het verwerpen van het principium tertii exclusi zien de formeele regels van HEYTING er natuurlijk anders uit dan de gebruikelijke. Met nadruk wijst

---

[1]) Zie onze noot hoofdstuk IV, § 3.

HEYTING er echter op, dat niet *dit* onderscheid het gewichtigste strijdpunt uitmaakt. De intuitionistische kritiek op de klassieke wiskunde gaat uit van onderzoek naar haar *zin*; de intuitionistische opbouw van de wiskunde aanvaardt dien zin, doch tracht dien op meer volkomen wijze te verwezenlijken. Niet op den uiterlijken vorm van de intuitionistische redeneeringen (en dien onderzocht HEYTING) komt het dus aan, maar op haar interpretatie.

Tegenover de „Parijsche School" (na POINCARÉ o.a. BOREL en LEBESGUE) van het intuitionisme staat dus de school van BROUWER (waarbij ook nog WEYL genoemd moet worden; WEYL knoopt, behalve bij KANT, ook aan bij de phaenomenologische philosophie van HUSSERL) als de eenige, die met het intuitionistisch beginsel werkelijk ernst heeft gemaakt, en heeft laten zien, hoe de volgens dat beginsel opgebouwde wiskunde van de traditioneele verschilt.

§ 8. *Het Formalisme en de „Metamathematik"*.

Bij het verloren gaan van zoo aanzienlijke gedeelten van de traditioneele zoowel als van de moderne wiskunde legde men zich natuurlijk maar niet zoo aanstonds neer.

HILBERT schreef b.v.:

„Die Existenzbeweise mittels des Tertium non datur haben meist einen besonderen Reiz wegen ihrer überraschenden Kürze und Eleganz. Dieses Tertium non datur dem Mathematiker nehmen, wäre etwa, wie wenn man den Astronomen das Fernrohr oder dem Boxer den Gebrauch der Fäuste untersagen wollte."

De intuitionistische kritiek laat naar zijn meening van de wiskunde slechts „kümmerliche Reste" over; hij stelt zich tot taak, de wiskunde in haar traditioneelen omvang op te bouwen op een wijze, die aan de intuitionistische kritiek niet langer vat geeft. De logische principes worden daartoe op een geheel nieuwe wijze geïnterpreteerd: het zijn regels, die het Denken zich in volkomen vrijheid en dus in volledige willekeur oplegt. Van den „zin" dier principes, d.w.z. van de bedoeling, waarmee het Denken zich die regels stelt, kan men abstraheeren. De begrippen, die het Denken hanteert, kan men representeeren door symbolen; de logische principes worden dan gerepresenteerd door regels, volgens welke die symbolen gecombineerd worden.

Tot nadere verklaring diene het volgende citaat naar de inleiding van de „Grundlagen der theoretischen Logik" door HILBERT en ACKERMANN:

„Der Übergang zu logischen Folgerungen, wie es durch das Schliessen geschieht, wird in seinen letzten Elemente zerlegt und erscheint als formale Umgestaltung der Ausgangsformeln nach gewissen Regeln, die den Rechenregeln der Algebra analog sind; das logische Denken findet sein Abbild in einem *Logikkalkül.* Dieser Kalkül macht die erfolgreiche Inangriffnahme von Probleme möglich, bei denen das rein inhaltliche, logische Denken prinzipiell versagt. Zu diesen gehört z.B. die Frage, wie man die Sätze charakterisieren kann, die aus gegebenen Voraussetzungen überhaupt gefolgert werden können. — Eine besondere Bedeutung hat der Logikkalkül in den letzten Jahrzehnten noch bekommen, indem er sich zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel der mathematischen Grundlagenforschung entwickelt hat . . .

In jüngster Zeit hat HILBERT in einer Reihe von Universitätsvorlesungen den Logikkalkül dazu verwendet, um auf einem neuen Wege zu einem Aufbau der Mathematik zu gelangen, der die Widerspruchsfreiheit der zugrunde gelegten Annahme erkennen lässt."

De hier door HILBERT algemeen geformuleerde vraagstukken waren voor hem geenszins nieuw. Reeds in 1898 had hij in de „Grundlagen der Geometrie" zijn resultaten over de contradictieloosheid van de Euclidische meetkunde gepubliceerd, later ook analoge resultaten voor de niet-Euclidische meetkunden. Op de bij dit onderzoek gebezigde methoden kunnen we natuurlijk niet ingaan. Essentieel is echter, dat de beginselen van de logica en van de leer der natuurlijke en reëele getallen moesten worden vooropgesteld. Men kan nu trachten weer verder terug te gaan, en, om eens iets te noemen, uitgaande van de beginselen van de logica en van de leer der natuurlijke getallen alléén, te bewijzen, dat de leer der verzamelingen, en dus ook de (daaruit af te leiden) theorie der reëele getallen, contradictieloos is.

Het is echter evident, dat men de bewijsmiddelen niet tot nihil kan reduceeren. Welke bewijsmiddelen zullen ons uitgangspunt zijn?

HILBERT antwoordt: als bewijsmiddel fungeert het intuitief redeneeren, waarop ook BROUWER de wiskunde fundeert.

Toch is er een groot verschil: voor BROUWER vormen de resultaten van het intuitief redeneeren *de* wiskunde. HILBERT echter verstaat onder wiskunde uitsluitend het symbolenspel. *Over* dat symbolenspel echter gaat hij intuitief redeneeren. Op die wijze ontstaat de „metamathesis" (bewijstheorie).

Een mathematische theorie wordt bepaald door een stel teekens, door bepaalde operatieregels voor die teekens, en door bepaalde teekencombinaties, die als „axioma's" dienst doen. Men vraagt zich nu af: gegeven een stelling (dus een met inachtneming van operatieregels gevormde teekencombinatie),

1) is deze stelling bewijsbaar? d.w.z. op grond van de operatieregels uit de axioma's af te leiden?

2) is de ongerijmdheid van die stelling te bewijzen? d.w.z. kan men na toevoeging van die stelling aan de axioma's *iedere* stelling bewijzen?

Een bijzonder geval van dit vraagstuk is dat van de contradictieloosheid van de theorie [1]).

Men is gewoon, in een theorie achtereenvolgens voor verschillende stellingen met meer of minder succes die vraag te stellen. HILBERT stelt het probleem, deze vraag voor de stellingen van een theorie *algemeen* te beantwoorden. Dat is het „Entscheidungsproblem": heeft men dit probleem voor een theorie opgelost, dan weet men van elke stelling, of deze bewijsbaar en zoo ja, wat haar bewijs is. Het „Entscheidungsproblem" is opgelost voor de oordeelslogica, en voor enkele andere eenvoudige theorieën.

§ 9. *Samenvatting.* De oorspronkelijke doelstelling van de mathematische logica was gericht op een codificatie van de beschouwde theorieën uit formeel-logisch gezichtspunt. Ze vroeg zich af: welke postulaten liggen aan deze theorie ten grondslag, welke bewijsmiddelen zijn voor haar opbouw gebezigd? Op het bewustzijn, de volledige kennis dier postulaten en bewijsmiddelen te bezitten, gronden zich de aspiraties van het *logicisme*: alle mathematische begrippen door expliciete definitie tot logische begrippen terug te voeren, en alle mathematische stellingen deductief uit de logische principes af te leiden. *Intuitionisme* en *formalisme* komen nu dáárin overeen, dat ze de vraag stellen naar de „legitimiteit" der gebruikte bewijsmiddelen. Ze verschillen echter in de antwoorden, die ze op die vraag geven.

---

[1]) Een voorbeeld van een contradictieloosheidsbewijs gaven we in § 2.

De wortel van de oneenigheid tusschen logicisme en intuitionisme ligt in de radicaal verschillende beteekenis door deze beide richtingen aan de mathematische evidentie toegekend. Voor DESCARTES, KANT, SCHOPENHAUER is de evidentie („reine Anschauung") voor de wiskunde het fundament bij uitstek. In de eerste plaats is noodig een aanschouwelijke fundeering van de mathematische stellingen; haar logische ordening in een op „axioma's" deductief gebouwd systeem kan pas daarna komen.

Tegen deze opvatting verzet zich het *logicisme*. Het voornaamste argument is gelegen in de bedrieglijkheid van de aanschouwelijke evidentie [1]); het grondvesten van de mathesis op evidentie brengt in deze wetenschap noodzakelijk een element van willekeur, van smaak, kortom van „subjectiviteit". Voor „objectief" onderzoek vatbaar zijn alleen de verbale mededeelingen *over* „Evidenzerlebnisse"; de logica van de wiskunde heeft zich slechts bezig te houden met die mededeelingen en te onderzoeken, welke samenhangen daartusschen bestaan. Die mededeelingen, systematisch geordend, vormen de mathematische theorieën [2]).

BROUWER wijst op de onmogelijkheid, de evidentie te elimineeren; het onderzoek van de gesymboliseerde theorieën (logistiek en bewijstheorie) is zonder bepaalde evidenties theoretisch ondenkbaar en practisch onuitvoerbaar (zooals de formalistische school van HILBERT volledig blijkt te erkennen), en die evidenties zijn in wezen met de traditioneele mathematische evidenties volkomen gelijksoortig [3]).

Ook is het feit, dat de evidentie ons wel eens misleidt, evenmin een voldoende aanleiding, de evidentie uit de wiskunde te verbannen, als het voorkomen van zinsbedrog de waarneming voor de natuurwetenschap waardeloos maakt. De eisch, elk beroep op evidentie te vermijden kan alleen gesteld worden, wanneer men van de wiskunde een absolute zekerheid verlangt (een standpunt, dat MENGER n.b. den intuitionisten verwijt!) en dus een absoluten waarborg tegen fouten en vergissingen noodig heeft.

Wel is het noodzakelijk, dat we ons op het wezen van de

---

[1]) Voorbeelden bij HANS HAHN: „Die Krise der Anschauung", „Krise u. Neuaufbau in den ex. Wiss." 1933 Lpz/Wien, S. 4 ff.

[2]) KARL MENGER: „Die neue Logik" l.c. S. 93 ff.

[3]) Zooals uit de uiteenzettingen van §§ 1—5 en van Aanhangsel I kan blijken.

mathematische evidentie nader bezinnen, teneinde aan haar toepassing op de wiskunde een grondslag te verschaffen (*subjectieve fundeering van de wiskunde*) en aldus de mathematische bewijsmiddelen te legitimeeren.

Volgens de *intuitionisten* ontleenen een mathematische theorie en de daarin gebezigde bewijsmiddelen hun legitimiteit aan hun „constructief" karakter.

Een mathematische theorie moet gefundeerd zijn op bepaalde mathematische constructies (zoo b.v. de rekenkunde op de bewerkingen met geheele getallen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, deelen, ontbinding in factoren, enz.) en ontwikkelt van die constructies de eigenschappen. Haar stellingen poneeren de mogelijkheid of onmogelijkheid van constructies („existentiestellingen", „onmogelijkheidsstellingen"). In het eerste geval bestaat het bewijs in het aangeven van de wijze, waarop de constructie kan worden uitgevoerd, in het tweede geval in het aanwijzen van een plek, waar de constructie noodzakelijk moet mislukken. De uiteenzetting op papier (in logistische symbolen of in natuurlijke taal) of door het gesproken woord is van die constructies slechts een beschrijving. De wetten van de logica beschrijven alleen de algemeene regelmatigheden dier uiteenzetting en zijn dus voor de mathesis als zoodanig niet essentieel.

Voor den *formalist* echter is, evenals voor den logicist, zoo hij consequent ware, die symbolische uiteenzetting de wiskunde zelf. Of de stellingen van de wiskunde een „zin" bezitten, komt er voor hem niet op aan. Essentieel zijn de relaties dier stellingen. Een mathematische theorie is legitiem, wanneer het bewijs van haar niet-strijdigheid is geleverd.

Onderzoekingen van GÖDEL [1]) schijnen er evenwel op te wijzen, dat aan pogingen in deze richting een principieele grens is gesteld. GÖDEL bewijst nl. langs metamathematischen weg: voor een „recursieve", niet contradictore formeele theorie k kan het bewijs van de niet-strijdigheid niet geleverd worden met behulp van bewijsmiddelen, die men binnen die theorie k kan formaliseeren.

---

[1]) Monatshefte f. Math. u. Phys., 38 (1930), S. 173, waarheen we ook moeten verwijzen voor een uiteenzetting van wat onder een recursieve theorie moet worden verstaan (de uiteenzetting van MENGER l.c. is ten deze onbetrouwbaar); alleen merken we op, dat het systeem der „Principia Mathematica" en v. NEUMANN's formeele theorie van de verzamelingen recursieve theorieën zijn, zoodat daarop GÖDEL's theorema van toepassing is.

Dit tast weliswaar de metamathematische methode niet aan; immers deze maakt van intuitieve niet-geformaliseerde bewijsmiddelen gebruik. Wanneer we echter die bewijsmiddelen gaan formaliseeren, zal moeten blijken, dat ze uitgebreider zijn dan de bewijsmiddelen van de theorie k. Een successieve inkrimping van de gebruikte bewijsmiddelen blijkt dus onmogelijk. Wel blijkt uit GÖDEL's resultaat de vruchtbaarheid der metamathematische methode, echter ook de onmogelijkheid, langs den weg der formalisatie tot een „absoluut fundament" der mathesis te geraken.

§ 10. *De Axiomatiek.* Van welke beteekenis is de axiomatische methode voor den opbouw van de intuitionistische wiskunde?

Na WEYL [1]) heeft HEYTING in de inleiding tot zijn proefschrift [2]) deze vraag aangeroerd; in afwijking van WEYL, die over schijnt te hellen tot de opvatting, dat voor den intuitionist de axiomatiek elke beteekenis verliest, meent HEYTING, dat voor een axiomatische behandeling van intuitionistische theorieën plaats blijft, al kan ze niet langer dienen als grondslag. Hij gaat uit van een door BROUWER in zijn „Begründung der Mengenlehre" I blz. 4 aangegeven beginsel, op grond waarvan uit de soorten de n^e orde een soort A der $(n + 1)^e$ orde gevormd wordt [3]). „De axiomatiek is een toepassing van dat principe; de definieerende eigenschap der nieuwe soort A is, dat tusschen de elementen van haar elementen de door de axioma's gepreciseerde relaties bestaan."

Het zij ons vergund, hiernaast een andere opvatting te stellen, waardoor de axiomatiek een grootere (zij het niet volkomen) zelfstandigheid verkrijgt; we gaan daartoe uit van de door KOLMOGOROFF [4]) gegeven interpretatie van de intuitionistische logica als een logica der problemen.

De logische variabelen p, q, r, . . . duiden *problemen* aan. De intuitionistische logica leert nu, problemen tot andere te her-

---

[1]) H. WEYL: „Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik", Math. Zs. 10, 70.

[2]) A. HEYTING: „Intuitionistische Axiomatiek der Projectieve Meetkunde", Proefschr. A'dam 1925.

[3]) Dit principe komt overeen met RUSSELL's typentheorie; BROUWER's soorten van stijgende orde zijn de intuitionistische analoga van RUSSELL's klassen van type 1, 2, ...

[4]) KOLMOGOROFF, Math. Zs. 35, 58.

leiden. Het probleem, de oplossing van een probleem q tot de oplossing van een probleem p te herleiden, wordt aangeduid als $p \rightarrow q$.

De axioma's vertegenwoordigen dus de grondproblemen van de theorie. Men kan nu op twee manieren te werk gaan: men kan vooreerst aannemen, dat deze problemen vooraf reeds zijn opgelost, zoodat de theorie niets anders doet, dan onopgeloste problemen (vertegenwoordigd door de afgeleide stellingen) tot deze opgeloste grondproblemen herleiden.

Men doet dit, wanneer men, zooals HEYTING in zijn genoemd proefschrift, aan de axiomatische behandeling van de projectieve meetkunde een arithmetische fundeering doet voorafgaan. De axioma's formuleeren dan zekere arithmetische (algebraïsche) problemen, waarvan de oplossing bekend wordt ondersteld, en waartoe de andere oplosbare problemen van de theorie worden herleid.

Men kan echter ook (en op deze wijze komen o.i. de mérites van de axiomatiek beter tot haar recht) de axioma's onafhankelijk van een arithmetische fundeering opstellen en daarna eerst (b.v. door invoering van *coördinaten*) de meetkundige problemen tot arithmetische trachten te herleiden [1]). De axioma's formuleeren dan een complex problemen, een plan van constructie (want elk probleem heeft betrekking op een mathematische constructie); eerst gedurende de deductieve ontwikkeling van de theorie vinden die problemen hun oplossing, vindt dat plan zijn uitvoering.

---

[1]) Zie b.v. HERMANN WEYL: „Mathematische Analyse des Raumproblems", Berlin 1923, 1. Vorl.

HOOFDSTUK VI.

De Systematische Plaats van de Meetkunde als Onderdeel van de Zuivere Wiskunde.

Het vorige hoofdstuk bepaalde zich tot een onderzoek van de wiskundige methode in het algemeen. De moderne mathesis echter is een wetenschap, die aan uiterste strengheid en geslotenheid van opbouw een buitengewone differentiatie paart. Zij omvat talloos vele afzonderlijk op te bouwen en onderling onafhankelijke theorieeën, zoodat men wellicht zou kunnen vermoeden, dat ook in de mathematische methode een dergelijke differentiatie zou bestaan, waarmee dan in het voorgaande misschien niet in voldoende mate rekening was gehouden. Vooral zou deze vraag zich kunnen voordoen naar aanleiding van de nog steeds veelvuldig voorkomende onderverdeeling van de wiskunde in analyse en meetkunde. Hield misschien onze, in beginsel sterk naar het formeele georienteerde, uiteenzetting wellicht niet eenigszins eenzijdig rekening met de behoeften der analyse, en is dan voor de behandeling van de meetkunde een meer op het aanschouwelijke gerichte methode misschien niet geheel onontbeerlijk?

Onderzoekt men, wat er in de zuivere wiskunde alzoo als „meetkunde" wordt aangemerkt, dan ziet men vóór zich uitgestald een chaos van de meest uiteenloopende vakken. Het blijft aanvankelijk duister, waarom men op deze onderdeelen der wiskunde het etiket „meetkunde" plakt en op andere niet. Inderdaad blijkt ook, dat aan deze betiteling geen consequente indeelingsmethode ten grondslag ligt, maar dat daarbij verschillende factoren een invloed kunnen doen gelden.

Allereerst is daarbij te noemen de historische factor. Van oudsher was overgeleverd de „Euclidische Meetkunde", dat wil zeggen een tak van de wiskunde, die in beginsel voortbouwt op het door Euclides in zijn „Elementen" (*Στοιχεῖα*) gelegde fundament, waarbij men evenwel nastreeft verbreeding en verdieping van de hierin neergelegde resultaten. Nu kwamen in later tijd hiernaast afwijkende methodische gezichtspunten op, b.v. die van de „analytische meetkunde" (DESCARTES), die van de „projectieve meetkunde" (DESARGUES, PONCELET e.a.), die aanleiding gaven tot de ontwikkeling van in den grond van de Euclidische meetkunde onderscheiden takken van de wiskunde. Intusschen was deze ontwikkeling in het begin zoo nauw met de probleemstelling van de Euclidische meetkunde verbonden, dat het fundamenteele verschil ternauwernood gevoeld werd, en dus deze nieuwe vakken eveneens den naam „meetkunde" ontvingen, dien ze later bleven behouden.

Met de pretentie, fundamenteel van de Euclidische te verschillen, maar niettemin volkomen gelijkwaardig er mee te zijn, en dus evenzeer den naam „meetkunde" te verdienen, verschenen nu de veel omstreden „Niet-Euclidische Meetkunden". En deze ontwikkeling bleef voortgaan. Ieder nieuw vak, dat zich oorspronkelijk aanleunde aan de probleemstelling van één der als meetkunde betitelde vakken, nam eveneens dezen naam aan, zoodat hierdoor een groot aantal meetkundige wiskundevakken ontstond.

