# E.W. Beth als logicus

ILLC Dissertation Series 2000-04

INSTITUTE FOR LOGIC, LANGUAGE AND COMPUTATION

For further information about ILLC-publications, please contact

Institute for Logic, Language and Computation
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam
phone: +31-20-525 6051
fax: +31-20-525 5206
e-mail: illc@wins.uva.nl
homepage: http://www.illc.uva.nl/

# E.W. Beth als logicus

VERBETERDE ELECTRONISCHE VERSIE (2001) VAN:

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

ter verkrijging van de graad van doctor aan de
Universiteit van Amsterdam
op gezag van de Rector Magnificus
prof.dr. J.J.M. Franse
ten overstaan van een door het college voor
promoties ingestelde commissie, in het openbaar
te verdedigen in de Aula der Universiteit
op dinsdag 26 september 2000, te 10.00 uur

door

Paul van Ulsen

geboren te Diemen

Promotores: prof.dr. A.S. Troelstra
prof.dr. J.F.A.K. van Benthem

Faculteit Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam



Printed and bound by Print Partners Ipskamp.

ISBN: 90–5776–052–5

*Ter nagedachtenis aan mijn vader*

# Inhoudsopgave

# Dankwoord

Er zijn tal van personen en instellingen die aan het tot stand komen van deze dissertatie hebben bijgedragen.

In de eerste instantie zijn dit de beide promotoren, de professoren A.S. Troelstra en J.F.A.K. van Benthem. Niet alleen tijdens het leveren van commentaar op het aangedragen werk, maar ook in de dagelijkse omgang op het instituut heb ik het genoegen mogen smaken in hun nabijheid te hebben kunnen verkeren. Eveneens was dit het geval met de andere leden van de vakgroep.

Naast de beide promotoren valt naar de moeite die de leden van promotiecommissie zich getroost hebben te refereren. Deze commissie bestond uit doctor D.H.J. de Jongh (Amsterdam), professor A.J. Kox (Amsterdam), professor A. Visser (Utrecht) en professor H. Visser (Maastricht).

Van de mensen met wie ik in de loop der tijd de te behandelen stof heb kunnen bespreken vallen met name W.J. Blok, H.C. Doets, A. Hendriks, D.H.J. de Jongh, E.C.W. Krabbe en M. van Lambalgen te noemen.

Van de leden van het onderzoeksinstituut ILLC kunnen in het bijzonder enkelen van de afdeling theoretische informatica, P. van Emde Boas, Th. Janssen en L. Torenvliet, genoemd worden. Al in een vroeg stadium is door hun bemiddeling de mogelijkheid tot electronische tekstverwerking en werkruimte verkregen. De laatste was des te meer van belang, daar deze boven de bibliotheek van het Mathematisch Instituut gelegen was. Aangezien ik telkens weer historische teksten heb moeten raadplegen is dit voor mij van groot belang geweest. De medewerking van met name de bibliothecaris F. Kroon heeft het nodige daartoe bijgedragen.

Het raadplegen van archieven was voor de tot standkoming van deze dissertatie essentieel. H. Visser en A.S. Troelstra zijn als beheerders van respectievelijk het Beth Archief en het Heyting Archief zo bereidwillig geweest deze archieven tot dit doel open te stellen.

Tenslotte hebben uit andere hoofde E. Gaskill, F. van der Kolk, E.J. van der Linden, M. Pauly, M. Vervoort, G. Winkel en de behulpzame mensen van de Computer Netwerk Groep het nodige gedaan om het voltooien van deze dissertatie tot een goed einde te brengen.

Amsterdam, augustus 2000 Paul van Ulsen

Voor het verbeteren van de electronische versie in 2001 is mij de ruimte gegeven door de bibliotheek van de Faculteit Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica; met name kan hier H. Harmsen genoemd worden.

De verbeteringem betreffen vooral tekstuele. Schrappen van overbodige zinnen of delen daarvan of stukjes tekst met herhaling van al eerder gegeven of overbodige informatie. Verder is er gekeken naar het beter laten verlopen van overgangen: hierdoor zijn enkele paragrafen omgewisseld. Onduidelijkheden zijn verbeterd, evenals drie fouten (schrappen van Beth bij een bespreking bij von Muralt (p. 29); een verticale kolomstreep links i.p.v. rechts t.o.v. de formules $\exists A(x), A(p)$ (p. 225, regel 7b); een 0 i.p.v. een 1 in een valuatiekolom op p. 259 ($v_0$ op $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$).

Amsterdam, 2001 P. van Ulsen

# Hoofdstuk 1

# Inleiding

*"There is a certain tendency to belittle the value of my work"* [1]

**Evert Willem Beth, wiskundige, filosoof en organisator.** Evert Willem Beth, 1908 – 1964, was hoogleraar in de logica en haar geschiedenis en de filosofie van de exacte wetenschappen aan de Universiteit van Amsterdam, vanaf 1946 tot aan zijn dood.

Beth opereerde op een moeilijk grensvlak van disciplines. Hij werd door de filosofen als een wiskundige en logicus afgeschreven, door de wiskundigen en logici, evenmin positief bedoeld, voor een filosoof gehouden. Dit had indertijd, en ook nu nog, te maken met de onbekendheid van zijn vakgebied en de miskenning van het belang van zijn verdere bezigheden. Niettemin kwam de combinatie van logica, grondslagenonderzoek van de wiskunde, didactiek van de wiskunde, geschiedenis van de wetenschapsfilosofie (in de meest ruime zin), filosofie, wetenschapsfilosofie en organisatorisch vermogen in meer of mindere mate ook bij anderen voor. Die anderen waren, in Nederland in de tijd van Beth, niet de minsten. Men telde hieronder L.E.J. Brouwer, J. Clay, G. Mannoury, D. van Dantzig en A. Heyting.[2] Volledig is de omschrijving op Beth van toepassing. Beth behoorde niet tot de wereldtop van de logici in die dagen. Hij speelde in Nederland wel een grote rol, maar men kan daar tegen inbrengen, dat dit nogal voor de hand lag in een land, arm aan dienaren van de logica en filosofie van de wiskunde.

Op het gebied van de filosofie lag het niet veel anders. Door Beth zijn geen uitgebreide verhandelingen geschreven of vele volstrekt nieuwe inzichten gepubliceerd.[3] Maar opnieuw kan men de Nederlandse situatie naar voren halen.

[1] Brief E.W. Beth – Th.A. Skolem, 26 juli 1951. Op het hoe en waarom van dit citaat gaan wij in de loop van deze inleiding in. Thoralf Albert Skolem, 1887 – 1963.

[2] Beth heeft enkelen van hen beschreven: (Beth 1955/1956*a*) over Jacob Clay, 1882 – 1955, (Beth 1956/1957*a*) over Gerrit Mannoury, 1867 – 1956, en (Beth 1947*b*) over Luitzen Egbertus Jan (Bertus) Brouwer, 1881 – 1966; Arend Heyting, 1898 – 1980; David van Dantzig, 1900 – 1959.

[3] Beth heeft wel eens een poging in die richting gedaan, maar veel zoden aan de dijk heeft

Op het gebied dat door hem omschreven werd als wetenschappelijke filosofie, hetgeen iets anders is dan wetenschapsfilosofie, waren er indertijd binnen Nederland nog maar weinig mensen te vinden. Op het gebied van wetenschapsfilosofie, behandeld als wetenschappelijke filosofie, al bijna helemaal niemand. Op deze terreinen deed Beth van zich spreken. Maar gezien het wetenschappelijke karakter, zoals Beth dit zag, van het bedrijven van filosofie en wetenschapsfilosofie was een naar voren schuiven van 'grootse resultaten' niet voor de hand liggend.[4]

Met Beths opzet heeft men zichzelf te verantwoorden en kan men niet zo maar iets construeren en daarbij al te snel beweren allerlei relaties gelegd te hebben. Speculatieve filosofie die op dergelijk drijfzand bouwt had niet zijn voorkeur. Meer nog, hij zag het als een uiteenvallen en isoleren van diverse intellectuele disciplines. Ook op maatschappelijk terrein hield dit volgens hem de nodige gevaren in. Indien men niet speculatief maar op een 'hopelijk' gezondere basis te werk gaat, heeft men evenals binnen andere wetenschappen meestentijds te maken met onderzoek zonder spektakel: het verkennen en bewerken van veldje na veldje. Daarnaast had Beth een grote interesse in ideeëngeschiedenis van filosofie, wetenschapsfilosofie en logica, meer dan een gemiddeld logicus in zijn tijd. Ook op dit terrein publiceerde hij.

Beth vervulde tal van organisatorische functies. De in de eerste twintig jaren na de Tweede Wereldoorlog belangrijke internationale organisaties op het gebied van wetenschapsfilosofie en logica werden met zijn deelname opgericht. Ook aan de ontwikkeling van de, later weer teloor gegane, Centrale Interfaculteiten en de ontwikkeling van de filosofie- en logicastudie in Nederland heeft hij veel bijgedragen. De noodzaak van het verschaffen van mogelijkheden tot publiceren ontging Beth niet. Naast de redacteurschappen van talrijke bladen behoorde hij, samen met L.E.J Brouwer en A. Heyting, tot de oprichters van de reeks *Studies in Logic*.

Kortom, Beth was een actief wetenschapper en organisator die voor een goed begrip van het ontstaan van de huidige Nederlandse logica een centrale plaats inneemt.

**Beth, werk en waardering.** Het is nu tijd terug te komen op het citaat waar deze inleiding mee geopend werd. Het is een deel van het volgende citaat:

"During the last few years, however, a certain number of papers have been published, the contents of which, though given a more elaborate form, coincide partly with my remarks. At the same time, there is a certain tendency to belittle the value of my work. Under these circumstances, I feel that I have a right to claim, according to the case, my priority, my independence, or the basic correctness of the general views set forth in my publications."

Dit citaat met verongelijkte ondertoon is afkomstig uit een op 26 juli 1951

dit niet gezet. Als voorbeeld hiervan wordt het nooit uitgegeven ms. 'Natuur en geest' wel aangehaald. Delen uit de daar behandelde stof zijn later (meestentijds tussen 1945 en 1950) in diverse artikelen verwerkt.

[4] Niet voor niets heeft het boek Beth (1964*a*) het motto 'van wetenschap tot wijsheid'; waarom Beth het omgekeerde afwees komen we in het volgende hoofdstuk tegen.

gedateerde brief van Beth aan Th.A. Skolem. Deze brief had betrekking op een door Skolem geschreven recensie over werk van J. Barkley Rosser en Hao Wang.[5] Men kan zeggen dat Beths verongelijkte ondertoon niet helemaal onterecht was, ja, zelfs met het verstrijken der jaren meer bewaarheid werd. Men moet er echter wel rekening mee houden, dat Beth zich weleens al te snel tekort gedaan voelde en meende dat men, al dan niet bewust, tegen hem samenspande. Vooral met betrekking tot zijn meer filosofisch gerichte werk had hij dit gevoel. Verder komt er nog een aspect naar voren. Beth haalde nogal eens het uiten van vermoedens en het kunnen geven van bewijzen door elkaar. Helaas zal men, als men door mathematische logici erkend wil worden, toch hun conventies voor lief moeten nemen.

Bovendien geeft Beth op logisch gebied de indruk voortdurend te hooi en te gras onderwerpen aan te grijpen zonder systematisch onderzoek. Een voorbeeld bieden zijn tableaus. In wezen is dit een bewijstheoretisch onderzoek. Toch onderzocht hij de metalogica in onvoldoende mate systematisch, oplossingen van problemen komen nogal eens uit de lucht vallen (of blijven daar in hangen), en aan de samenhang met bewijstheorie en de daarbij horende metalogische eigenschappen wordt door hem niet voldoende aandacht besteed. Dit neemt niet weg dat de semantische tableaus een fraaie methode vormen. Dat zij direct al pasklaar werden aangeboden, kan men niet verwachten; wel dat het nauwkeuriger gebeurde, maar dat lag misschien niet zo in zijn aard.

Wel is de geldigheid van het citaat boven deze inleiding in later tijd toegenomen. Zowel voor de filosofisch getinte werkzaamheden alsook met betrekking tot de logica. Meer nog, de belangstelling voor zijn filosofische werkzaamheden is welhaast tot niets afgenomen.[6] Gezien het bestek van dit werk kan ook hier daar niet de nodige aandacht aan besteed worden, alhoewel Beth op dit punt wel een uitvoeriger exposé verdient. Voor het logische werk kan men zeggen dat er nog steeds gebruik wordt gemaakt van de door hem bedachte definitiestelling, de semantische tableaus en de Beth-modellen. Helaas wordt met betrekking tot de tableaus het wiel zo nu en dan opnieuw uitgevonden.

Een lichte vorm van speculatie was ook Beth niet vreemd. Wel was dit veelal een speculeren bestaande uit vermoedens hoe in de nabije toekomst een bepaalde wetenschappelijke ontwikkeling verder zou gaan, en niet een speculatie in het wilde weg.

Beths speculaties bleven binnen redelijke grenzen, daardoor werden zijn wetenschapsfilosofische en wetenschappelijk filosofische resultaten indertijd door een breder publiek geapprecieerd dan bij de meeste andere filosofen. Dit was

[5] (Skolem 1951).

[6] Ook Beth had al over het begrip ten aanzien van zijn bezigheden al enige bedenkingen en meende door het laten verschijnen van enkele bundels van zijn werk dit te kunnen bestrijden. Brief Beth – H.J.Prakke (van Gorcum Uitg., Assen), 27 oktober 1958: “Deze wens berust op de overweging dat er bij velen onzekerheid en zelfs misverstand blijkt te bestaan ten aanzien van mijn wijsgerig standpunt, zodat men van mijn werk met een zekere vooringenomenheid kennis neemt. [...] Ten dele meen ik deze verschijnselen te moeten toeschrijven aan het feit dat het niet zo heel makkelijk is, van mijn wijsgerige opvattingen een samenhangend en min of meer volledig beeld te vormen.”

eveneens het geval met zijn resultaten in de mathematische logica. Wel moest hij zo nu en dan vechten voor de erkenning van zijn resultaten.

Tenslotte moet nog worden opgemerkt dat ook Beth wel eens van mening veranderde. Het is echter niet zo dat, daargelaten denkbeelden uit zijn vroegste periode, de 'jeugdzonden', hij scherpe wendingen maakte; veelal zijn bij hem veranderingen meer een kwestie van nuancering. Zeker m.b.t. de algemene lijnen van zijn denkbeelden zit er niet veel verandering in en ten opzichte van het doel van dit onderzoek spelen zelfs Beths nuanceringen een zeer ondergeschikte rol. De in dit proefschrift behandelde periode uit Beths leven speelt zich voornamelijk af tussen 1950 en 1964. Het is misschien wel aardig om meerdere 'Beths' ten tonele te voeren, de vraag blijft of dit wel het geval is, en zeker in dit proefschrift wekt dit meer verwarring dan duidelijkheid: hier hebben we aan één Beth genoeg.

**De keuzen uit Beths nalatenschap.** In dit geschrift kan van de vele hier opgesomde activiteiten van Beth slechts in beperkte mate kond worden gedaan. Dit heeft niet alleen te maken met de belangstelling voor Beths werk of de beperkte ruimte, maar heeft in de eerste plaats te maken met waar Beths verdiensten lagen. Met deze gedachten staat de schrijver overigens niet alleen. Het Boek der Waarheid[7] geeft de volgende richtlijnen:

"Na aanvankelijk werkzaam geweest te zijn op het terrein van de wijsbegeerte der exacte wetenschappen in ruimere zin, heeft Beth zich, onder invloed van Tarski, Heyting e.a., bewogen in de richting van het grondslagenonderzoek van de wiskunde en logica. Op dit gebied heeft hij zijn treffendste vondsten gedaan."

Maar als men zich afvraagt wat Beth zelf van de bestudering van de wiskunde vond, krijgt men een terughoudend antwoord: [8]

"And nevertheless, although I finished my studies of mathematics rather successfully, I never developed into a typical mathematician. For instance, I never had much taste or patience for problem-solving. Or, rather, if I became interested in a certain problem, it was never because the problem was a hard one, but always because I happened to be interested in the particular situation from which it has arisen. Already at an early date, however, I was fascinated by the theories of mathematics and physics because of their deductive strucure."

En dit wordt zelfs nog veel duidelijker door hem vermeld: [9] "I might say that my interest in mathematics is essentially based on its deductive part, or that I appreciate it mainly inasmuch as it is at the same time logic." [waarmee Beth niet wil zeggen, dat wiskunde een onderdeel van de logica is] Maar ook dat is niet zijn eerste prioriteit: [10] "Rechtstreeks bij te dragen tot de ontwikkeling van de wiskunde stel ik me zeker niet in de eerste plaats ten doel. Het is dan ook een

[7] *De Grote Winkler Prins*, dl. 3, Amsterdam (Elsevier), (1972[7]), p. 676. Alfred Tarski [Tajtelbaum],1902 –1983.

[8] Ms. E.W. Beth, *Remarks on the philosophy of mathematics*, (ongepubl.; na 1959).

[9] Ms. E.W. Beth, *Remarks on the philosophy of mathematics*.

[10] Brief Beth – L.E.J. Brouwer, 15 december 1959. Beths eerste prioriteit ligt derhalve anders dan de in het voorliggend werk gehanteerde prioriteit.

'meevaller' dat in de allerlaatste tijd mijn werk ook in deze zin vruchtdragend is gebleken."

Op tal van andere terreinen heeft Beth bijdragen geleverd. Zijn meest creatieve verdiensten liggen echter in de hoek van de wetenschap en daar zullen we ons derhalve toe beperken.

Een overweging, die er verder toe heeft bijgedragen om onderzoek naar Beth te doen, is de uitvoerige door hem nagelaten correspondentie. Hierdoor was het mogelijk tal van zaken nader te onderzoeken op hun ontstaansgeschiedenis. Hier komt nog bij dat Beth in de loop der tijden een positie had opgebouwd, waarin hij contacten onderhield met leden van de toenmalige logische 'wereldtop' en de echelons direct daaronder. Het resultaat is een vrij uitgebreide correspondentie, die ook een interessant licht werpt op andere creatieve logici. Bovendien is er nogal wat in het vergeetboek geraakt of zeer gespreid aan te treffen. De bundeling bleek een interessant tijdsbeeld te leveren. Met deze gegevens voor ogen moet men er overigens voor oppassen niet mee te helpen een vertekend beeld te scheppen, iets waarvoor Beth in 1953 al waarschuwde.[11] Volgens Beth wordt vooruitgang binnen een wetenschap vaak bepaald door kleine groepen van eersterangs figuren. Deze beïnvloeding is meestal voor buitenstaanders niet goed merkbaar en vaak worden resultaten dan toegeschreven aan mensen die dit niet verdienen.

**Overzicht.** Deze publicatie valt in twee delen uiteen. Een eerste deel dat bestaat uit meer algemene zaken en een tweede deel, het leeuwendeel, dat alleen over Beths logische werk gaat.[12]

Er zal begonnen worden met Beths levensloop.[13] Hierin wordt spaarzaam ingegaan op Beths persoonlijke leven en uitvoeriger op zijn organisatorische, redactionele en onderwijsgerichte werkzaamheden. Het tweede hoofdstuk geeft een schets van zijn algemeen-filosofische en wetenschapsfilosofische standpunt. De periode, die deze hoofdstukken beslaan, loopt van zijn afstuderen in 1932 tot aan zijn overlijden in 1964.

Hierna krijgt men het belangrijkste deel: Beths bijdragen aan de logica. Vanaf het hoofdstuk *Semantiek* tot en met het laatste hoofdstuk *Beth-modellen* vertonen de hoofdstukken in de gekozen volgorde een systematische en tegelijk een historische lijn. Er zijn tal van zijpaden: Beths denkbeelden over bijvoorbeeld ordening, meetkunde, grootten van modellen, wetenschapsfilosofie en

[11] Brief E.W. Beth – E.J. Dijksterhuis, 27 oktober 1955 (of 1953) (de onzekerheid in jaartal wordt veroorzaakt door de gebruikte schrijfmachine; er is echter een verwijzing naar Dijksterhuis' oratie op 26 oktober. Eduard Jan Dijsterhuis (1892 – 1965) werd in 1953 te Utrecht benoemd tot buitengewoon hoogleraar in de geschiedenis van de wiskunde en de natuurwetenschappen.

[12] Dit betreft dan alleen puur Beths eigen bijdragen. Hierdoor zal er toch minder van Beth (1959*b*) gebruik worden gemaakt dan wellicht verwacht. Dit boek is voor een groot deel gevuld met logisch-wiskundig materiaal dat hij niet zelf heeft ontwikkeld; wel is door Beth op kleinere deelgebieden meer bedacht dan hier zal worden behandeld. Dit vermindert natuurlijk niet de waardering voor de samenstelling, ordening en presentatie van de enorme hoeveelheid materiaal in dit werk. Tot Beth (1959*b*) was dit nog niet op een dergelijke schaal gebeurd.