Een andere factor is die van de methode en de nomenclatuur in het onderhavige wiskundevak. Zoo'n vak kan vaak oorspronkelijk geheel vreemd staan t.o.v. de meetkunde; nu komt iemand op het idee, dat de behandeling van dat vak wordt vergemakkelijkt door in dat vak een meetkundige nomenclatuur te gebruiken. Zoo krijgen nu de stellingen een meetkundigen klank, men kan alles meetkundig inkleeden, en zelfs van tijd tot tijd door figuren de zaken verduidelijken. Dat dit alles voor velen een groot convenient kan zijn, laat zich hooren, maar evenzeer, dat het karakter van het vak de facto niet verandert [1]).

Den systematischen factor treffen we aan bij KLEIN. In zijn „Erlanger Programm" geeft hij de opvatting van meetkunde als de invariantentheorie van een of andere „transformatiegroep". We willen dit nog nader toelichten door een voorbeeld. In de Euclidische meetkunde wordt geen onderscheid gemaakt tusschen twee driehoeken, die *congruent* zijn. Hiermee bedoelen we niet,

---

[1]) Voorbeeld: de afbeelding van de complexe getallen op de punten van het platte vlak („complex vlak" van GAUSS-ARGAND). Deze werd de grondslag voor de latere ontwikkeling van de „meetkundige functieleer" (RIEMANN, KLEIN e.a.). Een ander voorbeeld levert de getallentheorie (MINKOWSKI: „Geometrie der Zahlen").

dat men ze als identiek beschouwt, maar men beschouwt ze als aequivalent: alleen die eigenschappen van den driehoek, die ze met alle ermee congruente gemeen heeft, worden als „in den zin der Euclidische meetkunde wezenlijk" beschouwd. Nu ontstaan alle congruente driehoeken uit elkaar door verschuiving [1]); als men symmetrische driehoeken ook congruent noemt, moet men hier bijvoegen: of door spiegeling. Wezenlijke eigenschappen van een driehoek (of een andere figuur) gaan dus bij verschuiving of spiegeling niet teloor, en ook omgekeerd: eigenschappen, die bij verschuiving of spiegeling niet teloor gaan, zijn als wezenlijk te beschouwen.

Dat de gelijkbeenige driehiek *ABT* met de top naar beneden wijst, is *geen* wezenlijke eigenschap, want we kunnen hem zoo verschuiven, dat de top in een willekeurige richting wijst. Dat hij gelijkbeenig is, en dat de beenen $3\frac{1}{2}$ c.m. lang zijn, is *wel* een wezenlijke eigenschap, want nooit kan men *ABT* op zoo'n manier spiegelen of verschuiven, dat deze eigenschap verloren gaat.

„*Geometrie unterschiedet sich eben dadurch von Topographie, dass nur solche Eigenschaften des Raumes geometrisch heissen, welcher bei einer gewissen Gruppe von Operationen ungeändert bleiben*" [2]).

In ons geval bestond die „Gruppe von Operationen" uit de (Euclidische) verschuivingen en spiegelingen. Men kan nu ook een andere „Gruppe von Operationen" ten grondslag leggen, en krijgt dan noodzakelijk een andere meetkunde. Door de systematische onderzoekingen van Lie, Klein e.a. over deze z.g. „Transformationsgruppen" heeft men nu tevens een systematisch overzicht gekregen van de meetkunden, die men *op die manier* kan verkrijgen.

Op den duur werd echter ook deze omschrijving weer te eng. Brouwer gaf de volgende uitbreiding („Het Wezen der Meetkunde", Amsterdam 1909 p. 13):

„Meetkunde houdt zich bezig met de eigenschappen van ruimten van een of meer dimensies. In het bijzonder onderzoekt en classificeert zij de in die ruimten mogelijke puntverzamelingen, transformaties en transformatiegroepen."

Een vierde factor van niet te onderschatten beteekenis is de aesthetische. Wanneer men een onderdeel van de wiskunde, een

---

[1]) Ook de draaiïngen worden hierbij tot de verschuivingen gerekend.

[2]) F. Klein, „Höhere Geometrie" II Göttingen 1893 S. 29.

bewijsmethode, een manier van behandelen „meetkundig" noemt, dan is dat niet zelden een vorm van aesthetische waardeering, meestal gunstig bedoeld, maar soms ook ongunstig.

In gunstigen zin „meetkundig" heet een bewijsmethode, die geen gebruik maakt van ingewikkelde berekeningen, of langdradige formuleeringen, maar die recht op het doel afgaat en doorzichtig verloopt; ook een methode, die zich op elegante wijze door een figuur laat illustreeren (natuurlijk doet die figuur alleen als illustratie, niet als bewijsmiddel dienst). Aan den anderen kant beschouwen sommige meetkundigen b.v. een behandeling van de algebraïsche krommen, die op groote schaal gebruik maakt van de theorie der complexe functies, niet als voldoende „meetkundig". In ongunstigen zin „meetkundig" noemt men een behandeling, die door langdradige redeneeringen een voor de hand liggende algebraïsche behandeling tracht te vermijden, of ook wel een, die aan mathematische strengheid te wenschen overlaat.

We kunnen uit dit alles met Veblen en Whitehead („The Foundations of Differential Geometry", p. 17) de volgende slotsom aanvaarden.

„A geometry is a mathematical science. The question then arises when the name geometry is given to some mathematical sciences and not to others. It is likely that there is no definite answer to this question but that a branch of mathematics is called a geometry because the name seems good, on emotional and traditional grounds, to a sufficient number of competent people."

Voor ons wil dat natuurlijk zeggen, dat er van philosophisch standpunt geen aanleiding meer is, onderscheid te maken tusschen meetkundige en andere takken van de wiskunde, tenminste zoolang we ons beperken tot de zuivere wiskunde en met name nog afzien van de toepassing van wiskunde op de ervaringswetenschappen.

We hebben in het voorgaande gezien, dat het een kwestie is van historie, speciale systematiek, nomenclatuur, ja zelfs van aesthetische waardeering en van traditie, of men een zekeren tak van de zuivere wiskunde aanduidt als meetkundig. Hieruit kunnen we concludeeren, dat we bij een onderzoek van de zuivere wiskunde uit een zuiver logisch oogpunt beter doen, die onderscheiding van de wiskunde in meetkundige en niet-meetkundige onderdeelen als hier niet relevant buiten beschouwing te laten. De vraag, of het bewijs in de meetkunde zuiver logisch kan worden geleverd, en ook de vraag, wat dat eigenlijk beteekent: een zuiver logisch bewijs leveren, zijn dus voor de meetkunde geen andere meer dan voor eenig ander onderdeel van de zuivere wiskunde.

Nu kan men de eerste vraag voor de wiskunde niet in 't algemeen beantwoorden: men moet voor elk onderdeel van de wiskunde afzonderlijk beproeven, of een zuiver logische opbouw [1]) mogelijk is. Kort gezegd komt het er op aan, zonder een beroep te doen op de „ervaring", dan wel op logisch niet zuiver te vatten „voorstellingen", de „grondbegrippen" te definieeren en de daarvoor geldende eigenschappen in „axiomata" of „postulaten" te formuleeren. Daarna moet men, enkel voortbouwende op deze „grondslagen", de overige begrippen van het onderhavige onderdeel van de wiskunde invoeren, en de stellingen ervan opstellen en bewijzen.

Deze methode, de axiomatische, is wel het eerst door D. Hilbert in haar uiterste consequenties doorgevoerd; minder geslaagde pogingen treft men reeds veel vroeger aan (de eerste bij Euclides); wij stellen ons ermee tevreden, op te merken, dat Hilbert in zijn werken „Grundlagen der Geometrie" (1898), „Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie" (1903), „Über die Grundlagen der Geometrie" (1902), „Über den Zahlbegriff" (1900) voor de aldaar behandelde takken der wiskunde de axiomatische methode met volledig succes heeft toegepast, en zoo het „zuiver mathematisch" karakter dier wetenschappen buiten allen twijfel heeft vastgesteld, en dat vele andere wiskundigen voor andere takken der wiskunde zich dezelfde moeite hebben getroost.

Daarna doet zich evenwel een tweede vraag voor. Wat is het „wezen" van het logisch bewijs, wat is de „rechtsgrond" van de axiomatische methode? Deze vraag moet in 't algemeen worden beantwoord. Wij kunnen daarvoor naar het vorig hoofdstuk verwijzen [2]).

Een derde vraag is dan nog over. Hoe is het mogelijk, dat

---

[1]) Bedoeld is een zuiver rationeele opbouw, een opbouw onafhankelijk van de empirie, en niet een opbouw in een of ander logistisch systeem.

[2]) Hoofdstuk V, §§ 8—10.

een zuiver wiskundige wetenschap als de meetkunde, een wetenschap dus, die zuiver logisch kan worden opgebouwd, in wisselwerking treedt met de „ervaring”? Hoe is het mogelijk, dat een dergelijke wisselwerking vruchtbaar is? Deze vraag is het, die den grondslag uitmaakt van de probleemstelling van KANT's philosophie. Voor KANT was theoretische wetenschap ondenkbaar anders dan als grondslag van ervaringswetenschap. Wij volgen hem hierin niet; naar onze meening is een zuivere theoretische opbouw van de wiskunde mogelijk; of die wiskunde toepasbaarheid bezit op ervaring is een tweede, niet minder belangrijke vraag, die pas nu aan de orde kan komen. Deze tweede vraag beantwoordt KANT door zijn invoering van de aanschouwingsruimte. Wij hebben dit begrip reeds uitvoerig besproken, en gaan thans dus tot nader inzicht in de toepasbaarheid van de wiskunde over tot een studie van de methodenleer van de ervaringswetenschappen.

HOOFDSTUK VII.

De Methoden van de Ervaringswetenschappen.

§ 1. *Het Waarnemingsoordeel.* Het waarnemingsoordeel bestaat in het aanduiden van een aanschouwelijk gegeven „feit" door een teeken of door een stel teekens; het begrip „teeken" worde in zoo ruim mogelijke beteekenis genomen, zoodat behalve woorden, getallen e.d. voorstellingen en voorstellingscomplexen ertoe kunnen worden gerekend, in zooverre ook deze in zekeren zin kunnen dienen, om een aanschouwelijk gegeven te „objectiveeren" en te „representeeren".

Zoolang een aanschouwelijk „gegeven" gevangen blijft in den chaos der gewaarwordingen, blijft het individueel-subjectief; zal het objectieve waarde bezitten, dan moet het geobjectiveerd zijn en aangeduid zijn door een teeken. Alleen geobjectiveerd bezit het beteekenis voor de wetenschap; de logica als wetenschapsleer heeft zich dus in de eerste plaats bezig te houden met het objectivatieproces.

§ 2. Welke aanschouwingselementen nu zijn voor objectivatie vatbaar? Anders gezegd: waarop berust de mogelijkheid van objectivatie door middel van teekens?

Het antwoord is hier niet moeilijk te geven: de mogelijkheid van aanduiding door teekens immers berust klaarblijkelijk op de mogelijkheid, *relaties van overeenkomst en verschil* te stellen en weer te geven door overeenkomst en verschil van teekens. In het aanschouwelijk gegeven treden deze relaties op als overeenkomst en verschil van aanschouwelijk gegeven *objecten* ten opzichte van een aanschouwelijk gegeven *qualiteit.* Zulke aanschouwelijk gegeven qualiteiten zijn b.v. kleur, ruimtelijke ligging; verder de vorm [1]) van de objecten.

---

[1]) Verg. de „Gestaltqualitäten" van EHRENFELS.

Een waarnemingsoordeel heeft dus steeds betrekking op een object, en wel in dier voege, dat het dat object vergelijkt met een ander ten aanzien van een aanschouwelijke qualiteit. De eigenaardige wijze, waarop wij de gewaarwording van die aanschouwelijke qualiteit subjectief beleven, is voor objectivatie niet vatbaar en komt daarom in een oordeel nimmer tot uitdrukking.

§ 3. Een enkelvoudig waarnemingsoordeel bepaalt zich in het algemeen tot het constateeren van één dergelijke relatie van overeenkomst of verschil; werkelijk voorkomende waarnemingsoordeelen echter bevatten meestal impliciet of expliciet meerdere dergelijke relaties. Om te begrijpen, hoe dat mogelijk is, zullen we onderzoeken, hoe we meerdere enkelvoudige waarnemingsoordeelen tot een samengesteld waarnemingsoordeel kunnen bijeenvoegen; omgekeerd kan dan een waarnemingsoordeel, dat meerdere zulke relaties tot uitdrukking brengt, geacht worden te zijn ontstaan door bijeenvoeging van meerdere enkelvoudige waarnemingsoordeelen.

§ 4. De bijeenvoeging van enkelvoudige waarnemingsoordeelen tot samengestelde geschiedt door middel van de teekens $\overline{}$ („niet"), & („en"), v („of"), $\rightarrow$ (het teeken voor de implicatie"; $p \rightarrow q$ beteekent „uit p volgt q"), (x) („voor alle x"), (Ex) „er is een x"), en wel, in aansluiting aan Hoofdstuk V, als volgt: Zij p het waarnemingsoordeel „x komt met y t.o.v. de qualiteit Q overeen", dan duiden we den volzin „x verschilt van y t.o.v. de qualiteit Q" aan door het verkorte symbool $\overline{p}$; zij p het waarnemingsoordeel „x verschilt van y t.o.v. de qualiteit Q", dan duiden we den volzin „x komt met y t.o.v. de qualiteit Q overeen" aan door $\overline{p}$; in beide gevallen noemen we p een „waar", $\overline{p}$ een „onwaar" oordeel.

Verder geven we een aantal regels, waardoor we de waarheid of onwaarheid (het „waarheidsgehalte") van een samengesteld oordeel terugvoeren tot die van een of meer minder samengestelde,

1) $\bar{p}$ is waar of onwaar, naar gelang p onwaar of waar is.

2) p & q is waar, wanneer p en q beide waar zijn, anders onwaar.

3) pvq is onwaar, wanneer p en q beide onwaar zijn, anders waar.

4) $p \rightarrow q$ is onwaar, wanneer p waar, q onwaar is, anders waar [1]). We hebben daardoor de „beteekenis" dezer samengestelde oordeelen vastgelegd, want we kunnen ze successievelijk tot enkelvoudige herleiden en dan nagaan of ze waar zijn of onwaar.

Om de beteekenis van de symbolen (x) en (Ex) te verklaren, stellen we ons voor, dat we een aantal objecten $a_1, a_2, \ldots a_n$ hebben, die we gezamenlijk door x voorstellen; verder, dat we voor al die objecten een overeenkomstig oordeel kunnen uitspreken (dat echter niet altijd waar behoeft te zijn); die oordeelen zullen we afzonderlijk door $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$, gezamenlijk door $f(x)$ aanduiden.

We stellen dan de regels op:

5) $(x)f(x)$ is waar of onwaar, naar gelang

$$f(a_1) \,\&\, f(a_2) \,\&\, \ldots \,\&\, f(a_n)$$

waar of onwaar is.

6) $(Ex)f(x)$ is waar of onwaar, naar gelang

$$f(a_1) \,v\, f(a_2) \,v\, \ldots \,v\, f(a_n)$$

waar of onwaar is.

De zoo verkregen algemeene en existentieele oordeelen berusten op volledige inductie in den zin van de empirie. Van alle elementen $a_1, a_2, \ldots a_n$ moet onderzocht zijn of het oordeel $f(x)$ waar is, voordat men kan beslissen over waarheid of onwaarheid van de oordeelen $(x)f(x)$ en $(Ex)f(x)$.

§ 5. *Constructieve Methode.* Een op deze wijze verkregen „algemeen" oordeel $(x)f(x)$ bezit slechts „komparative Allgemeinheit". De wijze, waarop het is verkregen, staat toepassing van het oordeel slechts toe op die objecten x, waarvoor de juistheid van $f(x)$ door waarneming is gegarandeerd [2]).

---

[1]) Men kan deze definities als volgt in een schema overzichtelijker samenvatten:

p	w	o
$\bar{p}$	o	w

$p \,\&\, q$

$p \backslash q$	w	o
w	w	o
o	o	o

pvq

$p \backslash q$	w	o
w	w	w
o	w	o

$p \rightarrow q$

$p \backslash q$	w	o
w	w	o
o	w	w

[2]) Men herinnert zich, dat op deze opmerking STUART MILL zijn kritiek van de syllogistiek fundeert.

Het zal duidelijk zijn, dat de ervaringswetenschappen zeer weinig zouden kunnen vorderen, wanneer men zich hieraan hield en dus de algemeene oordeelen in den zin van de inductieve methode en zonder eenige generalisatiemogelijkheid interpreteerde, maar eveneens, dat een generalisatie van het algemeene oordeel buiten het terrein van de waarnemingscontrôle een grondige methodische fundeering behoeft.

Die wordt nu geleverd door de mathematisch-constructieve methode. Zooals de inductieve methode bestaat in de „waarneming" van de verschijnselen in de zintuiglijke aanschouwingswereld, zoo bestaat de mathematisch-constructieve methode in hun „verklaring". Deze verklaring geschiedt op grond van „modellen"; gewoonlijk pleegt men onder model meer bepaaldelijk „mechanisch model" te verstaan; wij begrijpen hieronder evenwel ieder mathematisch systeem, dat tot verklaring van zekere waargenomen verschijnselen dient. Zoo is b.v. het mathematisch apparaat van de relativiteitstheorie een „model".

De verklaring van de verschijnselen op grond van de constructieve methode maakt nu

1) zinvolle generalisatie van de door waarneming verkregen resultaten mogelijk, en

2) stelt ze ons in staat aan de verschijnselen den „wezenlijken" van den „onwezenlijken" kant, aan de objecten de „wezenlijke" van de „onwezenlijke" eigenschappen te onderscheiden.

Op die laatste onderscheiding berust de mogelijkheid van formeele invoering van de identiteitsrelatie tusschen objecten van de aanschouwingswereld. We willen deze met eenige uitvoerigheid verrichten.

§ 6. *Formeele invoering van de identiteitsrelatie.* We duiden het oordeel, dat overeenkomst, resp. verschil van de objecten x en y t.o.v. de qualiteit Q aanduidt, aan door

$$xEy(Q)$$

resp.

$$xDy(Q).$$

Dan gelden de volgende, gemakkelijk te begrijpen, regels:

7) $xEy(Q) \rightarrow yEx(Q)$ 8) $xDy(Q) \rightarrow yDx(Q)$;

9) $xEx(Q)$ 10) $\overline{xDx(Q)}$;

11) $xEy(Q) \rightarrow \overline{xDy(Q)}$ 12) $xDy(Q) \rightarrow \overline{xEy(Q)}$;

(de regels 10 en 12 volgen uit de overige op grond van de regels van de oordeelslogica).

We noemen twee objecten a en b *gelijkwaardig* ten opzichte van de qualiteit Q, wanneer elk object x, dat t.o.v. Q overeenkomt met, resp. verschilt van a, ook overeenkomt met, resp. verschilt van b t.o.v. Q, en omgekeerd. In formule:

$$13)\quad aAeq\,b(Q) \underset{\mathrm{Df.}}{=} (x)\{[xEa(Q) \rightarrow xEb(Q)]\,\& \\ [xDa(Q) \rightarrow xDb(Q)]\,\& \\ [xEb(Q) \rightarrow xEa(Q)]\,\& \\ [xDb(Q) \rightarrow xDa(Q)]\}.$$

Men bewijst nu de stelling: de gelijkwaardigheid t.o.v. een qualiteit Q is een reflexieve, symmetrische, transitieve betrekking:

$$14)\quad xAeqx(Q)$$

$$15)\quad xAeqy(Q) \rightarrow yAeqx(Q)$$

$$16)\quad \{[xAeqy(Q)]\ \&\ [yAeqz(Q)]\} \rightarrow [xAeqz(Q)]$$

Volgens een stelling uit de logistiek bepaalt dan (op grond van de methode der abstractie) elk object een klasse $C(x)$, zoodanig dat

$$17)\quad [y\epsilon C(x) \rightarrow xAeqy(Q)]\ \&\ [xAeqy(Q) \rightarrow y\epsilon C(x)]$$ [1]).

Een dergelijke, aan het object verbonden, klasse noemt men een *eigenschap* van het object.