[13] Op jaartal is deze ook nog opgenomen in de supplementen.

filosofie in het algemeen zullen hier grotendeels overgeslagen worden. Voor een deel hiervan werd juist de beginperiode van Beths carrière gekenmerkt: [14] "Gedurende mijn eerste periode werd ik vooral beïnvloed door het werk van Carnap; wat de natuurphilosophie betreft, ook door Reichenbach. Deze invloeden bepalen ook nu [1958] nog mede mijn standpunt." [15]

Voordat Beth tot hoogleraar benoemd werd, waren zijn bezigheden met betrekking tot de systematiek van de logica marginaal. Voor de Tweede Wereldoorlog bestond Beths werk uit het beschrijven van historische of recente ontwikkelingen binnen de logica, maar zonder eigen bijdragen.

De periode van de Tweede Wereldoorlog leverde al helemaal weinig op. Het contact met logici buiten Nederland was door de oorlogsomstandigheden minimaal en binnen Nederland had Beth niets te zoeken. Bovendien had hij in de jaren voor en tijdens de Tweede Wereldoorlog moeite om in zijn levensonderhoud te voorzien. Tijdens de oorlog had hij wel kennis opgedaan van semantiek en de modeltheoretische benadering, zoals die te vinden was in het werk van de door hem zo bewonderde A. Tarski. In later tijd verwoordde Beth dit als volgt: [16] "Later (na Carnap en Reichenbach) kwamen daarbij invloeden van de significa van Mannoury (ook in verband met mijn psychologische studie), van het platonisme van H. Scholz en van de logische methodiek van Tarski (waardoor ook Scholz sterk beïnvloed is, hoewel Tarski juist nominalist is).[17] Deze divergerende tendenties hebben pas in mijn derde periode een zeker evenwicht gevonden."

Door zijn hoogleraarsbenoeming vielen de ergste zorgen van hem af, en met de verworven kennis ging Beth aan de slag. Eerst aarzelend, daarna met steeds vastere gang. Hij wist ook wat hij wilde, logica op de moderne manier bedrijven: semantiek en modeltheorie.

Voor de modeltheorie viel in die jaren in het algemeen de aandacht op de volgende aspecten: het onderzoek naar de beslisbaarheid of onbeslisbaarheid van wiskundige theorieën (veelal algebra) en onderzoek naar de formuleerbaarheid van die theorieën (elementair, tweede-orde, etc.). Beth begon dit gebied te onderzoeken en wist met behulp van algebra en topologie enkele stellingen te formuleren. Deze stellingen leunden nog wel sterk op het werk van anderen. In zijn pogingen om bepaalde bewijzen te leveren ontwikkelde Beth een begrip van valuaties dat hij vooral in een later stadium met vrucht zou gaan gebruiken. Beth construeerde vereenvoudigingen van volledigheid door vereenvoudiging van elementaire logica en met zijn ontwikkelde valuaties. De ervaringen opgedaan met valuaties waren nuttig bij zijn latere semantische onderzoek, zoals besproken in het hoofdstuk *Semantiek*.

Dit onderzoek voerde Beth ook op een ander pad: hij ging de sequentencalcu-

[14] Brief Beth – F.L.R. Sassen, 11 november 1958. De wiskundige onderwerpen kwamen na 1950 aan bod; enkele daarvan zullen behandeld worden. F.L.R. Sassen, 1894 –1971, Hans Reichenbach, 1891 –1953, Rudolph Carnap, 1891 – 1970.

[15] De eerste periode werd ook gekenmerkt door Beths belangstelling voor het werk van Kant.

[16] Brief Beth – F.L.R. Sassen, 11 november 1958. F.L.R. Sassen, 1894 – 1971; Heinrich Scholz, 1884 – 1956.

[17] Het nominalisme van Tarski kan nogal eens met een korreltje zout genomen worden.

lus van Gentzen[18] gebruiken. Dit vormt het begin voor het volgende hoofdstuk, de *definitiestelling*, een definitorische volledigheidsstelling. De definitiestelling zegt iets over een syntactisch begrip. Het bewijs door Beth werd gekenmerkt door syntactische (hoofdzakelijk) en semantische (bijwagen) componenten. Ook hier speelde de sequentencalculus van Gentzen een belangrijke rol.

Door dit werk had Beth veel ervaring opgedaan met semantiek en met Gentzens methoden. Dit gaf de aanzet tot een volgend onderzoekingsgebied: de tableaus, een combinatie van Gentzen-calculus en semantiek. De tableaus leveren een snelle opbouw van uitverkoren valuaties en daarmee een snelle beslissingsmethode. Dit werk uit de periode 1954 – 1956 wordt behandeld in het hoofdstuk *Semantische tableaus*. Van hieruit liepen bij Beth drie onderzoekslijnen verder: bewijsmechanisatie, natuurlijke deductie en modellen voor intuïtionistische logica.

Het hoofdstuk *De logische machine* handelt over een uitbreiding van de tableaus met het doel om een mechanisatie met behulp van rekenapparatuur te verkrijgen. Twee vormen van mechanisatie wilde Beth nastreven: mechanisatie van bewijzen en mechanisatie van geldigheidstesten. Het mede door Beth opgezette Euratom-project vormde de impuls voor dit onderzoek. Deze periode liep van 1956 tot 1964.

De tweede lijn is die van de deductieve tableaus. Beth trachtte uit zijn semantische 'geldigheids'-tableaus deductieve 'bewijs'-tableaus te peuren. De omweg over de semantische tableaus heeft men natuurlijk niet nodig, men kan ook direct op deductieve systemen overstappen. Hier doet de invloed van het intuïtionisme zich gevoelen. Beth ontwikkelde klassiek-deductieve en intuïtionistisch-deductieve systemen. Dat bepaalt de inhoud van het hoofdstuk *Deductieve tableaus* en is tevens de opmaat tot het hoofdstuk *Implicatieve systemen*. Men kan trachten dieper door te dringen in het verschil tussen klassiek en intuïtionistisch d.m.v. de deductieve tableaus. Het eenvoudigste is dit te doen door alleen implicatie te bestuderen. Dit kan men vervolgens gaan uitbreiden naar andere operatoren, waaronder modaliteiten, en de bijbehorende fragmenten bestuderen. Op dit terrein heeft Beth enkele aardige resultaten weten te bereiken, die samenhangen met zijn niet-klassieke valuaties.

Echte oplossingen voor de intuïtionistische logica, zoals dit Beth voor ogen stond, zijn hiermee nog niet gegeven; die worden behandeld in het volgende hoofdstuk, *Beth-modellen*. De door Beth voor de intuïtionistische logica geconstrueerde tableaus zijn snel gegeven. Het grootste deel van het hoofdstuk wordt in beslag genomen voor het intuïtionistisch aanvaardbaar maken van deze tableaus: het omzetten van het begrip tegenmodel in dat van een inpassingsmethode. De laatste wordt gebruikt voor de constructie van een klassiek bewijs van de volledigheidsstelling en een aanzet van een intuïtionistisch bewijs. In het laatste geval speelt de waaierstelling van Brouwer een rol. Beths denkbeelden over deductieve tableaus en geldigheidstesters voor intuïtionistische logica zijn afkomstig uit dezelfde periode, namelijk van 1955 tot begin jaren zestig.

Men kan denken dat bovenstaande verhaallijn meer suggestie dan werkelijk-

[18]Gerhard Gentzen,1909 – 1945.

heid is. Gelukkig kan men ook bij Beth te rade gaan, zoals zijn ms. *Problemen der hedendaagse logica* [19] laat zien. Enkele citaten (pp. 9, 10) die eenzelfde lijn laten zien:

"Aanvankelijk had ik mij het bescheiden doel gesteld, een meer eenvoudige toegang te vinden tot de [...] volledigheidsbewijzen voor logische systemen [...] Nadat ik in 1951 een eerste resultaat in deze richting had bereikt, leidde ik in 1953 uit de volledigheidsstelling voor de elementaire logica een aantal gevolgtrekkingen af. [...] Daarmee rijst de vraag, of ook met betrekking tot de leer der definitie een volledigheidsbewijs geldt. Deze vraag, die merkwaardigerwijs niet eerder zó gesteld was, kon ik in 1953 in bevestigende zin beantwoorden voor de elementaire logica."

"De volledigheidsstelling voor de leer der definitie berust in wezen op een meer verfijnde versie van de volledigheidsstelling voor de deductie-theorie, die rekening houdt met het door G. Gentzen in 1934, van een zuiver formeel standpunt uit, opgestelde subformule-beginsel: bij de afleiding van een conclusie $B$ uit de premissen $A_1, A_2, \ldots$ spelen alleen de subformules van $B$ en $A_1, A_2, \ldots$ een rol. Dit leidde tot de opmerking: 1. van semantisch standpunt spreekt het subformule-beginsel vanzelf. Reeds vroeger was ik tot het volgende inzicht gekomen: 2. de volledigheidsstelling voor de elementaire logica berust op een herleiding van deze laatste tot de (eenvoudiger) volzinnen-calculus. In combinatie met het [...] gezichtspunt: 3. afleidbaarheid betekent afwezigheid van een passend tegenvoorbeeld, leidden deze inzichten me tenslotte tot de opstelling van de methode der semantische taleaux"

"[Bomen en deelbomen] leidde tot een aanpassing van de methode der semantische tableaux aan de beginselen der intuïtionistische logica. Tot mijn grote verrassing bleek het daarna mogelijk, de volledigheid te bewijzen."

"Tot slot wijs ik er even op, dat de zienswijze, die aan al deze onderzoekingen ten grondslag ligt, een zekere mate van verwantschap vertoont met de reeds omstreeks 1880 door K. Kroman verdedigde opvatting van de logische redenering als *gedachten-experiment* [...] Elke poging tot constructie van een passend tegenvoorbeeld is immers als een gedachten-experiment te beschouwen. We kunnen dus onze methode kort beschrijven, door te zegen, dat we er [...] naar gestreefd hebben, aan elke logische redenering een gedachten-experiment van een zeer bepaald soort te doen beantwoorden."

**Overwegingen met betrekking tot het citeren.** Gedurende de tijd dat het archief van Beth op de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen was opgeslagen, besloeg het drie archiefkasten. Hieruit moest een keuze gemaakt worden. Bij een tot op heden nauwelijks ontgonnen archief als dat van Beth kan men nog alle kanten op. Er is echter wel een belangrijke bijkomstigheid die voor een deel de keuze bepaalt. Er is in het archief materiaal dat wellicht voor uitgave in aanmerking zou kunnen komen. Dit geldt ook voor de gevoerde correspondentie. Helaas is het zelden zo dat in correspondentie alle brieven over een bepaald onderwerp voor publicatie geschikt zijn. Bovendien wordt vaak te uitvoerig op bijzaken ingegaan. Daarom kan een samenvattende beschrijving met illustratieve citaten zeker zijn nut hebben.

Met citeren moet men overigens niet overdrijven. In dit verband kan men

[19] Voordracht voor de Akademie van Wetenschappen, maandag, 8 oktober 1956.

uit een recensie door A. Heyting van Beths *Inleiding tot de wijsbegeerte der wiskunde* (1940) citeren: [20]

"Met het streven naar objectiviteit staan blijkbaar in verband de lange citaten, die de schrijver herhaaldelijk geeft. Het komt mij voor, dat een goede paraphrase, waartoe hij, naar uit andere gedeelten van zijn werk blijkt, goed in staat is, bijna steeds de voorkeur zou verdienen. Het gevaar, dat de bedoeling van het oorspronkelijke geschrift verwrongen wordt, bestaat ook bij een citaat, dat toch altijd uit een groter verband losgerukt wordt, terwijl de plotselinge overgangen van stijl het juiste begrip bemoeilijken en het boek iets onrustigs geven."

In dit werk is een deel van de citaten evenwel afkomstig uit niet uitgegeven correspondentie en manuscripten. Verwijzing naar gepubliceerd werk is in dat geval dan ook niet mogelijk: parafrasering te stellen boven citeren wordt dan minder aantrekkelijk.

Het niet gepubliceerde materiaal — manu-, typoscripten — dat wordt gebruikt, is afkomstig uit het Archief E.W. Beth. Dit archief is door de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen in bewaring gegeven aan het Rijksarchief te Haarlem.[21] Tenzij anders vermeld is elke geciteerd archiefstuk uit dit archief afkomstig. Bij brieven worden naast de afzender en geadresseerde de datum en (soms) de plaats van verzending (in deze volgorde) gegeven. Bij Beth gebeurt dit laatste (de plaats) bijna nooit, de meeste brieven van hem zijn in Amsterdam geschreven. Er is weinig materiaal uit andere bronnen dan het Beth-archief gebruikt. Indien dit het geval is wordt dat vermeld; voornamelijk betreft dit materiaal uit het Archief A. Heyting.[22] Vooral vanwege het hoofdstuk over Beth-modellen is daar gebruik van gemaakt om een beeld te geven van de begrenzingen waar Beth voor het ontwikkelen van die modellen en volledigheid rekening mee moest houden.[23] In het Beth-archief is wel heel weinig hierover te vinden, in de correspondentie tussen Heyting en Kreisel des te meer.[24]

De grote hoeveelheid materiaal werpt vanzelf de vraag op, waarom er niet meer ruimte aan zeg filosofische bezigheden gewijd kan worden. Toegegeven moet worden dat er een grote hoeveelheid correspondentie en materiaal over filosofische en wetenschapsfilosofische onderwerpen aanwezig is. Ook kan men zich afvragen of er geen aandacht besteed zou moeten worden aan correspondentie over nog bestaande of al reeds ten onder gegane geleerde genootschappen of de bijdragen van Beth aan de inrichting van Tarski's huis. Hierdoor zou deze studie onoverzienbaar uitdijen. Daarom wordt er voor gekozen Beths werk niet zo zeer in de breedte, maar voor een aantal onderwerpen in de diepte te behandelen.

[20] Recensie door Heyting in het NAW, 2e reeks, dl. 21 (1943).
[21] Zie verder de supplementen.
[22] Heyting-archief, zie de Supplementen
[23] Het materiaal wordt echter besproken in het hoofdstuk Logica en Methodologie, paragrafen over intuïonisme en keuzerijen.
[24] George Kreisel, *1926.

**Noties en conventies.** Voor de afkortingen en symbolen staan twee wegen open. De eerste weg bestaat uit een zich conformeren aan de met betrekking tot de notatie een steeds wisselende tekst van brieven en artikelen. De tweede weg bestaat er uit hiermee te breken en één soort notatie te gebruiken. In dit verband valt wederom uit Heytings bespreking van Beths *Inleiding tot de wijsbegeerte der wiskunde* te citeren:

"Zeker gaat het te ver, iedere schrijver met zijn eigen notatie aan te halen, zodat bijvoorbeeld voor de logica de notaties van Frege, Russell en Łukasiewicz voorkomen. Zelfs voor een ingewijde is het dikwijls moeilijk, in een vreemde notatie thuis te raken; hoeveel last moet een beginner daarmee niet hebben!" [25]

In dit geval is er naar Heyting geluisterd. Gekozen is er voor een zo begrijpelijk mogelijke mélange. Helaas is er door de Nederlandse regering op dit terrein nooit een ultieme symbolen-commissie ingesteld om een bepaald gebruik dwingend voor te schrijven.[26] Een tweede moeilijkheid bestaat uit niet door Beth ingevulde delen in brieven of manuscripten. Dit betreft voornamelijk delen van formules en tableaus: niet alles stond op zijn schrijfmachine. Voorzover mogelijk is dit door de auteur dezes aangevuld. Een voorbeeld betreft het nogal eens weglaten van $\vdash$ bij sequenten (waarvoor in dit geschrift $\Rightarrow$ gekozen is). Deze verbeteringen worden niet in de voetnoten vermeld om een al te grote brij aan opmerkingen te voorkomen. Soms wordt wel eens afgeweken van de uniformiteit van de presentatie van de symbolen. In zo een geval wordt dit dan ter plekke gedefinieerd.

Bij Nederlandse citaten wordt de oorspronkelijke spelling gehandhaafd. De verdere spelling van het Nederlands wordt, om de lezer niet af te schrikken of al te zeer te vermoeien, zoveel mogelijk aan de waan van de dag aangepast. Deze voor de bulk van de tekst gebruikte spelling is evenwel niet toegepast op logische of wiskundige termen. Daar is, ook om een al te grote breuk met de correspondentie te vermijden, een wat oudere vorm van spelling gehandhaafd. Soms wordt er tegen het Nederlands gezondigd: zo wordt er vanwege de logische context syntax i.p.v. syntaxis gebezigd (wel wordt bij dit niet bestaande woord aangenomen dat het evenals syntaxis vrouwelijk is).

---

[25]Gottlob Frege, 1848 –1925; Bertrand Arthur William, 3e graaf Russell, 1872 –1970; Jan Łukasiewicz, 1878 –1956.

[26]Aan de noodzaak om tot een uniforme uitdrukkingswijze binnen de logica te geraken is de Association for Symbolic Logic echter niet voorbijgegaan. Ooit is er door dit genootschap een 'spellingscommissie' geïnstalleerd. Anders dan bij Nederlandse spellingscommissies matigde men zich geen dictatoriale bevoegdheden aan. Volgens A. Church (brief(kopie) A. Church – J.B. Rosser, W.V. Quine, 4 februari 1953, (Princeton)) moest de commissie de gebruikte symbolen omschrijven, maar niet voorschrijven. Vanzelfsprekend was men aan Beth — vanwege zijn combinatie van historische en systematische kennis — niet voorbijgegaan. Per 7 februari 1953 accepteerde Beth (brief Beth – W.V. Quine, 7 februari 1953) de benoeming tot voorzitter. Begin 1954 trok Beth zich al terug (brief Beth – W.V. Quine, 16 februari 1954). Pas in 1969 werd het resultaat uitgegeven als *Dictionary of symbols of mathematical logic* in de serie Studies in Logic bij North Holland. Alonzo Church,1903 – 1995; Willard Van Orman Quine, *1908.

# Hoofdstuk 2

# Levensloop

*"I received to my great surprise an invitation to give an 1/2–hour adress in Edinburgh.*[1] *This reminds me of an unusually incapable student of my father's who only after many years of work obtained the certificate he needed; then he spoke the first and last intelligent words in his life:*

*'This shows that one needs no brains to be successful in mathematics'."* [2]

Gezien de in de inleiding omschreven opzet zal van Beth slechts een korte biografische schets aangereikt worden. Uitgebreider kan de geïnteresseerde van Beths leven kennisnemen in de *In Memoriam* die in Staal (1965) gegeven wordt. Beths leerling J.F. Staal heeft gebruik gemaakt van de diverse curricula vitae die door Beth waren opgesteld. In dit verband kan het autobiografische *Een terugblik* [3] vermeld worden. De filosofische, logische en wiskundige positiebepaling van Beth zijn indertijd onder anderen door zijn leerlingen S.J. Doorman (1971) en J.A.W. Kamp (1971), J.J.A. Mooij (1971), zijn collega A. Heyting (1966) en zijn vriend B.H. Kazemier (1963/64) belicht.[4]

---

[1]Edinburgh: het internationale wiskunde-congres van 1958.

[2]Citaat uit brief E.W. Beth – A. Tarski, 5 september 1957.

[3](Beth 1960*b*). Verder zijn van Beths hand de volgende typo/manuscripten: *Selbstdarstellung*, (Amsterdam, 10 oktober 1958), *Curriculum vitae E.W. Beth* en *Bibliographie E.W. Beth.* In het laatste typoscript wordt het grootste deel van zijn monografieën, artikelen en voordrachten opgesomd. Bovendien gaat Beth daar in op de relaties tussen zijn werk en dat van anderen. Gebruikmaking van autobiografisch werk kent zijn gevaren. De voorstelling van zaken is zoals de samensteller het op een bepaald moment denkt dit te moeten geven; dit hoeft natuurlijk niet altijd de juiste gegevens op te leveren. Voor de moeilijkheden bij Beth, zie Visser (1999). Desondanks is er toch een paar keer van dit materiaal gebruik gemaakt in deze dissertatie.

[4]Johan Frederik Staal, *1930; Johan Anthony Willem Kamp, *1940; Jan Johann Albinn Mooij, *1929.

## 2.1 Beginperiode

### 2.1.1 Leerjaren

Evert Willem Beth (roepnaam: Eef) werd op 7 juli 1908 te stad Almelo geboren. Zijn vader, Hermanus Johannes Eliza Beth, was als wis- en natuurkundige werkzaam in het middelbaar onderwijs. Daarnaast was H.J.E. Beth publicitair actief op het gebied van de wiskunde en natuurwetenschappen. Deze publicaties waren systematisch, historisch en opvoedkundig van aard. Hij was één der drijvende krachten achter het blad Euclides,[5] waar ook zijn zoon geregeld in publiceerde. E.W. Beth heeft indertijd nog meegeholpen aan een bewerking van H.J.E. Beths leerboek over de analyse met de bedoeling dit boek voor wiskundig economen aantrekkelijk te maken. In de woorden van E.J. Dijksterhuis kan over de relatie van E.W. Beth tot zijn vader worden gezegd: [6] "Wetend, welk een hartelijke verstandhouding tussen hem en jou bestond en hoe intens jullie altijd in elkanders werk hebt gedeeld."

Na het behalen van een middelbaar schooldiploma begon Beth vanwege gezondheidsproblemen nog niet direct aan een universitaire opleiding. Toen hij zich hier wel aan waagde was dit niet wis- en natuurkunde, maar scheikunde (farmacie). Deze studie hield hij echter snel voor gezien. Voor het waarom kan men zijn vroegere universitaire docent Bockwinkel citeren: [7] "Ik herinner me dat ik, toen U als eerstejaars 'chemicus' op het elementaire kollege zat, aan een door U gegeven antwoord merkte dat U mathematicus was, en dat ik dat toen maar meteen zeide (er uit flapte)." Volgens Beth heeft Bockwinkel zeker invloed op zijn studie gehad: [8]

"Meer nog wellicht dan anderen voel ik tegenover U een ereschuld van dankbaarheid, omdat Uw onderwijs van beslissende invloed is geweest op mijn levensgang. Ik kwam in Utrecht niet met de bedoeling, wiskunde te gaan studeren; deze studierichting leek, in verband met mijn toenmalige gezondheidstoestand, minder geschikt. Uw onderwijs heeft mij echter de overtuiging gegeven, dat ik over deze bezwaren moest en mocht heenstappen."

Volgens Beth kenmerkt de wiskundestudie zich door physieke gevaren: [9] "Ik heb, zoals U weet, ook in andere vakken gestudeerd. Daarbij heb ik de ondervinding opgedaan dat, in vergelijking met andere vakken, de wiskunde op de een of andere wijze schadelijk is juist voor de ademhalingsorganen. Dit zal wel verband houden met de sterke en langdurige concentratie die ze nu eenmaal

[5] Een tijdschrift voor didactiek van de wiskunde; er werden ook algemenere artikelen in gepubliceerd.

[6] Brief. E.J. Dijksterhuis – E.W. Beth, 9 februari 1952, (Oisterwijk). Deze brief was n.a.v. het overlijden van H.J.E. Beth tijdens E.W. Beths verblijf in Berkeley.

[7] Brief H.B.A. Bockwinkel – Beth, ? juni 1951?, (Utrecht). H.B.A. Bockwinkel, 1881 – 1960.

[8] Brief Beth – H.B.A. Bockwinkel, 7 juni 1951.

[9] Brief Beth – Bakker, 20 mei 1960. Medisch gezien vormt dit citaat een eigenaardige verhaal, maar Beth had zijn gehele leven last van zijn ademhalingswegen, en dit laat zien waar hij dat o.a. aan toeschreef.

vereist."

Minder gevaarlijk zijn volgens Beth studies als natuurkunde of wijsbegeerte, die hij dan ook van harte aanbeval aan mensen die last van hun luchtwegen hadden. Desondanks werd de studie wis- en natuurkunde door hem in 1932 'cum laude' afgesloten.

In die periode voor de Tweede Wereldoorlog onderging Beth niet alleen invloed van zijn vader maar ook van diens samenwerking met E.J. Dijksterhuis: [10]

"Verscheidenen jaren heb je [E.J. D.] met mijn Vader nauw samengewerkt. [...] Een deel van zijn levenswerk zou waarschijnlijk niet tot stand zijn gebracht zonder de prikkel van je belangstelling. [...] Op mijn persoonlijke ontwikkeling is jullie samenwerking van beslissende invloed geweest. Jullie actie ten behoeve van wiskunde-onderwijs en leraarsopleiding heb ik voortdurend met grote belangstelling gevolgd en dit heeft mede de keuze van mijn arbeidsveld bepaald." [11]

In Nederland was er in die tijd nog geen sterk op de logica afgestemde filosofie of wiskunde te vinden. Toegegeven, helemaal zonder zat men in Nederland niet. In Utrecht en Amsterdam werd het nodige gedaan. Dit gebeurde evenwel door mensen met een buiten-universitaire werkkring of binnen de universiteit door personen met een andere leeropdracht. In Amsterdam groepeerden deze activiteiten zich aanvankelijk rondom de wiskundigen G. Mannoury en L.E.J. Brouwer, en in later tijd rondom A. Heyting en de experimenteel natuurkundige J. Clay. Mannoury werd al in 1903 toegelaten als privaatdocent voor de logische grondslagen van de wiskunde. Zijn openbare les bij de aanvaarding van zijn privaat-docentschap droeg de titel *Over de betekenis der wiskundige logica voor de philosophie.* Al snel na zijn doctoraal wiskunde heeft Beth zich onder hun gehoor geschaard. In Utrecht verzorgde bovendien A.H. Fraenkel enige tijd colleges over de grondslagen van de wiskunde. Ook Beth volgde deze colleges in 1933.

Tussen 1932 en 1935 deed Beth vrije studies in Leiden, Utrecht en Brussel. In 1935 studeerde Beth in Utrecht af in de wijsbegeerte. Zijn proefschrift *Rede en Aanschouwing in de Wiskunde*,[12] met als promotor de neo-kantiaan J.C. Franken, volgde eveneens in 1935, zij het vijf maanden later. De eigenaardige overstap van wiskunde naar wijsbegeerte valt ten dele te verklaren uit brieven naar A. Tarski en A.H. Fraenkel. In de brief aan Tarski schreef Beth: [13]

"From 1926 to 1932 I studied mathematics and physics at Utrecht University. I had excellent teachers there: Wolff, Barrau and Kramers, but they had no interest in

[10] Brief E.W. Beth – E.J. Dijksterhuis, 21 april 1952, (Berkeley).

[11] Ook E.W. Beth heeft in de loop van zijn carrière het nodige commissie-werk gedaan voor het onderwijs in de wiskunde op lager, middelbaar en universitair niveau. Daarnaast had Beth belangstelling voor de psychologische achtergronden van leerprocessen. Beide belangstellingssferen resulteerden in een aantal artikelen

[12] (Beth 1935*a*).

[13] Brief Beth – A. Tarski, 30 augustus 1950. En naar Fraenkel (brief Beth – A.H. Fraenkel, 31 januari 1954. Abraham Halevi Fraenkel, 1891 –1965): "My interest in foundations did not meet with Wolff's approach, and this compelled me to take a second 'doctoraal examen' in the Literary Faculty, where I also took my doctor's degree."

foundational research.[14] This caused me to turn, after my last examination, but before taking the doctor's degree, to philosophy. This step caused some resentment in my former professors, but I took my doctor's degree in the Faculty of Letters."

Beths proefschrift valt niet los te zien van zijn inzending op de door de Faculteit der Letteren en Wijsbegeerte van de Rijksuniversiteit Utrecht uitgeschreven prijsvraag *Of de Noodzakelijkheid van de ruimte als aanschouwingsvorm a priori vervalt, doordat de meetkunde zuiver logisch kan worden opgebouwd.*[15] Zijn eerste, recenserende publicatie Beth (1933/34), had hij toen al achter de rug.

Zelf karakteriseerde Beth deze eerste periode tot 1935 als volgt: [16]

"Gedurende deze periode trachtte ik (in een vriendschappelijke wedijver met P.G.J. Vredenduin)[17], onder invloed van het Marburgse neo-criticisme zoals dit in Utrecht door Ovink, Goedewaagen en Franken werd vertegenwoordig, een soort synthese tot stand te brengen tussen het kantianisme enerzijds en de resultaten van het wiskundig grondslagenonderzoek anderzijds.[18] Bedoelde resultaten interpreteerde ik toen in aansluiting bij het neo-positivisme van de Wiener Kreis, met dien verstande dat van deze richting reeds toen de logicistische tendentie [. . . ] meer indruk op mij maakte dan het extreme empirisme [. . . ]. Anderzijds kwam ik al spoedig in verzet tegen de dogmatische strekking die het kantianisme bij Görland verkreeg."

### 2.1.2 Rijpingsproces

Van 1935 tot 1945 vervulde Beth taken in het middelbare onderwijs. Hierbij moest hij zich door het land heen van school naar school begeven om tijdelijke banen te vervullen. Hij zou met dit soort banen eindigen te Amersfoort. Om daaraan te ontsnappen informeerde hij vlak voor de Tweede Wereldoorlog bij H.B. Curry hoe de arbeidsmarkt in de Verenigde Staten er uit zag voor iemand met zijn kwalificaties.[19] In het begin van de jaren veertig behaalde Beth een kandidaats in de rechten. Hij was met een juridische studie begonnen, omdat hij meende dat er op het gebied van de wiskunde, i.h.b. in het onderwijs, geen passend emplooi te vinden was.[20] En voor hem ging deze constatering zeker op,

[14] J. Wolff (1882 – 1944) zat aanvankelijk in de hoek van de meetkunde, maar was zich meer en meer gaan toeleggen op de analyse, Johan Barrau, 1873 – 1953, was vooral een analytisch meetkundige en Hendrik Anthony Kramers, 1894 – 1952, was werkzaam op het gebied van de theoretische natuurkunde.

[15] Nadien heeft Beth op meer prijsvragen, o.a. van het Wiskundig Genootschap, ingeschreven. Niet alle werden bekroond.

[16] Ms. E.W. Beth, *'Selbstdarstellung'*, Amsterdam, 10 oktober 1958.

[17] Voor Vredenduin was het wel mogelijk om onder Wolff te promoveren: een 18-daagse exercitie voor 48 pagina's was hier al voldoende voor. Zie hiertoe Goffree (1985), p. 146.

[18] Tobie Goedewaagen, 1895 – 1980; J.C. Franken, 1891 – 1941

[19] De briefwisseling was n.a.v. het vanwege de oorlog niet doorgegane Internationale Wiskunde Congres te Cambridge, Massachusetts (gepland voor september 1940). Brief H.B. Curry – Beth, 13 oktober 1938, (Princeton, NJ). Haskell Brooks Curry, *1900.

[20] Brief Beth – H.J. de Vleeschauwer, 6 januari 1941, (Amersfoort). Enkele jaren later, na de oorlog, zou de door de Belgische justitie bij verstek ter dood veroordeelde de Vleeschauwer naar Zuid-Afrika vluchten.

hij kon slecht orde houden en had driftbuien bij terging door zijn leerlingen.[21] Pogingen om met een diploma levensverzekeringswiskunde een baan te krijgen waren op niets uitgelopen.[22] In deze periode was hij ook gedurende enige tijd werkzaam als wiskundig assistent te Delft onder C.H. van Os.[23] Daarnaast bleef Beth publicitair aan het werk.

In de laatste paar jaren voor de Tweede Wereldoorlog en tijdens de Tweede Wereldoorlog begon Beth zich te profileren, voorlopig nog niet in de mathematische logica. Zijn publicaties waren een mengeling van filosofische, wetenschapsfilosofische, logische en historische onderwerpen. De historische onderwerpen betroffen vooral logica en de grondslagen van de wiskunde. Zijn werkzaamheden waren al voldoende om net voor het uitbreken van de Tweede Wereldoorlog een verzoek van A. Church te ontvangen om mee te helpen met het recenseren voor de Journal of Symbolic Logic.[24] Beth ging daar direct op in. In die tijd had Beth reeds diverse internationale congressen bezocht. Zijn latere goede betrekkingen met Tarski kwamen hieruit voort.[25]

Ook in Nederland bewoog Beth zich in geleerde kringen. Te noemen valt het Wiskundig Genootschap waarvan hij diverse vergaderingen opluisterde met zijn voordrachten. Met betrekking tot de filosofie lag het moeilijker. Wetenschapsfilosofie, en filosofie op wetenschappelijke basis zoals Beth dit voorstond, werd overal met het nodige wantrouwen bekeken en kreeg bijna geen voet aan de grond. Erg veel traditie was er op dit punt niet in Nederland: [26]

"Ik heb al van het begin van mijn wetenschappelijke loopbaan af te kampen met een hoogst ernstig gebrek aan passende gelegenheid tot publicatie. Dit is zonder twijfel ten deele aan de aard van mijn studies toe te schrijven, die liggen buiten het terrein door de wetenschappelijke periodieken bestreken.[27] Daarbij komt echter, dat zekere verschijnselen mij aanleiding geven te vermoeden, dat niet overal de bedoeling voorzit, mij bij mijn bemoeiingen behulpzaam te zijn." [28]

---

[21] Beths slechte geschiktheid voor het middelbaar onderwijs is gehaald uit de mondelinge mededelingen van vroegere collega's uit het onderwijs en zijn beide zusters. Voor de vele door hem afgelopen scholen, zie de supplementen.

[22] Daaronder was een vergeefse poging om een aanstelling van commies te krijgen bij de verzekeringskamer te Amsterdam: brieven Beth – W.G.J. ten Pas, 28 augustus 1942, (Amersfoort); Beth – Verzekeringskamer Amsterdam, 26 augustus 1942, (Amersfoort).

[23] Ook van Os heeft een aantal publicaties betreffende de achtergronden van het wiskundig en natuurwetenschappelijk denken op zijn naam. Enkele van deze publicaties zijn door Beth gerecenseerd.

[24] Brief A. Church – Beth 24 september 1938, (Princeton, N.J.); Beth aangesteld als consulting editor: brief A. Church – Beth, 11 december 1939, (Princeton, N.J.). Al eerder was Beth lid van de Association for Symbolic Logic geworden (hij wordt al vermeld in de ledenlijst van *JSL 1*, 1936)

[25] Zie ook de 'lange noten' van dit hoofdstuk.

[26] Brief Beth – J. Clay, 19 oktober 1942, (Delft).

[27] Men dient hier niet alleen aan filosofische, maar ook aan wiskundige periodieken te denken. Ook bij de wiskundigen bestond er wantrouwen en vooroordeel t.o.v. de bedoelingen der logici; later zal daar in dit hoofdstuk verder op worden ingegaan.

[28] Volgens de brief Beth – J. Clay, 13 juni 1942, (Amersfoort), lag dit ten dele aan aan het volgende: " Bij sommigen schijnt de meening te bestaan, dat ik aanhanger van het (neo) positivisme zou zijn. Hoewel ik de eigenaardige vooroordelen tegen deze wijsgerige richting niet deel, acht ik het toch, waar die vooroordelen nu eenmaal bestaan, gewenscht, erop te

Beth bezocht vanaf 1933 de vergaderingen van het Genootschap voor Critische Philosphie [GCP].[29] Deze groep had zich niet al van het begin af aan vastgelegd op een filosofische ideologie. Toch keek men daar vreemd op wanneer Beth of de door hem binnengehaalde B. Kazemier om begripsvastleggingen en verheldering vroegen: dit werd als niet gepast ervaren.[30]

Tal van Nederlandse wijsgerige verenigingen waren lid van een overkoepelende filosofisch neutrale organisatie, de Algemene Nederlandse Vereniging voor Wijsbegeerte [ANVW].[31] Er waren ook internationale filosofische organisaties zoals het Congrès Internationaux de Philosophie [CIP]. De CIP organiseerde de grote internationale filosofische congressen zoals in 1900 te Parijs en in 1948 te Amsterdam. Onder het patronage van de CIP stond ook het in 1937 te Parijs (standplaats Sorbonne, faculteit der letteren) opgerichte Institut International de Collaboration Philosophique [IICP] — na 1955 Institut International de Philosophie IIP] geheten. Deze vereniging organiseerde kleinere congressen en het werk aan de geregeld verschijnende Bibliographique de la Philosophie (vanaf 1937) en de Chroniques (vanaf 1939/40).[32] Binnen het kader van het congres

wijzen, dat ik mijn bezwaren tegen deze denkwijze op blzz. 4 en 5 van mijn proefschrift [(Beth 1935*a*)] en op blz. 248 van mijn 'Inleiding' [(Beth 1940)] uitdrukkelijk heb genoemd."

[29]Opgericht in 1924 met Utrecht als plaats van vestiging. Later genoemd het Genootschap voor Wetenschappelijke Philosophie. In het begin van de Tweede Wereldoorlog heeft Beth voor het lidmaatschap bedankt. De redenen hiertoe vindt men in de brief Beth – C.C.J. de Ridder, 27 juli 1946, (Amersfoort): "Wanneer het Genootschap van dergelijke elementen [Kortmulder, van der Gulden] eenmaal gezuiverd is — welke maatregelen denk je daartoe te nemen! — , is de aanleiding tot mijn uittreden vervallen, en zal ik gaarne weer toetreden." — En zo geschiedde.

T. Goedewaagen, eerst kantiaan, later hegeliaan en nationaal-socialist, had het genootschap al voor de oorlog verlaten, omdat men er niet over dacht dit onder zijn hoede tot een hegeliaans genootschap om te vormen. Dit zou ook tegen de vooropgezette neutraliteit zijn. Die neutraliteit was ook de reden, waarom Beths kennis H. Meyer in 1955 bezwaar maakte tegen een bestuurlijke aanstelling van het rooms-katholieke lid Schoonbrood (rondschrijven van Meyer, 1955). Dit deed Meyer vanwege de door paus Pius XII op 12 augustus 1950 afgekondigde encycliek Humani Generis. Hierin werd geen discussie meer toegestaan over in een encykliek verkondigde leerstellingen. Daarmee werd het kerkelijke leergezag boven resultaten van wetenschappelijk onderzoek gesteld. Beth was het met Meyers denkbeelden m.b.t. Schoonbrood niet eens en werkte tegen: een geaccepteerd lid is een in alle opzichten geaccepteerd lid, ook al is hij rooms-katholiek (rondschrijven van Beth, o.a. aan bestuur van het genootschap, 29 oktober 1955).

[30]Later, in de periode voor de Tweede Wereldorloog, werd het genootschap juist geplaagd door een teveel aan onenigheid. Beth stelde zich in een pamflet (1937, 1938 ?) de vraag: "Waarom leidt de gedachtenwisseling in het genootschap niet tot verstandhouding in den eigenlijke zin des woords." Volgens Beth moest dit niet in meningsverschillen gezocht worden: "maar in het ontbreken van een formeele, technische basis voor onze besprekingen."

[31]In zekere zin was de ANVW de opvolger van de Afdeeling Nederland der Kant-Gesellschaft. Wegens toenemende druk vanaf 1933 van de toenmalige op nationaal-socialistische leest geschoeide Duitse staat op de overkoepelende Duitse vereniging ging men in Nederland er op 9 december 1933 toe over de Nederlandse afdeling op te heffen en meteen het ANVW, met als vestigingsplaats Amsterdam, op te richten. Institutionele leden van de ANVW waren o.a. de significi, de GCP, en later ook de Nederlandse Vereniging voor Logica [NVL]. Beth is van al deze verenigingen voor kortere of langere tijd lid geweest en heeft binnen een aantal van die verenigingen bestuursfuncties vervuld. Zo was hij van 1948 tot 1954 voorzitter van het ANVW.

[32]Met behulp van het IICP werden o.a. twee congressen georganiseerd waar Tarski en Beth

te Amsterdam in 1948, waar Beth secretaris van was, is de Fédération Internationale des Sociétés de Philosophie [FISP] ontstaan. Eerste voorzitter van de FISP werd Beths collega H.J. Pos.[33] De FISP was medeoprichtster van de Conseil International de la Philosophie et des Sciences Humaines [CIPHS], dat onder het patronaat van UNESCO kwam te vallen; het CIPHS was de literaire en sociaal-wetenschappelijke tegenhanger van de nog ter sprake te brengen ICSU. FISP en IIP deelden beide hetzelfde Parijse adres. Dit zou Beth veel moeilijkheden opleveren, vooral bij de zeer nodige reorganisatie van de bibliografische uitgaven van het IIP. Bovendien zou hij daar eenzelfde euvel meemaken als bij de later aan de beurt komende wetenschapsfilosofische verenigingen: tegenwerking, achter houden van bestuursstukken etc. Beth moest oproeien tegen een Franse administratieve staf, die in Beths optiek het gebied buiten Parijs — het centrum van de wereld — en al wat daar bedacht werd als niet ter zake doende beschouwde; aan hetzelfde euvel leed UNESCO.

Er was nog een andere vereniging waar Beth zich voor enige tijd aan bond, het Signifisch Genootschap. Gedurende de oorlogsjaren, en de jaren direct daarop, bezocht hij werkgroepen van dit genootschap. Tot op zekere hoogte had hij meer wetenschappelijke aansluiting met deze groep dan met de andere. Na de oorlog kwamen echter (inter)nationale verenigingen van een meer logisch karakter op en was het mogelijk door de verruiming van de vervoersmiddelen en het weer openstellen van landsgrenzen aan internationaal verenigingsleven deel te nemen.

Al met al was dit nog niet groots te noemen, maar wel zoveel dat Beth hiermee kansen had op een universitaire baan. Gezien de oorlog zou een verwerkelijking daarvan nog op zich laten wachten, zij het dat er voor een kort moment licht gloorde. De in Amsterdam voor filosofie (bij de Faculteit der Letteren) aangestelde H.J. Pos was vanwege zijn voor de oorlog al ingenomen houding ten opzichte van het nationaal-socialisme bij het nationaal-socialistische deel van Nederland en bij de latere Duitse bezetter in een kwade reuk komen te staan. In 1940 werd Pos zoals zovele anderen geïnterneerd, in zijn geval als 'Indisch' gijzelaar. Aanvankelijk zat hij voor een jaar in Buchenwald (maar niet onder het normale harde regiem), later tot zijn vrijlating in 1943 in Nederland (Brabant, o.a. nabij St. Michielsgestel).[34] In februari 1942 werd Pos aan de Universiteit van Amsterdam ontslagen. Met raadpleging van Pos werd een opvolger gezocht: de bedoeling was een tijdelijke vervanger voor zolang de oorlog duurde of de vervanging steeds ophouden. Ondertussen nam o.a. de hoogleraar experimentele

elkaar tegenkwamen: het Congrès Descartes te Parijs in 1937 en de Entretiens d'Amersfoort in 1938 (Tarski kwam in Amersfoort ook bij de ouders van Beth op huisbezoek; Beth was overigens geen officieel deelnemer aan de Entretiens). Beth was lid van het IIP en was in later tijd lid van het bibliografische comité.