Twee objecten hebben we *identiek* genoemd, wanneer ze in alle *wezenlijke* eigenschappen overeenstemmen; duiden we een wezenlijke eigenschap van x aan door $W(x)$, dan kunnen we deze definitie zóó weergeven

$$18)\quad (x \equiv y) \underset{\mathrm{Df.}}{=} (W)\{x\epsilon W(y)\ \&\ y\epsilon W(x)\}$$

§ 7. *Voorbeeld van een identificatie.* We hebben al opgemerkt, dat we, om een identificatie van twee objecten te kunnen uitvoeren, moeten weten, welke eigenschappen van die objecten als „wezenlijk" te beschouwen zijn; dat is in het algemeen alleen mogelijk op grond van de constructieve methode.

Een bekend voorbeeld van zoo'n identificatie is het volgende. Eerst de formuleering van de algemeene wet der gravitatie door

---

[1]) Men leze het symbool $x\epsilon C$ als volgt: „het object x behoort tot de klasse C".

ISAAC NEWTON leerde, welke eigenschappen voor een komeet wezenlijk zijn: een komeet gehoorzaamt aan die wet evenzeer als de planeten. Zij zal derhalve een kegelsnee-baan beschrijven; de „elementen" van die baan (dat zijn de grootheden, die vorm, afmeting en ligging van die baan, alsmede het tijdstip, waarop een bepaald punt gepasseerd wordt, vastleggen) zijn dus wezenlijke eigenschappen van de komeet. Aan den anderen kant bleek het uiterlijk voorkomen zeer van variabele omstandigheden afhankelijk, zoodat het geen wezenlijke eigenschap mag heeten. Een identificatie van kometen kan dus geschieden op grond van vergelijking van de baanelementen. Op die wijze slaagde NEWTON's leerling HALLEY erin, een aantal sinds de Oudheid (o.a. kort voor den inval van WILLEM VAN NORMANDIË in Engeland, 1066) waargenomen kometen te identificeeren; op grond van die identificatie voorspelde hij den terugkeer van het hemellichaam voor 1753. Toen deze inderdaad plaats vond, bleef aan de komeet voortaan HALLEY's naam verbonden.

§ 8. *Samenvatting.* In een ervaringswetenschap zijn drie min of meer onderscheiden stadia aan te wijzen.
1) enkelvoudig waarnemingsoordeel (aanschouwing);
2) samengesteld waarnemingsoordeel (beschrijving);
3) model (verklaring).

Het enkelvoudig waarnemingsoordeel ontstaat als objectivatie van een aanschouwelijk gegeven relatie van overeenkomst of verschil. Het samengestelde waarnemingsoordeel ontstaat uit enkelvoudige door de operaties

$$\overline{},\ \&,\ v,\ \rightarrow,\ (x),\ (Ex).$$

Modellen ter verklaring ontstaan op grond van de mathematisch-constructieve methode [1]).

Niet aan de orde was de causale verklaring van het ontstaan van de aanschouwelijke relaties van overeenkomst en verschil; dat in een probleem van de physiologische psychologie.

[1]) Deze methode is uitvoeriger behandeld in een studie „Klassieke en moderne Chemie" (Ann. d. cr. phil. 5/ Alg. Tijdsch. voor Wijsb. 1); wij hebben ons daarom hier in de uiteenzetting van de methodenleer van de ervaringswetenschap tot datgene beperkt, dat voor de kwestie van de aanschouwingsruimte van belang is.

C. PSYCHOLOGIE.

HOOFDSTUK VIII.

Het Ruimteprobleem in de Psychologie. De reconstructieve Methode.

§ 1. We hebben reeds in algemeene trekken uiteengezet, op welke wijze de natuurwetenschap, uitgaande van de aanschouwingswereld, haar modellen ter verklaring van de waargenomen verschijnselen constructief opbouwt. Die modellen, in hun systematischen samenhang, vormen het zoogenaamde „wereldbeeld" van de natuurwetenschap. Men hoede er zich evenwel voor, dat wereldbeeld voor een afbeelding of nabootsing van de aanschouwingswereld aan te zien [1]). Dat dit onjuist zou zijn, blijkt wel overtuigend uit de steeds afnemende „aanschouwelijkheid" van de door de natuurwetenschap geconstrueerde modellen [2]): bestond de natuurwetenschap in een zoo „natuurgetrouw" mogelijk nabootsen of afbeelden van de aanschouwingswereld, dan zou die aanschouwelijkheid voortdurend moeten toenemen; de natuurwetenschap evenwel streeft geen aanschouwelijkheid, maar wetmatigheid na. Zoo beweegt ze zich, voortgedreven door haar methode der objectiveerende constructie, voortdurend van de „onmiddellijk", doch subjectief, gegeven aanschouwingswereld af.

§ 2. Men kan nu het probleem stellen, die aanschouwingswereld zelf, zooals ze aan het bewustzijn onmiddellijk gegeven is, dus in haar „oorspronkelijke" gedaante, wetenschappelijk te bestudeeren. Dit probleem beschouwen we met Natorp als een probleem voor de psychologie; ter nadere verklaring mogen een aantal citaten volgen.

---

[1]) Verg. Cassirer: „Philosophie der Symbolischen Formen" III, S. 25.

[2]) Men denke aan de opeenvolgende invoering van de electromagnetische lichttheorie (die de aanschouwelijke aethertheorie verdrong), van de relativiteitstheorie, van de quantumtheorie, in het bijzonder in haar nieuwste gedaante (Dirac—Heisenberg).

„Bildet den Gegenstand der psychologischen Untersuchung die Erscheinung bloss nach ihrem subjektiven Dasein allemal für ein Ich, mit Absehung von aller objektiven Bedeutung derselben, so muss auch die Methode dieser Untersuchung verschieden sein von allem solchen wissenschaftlichenVerfahren, welches eben die Objektivierung der Erscheinungen oder ihre Beziehung auf den Gegenstand zum Ziele hat ... Das Verfahren aller objektivierenden Erkenntnis aber ist dem letzten Prinzip nach gleicher Art; es gestaltet ihrem „Gegenstand" im Gesetze" [1]).

„Es fragt sich, welcher eigentümliche Weg der Forschung ... übrig bleibt. Die Antwort ergibt sich aus der Erwägung, dass zwar die objektivierende Erkenntnis ... ein Unmittelbares des subjektiven Bewusstseins voraussetzt, dass aber dies Unmittelbare keineswegs auch unmittelbar bekannt ist. ... Diese Erkenntnis des Subjektiven ist in der Tat nur möglich durch einen Rückschluss von den vollzogenen Objektivierungen auf das, was als letzte subjektive Grundlage zu diesen vorauszusetzen ist. Die Rekonstruktion des Unmittelbaren muss sich also stützen auf die vorausgegangene Konstruktion des Objekts; sie besteht im Grunde in der reinen Umkehrung des Weges der objektivierenden Erkenntnis ..." [2]).

We zijn met het citeeren eenigszins uitvoerig geweest, omdat we meenden, dat de zoo uitermate heldere probleemstelling van NATORP alle aandacht verdient. Toch mogen enkele bedenkingen niet achterwege blijven. Men zou wel zeer teleurgesteld worden, wanneer men hoopte, op grond van een „reconstructie" in den zin van NATORP het onmiddellijke, concrete geestesleven (in ons geval b.v. het waarnemingsbewustzijn) „terug te krijgen". Immers, een wetenschappelijke constructie of reconstructie leert ons nooit een materie, een inhoud, doch steeds enkel en alleen een vorm, een structuur kennen; deze structuur echter bestaat niet in den ontologischen zin áán de materie, maar ze wordt er door de wetenschappelijke behandeling aan opgelegd; door de structuur krijgt de als zoodanig onbepaalde materie haar nadere bepaling.

Bij een echte reconstructie is datgene, wat geconstrueerd wordt, historisch of logisch „eerder" dan de reconstructie, d.w.z. het fundeert het procédé der reconstructie. Het bewustzijn

---

[1]) „Allgemeine Psychologie[2]" S. 4/5.

[2]) l. s. S. 9/10.

echter, dat hier „gereconstrueerd" wordt, is van de reconstructie niet het fundament; dit is (en dat is juist de eigenaardigheid van de situatie) de objectivatie [1]). De reconstructie dient echter, om te laten zien, hoe het objectivatieproces kan uitgaan van, zijn „oorsprong" kan vinden in bepaalde evidenties (de evidentie der zintuigelijke waarneming of de mathematische evidentie) [2]), en toch opbouw van een wetenschap (in de genoemde gevallen opv. natuurwetenschap en wiskunde) kan „mogelijk maken". De psychologie reconstrueert dus niet in den eigenlijken zin „ein Unmittelbares des subjektiven Bewusstseins", ze construeert een bewustzijns*structuur,* wier functie het is het uitgaan door het objectivatieproces van de „objectief" niet nader te bepalen „evidentie" te fundeeren.

De „subjectieve fundeering" van de natuurwetenschap vereischt dus de bepaling van de structuur van het waarnemingsbewustzijn, van de „aanschouwingsvormen". Over welke gegevens kunnen we te dien einde beschikken?

§ 3. We kunnen (min of meer scherp) vier verschillende beschouwingswijzen onderscheiden: de physische, de physiologische, de phaenomenologische en de kentheoretische.

1) de physische beschouwingswijze. De aanschouwingswereld levert de bouwsteenen voor de constructie van het physisch wereldbeeld; al is dit laatste ook geen afbeelding of nabootsing van de eerste, toch bestaat tusschen beide een, zij het wellicht gecompliceerde, samenhang. Tusschen de structuur van het physisch wereldbeeld (die veranderlijk is, maar mathematisch exact bepaalbaar) en die van de aanschouwingswereld bestaat dus wellicht een analogie, een correspondentie, die vooral te verwachten zal zijn voor *die* structuren van het physisch wereldbeeld, die zijn veranderlijkheid het minst ondervinden. Ook is het mogelijk, het bewustzijnsverschijnsel der waarneming van objecten causaal in verband te brengen met physische werkingen uitgaande van die objecten (zoo b.v. de optische waarneming met reflectie of

---

[1]) Verg. J. C. FRANKEN: „Kritische Philosophie und Dialektische Theologie", A'dam 1932 S. 379.

[2]) Vermeld worde in dit verband het door ons („Klassieke en Moderne Chemie", Ned. Tijdschr. v. Wijsb. 1/ Ann. d. Cr. Phil. 5) ingevoerde begrip van den „evidentie-modus", die voor elk complex verwante wetenschappen karakteristiek is.

emissie van licht); ook dit is een steun voor de opvatting, dat de physische wisselwerking tusschen de objecten aanwijzingen kan geven over de structuur van de aanschouwingswereld.

Zoo heeft KANT [1]) verband gezocht tusschen de driedimensionaliteit van de aanschouwingswereld en den vorm van NEWTON's gravitatiewet. Op dezelfde grondgedachte berust HELMHOLTZ's constructie van de structuur van een (hypothetische) aanschouwingswereld op grond van een niet-Euclidische structuur van de physische ruimte.

2) de physiologische beschouwingswijze sluit zich bij de physische gemakkelijk aan. Bij de waarneming van objecten zijn behalve de physische werkingen, uitgaande van die objecten, ook de organen, die voor die werking gevoelig zijn (de zintuigen), in rekening te brengen. De bewerktuiging van die organen zal weer van invloed zijn op de structuur van de aanschouwingswereld.

Deze gedachtengang vinden we b.v. bij HEYMANS en POINCARÉ. In het bijzonder komen hier bewegings- en tastzin eenerzijds, gezichtszin anderzijds in aanmerking. Gehoor, reuk, smaak werken niet of zoo goed als niet mede aan het totstandkomen van de ruimtevoorstellingen. Interessant is nu vooral te zien, hoe aan den opbouw van de ruimtestructuur bewegings- en tastzin en gezichtszin harmonisch samenwerken, hoewel ze toch elk voor zich niet tot eenzelfde structuur van het waarnemingsbewustzijn aanleiding zouden geven.

3) de phaenomenologische beschouwingswijze.

Zij berust op de eigenaardige omstandigheid, dat men zich de structuur van het bewustzijn door een actus van reflectie spontaan en onmiddellijk voor den geest brengen kan. Men vermijdt op die wijze den (volgens NATORP onvermijdelijken) omweg over het objectivatieproces; zij is daarom zóó aantrekkelijk, dat wij ons een nadere bespreking, los van haar resultaten, niet willen ontzeggen. Daarbij zal tevens gelegenheid bestaan, te wijzen op enkele bezwaren, die deze methode aankleven, en die daarom bij onvoorzichtige toepassing niet zelden tot min of meer ernstige fouten aanleiding hebben gegeven.

Een van de meest recente toepassingen is gegeven door CARNAP

---

[1]) „Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte" (1747).

in zijn voortreffelijk werkje „Der Raum" (het is wellicht niet ondienstig, op te merken, dat de daarin gegeven uiteenzettingen onafhankelijk zijn van CARNAP's tegenwoordig extreem-positivistisch standpunt); wij lezen daar o.a. (S. 23):

„Der Anschauungsraum ist ein Ordnungsgefüge, von dem wir wohl die formale Art begrifflich umgrenzen können, aber wie bei allem Anschauungsmässigen nicht sein besonderes Sosein. Hier lässt sich nur auf Erlebnisinhalte hinweisen, nämlich auf den anschaulich räumlichen Gebilde und Beziehungen: Punkte, Linienstücke, Flächenstücke, Raumstücke, das Liegen eines Punktes auf einer Linie, in einem Raumstücke, das Sich-Schneiden zweier Linien usw. Die psychologische Frage nach der Entstehung solcher Vorstellungen wird hier nicht gestellt, wohl aber die nach der logischen Begründung der Erkenntnisse über den Anschauungsraum, genauer der Grundsätze, da die weiteren Sätze aus diesen formal-begrifflich abgeleitet werden. Erfahrung gibt nicht den Rechtsgrund für sie ab; die Grundsätze sind erfahrungsunabhängig, genauer (DRIESCH): unabhängig vom „Quantum" der Erfahrung", d.h. ihre Erkenntniss wird nicht, wie bei Erfahrungssätzen, durch die mehrfach wiederholte Erfahrung immer gesicherter. Denn es handelt sich hier, wie HUSSERL gezeigt hat, gar nicht um Thatsachen im Sinne der Erfahrungswirklichkeit, sondern um das Wesen („Eidos") gewisser Gegebenheiten, das in seinem besonderen Sosein schon durch einmaliges Gegebensein erfasst werden kann."

De groote moeilijkheid bij deze methode is klaarblijkelijk daarin gelegen, dat men gemakkelijk door voorstellingen van niet-aanschouwelijken aard (b.v. ontleend aan de geaxiomatiseerde Euclidische meetkunde) wordt beinvloed. Ook CARNAP is aan dat gevaar niet ontkomen.

In verband hiermee staat het volgende bezwaar; voor al het aanschouwelijke is kenmerkend een zekere onbepaaldheid, die zich uit, zoo spoedig men tracht het in zuivere begrippen tot uitdrukking te brengen. Hiervan is het gevolg, dat een formeel-logische conclusie, uit stellingen, aan de aanschouwing ontleend, afgeleid, zeer goed, hetzij aanschouwelijkheid missen, hetzij met de aanschouwing in strijd zijn kan. Het formeel-logisch apparaat dient dus met groote omzichtigheid en onder voortdurende contrôle door de aanschouwing te worden toegepast. Men kan dus niet volstaan met, zooals CARNAP wil, de grondstellingen aan de aanschouwing te ontleenen en daarop formeel-deductief voort te bouwen. Deze opmerking is het eerst gemaakt door KLEIN in een rede: „On the mathematical character of space-intuition and the relation of pure mathematics to the applied sciences":

„. . . *the naive intuition is not exact, while the refined intuition is not properly intuition at all, but arises from the logical development from axioms considered as perfectly exact.*" (Ges. Math. Abh. Bd. 2).

De moeilijkheden, waartoe dat leidt, zijn door BURKHARDT in zijn bespreking van WUNDT's „Logik" meesterlijk beschreven:

„Die neueren Untersuchungen über die Principien der Infinitesimalrechnung haben zu einer Reihe von Begriffen geführt — überall unstetige und integrirbare, überall stetige und doch nirgends differentirbare Funktionen, umkehrbar eindeutige Beziehungen eines eindimensionalen Gebietes auf ein zweidimensionales und dgl. mehr — denen in der Anschauung durchaus nichts Aequivalentes gegenübersteht [1]). Die aus dieser Divergenz entspringenden Schwierigkeiten scheinen nur überwunden werden zu können, wenn man mit den Herren F. KLEIN und PASCH davon ausgeht, das unsere Raumanschauung wesentlich ungenau[2]) ist, dass es jedesmahl erst eines Grenzüberganges bedarf, um von den der unmittelbaren Raumanschauung zu entnehmenden Vorstellungen zu den abstracten Begriffen zu gelangen, mit denen die Mathematik operirt. Wenn dem aber so ist, stehen möglicherweise *mehrere* Wege zur Vollziehung eines solchen Grenzüberganges offen; . . ."

4) de kentheoretische beschouwingswijze vindt haar uitgangspunt in de overweging, dat de mogelijkheid van het wetenschappelijk objectivatieproces afhankelijk is van het bestaan van een aan de aanschouwingswereld inhaerente structuur; immers ons onderzoek naar deze structuur moest dienen om het wetenschappelijk objectivatieproces, dat zijn oorsprong vindt in het onbepaalde van de subjectieve waarneming, nader te fundeeren.

Als meest fundamenteele voorwaarden nu vooronderstelt het objectivatieproces klaarblijkelijk:

---

[1]) Verg. H. HAHN, „Die Krise der Anschauung".

[2]) Beter ware: onbepaald, niet exact-te-omschrijven; deze omstandigheid vindt gereedelijk haar verklaring: de taal en alle andere symbolismen doen dienst bij het objectivatieproces en zijn dus geheel en al aan die functie aangepast.

a) de mogelijkheid aanschouwelijke objecten als van elkaar en van de overige aanschouwingswereld afgezonderd te denken.

b) de mogelijkheid op deze wijze afgezonderde objecten te samen, als tot elkaar in bepaalde relaties staande, te denken.

De meest voor de hand liggende onderstelling zal nu zijn die van het bestaan van een dubbele structuur van de aanschouwingswereld, van het bestaan derhalve van twee aanschouwingsvormen: den *tijd*, die het bewustzijn van de onderscheiding, als na-elkaar, en de *ruimte*, die het bewustzijn van het samendenken, als naast-elkaar, vertegenwoordigt. Zoo schrijft NATORP, in nauwe aansluiting bij KANT:

„Deshalb lässt sich das durch die Zeit unterschiedene Mannigfaltige wiederum zur Einheit der Vorstellung zusammennehmen allein unter der Form des Raumes, umgekehrt das räumlich Verbundene sich in seine unterscheidbaren Elemente auseinanderlegen allein unter der Form der Zeit."

§ 4. We hebben in het kort een overzicht gegeven van de verschillende beschouwingswijzen, die kunnen leiden tot een reconstructie van de aanschouwingswereld. Die beschouwingswijzen waren zeer uiteenloopend en werden dan ook toegepast door zeer onderscheidene, elkander bestrijdende philosophische richtingen; in het bijzonder stonden de physische en physiologische beschouwingswijze van de empiristische of positivistische scholen eenerzijds, en de kentheoretische van de idealistische scholen anderzijds scherp tegenover elkaar. Ons inziens betreft het hier beschouwingswijzen, die geen van alle voor zich alléén, maar enkel in onderlinge samenwerking in staat zijn, het probleem der „reconstructie" van de aanschouwingswereld te beantwoorden; de gegevens, die elk der verschillende beschouwingswijzen levert, zijn op zichzelf daartoe niet voldoende. Streng genomen leert de kentheoretische beschouwingswijze alléén, dat de mogelijkheid van onderscheiden en samendenken moet bestaan; op wèlke wijze het bewustzijn deze voorwaarde verwerkelijkt, zal ze nooit kunnen leeren; hier kan de phaenomenologische methode ons verder helpen; ook deze evenwel kan de aanvullende gegevens van de physische en de physiologische beschouwingswijze niet ontberen. Een veel voorkomend verschijnsel is het nu, dat men bij onderzoekingen op dit gebied op grond van principieele overwegingen meent, zich van toepassing van een of méér der behandelde beschouwingswijzen te moeten onthouden, doch dat men, onbewust, een beroep doet op gegevens, die alleen op grond van die beschouwingswijzen, of langs wéér anderen weg, zijn te verkrijgen.

§ 5. De reconstructie van de aanschouwingswereld bezit een bijzondere philosophische beteekenis. Immers ze levert in zekeren zin een rechtvaardiging van het begrip der waarneming, en zoo een logische fundeering van het daarop gebouwde systeem van ervaringswetenschappen. De ervaringswetenschap als geheel verkrijgt zoo dus een systematische afsluiting, niet in dien zin natuurlijk, dat uit de eigenschappen van de aanschouwingswereld de ervaringswetenschap zou zijn te deduceeren, maar zoodanig, dat het aan de ervaringswetenschap ten grondslag liggende en daarbinnen dus niet verder bepaalbare begrip van de „waarneming" hier een nadere bepaling ondergaat.

Deze systematische afsluiting neemt de plaats in van een eventueele metaphysische fundeering en maakt deze dus overbodig.

HOOFDSTUK IX.

Resultaten van de reconstructieve Methode.

§ 1. Wij willen in het volgende een overzicht geven van de resultaten, die de reconstructieve methode (men veroorlove ons, deze onjuiste en misleidende naam te blijven gebruiken) verkrijgt, wanneer men de resultaten van de verschillende, door ons uiteengezette, beschouwingswijzen systematisch tot één geheel verwerkt.

Zooals we al gezien hebben, is het resultaat van de kentheoretische beschouwingswijze fundamenteel, maar mager [1]): de aanschouwingswereld moet beschouwd kunnen worden als samengesteld, als opgebouwd uit deelen: ze is een „extensieve grootheid".

§ 2. Phaenomenologische bezinning leert nu, dat voor het onderscheiden en samendenken het tijdbewustzijn de subjectieve grondslag is. Dit tijdbewustzijn evenwel maakt, zooals reeds KANT opmerkte (A 102/3), op grond van de synthesen der „Apprehension", „Reproduktion" en „Rekognition" den opbouw van de getallenleer mogelijk [2]). BROUWER heeft gewezen op de mogelijkheid, de wiskunde op te bouwen alléén uitgaande van de getallenleer; hij verdedigt daarom de opvatting, dat het tijdbewustzijn voor de wiskunde een voldoende subjectieve fundeering verschaft.

„(Het) neo-intuitionisme ziet het uiteenvallen van levensmomenten in qualitatief verschillende deelen, die alleen gescheiden door den tijd zich weer kunnen vereenigen, als oergebeuren in het menschelijk intellect, en het abstraheeren van dit uiteenvallen van elken gevoelsinhoud tot de intuitie van twee-eenigheid zonder meer, als oergebeuren van het wiskundig denken" („Wiskunde, Waarheid en Werkelijkheid" blz. 11).

---

[1]) Om meer te kunnen bijdragen, zou de kenleer een beroep moeten doen op de psychologie; in dit stadium echter beschikt ook de psychologie, die we immers juist opbouwen, nog niet over meer gegevens.

[2]) Zie Aanhangsel II.

O.i. terecht is BROUWER daarom van meening, dat voor de verschillende wiskundige wetenschappen, óók voor de meetkunde, op een andere subjectieve fundeering (in het bijzonder op de ruimteaanschouwing), géén beroep behoeft te worden gedaan; met dit laatste kan men zich algemeen vereenigen. Ernstige bezwaren bestaan echter bij velen nog tegen de opvatting, dat de wiskunde een subjectieven grondslag (zij het ook alleen in het tijdbewustzijn) zou kunnen bezitten; zij achten dat in strijd met de objectiviteit, die aan de wiskunde in zoo hooge mate moet worden toegekend.

Hier is klaarblijkelijk een verkeerde opvatting van de subjectiviteit in het spel; men vat subjectiviteit op als vooroordeel, of willekeur; en die spelen inderdaad bij den opbouw van de wiskunde geen rol. Ze zijn uitgesloten door de objectiviteit van de wiskunde, op grond dus van het feit, dat de wiskunde haar objecten volgens vaste wetten opbouwt; ziedaar de objectieve grondslag. Hiermee is echter volstrekt niet in strijd, dat die opbouw niet los is te maken (alleen methodisch los is te denken) van zijn relatie tot een bewustzijn: en daarin ligt de noodzakelijkheid van een subjectieve fundeering.

Fundamenteel voor het juist begrip van het bewustzijn der mathematische constructie is KANT's onderscheiding van den „äusseren" en den „inneren Sinn", die men als volgt phaenomenologisch fundeert.

Alles, dat tot het bewustzijn behoort, heeft naar zijn aard een „intentioneele betrekking" tot een „intentioneel object" (BRENTANO, HUSSERL); deze betrekking wordt door KANT als „Apperzeption", door NATORP en CASSIRER als „Repräsentation" aangeduid. Al naar gelang nu dit intentioneel object „immanent", dan wel „transcendent" is, behoort het tot den „inneren" of tot den „äusseren Sinn".

De „intentioneele betrekking" en de onderscheiding van immanente en transcendente „intentioneele objecten" worden door HERMANN WEYL [1]) als volgt beschreven: „die wirkliche Welt, jedes ihrer Bestandstücke und alle Bestimmungen an ihnen, sind und können nur gegeben sein als intentionale Objekte von Bewusstseinsakten... Ich „*habe*" die Wahrnehmung, aber erst wenn

---

[1]) „Raum-Zeit-Materie", 5. Aufl. Berlin 1923.

ich diese Wahrnehmung selber wieder, wozu ich in einem freien Akt der Reflexion imstande bin, zum intentionalen Objekt einer neuen, inneren Wahrnehmung mache, „*weiss*" ich von ihr etwas... In diesem zweiten Akt ist das intentionale Objekt ein *immanentes*, nämlich wie der Akt selber ein reelles Bestandstück meines Erlebnisstromes; in dem primären Wahrnehmungsakt aber ist das Objekt *transzendent*, d.h. zwar gegeben in einem Bewusstseinserlebnis, aber nicht reelles Bestandstück. Das Immanente ist *absolut*, d.h. es ist genau das, als was ich es da habe, und dieses sein Wesen kann ich mir eventuell in Akten der Reflexion zur Gegebenheit bringen. Hingegen haben die transzendenten Gegenstände nur ein *phänomenales* Sein, sie sind Erscheinendes — in mannigfaltigen Erscheinungsweisen und „Abschattungen"... In jeder Wahrnehmung liegt nun weiter unzweifelhaft die *Thesis der Wirklichkeit* des in ihr erscheinenden Objekts, und zwar als Teil und inhaltliche Fortbestimmung der Generalthesis einer wirklichen Welt. Aber indem wir von der natürlichen zur philosophischen Einstellung übergehen, machen wir, über die Wahrnehmung reflektierend, diese Thesis sozusagen nicht mehr mit... Der Sinn und das Recht dieser Setzung wird uns jetzt gerade zum Problem, das von dem Bewusstseins-Gegebenen aus seine Lösung finden muss."

Tot het bewustzijn van den „äusseren Sinn" behoort het waarnemingsbewustzijn, tot het bewustzijn van den „inneren Sinn", de wiskunde. Zooals KANT reeds opmerkte, hebben „äussere" en „innere Sinn" elk hun bijzondere structuur.

De tijd is de vorm van den „inneren Sinn"; hij levert de relaties tusschen onze bewustzijnsmomenten, zooals ze onmiddellijk doorleefd worden, de relaties van het „voor" en „na"; voor zoover ze tot het waarnemingsbewustzijn behooren, hebben ze naar hun aard tegelijk betrekking op een transcendent intentioneel object; het aanschouwelijk schema voor de tusschen deze intentioneele objecten bestaande en voor hun onderscheiding en samen-denken onontbeerlijke relaties levert de aanschouwingsruimte, de vorm van den „äusseren Sinn".

§ 3. Welke is nu de structuur van de aanschouwingsvormen, ruimte en tijd? De fundamenteele gegevens danken we aan de phaenomenologische beschouwingswijze. In combinatie met andere methoden is deze reeds eeuwen toegepast; b.v. door KANT tegelijk met de kentheoretische en de physische beschouwingswijze. De eerste toepassing van de phaenomenologische beschouwingswijze als zelfstandige methode is echter pas gegeven door STUMPF [1]); een recent en zeer belangrijk onderzoek volgens deze methode is afkomstig van BECKER [2]). We geven BECKER's methode weer met de woorden van WEYL [3]); zooals men zal zien, sluit ze zich in vele opzichten aan bij de reeds eerder behandelde opmerkingen van KLEIN, PASCH en BURKHARDT.

„So kann man in der rationalen Bearbeitung eines Kontinuums drei Stufen unterscheiden: die *Morphologie*, die mit vag umschriebenen gestaltlichen Typen operiert; die *Topologie*, die durch auffällige Singularitäten geleitet oder in freier Konstruktion ein Gerüst, vag lokalisiert, aber kombinatorisch genau bestimmt in die Mannigfaltigkeit hineinsieht; und die eigentliche mit Idealgebilden operierende *Geometrie*, die in ein wirkliches Kontinuum erst dann exakt sich hineintragen liesse, wenn dies mit einem sich ins Unendliche verfeinernden und verschärfenden Teilungsnetz übersponnen wäre; die geometrischen vom Teilungsnetz unabhängigen Eigenschaften der im Kontinuum konstruierbaren Gebilde mögen sich dabei auf ein in ihm ausgebreitetes Strukturfeld nach Art des metrischen Feldes stützen . . ."

Op de derde „Stufe" met haar „Idealgebilden" echter heeft men het gebied van de aanschouwingswereld reeds weer verlaten:

„Die geometrischen Angaben sind also lediglich ideelle Bestimmungen, die einzeln für sich eines im Gegebenen aufzuweisenden Sinnes ermangeln. Nur das ganze Netzwerk ideeller Bestimmungen berührt hier und da die erlebte Wirklichkeit, und an diesen Stellen muss es „stimmen" " (l.c. S. 95).

Deze phaenomenologische beschouwingswijze doet ons den tijd als één-, de ruimte als driedimensionaal continuum in den zin van de combinatorische topologie kennen.

§ 4. Voor nauwkeuriger inzicht in de structuur dezer continua moet men zich bedienen van de physiologisch-physische beschouwingswijze. Haar toepassing op de tijdsaanschouwing is vrij

---

[1]) „Über den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung", Lpzg. 1873.

[2]) „Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie", HUSSERLS Jahrbuch 6, 1923.

[3]) „Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften", S. 63.

eenvoudig, en leert, dat wij op grond van physiologische processen (ademhaling, hartslag, vermoeidheid e.d.) in staat zijn, in ruwe benadering „tijdsduren" te vergelijken. Het tijdscontinuum bezit dus een, weliswaar slechts ruw bepaalde, „metrische structuur". Ook de aanschouwingsruimte bezit een metrische structuur; deze te bepalen is moeilijker, daar ze gelijktijdig bepaald wordt eenerzijds door tast- en bewegingszin, anderzijds door den gezichtszin, en deze elk voor zich een verschillende metriek zouden geven; immers de tast- en bewegingszin staat niet bloot aan de perspectievische „verteekening", waaraan de gezichtszin onderworpen is. Men spreekt daarom wel van één ruimte voor tast- en bewegingszin en van een andere voor den gezichtszin, elk met haar eigenaardige structuur [1]). In de onmiddellijke beleving echter vallen beide ruimten door „associatie" volkomen samen tot de ééne aanschouwingsruimte, waarvan de „inhoud" voornamelijk door den gezichtszin, de structuur echter door tast- en bewegingszin bepaald wordt; dat wij, ondanks de perspectievische verteekening, in staat zijn, ook „op het oog" lengte en afstand te schatten, berust op associatie tusschen de gegevens van tast- en bewegingszin met die van den gezichtszin. De tast- en bewegingszin immers geeft ons lengte en afstand, „zooals ze zijn", dat wil zeggen in (benaderde) overeenstemming met objectieve bepalingen.

Deze beschouwingswijze is het eerst gegeven door Bain, den engelschen assiociatiepsycholoog; onze landgenoot Heymans is zelfs zóó ver gegaan, de apodictische geldigheid van de Euclidische meetkunde uit associatie van innervatiegewaarwordingen te verklaren. Laat ons de methodische grondslagen van deze methode eens iets nader bekijken; ze is afhankelijk van de harmonische samenwerking van physiologische en physische beschouwingswijze.

Physiologisch kan, b.v. op grond van de ruimtevoorstellingen van blindgeborenen, verband worden gelegd tusschen de structuur van de ruimtevoorstellingen en tusschen bewegingsinnervaties; physisch is echter vast te stellen, dat de deelen van ons lichaam beschouwd kunnen worden te bewegen als scharnierend verbonden vaste lichamen; de bewegingsmogelijkheden van ons lichaam zijn dus op grond van de theorie van de physische ruimte te bepalen;

---

[1]) Men zie hierover Poincaré: „La Science et l'Hypothese" („Pourquoi l'espace a trois dimensions").

de metrische structuur van de aanschouwingsruimte zal dus een (benaderde) weergave zijn van die van de physische ruimte.

Nu is de structuur van de physische ruimte voor gebieden als wij gewoonlijk overzien, zeer ten naastenbij Euclidisch; ook de aanschouwingsruimte zal dus een benaderde Euclidische metriek bezitten.

HEYMANS' poging, op deze wijze de apodictische geldigheid van de Euclidische meetkunde te fundeeren, gaat dus reeds aan twee gebreken mank:

1) doordat kennis van de physische ruimte ondersteld wordt, is apodictische geldigheid niet te verkrijgen.

2) door de onbepaaldheid van alle aanschouwelijkheid (PASCH, KLEIN) kan in de aanschouwingsruimte slechts een benaderde metriek bestaan.

Bovendien bevat HEYMANS' afleiding een mathematische dwaling, die we in Aanhangsel IV nader zullen bespreken.

§ 5. Samenvattend: er zijn twee aanschouwingsvormen: tijd en ruimte. De tijd is de vorm van het zelfbewustzijn en biedt den subjectieven grondslag voor het opbouwen van de wiskunde. De tijd en de ruimte zijn beide vormen van het waarnemingsbewustzijn en bieden den subjectieven grondslag voor het opbouwen van de ervaringswetenschap. De tijd is een ééndimensionaal, de ruimte een driedimensionaal continuum; beide bezitten ze een benaderde Euclidische metriek.

D. KENLEER.

HOOFDSTUK X.

Kentheoretische Toepassing van de verkregen Resultaten.

§ 1. In de wetenschappen worden zekere oordeelen als waar gesteld. Waaraan ontleenen die oordeelen hun waarheid?

Onze studie van de wetenschappelijke methoden heeft ons geleerd, drie mogelijkheden te onderscheiden, en wel:

1) Een oordeel kan zijn waarheid aan die van andere oordeelen ontleenen; zoo kan b.v. een oordeel

$$p \,\&\, q$$

zijn waarheid ontleenen aan die van de afzonderlijke oordeelen p en q.

2) Een oordeel kan ook zijn waarheid ontleenen aan een willekeurig vaststellen; voorbeelden daarvan leveren b.v. de definitie en de conventie.

3) Ten slotte is het denkbaar, dat een oordeel noch op grond van de waarheid van andere oordeelen, noch op grond van willekeurig vaststellen waar is; b.v. een waarnemingsoordeel. Een dergelijk oordeel is dus uit formeel-logisch oogpunt geheel onherleidbaar; men zou zoo'n oordeel in aansluiting bij KANT *synthetisch* willen noemen.

De vraag, waaraan deze synthetische oordeelen hun waarheid ontleenen, zal niet op grond van formeel-logische methoden alléén kunnen worden beantwoord. Immers, juist de logica leerde ons deze oordeelen kennen als voor haar onherleidbaar en dus oorspronkelijk. Om te laten zien, hoe men verder kan komen, beschouwen wij het reeds eerder aangevoerd voorbeeld van een synthetisch oordeel: het waarnemingsoordeel. De waarheid van een waarnemingsoordeel berust op zijn betrekking tot de waarneming, tot een voor logische analyse ontoegankelijk, „onmiddellijk" verificatieproces.

De logische analyse leert ons, in de ervaringswetenschappen de waarnemingsoordeelen van alle andere te onderscheiden, zij leert ons echter niet, deze oordeelen verder te fundeeren. Een methodisch uitgangspunt voor deze fundeering vinden we nu in de analyse van de waarneming, van het onmiddellijk aan het bewustzijn „gegeven" verificatieproces zelf. Van deze analyse en meer in het bijzonder van de haar beheerschende methodische gezichtspunten hebben we in het psychologisch deel van ons onderzoek een uiteenzetting gegeven. Het zal nu onze taak zijn, de aldaar verkregen resultaten op de kentheoretische probleemstelling toe te passen.

§ 2. Voor de wiskunde hebben we eerst te beantwoorden de vraag, of ze synthetische, d.w.z. onmiddellijk te verifieeren, oordeelen bevat. We beschouwen daartoe de beide eenige ons bekende methoden om de wiskunde op consequente wijze op te bouwen: de formalistische en de intuitionistische.

De formalistische opbouw berust op willekeurig vastgestelde oordeelen en begrippen en bestaat in het „formeel-deductief", door toepassing van willekeurig vastgestelde deductieoperaties, uit willekeurig vastgestelde axiomata ontwikkelen van het wiskundig oordeelssysteem. Zal aan deze wijze van opbouw wetenschappelijke beteekenis kunnen worden toegekend, dan moet van het zoo te verkrijgen oordeelssysteem de contradictieloosheid worden aangetoond. Dit contradictieloosheidsbewijs zal evenwel niet op grond van de axiomatische methode kunnen worden geleverd; dat zou klaarblijkelijk een circulus in probando beteekenen. De bewijzen van contradictieloosheid worden daarom door de formalistische school volgens een andere methode geleverd, die gewoonlijk als de finitistische wordt aangeduid. In deze methode worden alleen onmiddellijk verifieerbare beweringen toegelaten, zooals b.v.: „de formule (het oordeel) p & q is opgebouwd uit de teekens (oordeelen) p, q en het teeken (de oordeelsfunctie) &".

Deze beweringen zijn echter, van kentheoretisch standpunt, te beschouwen als synthetische oordeelen. Al treden deze dus in de formalistische theorieën zelf niet op, ze vormen de metamathematische redeneeringen, die dienen moeten, om de op formalistische wijze opgebouwde wiskunde wetenschappelijk te rechtvaardigen.

§ 3. De intuitionistische wiskunde vermijdt dezen omweg, die geen andere bedoeling heeft, dan de wiskunde in haar geheelen, traditioneelen omvang te kunnen handhaven. In de wiskunde zijn alleen onmiddellijk verifieerbare redeneeringen toegestaan; men zegt wel: de intuitionistische wiskunde is zuiver constructief. Een existentiebewijs is derhalve alleen aanvaardbaar, wanneer de bewezen existentie te verifieeren is, d.w.z., wanneer het mathematisch object in quaestie áán te geven is. Hierdoor vervalt het logisch principe van het uitgesloten derde, tenminste als universeel evident bewijsmiddel, waardoor het niet mogelijk is, de wiskunde in haar traditioneelen omvang langs intuitionistischen weg op te bouwen. De door de formalisten in de bewijstheorie toegepaste methoden vertoonen met de intuitionistische een sterke analogie; hoe dat komt, zullen we na de gegeven uiteenzetting niet meer behoeven te verklaren.

§ 4. De twee moderne, werkelijk consequente methoden, om de wiskunde op te bouwen, zijn dus beide afhankelijk van de mogelijkheid van synthetische oordeelen. Wij herinneren ons nu een tweede onderscheiding, eveneens door Kant ingevoerd: die tusschen oordeelen a priori en oordeelen a posteriori. Deze onderscheiding bestaat alleen voor de synthetische oordeelen. Aangezien nu de synthetische oordeelen met de onmiddellijk verifieerbare oordeelen samenvallen, ligt het voor de hand, de diepere grond voor deze onderscheiding te zoeken in de eigenaardigheden van de bijbehoorende verificatieprocessen.

Men heeft deze onderscheiding wel als volgt trachten te formuleeren: bij de verificatie van oordeelen a posteriori spelen de zintuigen een rol, maar niet bij de verificatie van een oordeel a priori. Men meende in dat geval Kant te kunnen verwijten (zie b.v. onze bespreking van Couturat's kritiek op Kant), inconsequent te zijn geweest; hij beschrijft immers als volgt het verificatieproces in de rekenkunde.