[33]Helaas voor Hendrik Josephus Pos (1898 –1955) zaten in de directie en het bestuur van de FISPde later nog te bespreken Ferdinand Gonseth (1890 –1975), Dockx en Raymond Bayer (1898 – 1959). Dat zou hem nog komen te bezuren. In 1953 werd Pos als voorzitter opgevolgd door Barzin. De later nog te bespreken SILPS was medeoprichtster van de FISP (Beth was secretaris van de SILPS, o.a. Gonseth oprichter).

[34](Derckx 1994), pp. 113–121. Voor de geschiedenis van de Universiteit van Amsterdam, zie ook Knegtmans (1998).

natuurkunde J. Clay voor het filosofie-onderwijs waar.

Clay, maar ook anderen uit de natuurfilosofische faculteit wensten zo langzamerhand een natuurwetenschappelijk onderlegde filosoof benoemd te zien. Clay dacht anders over filosofie dan Pos en bracht dit tijdens een bijeenkomst over de vacature-vervulling van de leeropdracht van Pos tegenover Pos onder woorden.[35] Pos vatte dit op als een affront m.b.t. zijn wijze van filosoferen en dacht dat dit ook de mening van de door Clay voorgedragen Beth was. Pos meende wel: [36] "dat Beth reeds lang een plaats verdiende in de faculteit der natuurfilosofie, maar dat zijn optreden in onze litteraire faculteit gezien de richting waarin aldaar de wijsbegeerte was beoefend misplaats zou zijn."

Clay's voorzet in 1942 werd door een weigering van Beth opgegeven: [37] "Mijn eventuele bezwaar tegen het aannemen van een eventuele aanstelling was hierin gelegen, dat deze niet de instemming van den betrokken oud-hoogleraar [Pos] zou hebben." En: [38]

"dat ik het beste doe, mij in het geheel niet beschikbaar te stellen, ook niet voor het vervullen van een gedeelte van de leeropdracht van Professor Pos of voor het doceeren van vakken, die tot nu toe van het programma der Universiteit geen deel uitmaakten. [...] dat hierin geen erkenning van onbevoegdheid mag worden gezien, ook niet ten aanzien van de philologisch-historische vakken. Zonder twijfel heeft een klassieke philoloog op zuiver taalkundig terrein op mij een zekere voorsprong. Evenwel biedt mijn kennis op het gebied van de exacte wetenschappen, zoals ik reeds in de practijk heb kunnen vaststellen, bij de interpretatie van de teksten voordelen, die daartegen ruimschoots opwegen. Dit is des te meer van belang, omdat op zuiver philologisch en historisch gebied reeds veel onderzocht is en vele hulpmiddelen aanwezig zijn, terwijl de interpretatie veel minder ver is gevorderd."

Wel werd er daarna iets bij Wis- en Natuurkunde bekokstoofd: [39] "met grote voldoening vernam ik [Pos] een half jaar later [dus medio 1942], dat de faculteit

---

[35] Brief H.J. Pos – Beth, 27 augustus 1944, (Haarlem), waarin Pos als volgt de woorden van Clay weergaf: "Dat de historische behandeling der wijsbegeerte van ondergeschikt belang, wijl enkel reproductief is."

[36] Brief H.J. Pos – Beth, 27 augustus 1944, (Haarlem).

[37] Brief Beth – J. Clay, 24 juni 1942, (Amersfoort). Beth meende overigens (in de brief Beth – H.J. Pos, 29 augustus 1944) dat "enkele leden der litteraire faculteit, nadat Clay mijn naam had genoemd, jou in je afzondering hadden bezocht, en dat jij hun toen aan tegencandidaten had geholpen en ook argumenten tegen mijn candidatuur had aangevoerd. Dit laatste nu, waarvan je thans ook zelf melding [in de brief H.J. Pos – Beth 27 augustus 1944] hebt gemaakt, heeft mij destijds zeer onaangenaam getroffen. Immers, ik kon mij voor de door jouw ontslag vacante plaats niet beschikbaar stellen. Daardoor kon ik echter ook niet opkomen tegen argumenten, waarmee men mijn candidatuur bestreed, en die t.z.t. allicht door een gegadigde voor een andere vacature, die ik wel zou ambiëren, tegen mij zou worden uitgespeeld."

[38] Brief Beth – J. Clay, 13 juni 1942, (Amersfoort). Beth was hierin overigens Clay wel dankbaar: "Ik apprecieer deze [bemoeiingen van Clay] niet alleen om de waardering voor mijn werk, die er uit blijkt en die mij veel goed heeft gedaan, maar ook wegens de bedoeling, aan onze Universiteiten burgerrecht te doen verleenen aan een wijze van philosopheeren, die afwijkt van diegene, die daar tot dusver bij uitsluiting aan het woord is geweest."

Voor de opvattingen van Clay, zie o.a. Beth (1955/1956*a*).

[39] Brief H.J. Pos – Beth, 27 augustus 1944, (Haarlem). Beth zag indertijd in dit plan nog steeds een onderdeel van de taakvervulling van de vacature Pos.

van wis- en natuurkunde over jou [Beth] en Dijksterhuis zich beraadde."

Dijksterhuis, i.t.t. Beth wel van een vaste baan voorzien, stond al te wachten en verkreeg in dit 'tweede stadium' de mogelijkheid om de 'geschiedenis van het wis- en natuurkundig denken' te gaan onderwijzen. De verandering van de opdracht en de verstrekking van de leeropdracht waren te danken aan L.E.J. Brouwer en A. Heyting.[40] Dijksterhuis nam de post aan na voor een gesprek met de 'Beauftragte van den Rijkscommissaris voor de stad Amsterdam' te zijn ontboden; het gesprek werd afgehandeld door Regierungsrat Rombach.[41] Op 14 april 1944 werd Dijksterhuis door B & W van Amsterdam een permanente leeropdracht verleend, op 29 april 1944 gaf Dijksterhuis zijn openingscollege.[42] Na de oorlog zouden de kaarten met de zuiveringen opnieuw geschud worden.[43] Het duo Brouwer – Heyting had andere zaken aan het hoofd.[44] Dijksterhuis werd verwijderd[45] en zou niet meer aan de Universiteit van Amsterdam weerkeren.[46]

[40]Plan van Brouwer en Heyting volgens de brief E.J. Dijksterhuis – H.J.E. Beth, 13 januari 1946, (Oisterwijk); op het moment zelf (1944) had Dijksterhuis (brief E.J. Dijksterhuis – Beth, 2 april 1944, (Oisterwijk)) de indruk dat Pos niet tegen was (en dit wordt ook in het voorgaande citaat uit de brief Pos – Beth van 27 augustus 1944 gesuggereerd, zij het dat dit wel betrekking had op de situatie medio 1942 en niet op die van 1944): "Ik zou het natuurlijk prettiger hebben gevonden, wanneer zij [de op 14 april 1944 aan Dijksterhuis verleende leeropdracht (zie hiertoe de brief Dijksterhuis –Wethouder v. Onderwijs van Amsterdam, 17 maart 1947)] in normale tijden was verstrekt, maar de overweging, dat mijn aanwijzing de volkomen instemming van Pos had en zelfs ten deele op zijn initiatief tot stand is gekomen, heeft mij er toe gebracht over de bezwaren heen te stappen." Later (1944) is Pos toch teruggekomen op zijn aanvankelijk ingenomen (1942) houding vanwege de verandering van omstandigheden tijdens de Duitse bezetting (zie Derckx (1994), pp. 131–132). Voor de gedragingen van Dijksterhuis, zie ook van Berkel (1996).

[41]Brieven E.J. Dijksterhuis – E.W. Beth, 14 augustus 1943, 19 augustus 1943, (Oisterwijk): "Deze vroeg mij, of ik wilde beloven, actief en positief te zullen medewerken aan de verwezelijking van de nieuwe ordening van Europa. Ik antwoordde, dat ik dat onmogelijk kon beloven daar ik aan die woorden geen zin kon verbinden."

[42]Brief (copie) E.J. Dijksterhuis – Amsterdamse Wethouder van Onderwijs, 17 maart 1947, (Oisterwijk).

[43]Zuiveringen: E.J. Dijksterhuis – (?) Beth 13 januari 1946, (Oisterwijk), (de geadresseerde zal wel H.J. Beth, en niet E.W. Beth geweest zijn vanwege een ter sprake komend pensioen, waar E.W. nog niet aan toe was). En de brieven Dijksterhuis – E.W. Beth, 24 oktober 1946, 15 januari 1947. E.W. Beth was het overigens niet eens met de soms vrij willekeurige en chaotische manier waarop de zuiveringen werden uitgevoerd; bovendien vond hij dat men nogal eens te overtrokken allerlei personen op samenwerking met de bezetters beoordeelde; vergelijk hiertoe de brief Beth – H.J. Pos, 13 februari 1946, waarin Beth melding maakte van zijn opmerkingen dienaangaande tijdens zijn voordrachten over de significa, direct na de oorlog.

[44]Staking van beiden, schorsing van Brouwer, berisping van Heyting (24 augustus 1945, zie Heyting-archief, L6).

[45]Brief (afschrift) rector Woerdeman – E.J. Dijksterhuis, 10 februari 1946, (Amsterdam).

[46]Volgens Beth waren er voor een dergelijke post binnen de Fac. Wis- en Naturkunde twee richtingen: aanvankelijk wenste men naast een literair filosoof (Pos) een exact filosoof; dit werd naar voren geschoven toen men Beth in 1942 vroeg Pos te vervangen. Door de oorlogsomstandigheden had een groep die geschiedenis van het wiskundig denken bevoorkeurde, daarna en hierdoor een kans gekregen (faculteiten waren uitgedund, het universitaire apparaat functioneerde niet meer normaal), en daartoe Dijksterhuis naar voren geschoven. Na de oorlog had de andere groep weer de overhand, en dit des te meer daar de geschiedenis-groep zichzelf gecommitteerd had. Zie hiertoe: brief E.W. Beth – E.J. Dijksterhuis, 5 maart 1946, (Amsterdam).

De motivatie [tot de verwijdering van Dijksterhuis] ging overigens niet meer in op de oorlog [en de houding van Dijksterhuis], maar wel dat de onderwijsbehoefte, waarin de leeropdracht [aan Dijksterhuis tijdens de oorlog verstrekt] voorzag, niet meer in de omvang van vroeger bestond.[47]

Wat Pos op het eind van de oorlog voor Beth voelde, voelde hij voor Dijksterhuis niet: [48] "Dat jij nu niet benoemd bent en Dijksterhuis zich heeft laten bepraten, is voor jou een grote voorsprong. Van mijn steun bij vacatures na de oorlog kun je verzekerd zijn." Pos misgunde in later tijd evenwel niet Dijksterhuis alsnog een universitaire aanstelling: [49] "Zelf heb ik zijn *houding* in de oorlog scherp veroordeeld, maar hij was slap door werkelijkheidsvreemdheid en door de fatale invloed van zijn vrouw, wier familie in Groningen stevig aan de Duitsers verdiende. Misdaden heeft hij niet begaan en zijn houding is te laken, maar niet voor altijd te brandmerken."

Gedurende de laatste periode van de Tweede Wereldoorlog verbleef Beth bij zijn ouders. Vooral het gebrek aan voedsel en de verzwakking van zijn constitutie noodzaakten hem deze stap te nemen en zijn betrekking in Delft voortijdig af te breken. In Amersfoort nam Beth aan de school, waarover zijn vader de directie voerde, lessen waar voor leraren die door de oorlogsomstandigheden niet meer aanwezig konden zijn. Al te veel ellende heeft de familie Beth er niet aan overgehouden. Alleen had de al oudere H.J.E. Beth voor de voedselproductie op een landje meer werk te verzetten, daar E.W. Beth op het eind van de oorlog om gedwongen tewerkstelling te ontlopen zich thuis schuil moest houden.[50] Deze tijd maakte Beth nuttig door het voorbereiden van publicaties, waaronder het nooit uitgegeven boek *Natuur en geest*. De meeste last gaf nog het zich inschieten en de daarmee samenhangende luchtbombardementen door de geallieerden in verband met de komende aanval vanuit het oosten op de toen Duitse Grebbelinie.[51] Gelukkig kregen de Beths geen voltreffer en werd de dreigende aanval doorkruist door de Duitse overgave.

[47]Naar de brief Dijksterhuis – Beth, 10 juni 1947 i.v.m. de uiteindelijke intrekking van de leeropdracht door B & W van Amsterdam per 1 mei 1947. Volgens Beth in de brief van 5 maart 1946 aan Dijksterhuis — vanwege de door Dijksterhuis indertijd aangevochten vroegere en eendere omschrijving — mocht deze zich hiermee gelukkig prijzen, daar in de omschrijving de oorlogsjaren buiten beschouwing bleven.

[48]Brief H.J. Pos – E.W. Beth, 27 augustus 1944, (Haarlem).

[49]Brief H.J. Pos – Beth, 11 november 1950, (Haarlem). Cursief: onderstreping door Pos. De 'werkelijkheidsvreemdheid' van Dijksterhuis kwam indirect ter sprake in de ironisch bedoelde briefkaart E.W. Beth – E.J. Dijksterhuis, 23 augustus 1943, (Amersfoort). Door Beth is deze briefkaart niet verzonden, wellicht was dit soort van humor in Beths ogen uiteindelijk toch te ongepast. De briefkaart was overigens een antwoord op de al vermelde brieven Dijksterhuis – Beth, 14 augustus 1943, 19 augustus 1943, (Oisterwijk)

[50]Brief E.W. Beth - E.J. Dijksterhuis, 12 juli 1945, (Amersfoort).

[51]Voor landbewerking en inschieten, zie de brief E.W. Beth – E.J.E. Huffer, 14 juni 1945, (Amersfoort).

## 2.2 Universitaire carrière

### 2.2.1 Benoeming

In 1946 zou het tij voor Beth keren. Voor de weer opnieuw aangestelde Pos werd het steeds moeilijker om alleen alle filosofische disciplines te blijven geven: de toeloop tot filosofie als keuze- of tweede-hoofdvak nam toe, de diversificatie van het studentenaanbod eveneens.[52] Pos had een verbreding van de filosofie al met het College van Herstel en de Amsterdamse wethouder van onderwijs besproken.[53] De minister van onderwijs wenste de mogelijkheden voor de studie in de filosofie te verruimen, en dit zeker voor Amsterdam: [54]

"Onlangs hebben de minister en onze wethouder van onderwijs in een bespreking, die ik bijwoonde, de kwestie der centralisering van het filosofische onderwijs [normale ordinariaten in andere steden, meer ordinariaten in Amsterdam] besproken. De minister gaat accoord met het Amsterdamse plan, de wethouder ondersteunt het, zodat we nu in de sectie het kunnen gaan bespreken. [. . . ] Ik zou het juist achten, dat in de opdracht de *logica* en haar geschiedenis werd vooropgesteld, eventueel aangevuld met: natuurfilosofie, of: hoofdstukken uit de natuurfilosofie. — De plannen vinden steun in de gedachte van het studium generale, die de plaats der filosofie meer naar voren brengt. Ik heb voorgesteld, dat men jou vraagt, een college over logica of significa te geven. [. . . ] bij wijze van proefneming." [55]

Maar niet alleen Amsterdam, ook Utrecht zocht een ordinarius. Al in 1944 had men daar belangstelling voor Beth. Volgens de sankritist J. Gonda wilde men toen in de Utrechtse Letterenfaculteit Beth naar Utrecht halen.[56] Maar ook na de oorlog was Beth een kandidaat, zeker in de ogen van Gonda.[57]

Het naoorlogse ordinariaat in Amsterdam had in zoverre Beths voorkeur doordat op de Rijksuniversiteiten men te maken had met ongedeelde wijsgerige leerstoelen.[58] In Utrecht wilde men alsnog een leerstoel splitsen en verzocht men

[52]Brieven H.J. Pos – Beth 13 juli 1945, 17 juli 1945. Vooral de vraag naar methodologie kon Pos niet meer beantwoorden. Een voorbeeld van Pos' onbegrip in deze vindt men in de brief H.J. Pos – Beth, 13 juli 1945: "Voor de formaliseringen, die je opstelt, heb ik achting, al kan ik zelf me er moeilijk in bewegen en heb ik nooit aandrang om aan philosophische gedachten die vorm te geven. Ik vraag me af, of tenslotte de eigenlijke discussie en interpretatie van zulke gedachten niet buiten die vorm om geschiedt."

[53]Brief Pos – Beth 16 oktober 1945. College van Herstel: de voorlopige curatoren.

[54]Brief H.J. Pos – Beth, 19 januari 1946. De minister moet G. van der Leeuw geweest zijn.

[55]Voordrachten Beth (en H. Oldewelt): Extract Besluit B. & W. van Amsterdam, dd. 21 februari 1946.

[56]Brief J. Gonda – Beth, 9 maart 1944, (Utrecht). Jan Gonda, 1905 –1991, was de promotor van Beths zuster Ali Beth. Voor de nieuwere wijsbegeerte was men in Utrecht opgescheept met de al eerder vermelde T. Goedewaagen. Deze had de leerstoel van Beths, tijdens de oorlog overleden promotor Franken geusurpeerd. Ook is Goedewaagen nog enige tijd werkzaam geweest als secretaris-generaal van het Departement van Volksvoorlichting en Kunsten. Na de oorlog kon hij, veroordeeld tot de filosofenkluis, zijn zonden gaan overdenken.

[57]Beth als enig kandidaat: brief H. Sparnaay – H.J.E. Beth, 29 januari 1946; anthropologie, existentialisme: brief J. Gonda – Beth, 17 februari 1946. Beide universiteiten in beraad: brief J. Gonda – Beth 17 mei 1946.

[58]Met ongedeeld wordt een conglomeraat van vakjes verbonden aan één leerstoel bedoeld. Dit gebruik stamde uit de negentiende eeuw, toen veelal één persoon alle wijsgerige vakken, waaronder logica, te onderwijzen had.

Beth zich beschikbaar te stellen voor een gewoon hoogleraarschap in de nieuwere wijsbegeerte. Dit had Beths voorkeur boven het Amsterdamse aanbod. Maar ondertussen was het Beth ter ore gekomen dat een benoeming in Utrecht niet zo eenvoudig was als het er uit zag.[59] Op 14 mei 1946 leerde Beth tot zijn verrassing uit het dagblad *Het Parool* dat hij door Burgemeester en Wethouders van Amsterdam op 22 mei 1946 aan de Gemeenteraad van Amsterdam zou worden voorgedragen.[60] Het Gemeentehuis van Amsterdam liet hem bovendien weten dat de benoemingen aan de rijksuniversiteiten vertraagd zouden worden.[61] Tenslotte aanvaardde Beth een extra-ordinariaat te Amsterdam. Op 22 mei 1946 werd hij door de Gemeenteraad aanvaard tot 'buitengewoon hoogleraar in de logica en haar geschiedenis en de filosofie der exacte vakken' en zitting hebbend in de Faculteiten van Letteren en Wijsbegeerte, en van Wis- en Natuurkunde.[62] Dit buitengewoon hoogleraarsschap werd in 1949 (op 2 november 1949 door de Gemeenteraad behandeld) omgezet in een gewoon hoogleraarsschap — en Beth had voortaan ook zitting in de Faculteit der Politieke en Sociale Wetenschappen.[63]

In 1946 beëindigde Beth zijn verslag over zijn benoemingsperikelen aan de tweede na-oorlogse minister voor onderwijs (uit het Kabinet Beel), J.J. Gielen: [64]

"Mijn voorkeur voor een benoeming tot hoogleraar in de nieuwere wijsbegeerte aan de Rijksuniversiteit te Utrecht blijft niettemin bestaan. Deze leeropdracht, in vergelijking met den vroeger bestaande toestand belangrijk verminderd door het wegvallen van de geschiedenis der klassieke en middeleeuwsche wijsbegeerte, maar anderzijds ruimer dan die mij te Amsterdam is gegeven, zou mij naar mijn mening voor mijn verdere wijsgerige ontwikkeling de beste gelegenheid bieden."

De door Beth gememoreerde wijsgerige bezigheden kon hij later tezamen met H.M.J. Oldewelt toch in Amsterdam in practijk brengen, toen zij vanwege de opname in een psychiatrische inrichting van de steeds meer verward rakende H.J. Pos genoodzaakt waren voor deze te gaan waarnemen.[65]

---

[59] Brief Beth – J. Gonda, 6 mei 1946, brief J. Gonda – Beth, 7 mei 1946.

[60] Brief Beth – J. Gonda, 15 mei 1946 (Amsterdam).

[61] De zittende Staten-Generaal kon de begroting niet meer behandelen.