„Man muss über diese Begriffe hinausgehen, indem man die Anschauung zu Hilfe nimmt, die einem von beiden korrespondiert, etwa seine fünf Finger, . . . und so nach und nach die Einheiten der in der Anschauung gegebenen Fünf zu dem Begriffe der Sieben hinzutut" (B 15).

Men meent dan, den aanschouwelijken opbouw van de rekenkunde volgens Kant onder het empirisme te kunnen rangschikken. O.i. bewijst ons citaat alléén, maar dan ook zeer overtuigend, dat de zooeven weergegeven formuleering Kant's bedoeling met de onderscheiding van oordeelen a priori en a posteriori geheel verkeerd weergeeft; een aanwijzing tot juister begrip vinden we o.a. in de volgende woorden:

„Notwendigkeit und strenge Allgemeinheit sind ... sichere Kennzeichnen einer Erkenntnis a priori." (B 4).

Het gaat hier volstrekt niet om een physiologische karakteriseering van het verificatieproces; wanneer het verificatieproces zóó is, dat men de zekerheid heeft, dat bij een herhaling van de verificatie, eventueel ook langs anderen weg, het resultaat hetzelfde zal zijn, dan fundeert die verificatie een oordeel a priori. Deze zekerheid heeft men ten aanzien van de rekenkundige oordeelen, onverschillig, of men deze verifieert met behulp van een telraam, op de vingers tellende, met behulp van op het papier geteekende figuren, of „uit het hoofd". Dat aan al deze verificatieprocessen physiologische processen inhaerent zijn, zal niemand ontkennen, doch dat doet niets af aan het aprioristisch karakter van de geverifieerde oordeelen.

§ 5. Hoe kan men rekenschap geven van de *mogelijkheid* van synthetische oordeelen a priori? Het platonisme of begripsrealisme neemt een vermogen aan van intellectueele aanschouwing, van onmiddellijke aanraking met de begrippen, zooals wij door middel van de zintuiglijke waarneming in onmiddellijke aanraking (meenen te) komen met de natuurobjecten. Deze theorie verklaart wel het synthetisch karakter van de wiskundige oordeelen (en dan nog alleen maar naar analogie van het, zacht uitgedrukt, aanvechtbaar physisch realisme), maar niet hun aprioriteit. De natuurobjecten leeren wij door herhaalde waarneming al beter kennen, de natuurwetten worden door herhaalde verificatie al beter gefundeerd. De wiskundige oordeelen staan echter, in principe, na éénmaal geverifieerd te zijn, reeds met volkomen zekerheid vast. Leerden wij de objecten der mathesis door intellectueele aanschouwing kennen, dan ware te verwachten, dat ook hier door herhaling van den actus der verificatie het resultaat hoe langer hoe zekerder zou komen vast te staan.

§ 6. In aansluiting aan het vorige hoofdstuk kunnen we de volgende, juistere verklaring geven.

Als subjectieven grondslag der wiskunde leerden we kennen de opbouw van de mathematische objecten in het zelfbewustzijn; een element van willekeur ligt daarin alleen in zóóverre, als het bewustzijn zich de wetten van dien opbouw zelf stelt. In deze wetten, die den opbouw van de mathematische objecten bepalen, ligt nu tevens de waarborg voor de objectiviteit van de wiskunde. Het synthetisch karakter van de oordeelen, die deze opbouwwetten tot uitdrukking brengen, zal geen nader betoog behoeven, het aprioristisch karakter wordt echter eveneens zeer eenvoudig verklaard; voor de verificatie van zoo'n oordeel is opbouw van een of meer mathematische objecten noodig; aangezien deze opbouw volgens vaste wetten geschiedt, zal herhaling van de verificatie op haar resultaat niet van invloed kunnen zijn.

§ 7. De wiskunde vindt dus haar subjectieven (aanschouwelijken) grondslag in den opbouw van de mathematische objecten, haar objectieven (redelijken) grondslag in de wetten van dien opbouw. Aanschouwing en Rede zijn dus in de wiskunde geen kenbronnen van verschillend karakter, die aan haar opbouw op geheimzinnige wijze samenwerken; het zijn begripsvormingen, die hun ontstaan danken aan de twee verschillende wijzen, de subjectieve en de objectieve, waarop men de wiskunde kan en moet fundeeren.

AANHANGSEL I.

De term „Aanschouwing".

De term „aanschouwing" (waarmede de termen „intuitie", „intuitio", „intuition" taalkundig als synoniem worden beschouwd) is in de philosophische litteratuur zeer herhaaldelijk aan te treffen. Het komt ons voor, dat men er een zeer uiteenloopende beteekenis aan· toekent, zoodat het ons niet ondienstig schijnt, bij enkele philosophen eens na te gaan, wat zij onder aanschouwing verstaan. Naar volledigheid hebben wij hier niet willen streven.

Beschouwen wij allereerst eens DESCARTES; in de „Règles pour la Direction de l'Esprit" (Règle III) lezen we:

„. . . nous allons énumérer ici tous les actes de notre intelligence au moyen desquels nous pouvons atteindre à la connoissance des choses sans aucune crainte d'erreur. On n'en admet que deux: l'intuition et l'induction.

J'entends par intuition, non la croyance au témoignage variable des sens ou les jugements trompeurs de l'imagination, mauvaise régulatrice, mais la conception d'un esprit sain et attentif, si facile et si distinct qu'aucun doute ne reste sur ce que nous comprenons; ou bien, ce qui est la même chose, la conception ferme qui naît dans un esprit sain et attentif des seules lumières de la raison, et qui, plus simple, est conséquemment plus sûre que la déduction elle-même, qui cependant, comme nous l'avons remarqué plus haut, ne peut-être mal faite par l'homme. Ainsi chacun peut voir par intuition qu'il existe, qu'il pense, qu'un triangle se termine par trois lignes . . .

Nous distinguons donc l'intuition de la déduction certaine, parce que dans la déduction on conçoit un mouvement ou une certaine succession, au lieu que dans l'intuition il n'en est pas de même, et qu'en outre la déduction n'a pas besoin, comme l'intuition, d'une évidence présente, mais qu'elle emprunte plutôt, en quelque sorte, toute sa certitude à la mémoire."

Afgezien van de sterk psychologische inkleeding willen we als voor ons belangrijkste punten in DESCARTES' opvatting aanstippen.

1°. Het achterstellen van de deductie bij de intuitie.

2°. Het bezigen van de intuitie als grondslag voor de meetkunde.

3°. Het bezigen van de intuitie als grondslag voor de metaphysica.

Als tweede beschouwen wij KANT; in den aanvang zijner „Kritik der reinen Vernunft" lezen we:

„Auf welche Art und durch welche Mittel sich auch immer eine Erkenntnis auf Gegenstände beziehen mag, so ist doch diejenige, wodurch sie sich auf dieselbe unmittelbar bezieht, und worauf alles Denken als Mittel abzweckt, die Anschauung. Diese findet aber nur statt, sofern uns der Gegenstand gegeben wird; dieses aber ist wiederum nur dadurch möglich, dass er das Gemüt auf gewisse Weise affiziere. Die Fähigkeit (Rezeptivität), Vorstellungen durch die Art, wie wir von Gegenständen affiziert werden, zu bekommen, heisst Sinnlichkeit. Vermittelst der Sinnlichkeit also werden uns Gegenstände gegeben, und sie allein liefert uns Anschauungen, durch den Verstand aber werden sie gedacht, und von ihm entspringen Begriffe . . ."

„Die Wirkung eines Gegenstandes auf die Vorstellungsfähigkeit, sofern wir von demselben affiziert werden, ist Empfindung. Diejenige Anschauung, welche sich auf den Gegenstand durch Empfindung bezieht, heisst empirisch. Der unbestimmte Gegenstand einer empirischen Anschauung heisst Erscheinung."

„In der Erscheinung nenne ich das, was der Empfindung korrespondiert, die *Materie* derselben, dasjenige aber, welches macht, dass das Mannigfaltige der Erscheinung in gewissen Verhältnissen geordnet, angeschaut wird, nenne ich die *Form* der Erscheinung . . . die Form derselben . . . muss zu ihnen insgesamt im Gemüte *a priori* bereit liegen, und dahero abgesondert von aller Empfindung können betrachtet werden ."

„Ich nenne alle Vorstellungen rein, in denen nichts, was zur Empfindung gehört, angetroffen wird. Demnach wird die reine Form sinnlicher Anschauungen überhaupt im Gemüte *a priori* angetroffen werden . . . Diese reine Form der Sinnlichkeit wird auch selber reine Anschauung heissen. So, wenn ich von der

Vorstellung eines Körpers das, was der Verstand davon denkt, als Substanz, Kraft, Teilbarkeit &c., imgleichen, was davon zur Empfindung gehört, als Undurchdringlichkeit, Härte, Farbe &c. absondere, so bleibt mir aus dieser empirischen Anschauung noch etwas übrig, nämlich Ausdehnung und Gestalt. Diese gehören zur reinen Anschauung, die *a priori*, auch ohne einen wirklichen Gegenstand der Sinne oder Empfindung als eine blosse Form der Sinnlichkeit im Gemüte stattfindet" (A 19/21).

We zien hier een opvatting van de aanschouwing, die van de Cartesiaansche hemelsbreed verschilt. Was bij DESCARTES de „intuition" één met het Denken, bij KANT daarentegen is er tusschen „Anschauung" en „Verstand" een tegenstelling. Deze wordt zeer gelukkig tot uiting gebracht in een voetnoot der „Prolegomena" (in den „Anhang"):

„Der eigentliche Idealismus hat jederzeit eine schwärmerische Absicht und kann auch keine andre haben, der meinige aber ist lediglich dazu, um die Möglichkeit unserer Erkenntnis *a priori* von Gegenständen der Erfahrung zu begreifen, welches ein Problem ist, das bisher noch nicht aufgelöst, ja nicht einmal aufgeworfen worden. Dadurch fällt nun der ganze schwärmerische Idealismus, der immer (wie auch schon aus dem PLATO [1]) zu ersehen) aus unseren Erkenntnissen *a priori* (selbst denen der Geometrie) auf eine andere (nämlich intellectuelle Anschauung), als die der Sinne schloss, weil man sich gar nicht einfallen liess, dass Sinne auch *a priori* anschauen sollten."

Ten slotte beschouwen wij enkele woorden van een meer recenten auteur, HENRI POINCARÉ (wiens opvattingen wel te onderscheiden zijn van die van zijn landgenoot BERGSON; het begrip „intuition" van den laatste beweegt zich meer in irrationeel-metaphysische richting), ontleend aan zijn artikel „Les Mathématiques et la Logique" (Revue de Mét. et de Mor. 1905, 1906), p. 817:

„. . . ce que je veux rechercher, c'est s'il est vrai qu'une fois admis les principes de la Logique, on peut je ne dis pas découvrir,

---

[1]) Voor nadere historische bijzonderheden betreffende de problemen van ruimte en tijd zij verwezen naar de in de bibliografie genoemde werken van BAUMANN, DEICHMANN en CASSIRER („Erkenntnisproblem"). Het werkje van A. DREWS „Die Lehre von Raum und Zeit in der nachkantischen Philosophie" 1889 is van weinig beteekenis.

mais démontrer toutes les vérités mathématiques sans faire de nouveau appel à l'intuition."

„A cette question, j'avais autrefois répondu que non; notre réponse doit-elle être modifiée par les travaux récents? Si j'avais répondu non, c'est parce que „le principe d'induction complète" me paraissait à la fois nécessaire au mathématicien et irréductible à la logique ... J'y voyais le raisonnement mathématique par excellence."

Het hier beschreven begrip intuitie is in lijnrechte tegenspraak met de „Anschauung" van KANT; het is (ondanks zijn niet-reduceerbaar-zijn tot de logica) een uiting van intellectualiteit en niet van sensualiteit.

De Kantiaansche tegenstelling van „Anschauung" en „Verstand" is door BOLLAND in „Aanschouwing en Verstand" opgedreven tot een tegenstrijdigheid. Deze opvatting schijnt ons te ver te gaan; men komt zoo tot uitspraken van de soort (p. 45):

„Wij mogen stellen, dat reeds in de gewone meetkunde niemand toekomt zonder iets, dat van het standpunt der onvermengde onvervalschte menschelijke logica niets anders dan methodisch geordende onzin, verstandig onverstand kan zijn."

Tot slot volge nog een bespreking naar aanleiding van een beteekenis, die ook vaak aan de term „Aanschouwing" wordt toegekend, en wel bij beschouwingen van didactischen of paedagogischen aard. Men ziet zich bij het wiskunde-onderwijs gesteld voor de vraag: moet men bij het onderwijs aan jonge kinderen meer aanschouwelijke, dan wel meer formeele methoden volgen? Deze vraag is natuurlijk wel te onderscheiden van de logische probleemstelling: of de meetkundige stellingen hun geldigheid danken aan de Aanschouwing of aan het Verstand. Een „aanschouwelijke" behandeling (en daaronder wordt dan verstaan een behandeling, die in de eerste plaats gebruik maakt van figuren, draadmodellen, van demonstratie door teekenen en uitknippen, en dergelijke), wordt zeer vaak verdedigd door wiskundigen, die volstrekt *niet* van meening zijn, dat de mathematische geldigheid van de meetkunde haar oorsprong vindt in een „Aanschouwing" in den zin van KANT, ja, die aan dergelijke „Aanschouwing" volstrekt niet gelooven. Onder „Aanschouwing" verstaan zij eenvoudig „visueele waarneming"; zij hopen nu, dat de leerlingen, na op deze wijze een aantal stellingen te hebben geleerd, zullen gaan inzien, dat voor een „bewijs" van sommige een aanschouwelijke demonstratie volstrekt overbodig is. Zoo wordt dan de behoefte gewekt aan een meer „formeele" behandeling: men gaat trachten zoowel mogelijk van de bekende stellingen terug te voeren tot een klein aantal, waardoor men komt tot het opstellen van een axiomastelsel. Daarmee is dan een basis geleverd voor de verdere behandeling van de meetkunde: de leerlingen hebben zich eraan gewend, zich op handige wijze bij het ontdekken van nieuwe stellingen, of bij het oplossen van vraagstukken, te bedienen van aanschouwelijke hulpmiddelen. Maar tevens is hun kritisch vermogen tot ontplooiing gekomen. Zoo'n nieuw ontdekte stelling wordt niet als geldig beschouwd, dan na een formeele deductie uit de reeds bekende stellingen. En ook bij die deductie levert de „aanschouwing" weer de kostelijkste hulpmiddelen.

AANHANGSEL II.

Over het Principe der Recurrentie of Volledige Inductie.

§ 1. We hebben in het voorgaande verschillende malen over recurrente definities, constructies, bewijsmethoden moeten spreken, zonder van deze begrippen telkens een nadere toelichting te kunnen geven; het lijkt ons derhalve gewenscht, thans in samenhang uiteen te zetten, wat daaronder moet worden verstaan.

§ 2. Onze uiteenzetting blijkt wellicht het doorzichtigst, wanneer men de rij van de natuurlijke getallen denkt opgebouwd, uitgaande van de eenheid en door successieve toevoeging van eenheden, dat wil dus zeggen door „tellen". Ten einde over de zoo verkregen getallen te kunnen spreken, moet men er namen aan geven; een wijze van naamgeving, die zich op zeer aanschouwelijke wijze bij de genoemde wijze van opbouw aansluit, is de volgende

$$1,\ 1+1,\ 1+1+1, \ldots$$

en die zal dan ook aan ons betoog ten grondslag worden gelegd.

§ 3. De rekenkunde bepaalt zich niet tot de studie van de resultaten van het tellen; zij past op de natuurlijke getallen ook andere bewerkingen toe dan toevoeging van de eenheid, en wel als eenvoudigste de optelling. Om de *optelling* van een getal b bij een getal a ondubbelzinnig te definieeren, zal men klaarblijkelijk moeten aangeven, op welke wijze men het getal $a + b$, uitgaande van de eenheid door successieve toevoeging van eenheden opbouwt. Dit geschiedt als volgt.

We stellen om te beginnen vast, dat $a + 1$ het natuurlijk getal is, dat door toevoeging van de eenheid uit het natuurlijk getal a ontstaat, $a - 1$ (zoo a niet de eenheid zelf is) het natuurlijk getal, waaruit a door toevoeging van de eenheid ontstaat.

Nu definieeren we $a + b$ als volgt:

$$a + b \underset{\text{Df.}}{=} [a + (b - 1)] + 1.$$

Deze definitie zegt alleen *dan* iets, wanneer we weten, wat

$$a + (b - 1)$$

beteekent; dit getal is echter op grond van de definitie, als volgt bepaald:

$$a + (b - 1) = \{a + [(b - 1) - 1]\} + 1.$$

Kennen we evenwel het getal

$$a + [(b - 1) - 1]?$$

Blijkbaar (weer volgens de definitie) alléén, indien we het getal

$$a + \{[(b - 1) - 1] - 1\}.$$

kennen, enz.

De bepaling van het getal $a + b$ is dus, op grond van de definitie, successievelijk terug te brengen tot de bepaling van de getallen

$$a + (b - 1),\ a + [(b - 1) - 1],\ \text{enz.}$$ [1])

Komt aan die reeks bepalingen een eind? We bedenken, dat we in de reeks

$$b,\ b - 1,\ (b - 1) - 1, \ldots$$

in omgekeerde volgorde het opbouwproces van het getal b voor oogen hebben; die reeks eindigt met de eenheid, en dus is de bepaling van $a + b$ herleid tot de bepaling van $a + 1$, die zonder meer mogelijk is.

De definitie staat dus inderdaad de berekening van $a + b$ voor elke a en elke b toe.

Andere voorbeelden van definities door recurrentie zijn die van $a \times b$ en van a^m:

$$a \times b \underset{\text{Df.}}{=} a \times (b - 1) + a, \text{ waarbij}$$
$$a \times 1 \underset{\text{Df.}}{=} a,$$

resp.

$$a^m \underset{\text{Df.}}{=} a^{m-1} \times a, \text{ waarbij}$$
$$a^1 \underset{\text{Df.}}{=} a.$$

---

[1]) Het is deze eigenaardigheid, die men tot uitdrukking brengt, wanneer men spreekt van een definitie door recurrentie.

§ 4. Voor de optelling geldt de „associatieve eigenschap"

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \qquad (\alpha)$$

waarvan we thans het bewijs willen weergeven.

Volgens de definitie van de optelling is

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1, \qquad (\beta)$$

zoodat (α) geldt voor $c = 1$.

Is c niet gelijk aan 1, dan is de juistheid van (α) af te leiden uit de juistheid van

$$a + [b + (c - 1)] = (a + b) + (c - 1). \qquad (\alpha')$$

Immers zij (α') waar, dan geldt ook

$$\{a + [b + (c - 1)]\} + 1 = [(a + b) + (c - 1)] + 1$$

of, op grond van (β), herhaaldelijk toegepast:

$$a + \{[b + (c - 1)] + 1\} = (a + b) + [(c - 1) + 1]$$

$$a + \{b + [(c - 1) + 1]\} = (a + b) + [(c - 1) + 1].$$

Nu volgt uit de wijze, waarop $a + 1$ en $a - 1$ ingevoerd zijn:

$$(c - 1) + 1 = c,$$

zoodat inderdaad (α) uit (α') volgt; de vraag, (α) te bewijzen, is dus herleid tot de vraag, (α') te bewijzen; maar op dezelfde wijze is de vraag, (α') te bewijzen, te herleiden tot de vraag,

$$a + \{b + [(c - 1) - 1]\} = (a + b) + [(c - 1) - 1] \qquad (\alpha'')$$

te bewijzen; enz.

Komt aan deze reeks herleidingen een eind? Voortschrijdende in de reeks, zien we c vervangen worden door

$$c - 1,\ (c - 1) - 1, \ldots.$$

Maar zoo komen we ten slotte op de eenheid terecht, omdat c uit de eenheid door toevoeging van eenheden wordt verkregen. En dus wordt (α) herleid tot

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1.$$

Maar daarmee zijn we op (β) aangeland, dus op een juiste stelling; (α) is dus ook juist.

Zooals de definitie van § 3 het prototype mag heeten van alle definities door recurrentie, zoo is het hier gegeven bewijs te beschouwen als prototype van alle bewijzen door volledige inductie.