[62] Extract uit het Boek der besluiten van B & W van 6 december 1946. Deze benoeming kwam tot opluchting van zijn directe familie, die een verdere levensloop voor hem als leraar niet zo zag zitten en zich afvroeg hoe het met de jongen verder moest (mondelinge mededelingen door Beths zusters aan de schrijver dezes).

[63] Extract uit het Boek der besluiten van B & W van Amsterdam van 1 april 1949.

[64] Brief Beth – J.J. Gielen, 11 juli 1946. Overigens verdacht Beth de vorige minister van onderwijs (uit het Kabinet W. Schermerhorn), G. van der Leeuw — een Godsman, maar ook mede-initiatiefnemer tot de oprichting van de Stichting Mathematisch Centrum — ervan zijn benoeming in Utrecht niet te hebben bespoedigd, omdat deze, of zijn ambtelijk apparaat, hem te eenzijdig gericht zou hebben gevonden (vergelijk brief J. Gonda – H.J.E. Beth, 6 juli 1946; brief E.J. Dijksterhuis– H.J.E. Beth, 9 maart 1946, (Oisterwijk), brief E.W. Beth – E.J. Dijksterhuis, 5 maart 1946); J.J. Gielen werd in 1946 de opvolger van G. van der Leeuw (1945-1946).

[65] Pos opgenomen: brieven Beth – H.M.J. Oldewelt, 12 en 19 maart 1952 (Berkeley); H.M.J. Oldewelt – Beth, 16 februari en 4 april 1952, (Amsterdam). Overigens had Beth al eerder, in de veertiger jaren, colleges over nieuwe en nieuwere wijsbegeerte gegeven: Leib-

In later tijd probeerde F.J.Th. Rutten, de minister van onderwijs vanaf 7 augustus 1948 en opvolger van J.J. Gielen, voor een extra-ordinariaat in de wijsbegeerte voor de exacte wetenschappen Beth naar Utrecht te halen.[66] Beth weigerde, zonder dat was zijn werkdruk al groot genoeg.[67] Ten tweede male na een afwijzing door Beth stond Dijksterhuis kandidaat. Beth zelf zag liever de toen nog niet zo bekende A. Robinson benoemd.[68]

### 2.2.2 Geleerde genootschappen

#### Nut van organisaties

Zijn benoeming bracht Beth gedurende de eerste jaren tot een grote toename aan activiteiten. Het betrof een breed scala. In de eerste plaats zijn onderwijskundige werkzaamheden. Maar ook zijn onderzoekswerk vergrootte, verbreedde en verdiepte zich. Om velerlei redenen meende Beth dat, om onderzoek internationaal te bevorderen, men in die tijd internationaal opererende genootschappen van node had. Niet alleen werd hij daar lid van, maar hielp ze ook op te zetten: [69]

"Such terms as 'logic', 'methodology', 'philosophy of science', 'research on foundations', philosophical analysis', axiomatics, are currently understood as referring to widely divergent intellectual activities which have nevertheless in common that they orginate from, at least are strongly influenced by, the interaction of certain philosophical concerns with scientific conceptions pertaining to the domains of mathematics, physics, biology, and so on. In many cases it has proved difficult to find for such activities an appropriate place in academic life, the more so as from time to time they happen to associate with tendencies which show no clear connections either with the sciences or with philosophy. The divergent tendencies [...] have for many years prevented the development of an organisation comprising all specialists working in the domain as well as the creation of specialised institutions. Only recently has the need become manifest for associations, periodicals, professorships and so on, devoted primarily or exclusively to the study of logic, methodology, and philosophy of science, and has an international organisation been established which, in principle, can be regarded as representing all scientific workers in the field."

Wetenschapsfilosofie en de mathematische logica hadden in die tijden weinig

niz, Locke, Spinoza, maar ook 'hedendaagse stromingen' Over één ding was Beth blij, het langzaam aan verdwijnen van technische en op natuurkunde gerichte colleges uit zijn curriculum. Gottfried Wilhelm, ridder von Leibniz, 1646 – 1716; Benedictus Baruch de Spinoza, 1632 – 1677; John Locke, 1632 – 1704.

[66] Brief F.J.Th. Rutten (minister O.K. en W.) – Beth, 14 maart 1949.

[67] Brief Beth – Th.Rutten, 14 januari 1950.

[68] Brief Beth – H. Freudenthal, 14 december 1950; Hans Freudenthal, 1905 – 1990; Brief Beth – voorzitter Fac.Wisk. en Natuurw. Utrecht, 21 maart 1952, (Berkeley). Als andere keuzen had Beth Isaac Paul Bernays (1888 – 1977) (een voorkeur van H. Freudenthal) en Jean-Louis Destouches (*1909) op het oog. Dit waren voorstellen. Met Abraham Robinson (1918 – 1974) is het helaas niets geworden. Als Robinson de post gekregen had, dan was het landschap van de Nederlandse logica er anders komen uit te zien.

[69] Brief Beth – bestuur PS, 13 januari 1959; de oorspronkelijke Franse versie ontstond rond 1953. PS: de Philosophy of Science Division van de UIHPS.

mogelijkheden zich academisch te presenteren. Goede belangenorganisaties waren nodig om het prestige op te krikken. Daarmee verkreeg men per land meer mogelijkheden om de juiste mensen op universiteiten en onderzoeksinstellingen aan het werk te krijgen. Men is er evenwel niet met goede belangenorganisaties. Deze moesten indertijd ingebed worden in algemeen erkende organisaties van wetenschappelijk karakter. Als dat niet gebeurde dan had men nog steeds niet veel gewonnen. Zulke algemeen erkende organisaties bestonden op het gebied van wetenschap zoals natuurkunde, wiskunde, sterrenkunde. Beth wenste geen bindingen met dergelijke organisaties op het gebied van humaniora. De door Beth voorgestane organisaties dienden lid te zijn van de door de politiek en de onderwijs- en onderzoeksmandarijnen erkende organisaties zoals Unesco. Maar Beth wenste zeker geen *inhoudelijke* bemoeienis van zulke mandarijnen met een dergelijke organisatie. Met dit programma ging Beth aan de slag en daar zou hij het de eerstkomende tien jaren zeer druk mee hebben. Want niet alleen Beth en zijn logici waren op deze gedachten gekomen. Ook anderen zagen in bovenstaand schema een goede methode om geld in de wacht te slepen. Dit betekende oorlog en Beth zou een legeraanvoerder zijn. Heyting verwoordde de moeilijkheden als volgt: [70]

In Europe the struggle for life is very hard for Philosophy of Science (P.S.). It is often not considered as a serious subject and the number of University chairs in P.S. is very small. In most Universities it is not teached at all; at most a professor of general philosophy gives a course in P.S. from his particular point of view, or a mathematician teaches from time to time a one-hour course in symbolic logic along with a full in 'ordinary' mathematics."

Maar niet iedereen vond op de lange duur bemoeienissen met organisaties een vreugd, zelfs Beth had er op een gegeven moment genoeg van. I.M. Bochenski verwoordde dit in een eerder stadium in een brief aan W.V.O. Quine: [71] "I have been deceived. It is my opinion that international organizations do not help research. Moreover, if I have been personally driven out of the field of research for some years, this is due for a part at last, to the necessity of working for such organizations." [72]

Een ander belangrijk punt van organisaties is hun directe belang van het organiseren van congressen of het uitgeven van periodieken. Gehouden con-

[70]Brief (afschrift) A. Heyting – W.V.O. Quine (president ASL), 17 juni 1953, (Amsterdam).

[71]Brief J.I.M. Bochenski – W.V.O. Quine (president ASL), 15 mei 1953, (Fribourg, Zwitserland). Joseph Innocentius Maria Bochenski, *1902.

[72]Toch zag Bochenski liever professionele logici, met verlies aan tijd, aan het werk dan minder competente lieden, die onder het mom van logica eigenaardige ideeën aan de man brengen, geld opstrijken of dit verdelen. Echte wetenschappers hebben bovendien niet de tijd om alle energie in onderhandelingen te stoppen, zoals bedoeld wordt in de brief Bochenski – J.B. Rosser (president ASL), 26 juli 1950, (Fribourg, Suisse): "But as it offen happens while scholars grouped in the ASL are simple minded, people around Gonseth are shrewed and good diplomats, the word 'good' having here a technical not a moral meaning."

Dit zou niet altijd opgaan. Het uiteindelijk schaakmat zetten van dergelijke mensen was ten dele aan de inspanningen van Beth te danken. Hoe dit precies in zijn werk ging zal de lezer onthouden worden, het volledige proefschrift zou er anders aan moeten worden gewijd.

gressen en uitgegeven periodieken zijn eveneens argumenten bij het behalen van universitair voordeel. Daarnaast geven congressen de gelegenheid de vakbroeders te spreken en al te grote of gevaarlijke onzin in een vroeg stadium te onderkennen: [73]

"De hedendaagse totalitaire politiek kan voor een aanmerkelijk deel worden teruggebracht tot de invloed van G.F. Hegel. De zeer grote, nog steeds voortdurende invloed van Hegel's ideën is echter m.i. niet uit haar innerlijke gehalte te verklaren Van meer belang is het feit, dat Hegel's philosophie gedurende enige decennia een monopoliepositie heeft ingenomen. Van Pruissen uit is ze daarna haar zegetocht begonnen, eerst door Duitsland, vervolgens door Europa en zelfs daarbuiten. Was Hegel's philosophie in een vroeg stadium van haar ontwikkeling blootgesteld geweest aan een discussie op internationaal plan, dan zou zij naar mijn mening zelfs in Pruissen nimmer een groot prestige hebben kunnen verwerven en zou ons wellicht veel ellende bespaard zijn gebleven."

Afgezien of Beth hiermee gelijk had, geeft dit toch een algemeen gevoel weer van zo vlak na de oorlog: congressen als vrijplaats en forum. De behoefte was groot gezien de toename van wetenschappelijke genootschappen.

### Oprichting van de SILPS

Beth nam van het begin af aan deel aan het oprichten van internationale genootschappen, en vervulde binnen die genootschappen bestuursfuncties. Binnen die genootschappen streefde hij naar een zo goed mogelijke positie voor de mathematische logica. In dat verband stond de relatie met de ASL bij hem altijd voorop en werd het nut van een organisatie daaraan afgemeten. De grootste moeilijkheden werden hierbij veroorzaakt door Franstaligen. Door hun ingekankerde hekel aan logica en door hun weerstand jegens alles wat met niet-Frans samenhing verschaften hun manipulaties Beth voortdurende zorgen.[74]

De eerste wetenschapsfilosofische vereniging van na de oorlog was de Société Internationale de Logique et de Philosophie des Sciences [SILPS]. Al op 22 september 1946 had Beth een brief van Bochenski gekregen met discussies hierover.[75] Op 21 december 1946 volgde de ondertekening van de 'Protocolle de fondation' door K. Dürr, F. Gonseth, K. Popper en P. Bernays. Beth en Bochenski werden hierin als medestanders genoemd. Op verenigingsgebied zou F. Gonseth verworden tot Beths grootste tegenstander. Het protocol was overigens geen lang leven beschoren: [76] "J'ai été chez dr. Dürr et lui ai posé la

[73](Beth 1948*a*). Georg Wilhelm Friedrich Hegel, 1770 – 1831.

[74]Beth over de Fransen: zie E.W. Beth, dd. 3 januari 1959 (?) [moet zijn 3 januari 1960], Pre-advies op een subsidie-aanvrage van Prof. C.A. van Peursen voor de vertaling en publicatie van zijn werk 'Filosofische Oriëntatie', als gevraagd onder Afd. Letterkunde KNAW], Nr. 1123, dd. 29 december 1959. Zie verder ook de brieven Beth – A. Church, 26 augustus 1950, Beth – A. Church, 29 juli 1950 [congres van oktober 1949 in de brief: bedoeld is Congrès International de Philosophie des Sciences 17–22 oktober 1949 te Parijs].

[75]Brief I.M. Bochenski – Beth, 22 september 1946, 11 november 1946. Discussies over dit onderwerp werden gevoerd tussen P. Bernays, Karl Dürr (*1888) en E.J. Walter. Ook F. Gonseth en Jean Piaget (1896 – 1980) werden hierin gekend.

[76]Brief I.M. Bochenski – Beth, 21 april 1947, (Fribourg, Zwitserland). Karl Rainmund

question de la Société logique. Voici ce que j'apprend: M. Popper (celui de la 'Logik der Forschung') en allont à Londre a perdu le protocol."

Aanvankelijk was deze vereniging er één van persoonlijke lidmaatschappen. Vanwege de moeilijkheden, net na de oorlog, met het toenmalige geld-regime leek het Beth beter om per land subverenigingen op te richten, deze te verzelfstandigen en het SILPS als overkoepelend orgaan te gebruiken. In Zwitserland zag men wel wat in dit idee, en dat was in Nederland de grond om, met als oprichters Beth, A. Heyting en A.G.M. van Melsen, op 15 november 1947 de Nederlandse Vereniging voor Logica in het leven te roepen.[77] Beth werd tot voorzitter verkozen. Pas op 17 oktober 1953 werd hij door A. Heyting afgelost. Men begon in 1947 met 59 leden en op het einde van Beths voorzitterschap was dit aangegroeid tot 123 mensen.

Het SILPS vertoonde tot 1949 een ondemocratisch karakter. F. Gonseth had zich meester gemaakt van het bestuur en zette desnoods met misleiding, gekonkel en leugens zijn zin door. Beth hing er als secretaris een beetje bij en moest dit tandenknarsend ondergaan.[78]

Een andere vereniging, waarvan Beth lid was geworden, was de Académie Internationale de Philosophie des Sciences [AIPS]. Deze was één van de drie klassen van het geheimzinnige Institut International des Sciences Théoriques [IIST], met als standplaats Brussel. Lid werd men door coöptatie. Tal van groten der wetenschap waren lid van dit genootschap: L.E.J. Brouwer, A. Tarski, L.-V.P.R. prins de Broglie, N. Bohr, maar ook mensen als Beth, H.B. Curry en A. Heyting. Doel was het organiseren van wetenschappelijke colloquia en het bevorderen van contacten. Directeur-oprichter was de pater Dominicaan S. Dockx. Deze zou op organisatorisch terrein een aantal malen Beth in de wielen rijden. Het voorlopige onschadelijk maken van Dockx geschiedde echter door de Belgische justitie. Men verdacht het IIST als te zijn opgezet met het oogmerk om verdachte liquide middelen (oorlogswinsten) buiten het bereik van de Belgische staat te houden. De stichtingsdatum was wellicht hierom vervalst om daarmede vóór een bepaalde datum — van waar af beslag werd gelegd — te kunnen komen.[79]

Dockx zat eerst voor enige tijd in het gevang, daarna was er een door sommigen gewantrouwde vrijspraak, en vervolgens verdween hij voor langere tijd naar Italië, het vertrouwde toevluchtsoord voor stoute rooms-katholieke geestelijken.[80] Toen de kust weer veilig was en de zaak vergeten dook Dockx

Popper, 1902 – 1994.

[77] Andreas Gerardus Maria van Melsen, 1912 – 1994.

[78] De dikte van het dossier dienaangaande beloopt niet die van enkele brieven maar van een ordner. De positie van de SILPS was na 1949 nogal tweeslachtig.

[79] Zie hiertoe de artikelen in *La Libre Belgique* van 23, 24, 25, 27 en 28 februari 1950 en de artikelen in *De Standaard* van 23 ('Nieuw onderzoek inzake financiële fraude') en 24 ('De financiële fraude in het Gentse') februari 1950. Dit alles was des te pijnlijker daar bij de openstelling van het secretariaat op 22 januari 1949 om 16.00 uur ook koningin Elisabeth aanwezig was, naast leden van het corps diplomatique, de minister van publieke werken, de rector-mognificus van Leuven en als klap op de vuurpijl, de minister van financiën. Ook Beth liet zich op het feest zien.

[80] Dockx vrij: brief Beth – K. Dürr, 25 juli 1950. Vrijspraak Dockx: brief L.E.J. Brouwer –

weer op om het AIPS nieuw leven in te blazen. Toch was hij niet meer bij iedereen welkom. Kanunnik R. Feys wenste een medeVader niet het vuur aan de schenen te leggen, wat hij zeker gedaan had bij het continueren van zijn lidmaatschap. Als volgt deelde hij dit Dockx mee: [81] "Maintenant que l'Académie renaît à ses activités, tel que le Nautilus émergeant de la banquise, je désire ne plus faire partie de son équipage et je vous demande enregistrer ma démission." Ook Tarski was behept met een goed geheugen. Hij wenste het AIPS eens en voor altijd uit te schakelen. Maar dit zijn voorvallen uit later tijd.

### UIPS, UIHS: onderhandelingen

In 1949 schreef Dockx aan Beth dat hij samen met Gonseth een nieuwe organisatie had opgericht voor wetenschapsfilosofie en logica, de Union Internationale de Philosophie des Sciences [UIPS].[82] Van de UIPS konden verenigingen lid worden, die de onderschreven doelstelingen dienden.[83]

Men (en dat waren in de eerste plaats Dockx en Gonseth, achter de rug van iedereen om) was van plan om voor de UIPS een lidmaatschap van de International Council of Scientific Unions [ICSU] aan te vragen. De ICSU had een verbinding met de United Nations Educational Scientific and Cultural Organisation [UNESCO]. Volgens Beth werden daarbij de belangen van de mathematische logica verwaarloosd en kreeg de ASL te weinig stemmen. Bovendien vond hij dat er teveel gemanipuleerd werd, de verslagen van de vergaderingen niet juist waren, met de reglementen gerommeld werd en de stemming derhalve niet democratisch verliep. Beths tegenstrevers hierin waren Gonseth, Dockx en R. Bayer. Zij hadden overigens wel voor een toetreden tot de ICSU de ASL nodig, daar de ASL de enige organisatie was met wetenschappelijk prestige. Als president van de ASL merkte W.V.O. Quine in 1953 over dit alles op: [84]

---

Beth, 2 november 1954, (Blaricum); en brief R. Feys – Beth, 30 maart 1954, (Leuven). Robert Feys, 1889 – 1961.

[81]Brief R. Feys – I. Dockx, 29 januari 1959. De bewoordingen van Feys werden aan de algemene vergadering van het AIPS meegedeeld, alwaar ze grote verontwaardiging t.o.v. Feys wekten. Feys had succes!

[82]Tijdens zijn arrestatie was Dockx voorzitter van de UIPS. R. Bayer (brief R. Bayer – Beth, 13 maart 1950, (Parijs)) probeerde derhalve Beth er toe over te halen niets hiervan aan de ASL te berichten: "Agissez donc après de l'opinion Américaine en particulier, qui ne sera légitimement informée que de la façon correcte dont nous voudrons bien informer. Calmez-la, et dites lui présentement le moin possible de cette afaire."

Helaas verbleef de vice-president van de ASL, Stephen Cole (Steve) Kleene (1909 – 1994), in die tijd net op het Mathematisch Instituut te Amsterdam. Niet alleen kreeg hij van Beth het hele verhaal te horen, maar ook Bayers brief (met het verzoek alles voor hem te verzwijgen) te lezen. Zie hiertoe brief S.C. Kleene – J.B. Rosser (president ASL), 23 mei 1950, (Amsterdam).

[83]Bij de oprichting van de UIPS waren niet alleen de AIPS en de SILPS aanwezig, maar ook de International Signific Society in de persoon van L.E.J. Brouwer, de Philosophy of Science Association en het Institute for the Unity of Science (beide vertegenwoordigd door J.-L. Destouches), en een aantal landelijke logica-verenigingen — die merendeels SILPS-leden waren — waaronder die van België (vertegenwoordigd door R. Feys, die tevens waarnemer voor de ASL was) en Nederland (Beth en A.G.M. van Melsen).

[84]W.V.O. Quine, President's adress for a year [aan de ASL], dd. 4 september 1953, (Oxford, Engeland).

"The network of organized academia in Europe, the IUPS and ICSU and CIPSH and FISP and SILPS and their bewildering kin, are not without unscrupulous men greedy for power and influence.[85] This I know both by report and from chance observations of my own. Such men are, of course, rare, but they have the strenght of many; for science claims none of their energy, and conscience none of their resolve. [. . . ] our three votes in the councils of IUPS would be votes on the side of the serious scientists and men of good will." [86]

Church meende nog voordien: [87] "Nevertheless, I have myself always been interested in an organization of international scope rather than one confined to the United States and it stills my determination to see that the Association and the Journal go in this direction as far as feasible under the existing difficulties." Hierin stond Church niet alleen, bovendien begon men vanuit verschillende hoeken in Europa, juist vanwege het getreuzel van de kant van de ASL, al te praten over het oprichten van een eigen zuiver logisch gerichte vereniging om daarmee voor altijd van het gezeur van de diverse wetenschapsfilosofisch getinte organisaties af te zijn.[88]

De UNESCO wenste eigenlijk helemaal niet dergelijke kleine organisaties zoals de UIPS als lid onder de hoede te nemen. Liefst zou men daar zien dat de UIPS samenging met de Union Internationale d'Histoire des Sciences [UIHS] en als een Union Internationale d'Histoire et Philosophie des Sciences [UIHPS] een lidmaatschap zou aanvragen. Overigens was de UIHS al lid van de ICSU en had ook vanwege een deling der subsidies er helemaal geen trek in van een UIHPS deel te gaan uitmaken. De onderhandelingen tussen UIPS (Bayer) en UIHS (Sergescu) verliepen te Parijs onder grote geheimzinnigheid ten opzichte van de leden.[89] Bovendien waren de onderhandelingen tussen UIPS en ICSU van hetzelfde laken en pak. Achter de schermen werd er volgens Beth van alles bekokstoofd en was dit gericht tegen invloed van de logici op het beleid.[90] Gonseth wilde het lidmaatschap van de ICSU tegen een zo gering mogelijke prijs ten opzichte van de ASL bereiken. Beth, K. Dürr en Bochenski voerden de onderhandelingen voor de ASL en waren van plan dit geen doorgang te laten vinden. Bochenski vatte de situatie krachtig als volgt samen: [91] "Note please that there is some interest in getting into ICSU and that Gonseth is a *swine*,

[85]CIPSH: Conseil International de la Philosophie et des Sciences Humaines [ook wel ICHS, de International Council of Humanistic Sciences], de tegenhanger van de ICSU. FISP: Féderation Internationale des Sociétes de Philosophie.