§ 5. Uit de gegeven uiteenzetting zal gebleken zijn, waarop de toepasbaarheid van de definities door recurrentie, en de bewijskracht (de evidentie) van de bewijzen door volledige inductie eigenlijk berusten: ze vloeien voort uit het principe, volgens hetwelk de natuurlijke getallen zijn opgebouwd. Aangezien nu de definities door recurrentie en de bewijzen door volledige inductie de geheele theorie van de natuurlijke getallen beheerschen, is dit opbouwprincipe, het principe van de recurrentie of van de volledige inductie, in den zin van hoofdstuk IX § 2 en hoofdstuk X § 5 te beschouwen als subjectieve grondslag van deze theorie.

§ 6. Wat is het formeel-logisch karakter van de definities door recurrentie? Alvorens deze vraag te beantwoorden, bezinnen we ons nog eens op de beide typen van definities, die we reeds hebben leeren kennen, de nominale definitie en de definitie door postulaten.

De nominale definitie (waarvan de formules (a), (b), (c) en (d) in §§ 2/3 van hoofdstuk V ons voorbeelden leveren) is een formeele regel, die ons in staat stelt, een bepaalde teekencombinatie overal waar zij voorkomt naar willekeur door een andere te vervangen. Door het invoeren van een nominale definitie wordt het logisch karakter van een theorie niet veranderd; er ontstaan geen nieuwe geldigheden; alleen ontstaat de mogelijkheid, de oude op een nieuwe manier tot uitdrukking te brengen. Omgekeerd kan men steeds „substituer les définitions à la place des définis" en zoodoende uit elke redeneering, uit elk probleem het gedefinieerde begrip „elimineeren". Op deze wijze kan men inzien, dat door een nominale definitie in een theorie geen nieuwe problemen of contradicties kunnen worden ingevoerd.

Met de definities door postulaten (door Hilbert aan de meetkunde ten grondslag gelegd) is het anders gesteld. Zij geven het gedefinieerde mathematische object niet rechtstreeks aan, doch brengen van dat object slechts die kenmerkende eigenschappen tot uitdrukking, die aan de formeele theorie ten grondslag worden gelegd. Definities door postulaten komen in elke theorie voor, omdat, zooals evident is, nooit *alle* in de theorie voorkomende begrippen door nominale definities kunnen worden vastgelegd. Zoo worden in HILBERTS „Grundlagen der Geometrie" punten en lijnen door postulaten gedefinieerd. Een definitie door postulaten is in den regel niet te „elimineeren"; ze kan derhalve nieuwe problemen en contradicties introduceeren.

Noemt men een definitie „expliciet" of „impliciet" al naar gelang ze te elimineeren is, of niet, dan kan men dus zeggen: een nominale definitie is altijd expliciet, een definitie door postulaten is in den regel impliciet.

We keeren nu terug tot de definities door recurrentie. PEANO vatte een definitie door recurrentie op als een *reeks* nominale definities, welke opvatting, blijkens onze uiteenzetting van § 3, zeker gerechtvaardigd is. Ieder dier nominale definities afzonderlijk is te elimineeren, en dus is, zoo meende PEANO, ook de definitie door recurrentie zelf te elimineeren.

Deze argumentatie houdt een drogreden in, die we hier echter niet uitvoerig kunnen analyseeren. We willen er alleen dit van zeggen: de definitie door recurrentie vertegenwoordigt een *oneindige* reeks nominale definities, en derhalve kan het voorkomen, dat de eliminatie een oneindig proces vereischt, dat niet tot een eindig proces te herleiden is, en derhalve onuitvoerbaar. Een definitie door recurrentie kan derhalve impliciet zijn, niet-te-elimineeren; zij kan dus tot nieuwe problemen en eventueel contradicties aanleiding geven. Een definitie door recurrentie vereischt dus een bewijs van contradictieloosheid. Het is de definitie van de vermenigvuldiging, die in de rekenkunde aanleiding geeft tot het optreden van tot op heden onoplosbare problemen. In een rekenkunde, die alléén beschikt over de begrippen gelijk, ongelijk, som, verschil zijn echter alle te stellen problemen oplosbaar.

§ 7. Recurrente methoden beheerschen alle theorieën, die een met dien van de rekenkunde verwanten subjectieven grondslag bezitten. Een voorbeeld levert de in hoofdstuk V, § 1 behandelde oordeelslogica. We hebben daar het opbouwprincipe voor de „logische uitdrukking", het object van de oordeelslogica, wel wat heel abstract geformuleerd en een nadere explicatie lijkt derhalve niet geheel ongewenscht.

Daartoe laten we de analogie uitkomen met het opbouwprincipe, dat de theorie van de natuurlijke getallen beheerscht; in het laatste geval *één* „uitgangsobject": de eenheid, en *één* „grondoperatie": toevoeging van de eenheid aan een reeds verkregen natuurlijk getal; en alle natuurlijke getallen worden door herhaalde toepassing van de grondoperatie uit de eenheid verkregen, met dien verstande, dat ook het uitgangsobject, de eenheid zelf, geacht wordt een natuurlijk getal te zijn.

In het geval van de oordeelslogica hebben we *onbepaald veel* „uitgangsobjecten": de „logische variabelen"

$$p, q, r, \ldots$$

en *vier* „grondoperaties": het opbouwen van „logische uitdrukkingen"

$$\overline{A},\ A v B,\ A \mathbin{\&} B,\ A \rightarrow B$$

uit reeds verkregen „logische uitdrukkingen" A en B; en alle „logische uitdrukkingen" worden door herhaalde toepassing van grondoperaties uit „logische variabelen" verkregen, met dien verstande, dat ook de uitgangsobjecten, de „logische variabelen" zelf, geacht worden „logische uitdrukkingen" te zijn.

Zooals we al opgemerkt hebben, is ook hier weer het opbouwprincipe subjectieve grondslag voor de toepasbaarheid van recurrente methoden, die dan ook in onze uiteenzetting van de oordeelslogica herhaaldelijk zijn toegepast. Zoo levert het toekennen van een waarde aan logische uitdrukkingen een voorbeeld van definitie door recurrentie; onze bewijzen van enkele eigenschappen van logische uitdrukkingen en tautologieën gaven voorbeelden van bewijzen door volledige inductie.

Volgens HERBRAND onderscheidt men nog recurrentie naar de constructie, en recurrentie naar het bewijs van een oordeel: de eerste geldt voor ieder oordeel, de tweede alleen voor bewijsbare oordeelen.

LITTERATUUR:

G. PEANO: „Formulaire de Mathématiques" Tome II — No. 3, Turin 1899, § 20, 3/4, p. 29/31.

H. POINCARÉ: „le Science et l'Hypothèse". Chap. I.

JACQUES HERBRAND: „Recherches sur la Théorie de la Démonstration", Thèse Paris 1930.

D. HILBERT u. P. BERNAYS: „Grundlagen der Mathematik", Berlin 1934, S. 292.

AANHANGSEL III.

Over de Verhouding van de traditioneele Syllogistiek tot de moderne Logistiek.

§ 1. De traditioneele syllogistiek beschouwt als fundamenteele relatie de relatie tusschen subject en praedicaat, het vallen, met andere woorden, van een lager onder een hooger begrip. Deze relatie kunnen we in de begripslogica formaliseeren en wel als volgt [1]).

Een begrip wordt, zooals we al weten, voorgesteld door een symbool $f(x)$; zijn nu $\sigma(x)$ en $\pi(x)$ de symbolen voor subject, opv. praedicaat, dan zal de subject-praedicaatrelatie als volgt tot uitdrukking kunnen worden gebracht:

$$(x)[\sigma(x) \rightarrow \pi(x)],$$

of in woorden: „voor *elke* x geldt: *als* x onder het subject valt, *dan* valt x ook onder het praedicaat."

Men duidt deze relatie gewoonlijk aan door het symbool $\sigma a \pi$ en wij hebben er geen bezwaar tegen, die notatie in de volgende paragrafen over te nemen; hetzelfde doen we voor de overige, in de syllogistiek voorkomende, relaties i, e, o; d.w.z. wij voeren een viertal definities in:

$$\begin{aligned}
\xi a \eta &\underset{\text{Df.}}{=} (x)[\xi(x) \rightarrow \eta(x)] \\
\xi i \eta &\underset{\text{Df.}}{=} (Ex)[\xi(x) \;\&\; \eta(x)] \\
\xi e \eta &\underset{\text{Df.}}{=} (x)[\xi(x) \rightarrow \overline{\eta(x)}] \\
\xi o \eta &\underset{\text{Df.}}{=} (Ex)[\xi(x) \;\&\; \overline{\eta(x)}]
\end{aligned}$$ [2]).

§ 2. De z.g. sluitreden „volgens Barbara" luidt nu, wanneer men van deze overzichtelijke notatie gebruik maakt:

$$(\mu a \pi \;\&\; \sigma a \mu) \rightarrow \sigma a \pi;$$

---

[1]) Men zie in onze uiteenzetting dus geen anticipatie op de hier niet behandelde relatielogica.

[2]) De lezer moge zelf deze definities controleeren; grieksche letters duiden begrippen aan.

ze volgt uit de axioma's van oordeels- en begripslogica, evenals de andere sluitredenen van de z.g. „eerste figuur".

Alle overige sluitredenen worden afgeleid door terugvoering tot deze; deze terugvoering berust op de volgende bewerkingen: conversie, contrapositie, metathesis praemissorum.

Conversie en contrapositie berusten beide op de tautologie:

$$(p \to q) \to (\bar{q} \to \bar{p}),$$

de metathesis praemissorum daarentegen op:

$$(p \,\&\, q) \to (q \,\&\, p).$$

§ 3. Tracht men nu, de traditioneele afleiding der 19 sluitredenen op grond van de oordeels- en begripslogica uit te voeren, dan doet men de verrassende ontdekking, dat voor een viertal deze afleiding niet gelukt; dat zijn de ook door COUTURAT genoemde: DARAPTI, FELAPTON, BAMALIP, FESAPO. Onderzoekt men deze kwestie nader, dan blijkt, dat de klassieke afleiding berust op de mogelijkheid van een „conversio per accidens", die in onze notatie als volgt kan worden voorgesteld:

$$\xi a \eta \to \eta i \xi.$$

Deze stelling geldt evenwel in de begripslogica niet algemeen; ze is daar alleen dàn juist, wanneer er inderdaad onder het begrip ξ zekere voorwerpen vallen; is dat niet het geval, is het begrip ξ *leeg*, dan zou ook η leeg *kunnen* zijn; in dat geval zou $\eta i \xi$ nooit kunnen gelden.

§ 4. We zien dus, dat er tusschen de traditioneele formeele logica en de moderne logistiek een discrepantie bestaat, tengevolge van de omstandigheid, dat de eerste bij het oordeel „alle ξ's zijn η's" (stilzwijgend) de onderstelling maakt, dat er ξ's zijn, de tweede niet. De vraag, welke van de twee „gelijk" heeft, is natuurlijk zonder zin; beide „standpunten" (wanneer men daarvan hier mag spreken) hebben, mits consequent toegepast, gelijkelijk recht van bestaan; maar een zeer interessante, hoewel meer psychologisch gerichte vraag is deze, welke van de twee nu het „natuurlijke denken" het meest nabij komt.

Wanneer men iemand „à bout portant" voor deze vraag stelt, dan zal hij het vrijwel steeds voor de traditioneele logica opnemen; deze situatie is reeds meermalen als argument tegen de logistiek aangevoerd [1]). Toch is deze voorstelling onjuist, zooals we zullen aantoonen op grond van het voorkomen van algemeen toekennende oordeelen, niet in logistische of ook maar zuiver mathematische, maar in philosophische werken, waar het subject een leeg begrip is.

Als voorbeeld beschouwen we KANT's kritiek van de rationeele theologie. Deze berust in beginsel op de onderscheiding van godsbewijzen a priori en godsbewijzen a posteriori; uitvoerige bewijzen geeft KANT van de volgende stellingen

1) Er is geen godsbewijs a priori.

2) Alle godsbewijzen a posteriori vooronderstellen een godsbewijs a priori.

Of deze stellingen en hun bewijzen juist zijn, komt er thans voor ons niet op aan, alleen het voorkomen van de tweede stelling als argument. Uit de tweede stelling en de eerste volgt, dat er geen godsbewijzen a posteriori zijn; de tweede stelling is dus een algemeen oordeel met leeg subject.

Een andere opmerking is deze: maakt men de onderstelling van de syllogistiek, dan geldt niet de disjunctie: „alle ξ's zijn η, of er is een ξ die niet η is"; immers deze disjunctie houdt geen rekening met de mogelijkheid, dat er géén ξ is. Aangezien het natuurlijke denken zich van tijd tot tijd op deze disjunctie beroept, volgt ook hier weer, dat het natuurlijk denken niet (of niet altijd) met de traditioneele logica in overeenstemming is.

§ 5. Er zou voor ons weinig aanleiding hebben bestaan, de traditioneele syllogistiek (die sinds de ontwikkeling van de moderne logistiek op andere dan historische belangstelling geen aanspraak meer kan maken), zoo uitvoerig te behandelen, wanneer we niet onlangs opmerkzaam waren geworden [3]) op de voor ons bevreemdende omstandigheid, dat deze nog heden aan onderzoekingen naar de intelligentie, zelfs door de modernste psychologische scholen, ten grondslag worden gelegd.

---

[1]) H. KLEINPETER in den „Anhang" van zijn vertaling van STANLEY JEVONS' „Elementary lessons in logic", 2. Aufl., Leipzig 1913.

H. BURKAMP „Begriff und Beziehung", Leipzig 1927.

[2]) PH. KOHNSTAMM „De formele logica en het kinderlijke denken".

H. TURKSTRA „Psychologisch-Didactische Problemen"; zie ook de bespreking van het laatste door H. J. E. BETH in Euclides X.

We zullen hier niet ingaan op de vraag naar de „testeerbaarheid van intelligentie", en evenmin op de vraag, of, indien men de intelligentie wil testeeren, opgaven uit de formeele logica, die liggen buiten de belangstelling van kind of doorsnee-volwassene, en die (willen ze eenige waarde bezitten) geheel buiten zijn gewone gedachtensfeer moeten worden gekozen, wel een daartoe geschikt hulpmiddel moeten worden geacht, maar willen alleen met nadruk wijzen op de wenschelijkheid, bij gebruik van formeel-logische tests ook rekening te houden met de meest betrouwbare formeel-logische gegevens.

De moderne logistiek geeft niet alleen veel nauwkeuriger en vollediger de elementen van het formeel redeneeren weer dan de syllogistiek (uit welker directe en indirecte sluitredenen alléén ongeveer geen enkele werkelijk voorkomende redeneering is op te bouwen), ze daalt tevens tot veel eenvoudiger fundamenten af; eenvoudige en evidente uitspraken als

$$(\bar{p} \rightarrow p) \rightarrow p$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$$

zoekt men in de traditioneele formeele logica tevergeefs; de feillooze en intuitieve hanteering ervan is echter een conditio sine qua non voor het met inzicht volgen zelfs van den eenvoudigsten meetkunde-cursus. Door rekening te houden met de resultaten der logistiek zou men tevens gevrijwaard zijn voor een verrassing als degene, die SCHÜSSLER is overkomen: hij gaf aan 12 volwassen proefpersonen, w.o. 11 intellectueelen, praemissen van de gedaante

$$\pi a \mu$$

$$\mu a \sigma$$

en verkreeg 12 maal als conclusie

$$\pi a \sigma$$

in afwijking van de traditioneele syllogistiek, die de conclusie

$$\sigma i \pi$$

voorschrijft; hij rekende deze antwoorden „fout", een zeer „onrechtvaardige" handelwijze, niet alleen, zooals KOHNSTAMM meent, omdat de eisch, volgens BAMALIP te concludeeren, kennis van de Aristotelische metaphysica vooronderstelt, maar ook, omdat de conclusie *πασ* volkomen onaanvechtbaar en streng geldig is, terwijl, zooals we gezien hebben, bij de afleiding van *σιπ* reeds van het standpunt van het „natuurlijke denken'' gegronde bezwaren zijn aan te voeren.

Andere verrassingen zijn evenwel niet uit te sluiten: het zijn b.v. die conclusies, die hun ontstaan danken aan door de praemissen gewekte wenschvoorstellingen [1]); zij zijn vaak volkomen onaanvechtbaar, maar komen van formeel-logisch standpunt niet in aanmerking, omdat de formeele logica zich voor onze wenschen nu eenmaal niet interesseert.

---

[1]) Zoo b.v. de door Kohnstamm l.c. p. 26 genoemde:

als ik naar de bioscoop ga, heb ik geld noodig,
ik heb geen geld,
———————
dus moet ik geld zien te krijgen.

AANHANGSEL IV.

Bezwaren tegen de Niet-Euclidische Meetkunde. Onderzoekingen van HEYMANS.

HEYMANS heeft in een tweetal artikelen: „Zur Raumfrage" de ruimtevoorstellingen physiologisch trachten te verklaren. In hoeverre een dergelijke verklaring ook kentheoretische waarde kan bezitten, willen we voorloopig daarlaten. HEYMANS zelf is op deze kwestie teruggekomen in een artikel getiteld „Erkenntnistheorie und Psychologie". Ons is het erom te doen, allereerst de *mathematische* fout aan te wijzen in HEYMANS' betoog; daarna worden aan dit resultaat nog eenige algemeene beschouwingen vastgeknoopt. We beginnen met enkele citaten.

„Dabei liefern uns die bekannten Beobachtungen an Blindgeborenen jedenfalls einen werthvollen Ausgangspunkt: die Gewissheit nämlich, dass *die Innervationsempfindungen für sich genügen, um das Verständniss der geometrischen Elemente zu ermöglichen*" (S. 269).

„Der Raum kann für den Blindgeborenen nichts Anderes sein als *das System der überhaupt möglichen Innervationen* . . . Dieser Begriff ist aber offenbar kein physischer, sondern ein psychologischer Begriff" (S. 272/273).

„Die *apodiktische Gewissheit* aber des Axioms von der Dreidimensionaliteit findet ihre einfache Erklärung in dem Umstand, dass die Innervationsempfindungen zu den Empfindungen aus centraler Reizung gehören, also nicht ein gegebenes, sondern ein willkürlich hervorgebrachtes sind. Es ist also nicht das blosse Fehlen einer vierten Art von Innervationsempfindung, worauf das Axiom von den drei Dimensionen sich stützt; es ist vielmehr die Beschränkung unserer subjectiven Machtsphäre, welche als solche empfunden wird und dem Axiom seinen apodiktischen Charakter verleiht" (S. 274).

„Woher hat nun der Blindgeborene die Gewissheit dass sein Raum weder ein sphärischer, noch ein pseudosphärischer ist? . . . Ich verstehe . . . unter *Innervationsreihe* eine Reihe sich ohne

Unterbrechung folgender —, oder nur durch innervationslose Intervalle getrennter Innervationen; ich nenne dieselbe *gleichförmig*, wenn sie in allen Theilen in constantem Verhältniss aus elementaren Innervationen der drei Arten zusammengestellt ist. In diesem Falle wird die Innervationsreihe durch eben dieses constante Verhältniss *qualitativ bestimmt*; also etwa durch die Formel $(a : b : c)$. *Qualitativ bestimmt* . . . durch die Angabe der von diesem Anfang an erzeugten Innervationsquanta der drei Arten: also durch die Formel (ma, mb, mc) oder $m(a, b, c)$ . . ." (S. 278).

„ „Gerade Linie" bedeutet für ihn [1]) nur: gleichförmige Innervationsreihe; und einen „Punkt" kann er sich nur als den Endzustand einer qualitativ und quantitativ bestimmten Innervationsreihe denken" (S. 279).

Op grond van het voorgaande wordt daarna in een *volkomen sluitend betoog* de geldigheid van de Euclidische meetkunde voor den „Innervationsraum" aangetoond.

Dat wil evenwel niet zeggen dat de aprioriteit van de Euclidische meetkunde werkelijk is aangetoond.

Immers, er is in de vorafgaande definities *één* onderstelling ingevoerd, die weliswaar HEYMANS in staat stelt, zijn bewijs te leveren, maar die geheel willekeurig is. We zien hier hetzelfde verschijnsel als op te merken valt in de tallooze pogingen van wiskundigen om het parallelenpostulaat te bewijzen: ergens in het betoog wordt een *schijnbaar* vanzelfsprekende aanname gemaakt, waardoor het gevraagde bewijs mogelijk wordt.

Zelfs HEYMANS, die klaarblijkelijk toch van metageometrische onderzoekingen studie gemaakt had, is in deze fout weer vervallen.

Waar zit de *verstopte onderstelling*? Ze zit, als bijna altijd impliciet in een *definitie*, en wel in die van de „gleichförmige Innervationsreihe".

Men kan in eens inzien, dat de aanname daar *moet schuilen* en wel op de volgende wijze. Het bestaan van een „gleichförmige Innervationsreihe" impliceert het bestaan van de groep der vermenigvuldigingstransformaties van een of ander punt uit. Immers willen we O als centrum kiezen, en zij P een willekeurig punt, dan is er een „gleichförmige Innervationsreihe", b.v.

---

[1]) nl. voor den blindgeborene.

(p, q, r), die van O naar P voert. Zij de vermenigvuldigingsfactor λ, dan zal met P correspondeeren P', dat bereikt wordt uit O door $(\lambda p, \lambda q, \lambda r)$. Het bestaan van zoo'n vermenigvuldigingsgroep impliceert de geldigheid der Euclidische meetkunde (WALLIS, 1616—1703) [1]).

Wanneer we nu dus eens even de definitie nader beschouwen: „ich nenne dieselbe *gleichförmig*, wenn sie in allen Theilen in constantem Verhältniss aus elementaren Innervationen der drei Arten zusammengestellt ist," dan valt onze aandacht op het feit dat hier wel wordt gelet op de *verhouding* der „elementaren Innervationen" maar niet op hun *volgorde*. En nu spreekt het volstrekt *niet* vanzelf, dat het op die volgorde *niet aankomt* [2]). Integendeel wordt toch door ons het verschil in volgorde in eenige reeksen van „Empfindungen" juist zeer sterk ondervonden!

Eerst de „Innervation" *a*, *dan b*, is heel iets anders dan *eerst b*, en daar*na* pas *a*. Het heeft heelemaal geen zin deze combinaties zonder meer gelijk te stellen. Voor onze voorstelling zijn ze juist zéér verschillend.

Wat zou het nu kunnen beteekenen, dat de reeksen

eerst *a*, dan *b*

eerst *b*, dan *a*

„gelijk" zijn? Dit heeft alleen een beteekenis *a posteriori*, en wel: „de eerste reeks voert me van een *voorwerp p* naar een *voorwerp q*, en de tweede *ook*."

Maar deze gelijkheid is een ervaringsfeit, en ze kan dus niet langer aanspraak maken op apodictische zekerheid.

Resumeerend: twee Innervationsreihen kan men alleen dan *a priori*, dus met apodictische zekerheid gelijkstellen (maar dat is dan ook eigenlijk triviaal!), wanneer ze uit *gelijke* elementen in *gelijke* volgorde zijn opgebouwd.

Is dat niet het geval, dan is over die gelijkheid alleen a posteriori te beslissen.

In de *mate*, waarin de volgorde van een reeks voor haar waarde zonder beteekenis is, is de ruimte der „Innervationen" dus Euclidisch te noemen; d.w.z. in die mate daalt haar „kromming".

---

[1]) Op het bewijs van deze stelling, dat van zuiver mathematischen aard is, gaan we niet in.

[2]) En dus spreekt ook de legitimiteit van die definitie niet vanzelf.

Wij hebben HEYMANS' werk eenigszins uitvoerig besproken, omdat het (ondanks de mathematische tekortkomingen) wel de belangrijkste en de origineelste is onder de pogingen, om KANT's leer van de aanschouwingsruimte tegenover de niet-Euclidische meetkunde te rechtvaardigen. De oudste van deze pogingen vinden we bij LOTZE („Metaphysik" 2. Aufl.). Men kan de tegen de niet-Euclidische meetkunde aangevoerde bezwaren rangschikken in twee hoofdgroepen:

1) bezwaren tegen de mathematische theorie als zoodanig.

2) bezwaren tegen een niet-Euclidische structuur van de aanschouwingsruimte of de physische ruimte (die men echter zelden of nooit onderscheidt).

In bijna alle gevallen (HEYMANS maakt een gunstige uitzondering) worden bezwaren van beide soorten tegelijkertijd en ononderscheiden aangevoerd. Het zal na de uiteenzettingen van hoofdstuk III, VIII, IX niet meer noodig zijn, de bezwaren van de tweede groep te bespreken. Die van de eerste groep zijn door BERTRAND RUSSELL [1]) op de volgende wijze geclassificeerd.

„The objections to non-Euclidean Geometry which have just been discussed fall under four heads:

I. Non-Euclidean spaces are not homogeneous; Metageometry therefore unduly reifies space.

II. They involve a reference to a fourth dimension.

III. They cannot be set up without an implicit reference to Euclidean space, or to the Euclidean straight line, on which they are therefore dependent.

IV. They are self-contradictory in one or more ways.

The reader who has followed me in regarding these four objections as fallacious, will have no difficulty in disposing of any other critic of Metageometry, as these are the only mathematical arguments, so far as I know, ever urged against non-Euclideans."

Hij weerlegt ze op meesterlijke wijze.

Van het dooreenmengen van beide groepen van bezwaren geven we zonder commentaar nog enkele voorbeelden.

„Es war mir nicht möglich, die Gesichtseindrücke des pseudosphärischen Raumes zu konstruieren."

---

[1]) „An Essay on the Foundations of Geometry", Cambridge 1897, p. 93, 108.

„Es war also widerlegt, wenn wir wirklich auf Grund der Nicht-Euklidischen Geometrie neu Anschauungen formen erlernen könnten. Allein das ist nicht möglich, denn das Bild des metamathematischen Raumes befindet sich im Euklidischen Raum, aus den uns Helmholtz nicht herausführen konnte" [1]).

„Es könnte zunächst freilich scheinen, alsob wir jede Geometrie zur Grundlage der Erfahrung machen könnten, indem wir diese eben in die „Sprache" der verscheidenen Geometrien „übersetzen" . . . Allein ich brauche hier nicht besonders darauf aufmerksam zu machen, dass wir, um beim Bilde zu bleiben, dann doch immer von einer Art „Grundsprache" ausgehen. Wichtiger... ist es, dass die „übertragenen" Thatsachen dann eben doch nicht die realen Thatsachen sind."

„Wir können darum ruhig zugeben, dass auch die nicht-euklidische Geometrie formal-mögliche Erfahrung logisch bedingen kann. Aber allein die euklidische Geometrie ermöglicht logisch reale Erfahrung" [2]).

„Dass wir aber die nicht-euklidischen Räume uns sogar zur Anschauung zu bringen vermochten, hat zwar Helmholtz beweisen wollen, aber dieser Beweis — der mit der Mathematik der nicht-euklidischen Räume nichts zu tun hat, vielmehr eine rein psychologisch-physiologische Frage betrifft ist heute wohl allgemein als missglückt erkannt und dürfte kaum noch ernstliche Verteidigung finden. Die „Anschauung" sphärischer und pseudosphärischer Räume, die uns Helmholtz hat verschaffen wollen, ist ganz ersichtlich nichts als eine „Abbildung" oder Projektion derselber auf den *Euklidischen* Raum" [3]).

---

[1]) W. Meinecke: „Die Bedeutung der Nicht-Euklidischen Geometrie in ihrem Verhältnis zu Kants Theorie der mathematischen Erkenntnis". Kant Studien 11, 1906. S. 223/231.

[2]) Bruno Bauch: „Erfahrung und Geometrie", Kantstudien 12, 1907 S. 227/28; ook in zijn „Studien zur Philosophie der exakten Wissenschaften", Heidelberg 1911, S. 129/30.

[3]) P. Natorp: „Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften". Lpzg. u. Berlin 1911, S. 309.

SOMMAIRE.

Le présent travail constitue une réponse à une question mise au concours par la Faculté de Lettres et de Philosophie de l'Université d'Utrecht. La Faculté avait demandé:

„si la nécessité de l'espace comme forme a priori de l'intuition est supprimée par suite de la possibilité d'édifier la géométrie d'une façon purement logique".

Cette question fait allusion aux polémiques entre le kantianisme et le logicisme moderne. Le logicisme en mathématiques peut être défini comme l'affirmation de la possibilité d'édifier les sciences mathématiques indépendamment de toute évidence intuitive. Or on montre que les seules méthodes, connues à nos jours, qui permettent d'édifier les mathématiques d'une façon vraiment satisfactoire (l'intuitionnisme de Brouwer et le formalisme de Hilbert) impliquent toutes les deux un appel à l'intuition, combien la place, adjugée à celui-ci, puisse différer dans ces deux systèmes.

A notre avis le caractère trompeur attribué (souvent avec raison, il est vrai) par le logicisme à l'évidence intuitive ne justifie pas le rejet absolu de tout appel à celle-ci; de même façon on pourrait nier le caractère scientifique des sciences empiriques, qui font appel à des perceptions sensibles, parfois trompeuses elles aussi. En effet, la critique justifiée de la confiance sans réserve du jugement de l'intuition ne fait que rendre nécessaire une fondation rationnelle et systématique de son application dans les sciences (qui nous semble inévitable).

Cette *fondation subjective* est placée à coté de la *fondation objective* ou logique; de même que celle-ci consiste dans la détermination de la structure formelle des sciences, la fondation subjective cherchera la structure de la conscience immédiate.

Nous avons divisé notre travail en quatre parties; la première s'occupe de la thèse kantienne et de la critique moderne de celle-ci; nous avons cru utile y traitér en dehors des travaux de Gauss, Riemann, Helmholtz et Poincare d'une manière détaillée la critique de Couturat, qui nous paraît d'une lucidite exemplaire.

Cette orientation générale est suivie d'une analyse logique des sciences mathématiques et physiques; on montre, que la géométrie ne diffère pas essentiellement des autres parties des sciences mathématiques. On donne aussi un développement des parties élementaires de la logistique et des applications correspondantes des méthodes métamathématiques.

Dans la partie psychologique nous donnons l'exposé d'une méthode

générale due à NATORP qui est destinée à nous fournir une réconstruction de la conscience immédiate. On montre que cette réconstruction ne regarde que la *structure* de celle-ci. Cette structure correspond exactement aux formes de l'intuition de KANT. On admet la distinction kantienne entre le *sens externe* et le *sens interne*, dont les formes sont respectivement *l'espace* et le *temps*; l'espace sera *a priori* comme fondement subjectif des sciences physiques; ceci n'entraîne pas la prédominance de la géométrie euclidienne, admise à tort par KANT. Les mathématiques appartiennent au sens interne et par conséquent on ne pourra admettre que le temps comme fondement subjectif des mathématiques.

Le dernier chapitre cherche une synthèse entre la fondation objective et la fondation subjective; le caractère synthétique a priori des mathématiques une fois admis, il se pose la question épistémologique: comment le jugement synthétique a priori est-il possible? Le réalisme des objects mathématiques est rejeté et on est mené a accepter la solution intuitionniste: le jugement mathématique, jugement synthétique et a priori, est possible puisque la Pensée elle-même construit les objets mathématiques. Cette construction se fait suivant des lois rigides, quoique arbitrairement posées; voilà le fondement objectif. C'est le temps qui constitue le substratum unique de cette construction comme acte conscient; et voilà le fondement subjectif.

Dans la deuxième note on donne un exposé du principe de l'induction complète; il est destiné à illustrer le rôle de la fondation subjective. L'évidence des raisonnements par induction complète provient du principe suivant lequel les nombres naturels sont successivement construits.

BIBLIOGRAFIE.

Ackermann, W. (s. 134).

1. Bachmann, F. „Untersuchungen zur Grundlegung der Arithmetik", Lpzg. 1934.
2. Barbarin, P. „La géométrie non euclidienne³" Paris 1928.
3. Barrau, J. A. „Ruimtezin en Ruimteleer", rede, Groningen 1913.
4. — „De Onbemindheid der Wiskunde", rede, Groningen 1926.

Barzin, M. (v. 124, 125).

5. Bauch, Bruno „Erfahrung und Geometrie", Kantstudien XII 1907.
6. — „Studien zur Philosophie der exakten Wissenschaften", Heidelberg 1911.
7. Baumann, J. J. „Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie", 2 Bde, Berl. 1868/73.
8. Bavink, B. „Ergebnisse und Probleme der Naturwissenschaft²", Lpzg. 1921.
9. Becker, O. „Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie", Husserls Jahrbuch VI 1923.
10. — „Die mathematische Existenz", Husserls Jahrbuch VIII 1925.
11. — „Zur Logik der Modalitäten", Husserls Jahrbuch XI 1930.
12. Behmann, H. „Mathematik und Logik", Math.-Phys. Bibl. 71 Lpzg. u. Berl. 1927.
13. Behrens, G. „Die Prinzipien der mathematischen Logik", Inaug.-Diss. Kiel, Hamburg 1918.
14. Bergson, H. „L'intuition philosophique" Revue Mét. Mor. XIX, 1911.

Bernays, P. (s. 135).

15. Beth, H. J. E. „Eenvoudige beschouwingen uit de meetkunde van Gauss", Euclides IV 1927/28.
16. — „Inleiding in de niet-euclidische meetkunde op historischen grondslag", Groningen 1929.
17. — „Newton's Principia", 2 dln, Groningen 1932.
18. Beth, E. W. „Critiek van Vredenduin's logica der wiskunde", Euclides X 1933/34.
19. — „Klassieke en moderne Scheikunde", Alg. N. Tijdschr. Wijsb.
20. — „Sur un théorème concernant le principe du tiers exclu et ses applications dans la théorie de la non-contradiction," C.R. du IIme Congr. Nat. des Sciences, Bruxelles '35.
21. — „La métamathématique et ses applications au problème de la non-contradiction de la logique et de l'arithmétique" (zal binnenkort verschijnen in Christiaan Huygens).
22. Bolland, G. J. P. J. „De Ruimtevoorstellingen", Batavia 1889.
23. — „Aanschouwing en Verstand", Leiden 1897.
24. — „Het Wereldraadsel", Leiden 1896.
25. Bonola—Liebmann, „Die nichteuklidische Geometrie³", Wiss. u. Hyp. IV, Lpzg u. Berl. '21.
26. Boole, G. „An investigation of the laws of thought", London 1854.
27. Bolyai, J. „Appendix —", Ed. nova, Lpzg 1903.
28. Brederveld, J. „Het object der psychologie", Diss. Leiden 1933.

29. Brouwer, L. E. J. „Over de grondslagen der wiskunde", A'dam-Lpzg 1907.
30. — „Het wezen der meetkunde", A'dam 1909.
31. — „Wiskunde, waarheid, werkelijkheid", A'dam—Groningen 1919.
32. — „Mathematik, Wissenschaft und Sprache", Monatsh. f. Math. 36 1924.
33. — „Willen, weten, spreken", Euclides IX 1932/33.
34. Brunschvicg, L. „La notion moderne d'intuition et la philosophie des mathématiques", Revue Mét. Mor. XIX 1911.
35. Brunstäd, F. „Logik", Hdb. d. Phil. Abt. I München u. Berlin 1933.
36. Burkamp, W. „Begriff und Beziehung", Lpzg 1927.
37. — „Naturphilosophie der Gegenwart", Berl. 1930.
38. — „Logik", Berl. 1932.
39. Carnap, R. „Der Raum", Kantstudien Erg. h. no. 56, 1922.
40. — „Abriss der Logistik", Wien 1929.
41. — „L'ancienne et la nouvelle logique", Paris 1933.
42. — „Die Aufgabe der Wissenschaftslogik", Einh.wiss. H. 3 Wien 1934.
43. — „Logische Syntax der Sprache", Wien 1934.
44. Cartan, E. „Le parallélisme absolu et la théorie unitaire du champ", Paris '32.
45. Cassirer, E. „Das Erkenntnisproblem", I^2 Berl. 1911, II Berl. 1907.
46. — „Kant und die moderne Mathematik", Kantstudien XII 1907.
47. — „Zur Einstein'schen Relativitätstheorie", Berl. 1921.
48. — „Kants Leben und Lehre", Berl. 1921.
49. — „Philosophie der symbolischen Formen", 3 Bde Berl. '25/29.
50. Clebsch—Lindeman, „Vorlesungen über Geometrie" II^1 Lpzg. 1891.
51. Cohen, H. „Kants Theorie der Erfahrung^2", Berl. 1885.
52. — „Logik der reinen Erkenntnis", Berl. 1901.
53. Cohn, E. „Physikalisches über Raum und Zeit", Lpzg—Berl. 1920.
54. Couturat, L. „La philosophie des mathématiques de Kant", Revue Mét. Mor. XII 1904.
55. — „Les principes des mathématiques", Revue Mét. Mor. XII 1904.
56. — „L'algèbre de la logique", Paris 1905.
57. — „Pour la logistique", Revue Mét. Mor. XIV 1906.
58. Dantzig, D. van „Over de elementen van het wiskundig denken", voordracht, Euclides IX 1932/33.
59. Dedekind, R. „Was sind und was sollen die Zahlen?^{3}" Braunschweig 1911.
60. — „Stetigkeit und Irrationalzahlen^5", Braunschweig 1927.
Dehn, M. (s. 193).
61. Deichmann, C. „Das Problem des Raumes in der griechischen Philosophie bis Aristoteles", Lpzg 1893.
62. Descartes, R. „Discours de la méthode".
63. — „Règles pour la direction de l'esprit" (Oeuvres choisies, Paris s.d.).
64. Dingler, H. „Das Experiment", München 1928.
65. — „Geschichte der Naturphilosophie", Berlin 1932.
66. Drews, A. „Die Lehre von Raum und Zeit in der nachkantischen Philosophie", Halle 1889.
67. Du Bois—Reymond, E. „An Herrn v. Helmholtz", „Reden", 2. Bd.
68. Duhamel, J. M. C. „Des méthodes dans les sciences du raisonnement", 1re—Vme partie. Paris 1873/75.
69. Dijksterhuis, E. J. „De Elementen van Euclides", 2 dln, Groningen 1929/30.
70. Eddington, A. „Het uitdijend heelal", 's Gravenhage z. j.
71. Einstein, A. „Geometrie und Erfahrung", Berl. 1921.
72. — „Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie", Braunschweig 1922.

73. EINSTEIN, A. „Théorie de la relativité", Paris 1933.
74. — „Mein Weltbild", A'dam 1934.
(s. 169).
75. EMMENS, W. „Das Raumproblem bei Bergson", Diss. Leiden 1931.
76. ENGEL, F. und P. STÄCKEL. „Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss", Lpzg 1895.
77. ENRIQUES, F. „Probleme der Wissenschaft", Wiss. u. Hyp. XI^1 u. XI^2. Lpzg u. Berl. 1910.
78. — „Zur Geschichte der Logik", Wiss. u. Hyp. XXVI, Lpzg u. Berl. '27.
79. ERDMANN, B. „Die Axiome der Geometrie", Lpzg 1877.
80. ERRERA, A. „Quelques remarques sur les mathématiques intuitionnistes", Revue Mét. Mor. XLI, 1933.
(v. 124, 125).
81. FEYS, R. „Le raisonnement en termes de faits", Revue Néo-Scolastique de Phil. 1927/28.
82. FRAENKEL, A. „Einleitung in die Mengenlehre[3]", Berl. u. Lpzg 1928.
83. FRANKEN, J. C. „Kritische Philosophie und Dialektische Theologie", diss. Utrecht, A'dam 1932.
84. — „De Systematiek der Kritische Philosophie", rede Utrecht '32.
85. FREGE, G. „Grundlagen der Arithmetik", Breslau 1884.
86. — „Grundgesetze der Arithmetik", 2 Bde, Jena 1893/1903.
87. FRISCHAUF, J. „Elemente der absoluten Geometrie", Lpzg 1876.
88. GAUSS, C. F. „Werke", herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, bes. Bd. VIII Göttingen 1900.
89. GOEDEWAAGEN, T. „Summa contra Metaphysicos", Leiden 1931.
— „Verleden en heden der critische philosophie", Alg. Ned. Tijdschr. v. Wijsb. I 1934/35.
91. GÖDEL, K. „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme", Mon. hefte Math. Phys. 38, '31.
92. GÖRLAND, A. „Aristoteles und Kant", Giessen 1909.
93. — „Ethik als Kritik der Weltgeschichte", Wiss. u. Hyp. XIX Lpzg 1914.
94. — „Prologik", Berl. 1930.
95. GOMPERZ, TH. „Griechische Denker", 3 Bde 1896/1909.
96. GRASSMANN, H. „Die Ausdehnungslehre von 1862", Werke Bd 1^2 Lpzg 1896.
97. GUËLL, VICOMTE DE „L'espace, la relation et la position", Paris 1924.
98. HAHN, H. „Die Krise der Anschauung", Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften, Wien 1933.
99. — „Logik, Mathematik und Naturerkennen", Einh. Wiss. H. 2 Wien '33.
100. HELMHOLTZ, H. VON „Über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie",
101. — „Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen"; diese beiden Abhandlungen in:
102. — „Wissenschaftliche Abhandlungen" Bd II 1883.
103. — „Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome",
104. — „Die Thatsachen in der Wahrnehmung"; diese beiden letzten Abhandlungen in:
105. — „Schriften zur Erkenntnistheorie", herausg. und erl. von P. Hertz u. M. Schlick, Berlin 1923.
106. — „Handbuch der Physiologischen Optik", 3 Bde, Lpzg 1867.