[86]Quine was in 1953 wel voor toetreding van de ASL tot de UIPS. De genoemde drie 'votes' voor de ASL werden indertijd door Beth beheerd.

[87]Brief A. Church – Beth, 14 april 1950.

[88]Dit bracht volgens Beth (brief Beth – W.V.O. Quine, ? (verzonden?), 1953) ook het volgende gevaar met zich mee: "Outside France, studies of symbolic logic are rapidly spreading in Europe, and this development will not appreciably hampered if ASL does not join the Union [UIPS]. But the majority of European logicians would not join the ASL but prefer to join national groups connected with the Union [UIPS], to the detriment of the ASL."

[89]Petre Sergescu, 1893 – 1954.

[90]Brief S.C. Kleene (vice-pres. ASL) – J.B. Rosser (pres. ASL), 28 juni 1950, (Amsterdam).

[91]Brief Bochenski – Beth, 26 juli 1950, (Fribourg, Zw.). Cursief: onderstreping door Bochenski.

while Dürr seems to be a *complete ass*. He [Dürr] blundered considerably in both the conversations and in stating its results."

Gonseth probeerde inderdaad weer te kuipen, maar werd door Bochenski en von Muralt, de president van de ICSU, in een gezellig samenzijn van heren onder elkaar de voet dwarsgezet.[92] Dit deed Gonseth tegen Bochenski opmerken: [93] There is something fishy about the whole procedure on your side. I made the proposals to Kleene; I invited you to come a week ago; now I am prevented from entering the ICSU by you." En zo verliep het, zij het niet precies om die redenen.[94] Beth hield er evenwel een zware nachtmerrie aan over.[95]

### Mathematical Union

Een andere optie voor de logici was een lidmaatschap van de International Mathematical Union [IMU]. De IMU was wel lid van de ICSU. De relatie tussen logici en wiskundigen was blijkbaar binnen de officiële kanalen slecht te noemen. Van de kant van de logici voelden sommigen zich in de hoek gezet, veronachtzaamd en niet voor vol aangezien. Dit zou, vreesde men, meteen zijn invloed hebben op het verdelen van de subsidies en een grote bemoeizucht van wiskundigen. Zeker Beth, maar hij niet alleen, was deze mening toegedaan: [96]

"Une entente avec les mathématiciens aurait des effets ruineux: [. . . ] Toutes les activités de philosophie de sciences ont toujours été gênés par l'intervention réglementaire d'autres sciences. L'intégration dans l'Union Math. fournirait un prétexte pour la continuation de ce régime de dépendance, que notre Union devrait combattre avant tout. Exemple [. . . ]" [97]

En: [98]

"I suggest that the council [van de ASL] also discusses the issue of the Union's [UIPS] affiliation with the Mathematics Union. As you know, I do not think that this would be a wise decision. In most countries, mathematicians are hardly interested in symbolic logic or in the philosophy of science, so the influence of the logicians in the Mathematics

[92] Gonseth had overigens niet een dergelijke toegang tot von Muralt. Notulen gesprek Bochenski – von Muralt, zie Beth-archief

[93] Weergave telefoongesprek tussen Bochenski en Gonseth op 26 juli 1950, zoals in de brief (copie Beth-archief) I.M. Bochenski – J.B. Rosser, 27 juli 1950, (Fribourg, Zw.).

[94] Brief F.J.M. Stratton (secr. ICSU) – F. Gonseth, 25 augustus 1950, (Cambridge). Brief Beth – J.B. Rosser, 28 augustus 1950. Nogmaals, de ICSU (Stratton) wilde geen kleine UIPS er bij, maar een combinatie UIPS–UIHS.

[95] Brief Beth – Bochenski, 28 juli 1950: Beth droomde van Gonseth als directeur-generaal van UNESCO en bekleed met dictatoriale macht. Gelukkig maakte een om belet vragende postbeambte met een dépêche van Bochenski hier een einde aan.

[96] Brief Beth – J.L. Destouches, R. Feys, 8 mei 1953. Anderen, die hiervan geen voorstander waren, waren L.E.J. Brouwer (brief Brouwer – A. Châtelet, J.L. Destouches, 20 maart 1953, (Blaricum)), H. Reichenbach (brief H. Reichenbach – A. Châtelet, 7 december 1952, (Los Angeles)) en A. Heyting. Albert Châtelet, 1883 – 1960.

[97] Voorbeeld: de gebeurtenissen in Göttingen na de dood van Hilbert (1862 –1943).

[98] Brief Beth – J.B. Rosser (president ASL), 21 december 1952, in antwoord op de agenda van de bijeenkomst van de Council van de ASL op 29 december 1952 te St. Louis, Missoury. De werkelijkheid zou voor Beth nog rauwer uitvallen: de ASL had zelf al een verbintenis met de IMU. Beth was 'deeply shocked' toen hij dit vernam (zie de brief Beth – W.V.O. Quine, 4 juni 1953).

Union would be very small. Also, an affiliaton with the Mathematics Union would be practically irrevocable and would be a very bad precedent, weaken the position of logicians in their faculty. The same can be said of an affiliation with the Philosophy Union." [99]

Ook Tarski had er last van: [100] "The resentment toward logic and foundations in various places (e.g. in Math. Dep't in Berkeley [...] the situation in the department has become almost unbearable. If I were younger, I would look for another position without hesitation." En: [101] "I have again to attend all departmental meetings and fight back all attacks on my field of research. My situation in the Department was never enviable, but now it has detoriated considerably. New people, may be able mathematicians, but with dictatorial tendencies and very narrow approach to intellectual problems. I feel exhausted by this continuous fight, and am almost ready to give up, let the younger ones take up this unrewarding job"

Bovendien hadden volgens Tarski de logici in de Verenigde Staten zich bij de vertegenwoordigende lichamen, zoals de National Foundation of Science, binnen de sectie zich als wiskundigen te gedragen, en niet als logici.[102] Bochenski was strijdlustiger: [103] "We have to fight against both mathematicians and philosophers for its [formal logic] recognition."

### UIHPS: historici en logici vereend

De zaken liepen er niet beter door. De ICSU schreef voor dat er een fusie tussen UIPS en UIHS moest komen. De behartigers van diverse belangen probeerden dit te ondergraven. Wel was het zo dat men tenslotte bij de UIPS schoon schip kon maken. Gonseth en geliëerden werden op democratische wijze de diverse besturen uitgewerkt of traden uit zichzelf terug.[104] Onhandelbare institutionele leden werden tot rede gebracht. Nieuwe institutionele leden, waaronder de ASL (1953)[105] meldden zich aan. R. Feys: [106]

"With the elimination of prof. Gonseth, Dockx and Bayer from the committee, the fundamental difficulties to the adhesion of the ASL to the UIPS are removed. For it must be recognized that these three colleagues 1° considered in fact the UIPS as a tool

[99]'Philosophy Union': de FISP.

[100]Brief A. Tarski – Beth, 30 mei 1961.

[101]Brief A. Tarski – Beth 18 december 1960.

[102]Brief A. Tarski – Beth, 13 augustus 1956.

[103]Brief (afschrift) I.M. Bochenski – W.V.O. Quine (president ASL), 15 mei 1953, (Fribourg, Zwitserland).

[104]In 1952 uit de IUPS, in 1953 uit de SILPS; hun posities werden nu door 'Beth-getrouwen' ingenomen.

[105]Verbinding [ASL met UIPS] voor een jaar: Rapport vergadering Council ASL, 28–29 december 1953, Rochester, NY, dd. 29 januari 1954, te Berkely door L. Henkin (vice-president ASL). Leon Henkin, *1921. Op de vergadering van september 1953 werd de naam van IUPS omgezet in Union Internationale de Logique, Philosophie et Methodologie des Sciences, en in 1955 in Division de Logique, Philosphie et Méthodologie des Science de l'UIHPS (DLPMS). Om al te veel namen en afkortingen te vermijden blijf ik tot 1955 de naam IUPS gebruiken, en daarna PS-sectie van de UIHPS.

[106]Brief R. Feys – B. Rosser, september 1952, (Leuven).

to secure advantages from the UNESCO for the profit of organizations of their own, 2° that they were interested in rather literary forms of 'Philosophy of Science', but very little in Symbolic Logic or in studies conducted with mathematical rigor about the fundaments of science."

Het verzet van de kant van de UIHS bleef. Tenslotte greep de ICSU in en de historici werd de les gelezen op de meest effectieve wijze: de subsidiekraan werd dichtgedraaid,[107] of zoals Heyting grapte: [108] "De historici op water en brood." Dit was de genadeklap, de fusie kwam er (bovendien verdween Sergescu algemeen bejubeld en op tijd het graf in).

### 2.2.3 Redacteurschappen

Een met organisaties samenhangende en vergelijkbare arbeid bestond uit het oprichten en redigeren van tijdschriften en boekenreeksen. Hiervan was voor Beth de *Studies in Logic* de belangrijkste. Als initiatiefnemer en als redacteur bekleedde Beth de meest prominente positie, ook al deden A. Heyting en L.E.J. Brouwer eveneens mee en hadden zij binnen de redactie eenzelfde zeggenschap.

Beth had al langer het idee dat het de logici ontbrak aan een eigen boekenreeks. Ook H.B. Curry was deze mening toegedaan, meer nog, het idee speelde ook bij de ASL. De Tweede Wereldoorlog had echter een verdere uitwerking hiervan in de weg gestaan: [109] "This account shows that a series of monographs of the type you propose is a need which has been felt for a long time, even from the standpoint of pure research."

Een goed moment om voor de logica-reeks te lobbyen deed zich voor tijdens het Tiende Internationale Wijsgerige Congres dat van 11 tot 18 augustus 1948 in Amsterdam gehouden werd, en waarvan Beth algemeen secretaris was. Tal van logici waren daarbij aanwezig, en werden door Beth en de Noord Hollandsche Uitgevers Maatschappij op maandag 16 augustus 1948 op een bijeenkomst en een lunch in het Paviljoen in het Vondelpark onthaald. Hierna gingen de wervingsbrieven naar mogelijke scribenten de deur uit.

De opzet van de serie was commerciëel, subsidie werd niet gegeven. De te verschijnen deeltjes moesten derhalve verkoopbaar zijn. De deeltjes moesten interessant zijn, maar vanwege de verkoopbaarheid ook weer niet van het soort 'interessant voor enkele personen'. Bovendien had men logica en 'toepassingen' uit te geven, maar al te ver daarvan kon men het ook weer niet zoeken. Te wiskundig was de bedoeling zeker niet; Heyting: [110] "Heel belangrijk vind ik de naamskwestie [van de serie] niet, als er maar geen zuiver wiskundige deeltjes aangenomen worden."

In de loop der tijden wisselde de redactiepolitiek wel eens. Wel werd men bijna naar de financiële afgrond gedreven vanwege het door H.B. Curry tezamen

[107]Brief J.L. Destouches – A. Heyting, 2 juli 1953
[108]Brief A. Heyting – Beth, 7 juli 1953, (Laren).
[109]Brief H.B. Curry – North Holland Publ.Cy. (in dit geval eigenlijk Beth), 11 oktober 1948.
[110]Brief A. Heyting – Beth, 8 april 1951, (Laren).

met R. Feys geschreven *Combinatory logic I.* Dit werk had zo ongeveer alles in zich wat men aanvankelijk van plan was niet te doen.[111]

**Beths huwelijk.** Ondanks de drukke jaren tussen 1945 en 1950 had Beth nog tijd over om op 26 maart 1947 in het huwelijk te treden met Christina Petronella C. Pastoor.[112] Zij was een zangeres en binnenhuis-architecte, maar heeft deze werkzaamheden sinds het begin van de Tweede Wereldoorlog niet meer uitgeoefend.[113] De binnen het archief te vinden eerste schriftelijke contacten bestonden uit brieven van 26 februari en 16 april 1943 van [weduwe] Ch. Fiedler–Pastoor aan Beth om nu toch eens eindelijk zijn achterstallige geldelijke bijdragen voor het signifische werk te storten.[114]

### 2.2.4 Beth naar Berkeley

Gezien al zijn werkzaamheden had Beth veel te reizen. Zijn belangrijkste wetenschappelijke reis was naar de Universiteit van Berkeley (Californië) met een verblijf als 'research assistent' [115] bij Tarski: [116]

"I have during many years been active in the most interesting 'no mans land' between philosophy and mathematics. I never lost contact with mathematics but somehow I have never managed to take advantage of mathematical training in my philosophical activities. That at last I was able to restore the connections between the two fields is in the first place due to Tarski who gave me exactly the advice which I needed, first during a stop in Amsterdam early in 1950 and then during my sojourn at Berkeley Jan–June 1952." [117]

Hiertoe scheepte hij zich na het overwinnen van tal van bureaucratische moeilijkheden op 8 december 1951 in om op 18 december in New York te debarkeren. Na eerst in het oosten van de Verenigde Staten diverse wetenschappelijke bijeenkomsten, maar ook kennissen waaronder Curry[118] te zijn afgelopen, stapten de Beths te Harrisburg, "een Amerikaanse negorij" op de Manhattan Limited. In Chicago werd zijn Pulmann-wagon na uren wachten vastgehaakt

[111] Het werk was te dik, te technisch, had teveel afwijkende terminologie en symbolen.

[112] Roepnaam: 'Lolli' voor de intimus A. Tarski, o.a. gebruikt als hij haar tot zang wilde aanzetten tijdens zijn muziekbijeenkomsten in Berkeley (uit een e-mail A. Burdman-Feferman – P. van Ulsen, 20 februari 1996, (Stanford)).

[113] Beroep C.P.C. Pastoor uit de brief Beth – Ministerie van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen (afdeling culturele betrekkingen), 23 mei 1959.

[114] Brieven C.P.C. Fiedler–Pastoor – Beth, 26 februari 1943, 16 april 1943. C.P.C. Beth–Pastoor, voorheen weduwe Fiedler–Pastoor.

[115] Brief A. Tarski – Beth, 26 november 1951.

[116] Brief Beth – A. Fraenkel, 31 januari 1954.

[117] Een andere belangrijke inspiratiebron voor Beth, om 'feeling' met de logica te krijgen, was het werken aan een vertaling, en uiteindelijk bewerking, van Tarski's leerboek Introduction to logic (1946). Zowel met betrekking tot de ontwikkeling van de semantische tableaus alsook de definitiestelling maakt Beth daar melding van; later zullen wij beide gevallen tegenkomen.

[118] Jaarvergadering AMS (26, 27 december 1951, Brown Univ. (Providence, RI) en vergadering ASL (28 december 1951 Bryn Mawr College, Philadelphia, Penn), zie brief Beth – D. van Dantzig (?), 21 januari 1952, (Berkeley); brief Beth – D.K. de Jongh, 5 januari 1952, (Berkeley).

aan de California Zephyr. Omringd door de fraaie Zephyrettes bereikten Beth en zijn vrouw op 1 januari 1952 Berkeley. Tijdens deze treinreis werd Beth gedurende een oponthoud te Salt Lake City helaas het zicht op de schone Mormoonsen onthouden.[119]

Naast zijn wetenschappelijke werk dat bestond uit een eerste opzet van zijn latere Foundations en het voorbereiden en het houden van tal van lezingen,[120] was er gelukkig nog tijd voor toeristische uitstapjes. Het ongedwongen dineren in de chauffeurskroegen langs de weg had verreweg zijn voorkeur. Op de terugweg, met een door zijn vrouw bestuurde auto, van Californië naar New York bezocht Beth nog vele Amerikaanse onderwijsinstellingen met zijn daarbij horende vakgenoten.[121] Het dieptepunt van zijn verblijf in Amerika werd veroorzaakt door het bericht van het overlijden van zijn vader op 6 februari 1952.

Terug in Nederland, gaf Beth met de lezing *Indrukken over een verblijf in Amerika '52* een overzicht van Tarski's logische onderzoek: "het wiskundig element weer tot zijn recht te doen komen en de wijsgerige problematiek zoveel mogelijk te ecarteren. Ook wordt de algebraïsche methode in ere hersteld, dit mede in verband met de recente ontwikkelingen der algebraïsche methodes."

Volgens Beth hadden Tarski en zijn mederwerkers de relatielogica weer nieuw leven ingeblazen door de theorie der relatie-algebra's, en werkten zij aan de theorie der projectieve en cylindrische algebra's. Al deze theorieën vallen weer in te bedden in de theorie der operationele Boolese algebra's. Alhoewel Tarski's onderzoekingen niet in de eerste plaats wijsgerig waren, wees Beth er op dat de nieuw verworven inzichten zeer wel verheldering konden opleveren inzake de wijsgerige problematiek van logica en wiskundig grondslagenonderzoek.

## 2.3 Beth op het hoogtepunt van zijn werk

### 2.3.1 Instituut voor Grondslagenonderzoek

De positie van Beth aan de Universiteit van Amsterdam was in zekere mate ambivalent. Hij zat in tussen filosofen en wiskundigen. En zoals in de Inleiding reeds vermeld: de filosofen zagen hem voor een wiskundige aan, de wiskundigen voor een filosoof. Dit werd door beide groepen niet positief bedoeld.

Niet iedereen zag dit zo. L.E.J. Brouwer was de mening toegedaan dat er een grotere plaats voor onderzoek in logica en grondslagen van de wiskunde ingeruimd moest worden. Helaas was Brouwers positie, vooral door eigen toedoen, behoorlijk ondergraven en vloeide er bovendien zeer veel geld weg naar een 'buiten-universitair consortium' dat langs slinkse wegen was opgericht.[122]

[119]Brief Beth – D.K. de Jongh, 5 januari 1952, (Berkeley) en brief Beth – A.G.M. van Melsen, 9, 27 mei 1952, (Berkeley).

[120]Lezingen te Stanford, Berkeley, Los Angeles.

[121]Ms. E.W. Beth, *Indrukken over een verblijf in Amerika '52*, lezing NVL, 11 oktober 1952.

[122]Bedoeld: het Mathematisch Centrum. Brief L.E.J. Brouwer – B. & W. van Amsterdam, 8 oktober 1946, (Blaricum), (als bijlage bij brief L.E.J. Brouwer – C.G. van Arkel (voorzitster Fac. W. & N., UvA), 1 mei 1951, (Blaricum)). Kortingen, positie Brouwer: J.A. Schouten – Fac. W. & N., UvA, 28 mei 1951. Algemene positie Brouwer: brief J.G. van der Corput –

Zijn fulmineren tegen deze gang van zaken heeft weinig geholpen. Bovendien waren er nog andere zaken die een rol speelden. Brouwer had zich gedurende de gehele periode, waarin hij aan de Universiteit van Amsterdam was aangesteld, er voor ingespannen om de wiskunde erkend te krijgen als een op zichzelf staand vak en niet als een bijwagen voor natuurkunde. Dat dit de nodige voeten in aarde heeft gehad, kan men aflezen aan de pogingen van de natuurkundigen aan de Universiteit van Amsterdam om gedurende de op stapel staande veranderingen in het academisch onderwijs in de jaren zestig de oude toestand te handhaven.[123] Daarnaast was de vraag naar toepassingen van de wiskunde groter geworden, evenals de mogelijkheden voor afgestudeerde wiskundigen om werk te vinden buiten het middelbaar onderwijs.[124] Al dit soort zaken had, evenals de door Brouwer voorgestane inkrimping m.b.t. bepaalde takken van wiskunde binnen Amsterdam, benevens de door hem voorgestane bezetting der leerposten, aanleiding gegeven tot wrijving. Beth zat daar midden tussen in. Onze aandacht gaat echter uit naar Brouwers denkbeelden over de logica en de positie van Beth: [125]

“[W]il ik er hier nogmaals den nadruk op leggen, dat een zuiver-wetenschappelijke overbezetting aan een universiteit van een klein en onbemiddeld land met weinig verspreide onderwijsvoertaal uitsluitend is gerechtvaardigd voor takken van wetenschap, waarin eenerzijds de betrokken universiteit onder internationale aandacht een leidende rol vervult, en die anderzijds geëigend zijn om in het voor bepaalde groepen van studenten verplichte leerprogramma te worden opgenomen. Deze voorwaarde was en is m.i. te Amsterdam slechts vervuld door de epistemologische wiskunde, de wiskundige beïnvloeding der kennisleer. Bij de daarin gedurende de laatste decenniën plaatsgevonden geleidelijke verschuiving der hoofdaandacht (van begrips- en woordanalyse, axiomatiek en topologie naar intuïtionisme en gerelativeerde logica) is de leidende rol van Amsterdam behouden gebleven. En zij zal m.i. ook in de toekomst onder Heyting en Beth behouden blijven, indien ten aanzien van de persoonlijke positie van dezer beide geleerden en ten aanzien van de betrokken leervakken de toestand wordt hersteld, die onder Mannoury en mij heeft bestaan. Waarbij dan tevens de ook na het vertrek van van der Waerden en mij aanwezig blijvende plaatselijke overbezetting der overige wiskunde des te duidelijker in het licht zal treden.”

---

Beth, Heyting, 12 juni 1951, (Stanford). Ook Beth had zo zijn gedachte over de Nederlandse volksaard gerelateerd aan het MC: Brief Beth – J.G. van der Corput, 30 januari 1952, (Berkeley). Johannes Gualtherus van der Corput, 1890 – 1975.

[123]Brief Voorziter 1e Afdeling (J. de Groot) – A.D. Mulder (Secr. W. & N, UvA), 22 februari 1961, met toegevoegd *Regeling candidaatsexamen in het nieuwe Academisch Statuut* (namens de leden van de onderafdeling natuurkunde).

[124]Zie o.a. brief (afschrift) D. van Dantzig – J.A. Schouten, datum? (rond 1951) (onderdeel van een pakket materiaal t.b.v. faculteitsvergaderingen, zie J. de Boer (secr.): vergadering 1e afdeling W. & N., woe 30 mei 1951 (1. concept vacaturevervulling Brouwer en van der Waerden; (Bartels Leendert van der Waerden, 1903 – 1996); 2. J.A. Schouten – Fac. W. & N., 28 mei 1951; 3. uit een brief J.G. van der Corput – J.A. Schouten, 11 mei 1951; 4. memorie n.a.v. schrijven van prof. Brouwer aan van Arkel en extra memorie vacature-vervulling). Voor de situatie bij wiskunde, gecombineerd met Brouwer, zie van Dalen (2001).

[125]L.E.J. Brouwer – C.G. van Arkel (voorzitster Fac.Wisk. en Natuurk. UvA), 17 januari 1951, (Blaricum): Brouwer had graag zijn pensioen nog enige tijd uitgesteld om met speciale volmachten het onderzoek van de Amsterdamse wiskundigen in de juiste banen te leiden.

Het was voor Beth ook uit financieel oogpunt steeds moeilijker om vanuit zijn positie te doen wat hem voor ogen stond. Een oplossing kan gevonden worden in het oprichten van een eigen instituut: [126] "Die Hauptsache wäre natürlich, dass wir über ein eigenes Budget verfügen möchten, hauptsächlich für Bücher und eventuell auch für Vorträge ausländischer Gelehrten." Voorbeelden hiervan waren er te over.[127] Hiertoe deed Beth eerst enig onderzoek naar de positie van de logica in het buitenland.[128] Met de positieve uitkomsten van de correspondentie schreef Beth de Gemeente Amsterdam aan om te komen tot het stichten van een Instituut voor Grondslagenonderzoek.[129] Dit instituut moest omvatten een Seminarie voor Mathematische Logica en Philosophie der Exacte Wetenschappen onder Beth en een Seminarie voor Grondslagenonderzoek en Wijsbegeerte der Wiskunde onder A. Heyting.[130]

Helemaal gerust op een goede afloop was Beth niet. Zo produceerde hij in het striktste geheim een manuscript over economie en probeerde dit met behulp van Tarski in de Verenigde Staten als boek uit te geven.[131] Hij was bang dat hij anders voor een niet ernstig te nemen alles-schrijver zou worden aangezien, en daarmede zijn plannen tot een eigen instituut gedwarsboomd zouden worden.[132] Op 23 april 1952 kwam evenwel het volgende schrijven af van Burgemeester en Wethouders van Amsterdam: [133] "Naar aanleiding van

---

[126] Brief Beth – P. Bernays, 28 maart 1951.

[127] Logische instituten aan de UC Berkeley, UC Los Angeles, te Leuven, Cambridge (Harvard), Helsinki, Zürich, Princeton (Fine Hall en Institute for Advanced Study), Münster, Berlijn, Warschau, Parijs, Turijn.

[128] Beth werd bijgevallen door A. Fraenkel (brief naar Beth, 4 maart 1951, (Jeruzalem)), I. Johannson (brief naar Beth, 20 maart 1951, (Oslo)), R. Feys (brief naar Beth, 16 februari 1951, (Leuven)), K. Schröter (brief naar Beth, 28 augustus 1951, (Berlijn; D.D.R.)) en H. Scholz (brief naar Beth, 3 maart 1951 (Münster; B.R.D.). Andrzej Mostowski (1913 – 1975) (brief naar Beth, 8 maart 1951, (Warschau)) zag er evenwel niets in om voor logica een instituut los van wiskunde te creëren. Volgens A. Church (brief naar Beth, 4 april 1951, (Princeton)) was situatie in de VS als in Polen. J.-L. Destouches – Beth, 29 maart 1951, (Blois).

[129] Uit een bijlage van het aan Burgemeester en Wethouders van Amsterdam gerichte voorstel tot stichting van 30 mei 1951 door Heyting en Beth. Zie verder de brieven Beth – A. de Roos (wethouder onderwijs van Amsterdam) van 17 februari 1951 en 4 mei 1951.

[130] Wat er met Heytings bijdrage gebeurd is, is mij niet duidelijk; een echte rol naast Beth binnen het instituut heeft hij niet gespeeld. Wellicht is ook van belang geweest dat Heyting later de directie over het Mathematisch Instituut voerde.

[131] Brief Beth – A. Tarski, 28 oktober 1951: "These documents do not belong to the field of mathematical logic, but rather to economy. [. . . ] This is the first time I hope a manuscript to be extensive."

[132] Brief Beth – A. Tarski, 28 oktober 1951: "It is perhaps better that you do not inform me of the arrival of these documents as the authorities here might not fully approve of these activities outside my proper field."

De zaak is inderdaad in strikt geheim afgewikkeld: er zijn geen manuscripten meer te vinden in het Beth Archief of bij zijn zusters, maar ook niet in het archief van Tarski ondanks zoekwerk van J. Addison en Tarski's voormalige assistent S.R. Givant. Wel zijn er brieven van Tarski betreffende de ontvangst van manuscripten. De aanvankelijk door Beth beoogde uitgeverij Orange County (N.Y.) antwoordde al helemaal niet op een vraag naar inlichtingen.

[133] Brief Burgemeester en Wethouders Amsterdam – Beth, A. Heyting, 23 april 1952 (Amsteram), [uit Archief A. Heyting, Math. Instituut UvA.]. Voor het instituut werd door de Gemeente al direct geld gereserveerd.

uw voorstel van 30 Mei 1951 om te geraken tot de stichting van een Instituut voor Grondslagenonderzoek en philosophie der exacte wetenschappen berichten wij U, dat wij in beginsel daarmede instemmen."

In de beginperiode was Beth vanwege de geringe geldmiddelen voornamelijk directeur over de éénmansstaf E.W. Beth. Deze geringe financiële armslag zou tot zijn dood een klaaglied blijven. Het instituut heeft hierdoor niet een zo brede rol kunnen vervullen als Beth zich wellicht had voorgesteld, maar is vrijwel beperkt gebleven tot de mathematische logica en de grondslagen van de wiskunde. Veel van Beths energie moest worden besteed aan het verbeteren van zijn directe werkomgeving, zoals de oprichting en het behoud van zijn instituut. Toegegeven moet worden dat hij wel steun had van A. Heyting, maar bijvoorbeeld het vertrek van B.L. van der Waerden naar Zürich had volgens zijn zeggen zijn kring verkleind. Wel was tussen 1952 en 1960 opnieuw N.G. de Bruijn, waarmee hij goede contacten onderhield, zijn collega.[134] Met zijn instituut was het nu wel makkelijker mensen voor langere tijd naar Amsterdam te halen.[135]

Vanuit zijn instituut verzorgde Beth het onderwijs. Dit geschiedde m.b.t. het methodologie-onderwijs voor een aantal faculteiten. Het valt op dat logica indertijd ondanks Brouwers aandringen geen verplichting was voor wiskundestudenten: [136] "[D]e opleiding der studenten voor het doctoraalexamen in de wiskunde wederom in hoofdzaak te uniformiseren en daarbij in het bijzonder voor alle candidaten een tentamen van eenigen diepgang bij de beide vertegenwoordigers van het intuïtionisme [Heyting] en de symbolische logica [Beth] verplicht te stellen."

Begin 1961 was Beth vrij moedeloos voor wat betreft de situatie in Amsterdam. Er heerste volgens hem op de Universiteit van Amsterdam een bestuurlijke chaos — een locaal handelsmerk dat is gebleven — waardoor zijn wetenschappelijk werk steeds meer in gedrang kwam, en merkte hij tegen Tarski op: [137]

"Apart from my plan to resign unless I find a firm basis for the continuation of my work in Amsterdam, I have no definite plans for the future. If you have any suggestions, I would of course be most grateful. Of course, I can hardly take any steps before I have

[134]Deze was tijdens de oorlog samen met Beth in Delft assistent geweest onder C.H. van Os.; nadere informatie uit de brief N.G. de Bruijn – P. van Ulsen, 24 januari 2001, (Nuenen).

[135]Hieronder vielen A. Tarski, S.C. Kleene, Robert L. (Bob) Vaught, *1926, L. Henkin, R. Fraïssé, P. Gilmore, M. Guillaume en later L. Linsky en Richard Merritt Montague, 1931 – 1971. Tarski kwam trouwens tijdens zijn Europa-reizen welhaast jaarlijks in Amsterdam bij de familie Beth langs.

[136]Brief L.E.J. Brouwer – C.G. van Arkel (voorzitster Fac.Wisk. en Natuurk. UvA.), 1 mei 1951, (Blaricum).

[137]Brief Beth – A. Tarski, 15 maart 1961. Ook Tarski had last van de bureaucratie, gezien de brief A. Tarski – Beth, 1 november 1959. Misschien had Beth er beter aan gedaan al in een vroeger stadium de hielen te lichten. Hiertoe kan men wijzen op de brief Y. Bar Hillel – Beth, 28 april 1952: "You probably know that, due to a coincidence of deaths and other unexpected events, there are openings for logicians and philosophers of language at many of the first-class American universities like Harvard, Yale, Chicago, Berkeley, and Los Angeles, some of them of a permanent nature, others only temporary. You might be interested. If you want me to do something about it, I would be glad to do it." Yehosua Bar-Hillel,1915 – 1975.

handed in my resignment, but I felt that at any rate I might let you know."

Maar begin 1962 was Beth weer vol goede moed.[138] Het oprichten in den lande van de Centrale Interfaculteiten nam hem in beslag en hij dacht door de constructie van deze nieuwe faculteiten de nodige ruimte te krijgen die hem in de vroegere bestuurlijke constructie werd onthouden.

### 2.3.2 Oprichting van de Centrale Interfaculteit

Vanouds heeft men een tweedeling in (a) de aloude filosofische vakken en (b) de filosofie van specifieke vakgebieden. Voor de inrichting van het filosofie-onderwijs kan men (a) en (b) bijeen brengen of scheiden. In het laatste geval bestaat filosofie-onderwijs voornamelijk uit de aloude filosofische vakken en is de filosofie van de specifieke vakken ondergebracht bij die vakken zelf. Tussen deze twee uitersten zwenkte de plaats van de filosofie in Nederland. Dit begon al met de officiële verzelfstandiging van de vakken (met verdwijnen van de facultas artium) in 1811 bij keizerlijk decreet en werd voortgezet in 1815 bij koninklijk besluit. Bovendien werd het onderwijs in tweeën gedeeld — zoals nog steeds binnen de KNAW — in proefondervindelijke wijsbegeerte (wiskunde en natuurwetenschappen) en bespiegelende wijsbegeerte (de rest). Vanaf 1876 zijn er zo nu en dan herzieningen geweest op de Wet tot Regeling van het Hoger Onderwijs (een raamwet). Verruiming voor de wijsbegeerte werd gegeven in 1921 door de verandering van het Academisch Statuut door minister de Visser: er was sprake van een kandidaats- en een doctoraalexamen. Beide konden afgelegd worden binnen de Faculteit Letteren en Wijsbegeerte. Het kandidaatsexamen was alleen toegankelijk met een gymnasium-A opleiding, het doctoraal stond open voor een ieder, maar wel met aantoonbare kennis van Grieks en Latijn. Men kon wijsbegeerte als keuzevak of als hoofdvak nemen bij zekere doctoraalexamens. Als hoofdvak was bij de Faculteit Wis- en Natuurkunde mogelijk. Met deze toestand had Beth bij zijn aanstelling te maken. Na de Tweede Wereldoorlog wenste men het academische bestel, zoals indertijd met zoveel zaken in de maatschappij, op een andere leest te schoeien. Hier gingen jaren van discussie aan vooraf, ook bij de wijsgeren. Daar kende de discussie over de plaats van de wijsbegeerte een langere aanloop, al van voor de oorlog.[139] In 1960 kreeg dit alles in de Kamer zijn beslag met een nieuwe Raamwet, de Wet op het Wetenschappelijke Onderwijs. Bovendien werd er een nieuw Academisch Statuut opgesteld om de Raamwet verder vorm te geven. Hierin werd opgemerkt: [140]

[138] Brief Beth – A. Tarski, 13 februari 1962.

[139] *De wijsbegeerte in haar verhouding tot ons Hooger Onderwijs*, (ed. Ph. Kohnstamm, e.a.), Haarlem (Afdeling Nederland der Kant-Gesellschaft), 1933 [lezingen gehouden op 29 en 30 december 1931 te Amsterdam onder de auspiciën van het Kant-Gesellschaft]. Een opvolger hiervan was De wijsbegeerte in het Hoger Onderwijs, *ANTW 46*, (1953/54), pp. 169–198) [conferentie op 8 juni 1954 te Amsterdam].

[140] *Rapport van de Commissie voor Hoger-Onderwijswetgeving, ingesteld bij beschikking van de minister van Onderwijs, Kunsten en wetenschappen, van 18 Mei 1949, No. 9827, Afd. H.O.W.* (Staatsdrukkerij- en Uitgeversbedrijf), 1951: artikel 23 behelst het instellen van Interfaculteiten. Citaat: Afd. III, hfdst. I, art. 24 (p. 10).

"Elke universiteit kan behalve de faculteiten nog één of meer interfacultaire organen bevatten, belast met de behartiging der studiebelangen en het afnemen der examens in die studierichtingen of gedeelten daarvan, welke de grenzen van een faculteit overschrijden. Deze organen worden aangeduid als interfaculteiten." En: [141] "interfaculteiten, waaronder een centrale interfaculteit." De eerste, en naar later zou blijken ook de enige, bewoner van de Centrale Interfaculteit moest de wijsbegeerte worden.

Dit werd door Beth gezien als een verbetering van de oude toestand. Beth was een voorstander van een centrering van filosofie en vakfilosofie. Zonder een combinatie met andere universitaire vakken en vakfilosofie zag Beth filosofie als een waterhoofd. Er waren echter van het begin af aan moeilijkheden. Filosofen van de oude (literaire) stijl wensten geen bemoeienis van wetenschap binnen het bestel, bovendien was men het oneens welke opleidingen toegang tot de nieuwe studie konden geven. Maar ook van de kant van de exacte vakken verliep niet alles even gemakkelijk. Velen vonden wijsbegeerte der exacte vakken en logica maar niets en wilden deze vakbeoefening binnen wis- en natuurkunde niet in de wet verankerd zien. Beth had derhalve voor zijn opvattingen over hoe de toekomstige Centrale Interfaculteit, met daarin geplaatst de wijsbegeerte, er uit moest komen te zien naar twee kanten toe strijd te leveren. Door beide kanten werd hij — en daarbij zijn leeropdracht — in het nauw gebracht. Door de voorstellen gegeven in artikel 91h van de Ontwerp HO-wet tijdens de vergadering van 20 december 1951 van de Commissie voor Hoger-Onderwijswetgeving — en in het bijzonder het Leidse filosofische lid Vader F.L.R. Sassen, die hiermee buiten elk overleg gehandeld had — werd hij voor het blok gezet. Er werd daarin voorbijgegaan aan de tot dat moment geboden mogelijkheden om binnen de faculteiten Wis- en Natuurkunde de filosofie van die vakken te beoefenen. Bovendien werden de mogelijkheden daartoe binnen de verzelfstandigde filosofieopleiding sterk beperkt.[142]

Hiertegen werd geageerd, niet alleen door Beth en de Nederlandse Vereniging voor Logica, maar ook door de Amsterdamse faculteit Wis- en Natuurkunde bij monde van de voorzitster C.G. van Arkel en door Heyting tegen Sassen.[143] De Tweede Kamer kon zich eveneens in de bezwaren vinden.[144] Anders lag dit met Beths eigen Amsterdamse Faculteit der Letteren en Wijsbegeerte. Daar

[141] Aanvulling: *Rapport van de commissie tot voorbereiding van de herziening van wetsontwerp 2597 (ingesteld bij de beschikking van de minister van OK & W van 11 december 1956, Nr. 253331, afd. H.O.W.)*, 's-Gravenhage (Staatsdrukkerij), 1958, p. 38 (art. 17).

[142] Voor de commissie Hoger Onderwijs en Sassen, zie de 'lange noten' van dit hoofdstuk.

[143] Voor de brieven van C.G. van Arkel en A. Heyting, zie de 'lange noten' op het einde van dit hoofdstuk. Sassen is in later tijd op zijn aanvankelijk ingenomen standpunt teruggekomen.

[144] *Zitting 1953/54-2597, Regeling van het hoger onderwijs (Hoger Onderwijswet), Voorlopig verslag, No. 5* (ad art. 91, p. 14): "Het verzoek van de Ned. Ver. voor Logica en Wijsbegeerte der exacte wetenschappen, om ook de bezitters van het diploma HB-B toe te laten in de faculteit der Wis- en natuurkunde een doctoraal examen met hoofdvak Wijsbegeerte af te leggen, werd door vele leden [van de Tweede Kamer] ondersteund. Vele andere leden verklaarden zich accoord met dit artikel [artikel 91h], behoudens dat zij voor het doctoraal wijsbegeerte het eindexamen HBS wilden handhaven."

Er zij vermeld, dat ook Beth in het gelukkige bezit van een HBS-B diploma was.

liet men hem bij monde van de faculteitsvoorzitter D. Cohen, die zelf wel een medestander van Beth was, officiëel in de steek.[145]

Het conflict werd bijgelegd, maar gedurende de verdere aanloop tot de regeling van het filosofie-onderwijs zouden toch steeds weer nieuwe onenigheden ontstaan, waardoor Beth voortdurend gedwongen was op zijn hoede te blijven en te reageren. Telkens weer was er sprake van beperkingen of andere moeilijkheden, zoals bijvoorbeeld bleek uit de opvattingen van minister J.M.L.Th. Cals in 1959. Het was natuurlijk geen alomvattende samenzwering, maar men kan wel spreken van jarenlange telkens weer hernieuwde pogingen om Beths ideeën dwars te zitten of de door hem voorgestane filosofie-beoefening het bestaansrecht te ontnemen.[146] Tenslotte zou alles min of meer naar ieders tevredenheid geregeld worden. Helaas voor Beth kon hij vanwege zijn overlijden daar niet meer de vruchten van plukken.

### 2.3.3 Logici en historici aan Beths leiband

Met de verbroedering tussen UIPS en UIHS waren Beths bezigheden nog niet afgelopen. Het in goede banen leiden van de samenwerking zou nog heel wat moeilijkheden met zich meebrengen. Beth had nu wederom te maken met de PS- en HS-sectie van de UIHPS, de UIHPS zelf, maar ook met de institutionele leden. De aanwas van de institutionele leden was groot. Voor Beth waren de Amerikaanse tak en de hernieuwde AIPS van belang.

De groei van institutionele leden was wel mooi, maar bracht volgens Beth ook de nodige gevaren met zich mee. Per land konden allerlei instellingen gaan claimen de rechthebbende op een lidmaatschap van de UIPS te zijn. Een voorbeeld van een dergelijk warrig ledenbestand trof men bij de IMU aan. In vele landen had men geen methodologische of logische verenigingen. Op die manier had men kans dat de plaatselijke academie van wetenschappen een dergelijke positie op ging eisen of een afvaardiging wenste te installeren, en voor men het weet zit men op die wijze opgescheept met filosofen, sociologen en andere in Beths ogen voor dit doel onbekwame maar wel stemgerechtigde leden. Op die wijze was het, wederom volgens Beth, mogelijk de sectie PS van de UIHPS te infilteren. Dit soort lieden vindt elkaar zeer snel, en voor men het weet wordt men opnieuw opgescheept met intriganten en samenzweringen.[147] Ook in de Verenigde Staten was dergelijk gevaar aanwezig, en al snel wist Beth zich in de positie van adviseur op de achtergrond te brengen. Men had daar te maken met de National Academy of Sciences, de National Science Foundation en de National Research Council als adviserende lichamen, en een tegenstelling tussen (i) de ASL en (ii) de Philosophy of Science Association [PSA] gecombineerd met de

[145] Brieven D. Cohen – leden Fac. Lett. en Wijsb., 8 juli 1953; Beth – D. Cohen, 10 juli 1953; D. Cohen – Beth, 15 juli 1953 (afwijzing door Lett. en Wijsb.).