107. Henry, V. „Das erkenntnistheoretische Raumproblem" Kantstudien Erg. h. no. 34 Berl. 1915.
108. Herbart, J. F. „Schriften zur Metaphysik", Werke ed. Hartenstein Bd IV 2. Tl.
109. Herbertz, R. „Die Philosophie des Raumes", Stuttgart 1912.
110. Herbrand, J. „Sur la theorie de la démonstration", C.R. 186, 1274.
111. — „Non-contradiction des axiomes arithmétiques", C. R. 188, 303.
112. — „Sur quelques propriétés des propositions vraies" C.R. 188, 1076.
113. — „Sur le problème fondamental des mathématiques", C.R. 188, 554.
114. — „Recherches sur la théorie de la démonstration", Thèses Paris 1930.
115. — „Sur la non-contradiction de l'arithmétique", Journ. Math. 166, 1931.
116. Hertz, H. „Prinzipien der Mechanik", Braunschweig 1894.
117. Heymans, G. „Zur Raumfrage", Viertelj.schr. f. wiss. Phil. 1888.
118. — „Gesetze und Elemente des wissenschaftlichen Denkens[3]", Lpzg 1915.
119. Heyting, A. „Intuitionistische axiomatiek der projectieve meetkunde", diss. A'dam 1925.
120. — „Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik", Sitz. Ber. Berlin 1930.
121. — „Sur la logique intuitionniste", Ac. r. de Belgique, Bull. de la Cl. des Sci., s. 5, t. 16, 1930.
122. — „Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik, Erk. II 1931.
123. — „A propos d'un article de MM. Barzin et Errera", L'enseign. math. 31me ann. 1932; cf. dans le même t.:
124. M. Barzin & „Note sur la logique de M. Heyting", et
125. A. Errera „Réponse a M. Heyting".
126. Heyting, A. „Intuitionismus und Beweistheorie", Lpzg. Berl. 1934.
127. Hilbert, D. „Grundlagen der Geometrie" (1898).
128. — „Neue Begründung der Bolyai-Lobatschewskyschen Geometrie" (1903).
129. — „Über die Grundlagen der Geometrie" (1902).
130. — „Über den Zahlbegriff" (1900).
131. — „Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik" (1904). Alle diese Arbeiten in:
132. — „Grundlagen der Geometrie[6]", Wiss. u. Hyp. VII Lpzg u. Berl. 1923.
133. — „Die Grundlagen der Mathematik" (mit Zusätzen von Weyl und Bernays), Abh. math. Sem. Hamburg VI Lpzg 1928.
134. — und W. Ackermann „Grundzüge der theoretischen Logik", Berl. 1928.
135. — und P. Bernays. „Grundlagen der Mathematik", 1. Bd Berl. 1934.
136. Höfler, A. „Grundlehren der Psychologie[2]", Wien 1905.
137. Hölder, O. „Die Mathematik im Verhältnis zu den anderen Wissenschaften", Lpzg 1918.
138. Hofmann, P. „Das Problem des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten", Kantstudien XXXVI 1931.
139. Houël, J. „Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire[2]", Paris 1883.
140. Jorgensen, J. „A treatise of formal logic" 3 vols, Kopenhagen 1931.
141. Kant, I. „Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte", (1747).
142. — „Kritik der reinen Vernunft" (A 1781, B 1789).

143. KANT, I. „Prolegomena" (1783).
144. — „Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft" (1786).
145. — „Kritik der Urteilskraft" (1790).
146. — „Logik", Königsberg 1800.
147. KARAGIANNIDES, A. „Die nichteuklidische Geometrie", Berl. 1893.
148. KÉRÉKJÁRTÓ, B. VON „Vorlesungen über Topologie", Bd I Berl. 1923.
149. KILLING, W. „Die nichteuklidischen Raumformen", Lpzg 1885.
150. — „Einführung in die Grundlagen der Geometrie", 2 Bde Paderborn 1893/95.
151. KLEIN, F. „Vorlesungen über nicht-Euklidische Geometrie", Gött. 1890.
152. — „Vorlesungen über höhere Geometrie", Gött. 1893.
153. — „On the mathematical character of space-intuition", Ges. Math. Abh. Bd. II.
154. — „Über Arithmetisierung der Mathematik", Ges. Math. lAbh. Bd II.
155. KOHNSTAMM, PH. „De formele logica en het kinderlijke denken", Med. Nutssem. v. Paed. No. 26, Paed. Studiën 1934.
156. KOLMOGOROFF, A. Math. Zs. XXXV, S. 58.
157. KORTMULDER, R. J. „De logische grondslagen der wiskunde", diss. Leiden 1916.
158. — „Uit den brouwketel der hedendaagsche philosophie", Gids 1933.
159. KRAUSE, A. „Kant und Helmholtz", Lahr 1878.
160. LAMBERT, J. H. „Theorie der Parallellinien"; in 76.
161. LANGE, F. A. „Geschichte des Materialismus", 2 Bde Lpzg o. J.
162. LIE, SOPHUS „Theorie der Transformationsgruppen", Bd III Lpzg 1893.
163. LIEBERT, A. „Das Problem der Geltung", Kantstudien Erg.h. no. 32 Berl. 1924.
164. LOBATSCHEWSKY, N. „Über die Anfangsgründe der Geometrie",
165. — „Neue Anfangsgründe —"; beide Abhh. in deutscher Übers. in:
166. — „Zwei geometrische Abhandlungen", aus dem Russischen übersetzt, mit Anm. u. mit einer Biogr. des Verf. von F. Engel. Lpzg 1898.
167. — „Geometrische Untersuchungen²", Berl. 1877.
168. — „Pangeometrie²", Ostwalds Klassiker no. 13. Lpzg o. J.
169. LORENTZ—EINSTEIN—MINKOWSKI. „Das Relativitätsprinzip³," Lpzg—Berl. 1922.
170. LOTZE, H. „Grundzüge der Logik und Encyclopädie der Philosophie³", Lpzg 1891.
171. LUKASIEWICZ, JAN. „Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls", C. R. des séances de la soc. des sci. et des lettr. de Varsovie Cl. 3 T. XXIII 1930.
172. MACH, E. „Die Analyse der Empfindungen⁵", Jena 1905.
173. — „Erkenntnis und Irrtum²", Lpzg 1906.
174. MANNOURY, G. „Methodologisches und Philosophisches zur Elementarmathematik", Haarlem 1909.
175. — „Mathesis en mystiek", A'dam z. j.
176. — „Een inleiding tot de signifika", Euclides VII 1930/31.
177. MEDICUS, F. „Bemerkungen zum Problem der Existenz mathematischer Gegenstände", Kantstudien XIX 1914.
178. MEERUM TERWOGT, P. C. E. „Meetkunde en redeleer", Leiden 1914.
179. MEINECKE, W. „Die Bedeutung der Nicht-Euklidischen Geometrie in ihrem Verhältnis zu Kants Theorie der mathematischen Erkenntnis", Kantstudien XI 1906.
180. MENGER, K. „Dimensionstheorie", Leipzig 1928.

181. MENGER, K. „Die neue Logik", Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften, Wien 1933.
MINKOWSKI, H. (s. 169).
182. NATORP, P. „Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften", Wiss. u. Hyp. XII Lpzg u. Berl. 1910.
183. NEUMANN, J. VON. „Die formalistische Grundlegung der Mathematik", Erkenntnis II, 1931.
184. NEURATH, O. „Einheitswissenschaft und Psychologie", Einh.wiss. H. 3 Wien '33.
185. NICOD, J. „La géometrie dans le monde sensible", Paris 1924.
186. NÖBELING, G. „Die vierte Dimension und der krumme Raum", Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften, Wien 1933.
187. OS, CH. H. VAN „Wiskunde en Wijsbegeerte", Gids 1933.
188. OSS, S. L. VAN „Aanschouwing en Niet-Euclidische meetkunde", Leiden 1932.
189. OVINK, B. J. H. „De zekerheid der menschelijke kennis", Zutphen 1928.
190. PADOA, A. „La logique déductive dans sa dernière phase de développement", Revue Mét. Mor. XIX/XX, 1911/12.
191. PASCAL, B. „De l'esprit geométrique", Opuscules Paris s.d.
192. PASCH, M. „Mathematik am Ursprung", Lpzg 1927.
193. — „Vorlesungen über neuere Geometrie²", Berl. 1926.
194. PEANO, G. „Notations de logique mathématique", Turin 1894.
195. — „Formulaire de mathématiques", T. II Turin 1899.
196. PESLOUAN, C. LUCAS DE „Les systèmes logiques et la logistique", Paris 1899.
197. PLATO „Theaitetos oder vom Wissen", übers. von F. Schleiermacher, Lpzg o. J.
198. POINCARÉ, H. „Les mathématiques et la logique", Revue Mét. et Mor. XIII/XIV, 1905/06.
199. — „La science et l'hypothèse", Paris 1902.
200. — „La valeur de la science", Paris 1905.
201. — „Science et méthode", Paris 1909.
202. — „Dernières pensées", Paris 1913.
203. — „La mécanique nouvelle", Paris 1911.
204. PRANTL, C. „Geschichte der Logik im Abendlande", 4 Bde, Lpzg 1855 /70.
205. RAMSAY, F. P. „The foundations of mathematics", Proc. London Math. Soc. 2 25 1925.
206. REICHENBACH, H. „Philosophie der Raum-Zeitlehre", Berl. 1923.
207. — „La philosophie scientifique", Paris 1932.
208. RÉVÉSZ, G. „Het psychologisch Ruimteprobleem", rede A'dam 1932.
209. RICKERT, H. „Der Gegenstand der Erkenntnis³", Tübingen 1915.
210. RIEHL, A. „Kant et Helmholtz", Revue Mét. Mor. XII 1904.
211. — „Zur Einführung in die Philosophie der Gegenwart", Lpzg '04.
212. RIEMANN, B. „Gesammelte mathematische Werke", herausg. v. H. Weber Lpzg 1876, bes.
213. — „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen",
214. — „Fragmente philosophischen Inhalts"; s.a.:
215. — „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" neu herausgeg. und erl. von H. Weyl³ Berl. 1923.
216. RUSSELL, B. A. W. „An essay on the foundations of geometry", Cambr. 1897.
217. — „The principles of mathematics", vol. I Cambr. 1903.
218. — „Sur les relations des mathématiques à la logique", Revue Mét. Mor. XIII 1905.

219. RUSSELL, B. A. W. „Les paradoxes de la logique", Revue Mét. Mor. XIV 1906 (v. Whitehead).
220. SACCHERI, G. „Euclides ab omni naevo vindicatus", v. 76.
221. SCHLICK, M. „Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik", Berl. 1917.
222. — „Allgemeine Erkenntnislehre", Berl. 1918.
223. SCHOENFLIESS, A. „Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten II", Jahresb. D. M. V. Erg. II Lpzg 1908.
224. SCHOLZ, H. „Geschichte der Logik", Berl. 1931.
225. SCHOPENHAUER, A. „Die Welt als Wille und Vorstellung", S.W. herausg. von E. Grisebach Bde I/II Lpzg o. J.
226. SCHRÖDER, E. „Vorlesungen über die Algebra der Logik", 3 Bde Lpzg 1890/1910.
227. SELLIEN, TH. „Die Erkenntnistheoretische Bedeutung der Relativitätstheorie", Kantstudien Erg.h. no. 48 Berl. 1918.
228. SPAIER, E. „La pensée et la quantité", Paris 1927.
229. STADLER, A. „Die Grundsätze der reinen Erkenntnistheorie in der Kantischen Philosophie", Lpzg 1876.
230. STAMMLER, G. „Begriff-Urteil-Schluss", Halle/Saale 1928.
231. STANLEY JEVONS, W. „Leitfaden der Logik", übers. v. H. Kleinpeter, 2. Aufl. Lpzg. 1913.
232. STUDY, E. „Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raume", Braunschweig 1914.
233. TUMMERS, J. H. „De niet-contradictoriteit der grondbeginselen der speciale relativiteitstheorie", Physica X 1930.
234. — „Woher die Gewissheit der Axiome der Geometrie?", Chr. Huygens '30.
235. — „Zur Axiomatik der Hilbertschen Geometrie", Chr. Huygens '32.
236. — „De moderne ontwikkeling der wis- en natuurkunde", Studia Cath. '30.
237. TURKSTRA, H. „Psychologisch-didactische problemen bij het onderwijs in de wiskunde aan de middelbare school", Groningen—Den Haag—Batavia 1934.
238. ÜBERWEG, F. „System der Logik²", Bonn 1865.
239. VAIHINGER, H. „Commentar zu Kants Kritik der reinen Vernunft", 2 Bde Stuttg. 1881/92.
240. — „Die Philosophie des Als Ob²", Berl. 1913.
241. VEBLEN, O. & J. H. C. WHITEHEAD. „The foundations of differential geometry", Cambr. 1932.
242. VERONESE, P. „Grundzüge der Geometrie", übers. von A. Schepp, Lpzg. 1894.
243. VLEESCHAUWER, H. J. DE „Uit de eerste dagen van de niet-Euclidische meetkunde", Euclides X 1933/34.
244. — „La déduction transcendentale dans l'oeuvre de Kant", Antwerpen—Parijs—Amsterdam 1934.
245. VLOEMANS, A. „Het mathematisch denken bij Plato en Descartes", Tijdschr. v. Wijsb. Jg XXIV.
246. VOLLENHOVEN, D. H. TH. „De wijsbegeerte der wiskunde van theïstisch standpunt", diss. V.U. A'dam 1918.
247. — „De noodzakelijkheid eener Christelijke Logica", A'dam 1932.
248. VREDENDUIN, P. G. J. „De logika der wiskunde", Ann. Cr. Phil. III—1933.
249. — „De Autonomie der Wiskunde", Euclides X 1933/34.
250. — „Oordeelsgenese-Wat is wiskunde", Alg. N. Tijdschr. Wijsb. I 1934.

251. VRIES, H. DE „De vierde dimensie", Groningen 1915.
252. WEBER, W. & J. WELLSTEIN „Enzyklopädie der Elementar-Mathematik", Bd II „Elemente der Geometrie", Lpzg 1915.
253. WEYL ,H. Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik", M. Zs. X.
254. — „Raum-Zeit-Materie", Berl. 1923.
255. — „Mathematische Analyse des Raumproblems", Berl. 1923.
256. — „Randbemerkungen zu Hauptprobleme der Mathematik", M. Zs. XX.
257. — „Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft", Hdb. Phil. München 1927.
(S. 169).
258. WHITEHEAD, A. N. & B. RUSSELL „Principia Mathematica", 3 Vols Cambr. 1910/13.
259. WIGERSMA, B. „Natuurkunde en relativiteitstheorie²", Haarlem 1923.
260. WINTER, A. „Note sur l'intuition en mathématiques", Revue Mét. Mor. XVI 1908.
261. WITTGENSTEIN, L. „Tractatus logico-philosophicus", London 1922.
262. WOLFF, J. „Over het subjectieve in de wiskunde", rede, Groningen 1922.
263. WOUDE, W. VAN DER „Meetkunde en Ruimteleer", rede Leiden 1935.
264. WUNDT, W. M. „Logik", 2 Bde Lpzg 1880/83.
265. ZIEHEN, TH. „Psychophysische Erkenntnistheorie", Jena 1907.
266. — „Das Verhältnis der Logik zur Mengenlehre", Phil. Vortr. veröff. von der Kant-ges. no. 16, Berl. 1917.

Nog zij gewezen op de belangrijke litteratuurlijsten, opgenomen in de onder 39, 43, 82, 126, 243 genoemde werken.

STELLINGEN.

I.

Terecht meent HELMHOLTZ: „der Raum kann eine . . . Form der Anschauung im KANT'schen Sinne sein, ohne dass diese Form der Anschauung nothwendig die Axiome einschliesst."

H. VON HELMHOLTZ, „Wissenschaftliche Abhandlungen" Bd II S. 641.

II.

Voor de opvattingen van POINCARÉ ten aanzien van het z.g. grondslagenprobleem van de wiskunde is „conventionalisme" geen doeltreffende naam.

H. POINCARÉ, „La Science et l'Hypothèse", Chap. IV.

III.

Mits men scherp onderscheid maakt tusschen het „inhaltliche" en het „formale" denken, en vasthoudt aan de prioriteit van het eerste, sluit HILBERT's „Beweistheorie" geen vicieuzen cirkel in.

IV.

Ondanks de propaganda van den „Wiener Kreis" bestaat er voor de wetenschappelijke wijsbegeerte vooralsnog geen aanleiding zich tot de studie van de „Syntax der Wissenschaftssprache" te bepalen.

V.

VOLLENHOVEN's opvattingen aangaande de noodzakelijkheid eener „Christelijke logica" berusten op een misvatting ten aanzien van doelstelling en methode der logica.

D. H. TH. VOLLENHOVEN, „De Noodzakelijkheid eener Christelijke Logica", Amsterdam 1932.

VI.

Bij de door BRUNSTÄD gegeven wijze van behandeling komt de logistiek niet tot haar recht.

F. BRUNSTÄD, „Logik", München/Berlin 1933, S. 79.

VII.

Dat GAUSS zich onthield van publicatie van eigen onderzoekingen over niet-Euclidische meetkunde en van het openlijk betuigen van waardeering voor die van BOLYAI en van LOBATSCHEWSKY, kan worden verklaard uit het inzicht, dat aan al die onderzoekingen het existentiebewijs ontbrak.

VIII.

De van TANNERY afkomstige en nog onlangs door ENRIQUES en DE SANTILLANA verdedigde interpretatie van de Eleatische leerstellingen is zeer aantrekkelijk.

F. ENRIQUES en G. DE SANTILLANA, „Storia del Pensiero Scientifico". Vol. I. Il Mondo antico. Bologna 1934.
E. J. DIJKSTERHUIS, „De Elementen van Euclides" Deel I, Groningen 1929.

IX.

Aan de herhaaldelijk gemaakte onderscheiding tusschen specifiek wiskundigen en specifiek taalkundigen aanleg ontbreekt een bevredigende empirische en theoretische grondslag.

X.

Het is wenschelijk, dat bij het samenstellen van formeel-logische intelligentietests meer rekening worde gehouden met de resultaten van de logistiek.

XI.

Bij de bespreking van het begrip „index van een singulier punt eener gewone differentiaalvergelijking der eerste orde", pleegt men ten onrechte geen rekening te houden met de mogelijkheid, dat die index de helft van een oneven getal is; zoo b.v.

L. BIEBERBACH, „Theorie der Differentialgleichungen", Berl. 1923, S. 81.

XII.

Door A. HEYTING is een opbouw van de intuitionistische projectieve meetkunde gegeven, waarbij zekere klassieke resultaten hun geldigheid verliezen; het is evenwel mogelijk, een intuitionistischen opbouw te geven, zoowel van de elementaire Euclidische meetkunde van passer en lineaal, als van de algebraische meetkunde, zonder een overeenkomstig verlies.

A. HEYTING, „Intuitionistische Axiomatiek der projectieve Meetkunde", Diss. Amsterdam 1925.