[146] Om dit beter duidelijk te maken zou er helaas veel meer dan de hier beschikbare ruimte nodig zijn. Het materiaal is wel aanwezig binnen het Beth-archief.

[147] Brief Beth – A. Tarski, 14 oktober 1957; algemeen rondschrijven Beth van 28 juni 1956 (over de onbetrouwbaarheid van de historici).

History of Science Society.[148] De PSA eiste de belangrijkste plaats op binnen de toekomstige Amerikaanse PS-sectie. Dit was tegen de zin van de afgevaardigde van de ASL, de door Beth bijgestane A. Tarski.[149] Tarski bracht naar voren dat de PSA niet veel te betekenen had en eigenlijk de ASL alles vertegenwoordigde. Opnieuw onderkende Beth in deze gang van zaken dat methodologie en logica als 'semi serious domains' beschouwd werden.[150] Maar door stug aanhouden van Tarski, die niet geheel zonder macht was vanwege zijn positie binnen de UIHPS, viel de uitslag van de stemmenverhouding tenslotte beter uit.[151]

Na al deze perikelen was de weg vrij voor subsidie-tochten. Tarski bleek zeer handig te zijn in het verkrijgen van geld voor logica ten nadele van subsidies voor andere afdelingen zoals wetenschapsfilosofie. Toegegeven moet worden dat de anderen in de loop der tijden zo hun rooftochten gehouden hadden. Wel viel al snel op bestuurlijk vlak het verschil op tussen de Amerikanen en de Europeanen. De Amerikanen bezetten een belangrijke positie, maar controleerden niet alles. Bovendien waren zij nogal open en wensten zich aan de reglementen te houden. In Europa werd nog steeds veel in achterkamertjes 'en petit comité' afgehandeld, de Europeanen hadden de meeste stemmen en de afstand tussen de Amerikaanse bestuurlijke minderheid en de Europese meerderheid bedroeg duizenden kilometers. Dit gaf aanleiding tot wrijving, ook tussen Beth en Tarski.

Dit bleek al snel. Men had binnen de PS de oude statuten van de UIPS bij te schaven vanwege de veranderde opzet (binnen de UIHPS). Dit zou op 10 september 1958 te Brussel moeten geschieden in een algemene en door tal van nationaliteiten te bevolken vergadering. Zo geschiedde, helaas bleek al snel dat door onzorgvuldig handelen van de notuliste, G. Willame, alle officiële en door de vergadering bekrachtigde besluiten waren zoekgeraakt. Blijkbaar oudergewoonte gingen met instemming van de secretaris J.-L. Destouches de penningmeester — en (voor sommigen plotseling) adjunct-secretaris — E.W. Beth en R. Feys er toe over om met zijn tweeën de notulen te reconstrueren. Niet iedereen was het

[148] De internationale status van de ASL verzwakte haar positie binnen een louter Amerikaanse vertegenwoordiging. Anderzijds bestond het grootste deel van het ledenbestand van de ASL uit Amerikanen. Een verdere verzwakking van de positie van de ASL had als oorzaak dat zij als internationale organisatie al in de PS-sectie van de UIHPS zat. Ten onzent werd alles in gezapige rust geschikt binnen het overkoepelende UIHPS-comité bestaande uit A. Heyting, H. Freudenthal, P.H. Brands en kolonel P.W. Scharroo (zie brief H. Freudenthal – Beth, 16 juli 1958, (Utrecht)).

[149] Deze bijstand door Beth was niet zo vreemd: Beth had vele malen de ASL vertegenwoordigd bij vergaderingen, is lid geweest van het algemeen bestuur (de 'council') van de ASL en had bovendien bestuurlijke functies binnen de PS en de UIHP. Beth ging er toe over om een brief (Beth – A. Tarski, 24 mei 1956) voor algemene circulatie te schrijven, waarin hij aangaf hoe de UIHPS in elkaar zat. Beth vermelde daarin dat de ASL niet volledig de PS-werkzaamheden van de UIHPS in de VS dekte. Volgens Tarski was dit juist, maar het kwalijke gevolg zou zijn dat men dan zou denken dat de PSA dit wel deed. En dit was volgens Tarski (brief A. Tarski – Beth, 13 augustus 19556) zeker niet waar, en derhalve was Beths brief te gevaarlijk om rond te sturen.

[150] Brief Beth – Tarski, 5 oktober 1956.

[151] S.C. Kleene was al eerder met een ongunstige stemmenverhouding overstag gegaan, maar Kleene werd door Tarski van dubbel spel verdacht: accoord gaan met een slechte vertegenwoordiging voor de ASL met de bedoeling dat de ASL dan niet in de PS zou stappen. Voor tegenstand binnen ASL, zie brief A. Tarski – Beth, 24 mei 1956.

hier mee eens. De toekomstige voorzitter van de PS-sectie (ook dit lag niet meer officiëel vast) S.C. Kleene gebruikte zelfs in een afkeurende brief de aanhef: [152] "Dear colleagues (I'am tempted to say, Dear Fellow conspirators)."

De door Tarski voorgestelde en door de vergadering bekrachtigde verwijdering van de AIPS werd daar echter niet meer duidelijk in verwoord. Beth was er geen voorstander van en had om niets meer als bestuurslid (penningmeester) van de PS-sectie met de AIPS te maken te hebben zijn penningmeesterschap laten omzetten in een waarnemend penningmeesterschap. Zo was hij nergens meer verantwoordelijk voor, maar kon zich naar hartelust nog wel met alles bemoeien.

De uiteindelijke bekentenis, dat echt alles weg was, bracht de toekomstige PS-voorzitter en toenmalige ASL-voorzitter Kleene tot verontwaardiging. Deze verbleekte evenwel bij die van Tarski die zijn aangenomen voorstel m.b.t. de AIPS ook in een latere reconstructie-lezing plotseling weggewerkt zag: [153]
"From Professor Beth's letters it follows that he decided to distribute the new draft of the Minutes as the final, official text, without getting an approval from those people whose help he sought and used in preparing the new draft. I regard this decision as a grave though unintentional error on the part of Professor Beth, and I urgently appeal to Professor Schmidt, the President of our Division, to take necessary steps to correct the error."

Dit luidde tevens het einde van de organisatorische bezigheden binnen de UIHPS van de door Tarski's brief beledigde Beth in. Het was echter niet het einde van al zijn organisatorisch werk. Ten aanzien van de oprichting van de Centrale Interfaculteiten had hij nog genoeg te doen.

### 2.3.4 Beth naar Johns Hopkins

In deze periode viel Beths tweede reis naar de Verenigde Staten. Nu niet naar Berkeley, maar als 'visiting professor' voor logica en wetenschapsfilosofie naar Johns Hopkins University te Baltimore. Beth was daar de eerste (en ter plaatse enige) logicus na het verdwijnen van C.S. Peirce in 1884.[154]

Op 19 januari 1957 embarkeerde het echtpaar Beth zich op de Nieuw Amsterdam met het plan om op 28 januari 1957 in Hoboken (New York) aan te komen. Helaas werd het een dag later: [155] "[W]e zijn deze reis geteisterd door een vliegende storm, waarbij vergeleken de orkaan van December 1951 [Beths eerste reis naar de VS] nog maar kinderspel was. Bovendien begaf de machine het driemaal, waardoor het vaartuig een willoze speelbal van de golven werd."

Na New York ging het over Princeton naar Johns Hopkins.[156] In tegen-

[152] Brief S.C. Kleene – bestuur PS-sectie, 8 januari 1959, (Mahrburg/Lahn).
[153] Brief A. Tarski - bestuur PS, 12 februari 1959.
[154] Charles Saunders Peirce (1839 – 1984) had een positie aan Johns Hopkins tussen 1879 en 1884.
[155] Brief Beth – D.K. de Jongh, 4 februari 1957, (Baltimore).
[156] In Princeton bezoeken aan S.C. Kleene, G. Kreisel en de recursie-theoreticus J.J.C. Dekker. Diner Kleene: Brief Beth – W.V. Quine, 23 februari 1957, (Baltimore) Bovendien had hij daar de door hem van de Amsterdamse natuurkundige J. de Boer voor $ 300,-

stelling tot het bezoek aan Berkeley moest Beth het voor zijn wetenschap nu hebben van bezoeken buiten de universiteit. Hij nam de gelegenheid te baat om vooral bij zijn kennissen in het oosten langs te gaan.[157] Daarnaast reed hij naar Californië om Tarski en R. Carnap (Los Angeles) op te zoeken.[158] Zijn belangrijkste reis was naar Cornell, Ithaca (New York) voor het AMS Summer Institute of Symbolic Logic.[159] Afgezien van een door hem te geven lezing over intuïtionistische logica werd daar zijn interesse in mechanisering verdiept. Na op verzoek van H. Gelernter een lezing op het IBM Research Centre te Yorktown te hebben gegeven spoedde hij zich naar New York om zich aldaar op 9 augustus op de Nieuw Amsterdam in te schepen. Op 19 augustus kwam hij thuis, net op tijd voor het door Heyting georganiseerde colloquium Constructivity in Mathematics van 26 tot 31 augustus te Amsterdam.[160]

Een staartje had dit gastdocentschap wel. Er werd hem een vast professoraat aan Johns Hopkins aangeboden. Dit weigerde Beth, evenals het aanbod van 'visiting professor' te Berkeley voor de eerste helft van 1958.[161] De gezondheid van zijn vrouw en hemzelf hield dit tegen. Bovendien had hij weer academische verplichtingen in Amsterdam, waaronder het in goede banen leiden van de opvolging van de inmiddels overleden H.J. Pos.[162] Wel verscheen Beth in 1958 te Edinburgh om een lezing te geven voor het vierjaarlijkse Wereldcongres voor Wiskundigen.

Hiermee beëindigen wij vooreerst de beschrijving van Beths organisatorische

---

overgenomen grijze zes-cylinder zes-zitter Chrysler Royal 1949 met 'fluid drive' in de tegenover het station van Princeton gelegen garage Doten op te halen (brief J. de Boer – Beth, 29 november 1956, (Princeton, Inst. Advanced Study)).

[157] Naast de al eerder genoemden ook H.B. Curry, Hiz, Craig en P. Gilmore (State College, Pennsylvania State University).

[158] Reis Californië: brieven Beth – I.M. Bochenski, 5 mei 1957, (Baltimore). Beth – W.H.J. Fuchs, 15 juli 1957 (Ithaca (Cornell) (NY)). Bezoek aan Carnap: brief Beth – R. Carnap, 28 juli 1957 (Ithaca (NY)).

[159] AMS: American Mathematical Society

[160] Thuiskomst: brief Beth – G. Boas, 3 november 1957; Constructivity: brief Beth – A. Tarski, 5 september 1957.

[161] Het aanbod van Johns Hopkins werd door Beth wel gebruikt als dreigmiddel om de bestedingsbeperking van zijn instituut vandaan te houden. Brieven Beth – College van curatoren UvA, 6 april 1957 (Baltimore); Curatoren UvA – Beth, 17 april 1957. Berkeley: brieven A. Tarski – Beth, 24 mei 1957. University of California – Beth, 3 september 1957. Beth niet naar Californië: Telegram Beth – L. Constant (Dean UC Berkeley), 29 november om 20 uur 23.

[162] Brief Beth – A. Tarski, 15 oktober 1957. Teveel onbekwamen probeerden zich in de stoel van Pos neer te vleien. Hierdoor voelde Beth zich in zijn positie bedreigd. Het werd uiteindelijk een harde strijd waaruit de door Beth aangedragen J. Staal — een vroegere leerling van Beth, die voor studie lange tijd in India geweest was — als overwinnaar te voorschijn kwam — ten detrimente van de hegelianen (J. Hollak). Dit had wel een andere omschrijving van de leeropdracht tot gevolg. Van 'Geschiedenis en systematiek der nieuwere en nieuwste wijsbegeerte' in 'Systematiek der wijsbegeerte en algemene wijsbegeerte (waarbij inbegrepen vergelijkende wijsbegeerte)'. Of zoals in de brief H. Oldewelt (hoogleraar wijsgerige anthropologie) aan Beth en W. Wiersma (hoogleraar filosofie van de klassieke oudheid) van 10 november 1960 puntig opmerkt werd: "Eist de tot nu toe vigerende opdracht dat men achter zich kijkt om voorwaarts te kunnen gaan, Staal realiseert de andere methode: dat hij rondom zich ziet."

bezigheden. het laatste traject in Beths leven werd bepaald door zijn Euratom-project. Hieraan zal in de loop van dit werk een heel hoofdstuk gewijd worden.

### 2.3.5 Huiselijke aangelegenheden

Al deze werkzaamheden van Beth werden steeds afgeremd door zijn niet al te beste fysieke constitutie. Hij had veel last van aandoeningen aan de luchtwegen waaronder astma, bronchitis en longontsteking. Ondanks deze aandoeningen was Beth altijd in een walm van sigarenrook gehuld. Of zoals een betrouwbare bron meldde: 'een grote sigaar, waaraan een klein mannetje hing, gehuld in een pak dat waarschijnlijk onder zijn matras gelegen had'. In die tijd werden, gezien het voorgaande, jammer genoeg de hoogleraren hun vergeten sigarenpijpjes nog achterna gedragen.[163] Beth was op zijn tijd een liefhebber van de goede zaken des levens, naast zijn sigaren een smakelijk diner en een goede wijn — hiervan zijn vele schriftelijke getuigenissen in het archief te vinden. De pot van de Beths viel altijd in de smaak. Als Kleene weer eens voor enige tijd in het verzuurkoolde Duitsland was, beidde hij ongeduldig de tijd tot hij weer bij Beth de overheerlijke éénpansgerechten naar binnen kon smikkelen.[164] Buiten zijn werk om was Beth een liefhebber van klassieke muziek. Zelf speelde hij viool, zijn vrouw zong.[165] Zijn liefde voor de muziek ging tot en met het romantische repertoire. Beths protesten tegen het opnemen van de stuitende atonale muziek van na de eeuwwisseling in de klassieke abonnementsseries van het Concertgebouw zijn echter op niets uitgelopen.

De oorzaak van Beths ziekteverschijnselen valt misschien op te maken uit de brief die zijn huisarts D.K. de Jongh aan Beth verstrekt had voor het geval hij op reis ergens last van kreeg en daardoor een arts zou moeten raadplegen: [166] "The background of his asthma is chronic nervous stress in a highly intelligent man who constantly produces an almost incredible amount of work." Het is natuurlijk maar de vraag of dit een juiste diagnose was; Beth had al als kind erge last van de luchtwegen. Beths slechte gezondheid valt ook af te lezen uit de al genoemde brief aan A.H. Fraenkel waarin Beth de lange periode van niet direct wiskundig bezig zijn verklaart: [167] "another factor is probably a considerable improvement in my state of health, which previously did not allow me to concentrate on mathematical problems as long as seems to be necessary in most cases. When I met with the Padoa problem I decided to use it as a test case, and the result has been certainly encouraging."

[163] Brief M.E. 't Hart (KNAW) – Beth, 10 april 1956: "Uw sigarenpijpje gaat hierbij. Het is in de zaal gevonden." Beths bestellingen waren niet misselijk. Zo werd door hem bij de Tabaks en Sigarenfabriek Scharijvel op 16 januari 1958 weer eens een bestelling van 300 stuks No. 48 Maestro Noble geplaatst.

[164] Afspraak éénpansgerecht op 8 april 1959 om 18.00 uur: brief S.C. Kleene – Beth, 23 maart 1959, (Marburg/Lahn).

[165] Vele gezellige samenzijns van Beth met zijn vakbroeders uit binnen- en buitenland werden door haar opgeluisterd.

[166] Verklaring D.K. de Jongh, dd. 5 december 1951.

[167] Brief Beth – A. Fraenkel, 31 januari 1954.

Het fysieke gestel van Beth is zelfs een keer uitgespeeld bij een poging om hem als 'visiting professor' in Austin (Texas) aan te trekken. Niet alleen werd hem daartoe een riant salaris aangeboden, tevens werd door J.R. Silber vermeld dat men in Austin te maken had met een goed klimaat voor astma-lijders.[168]

Over Beths omgangsvormen kan gezegd worden dat hij de indruk geeft over het algemeen een aimabel mens te zijn geweest. Toch werden er wel eens mensen door zijn optreden geërgerd, zoals P.H. van der Gulden in 1939 opmerkte: [169] "Misschien — houd mij dit ten goede — is je toon soms reden, dat sommige lieden zich nodeloos geprikkeld voelen: je hebt wel eens de allure of jij alleen alles al doordacht en afgedaan hebt, die mij amuseert, maar die anderen — niet alleen Franken, ik weet 't — soms zeer hindert." [170]

Zelfkritiek op eigen handelingen of denkbeelden was soms niet Beths sterkste punt, laat staan het accepteren van kritiek van anderen. Duidelijk komt dit naar voren bij zijn houding op een recensie in de Journal of Symbolic Logic met betrekking tot zijn eigen werk. Dit werd door hem wel zeer uitvergroot door zijn kritiek op het redactionele beleid van de JSL, dus op A. Church.[171] Na vele brieven met zijn grieven aan tal van personen nam Beth afscheid van zijn redactionele werk als 'consulting editor' en recensent voor de JSL Aan hem waren niet de woorden van Kleene besteed: [172] "It is my impression that in America it is the custom to have more give and take in criticism between recognized scholars, without offense being given or prestige being damaged, than in Europe." En zeker niet Church's: [173] "Frankly, a man who publishes his work thereby submits it to general opinion, and must be prepared to find that some opninions at least are not in accord with his own."

Beth kon zich bovendien bij tijd en wijle zeer kwaad maken, of om in de woorden van hemzelf in een brief aan S.C. Kleene te spreken: [174] "It is a fact that under

[168] Brieven J.R. Silber (Chairman Department of Philosophy, Univ. Texas, Austin) – Beth, 1 april 1963; afwijzing door Beth: Beth – Silber, 27 april 1963. Indertijd had Silber van R. Montague vernomen, dat Beth aan deze kwaal leed.

Niet alleen Beth had met oneigenlijke kwalificaties te maken, ook Bochenski. Carnap had zich er voor ingezet een Flint professorship bij filosofie aan de UC Los Angeles voor Beth los te krijgen. De buit ging echter naar Bochenski, volgens Carnap in zijn brief van 3 januari 1958 (Los Angeles) aan Beth vanwege: "Among the other reasons the department was intrigued with the fact that Bochenski is a specialist on dialectical materialism and has proposed to lecture about this here. Since, due the strange political situation, American professors shy away from giving such courses, having it come from an absoluteley 'safe' source (in priest's robes!) has its great attraction." Bedoeld is de periode net na die waarin het duo Nixon – McCarthy opereerde.

[169] Brief P.H. van der Gulden – Beth, 13 juli 193(?)9, (Amsterdam).

[170] Franken was de promotor van Beth. P.H. van der Gulden haalde zijn amusement overigens van twee kanten: achter Beths rug stookte hij bij Franken.

[171] Beth wilde bovendien wetenschapspolitiek gaan bedrijven d.m.v. de JSL, iets waarvan Church niet gediend was.

[172] Brief S.C. Kleene – Beth, 10 juli 1951

[173] Brief A. Church – Beth, 11 maart 1949

[174] Brief Beth – S.C. Kleene, 19(?). Bij deze brief geen datum, maar wel geschreven (en verstuurd??) naar aanleiding van onenigheid met A. Church over het redactionele beleid van de JSL, i.h.b. over de recensies.

certain circumstances I am liable to extremely violent reactions, but resentment of the durable kind is rare; this develops only in those cases in which I am sure that there is a definite intention to harm. I may add that, in these cases, I use not to show my reactions and patiently wait for a chance to retaliate." Dit laatste is natuurlijk wel de handelswijze van elk verstandig mens, alhoewel Beth wellicht al te vaak samenzweringen jegens zijn persoon en werk vermoedde. In de loop der tijden zou dit hem toch nogal wat onenigheid met anderen bezorgen.

Daarnaast had hij in zijn eigen werk een gedrevenheid die hem wellicht wel eens al te snel tot publiceren bracht. Als een kenmerkend citaat kan het volgende gekozen worden: [175] "My main objection is that it [JSL] publishes so slowly which is quite contrary to my temperament." Men kan hierbij opmerken dat dit niet alleen op ingestuurd materiaal sloeg, maar ook betrekking had op zijn nog aan het papier toe te vertrouwen denkbeelden. Zijn bij andere Nederlanders, waaronder H. Pos,[176] verbazing wekkende grote productiviteit op het gebied van de geschiedenis en de wijsbegeerte der wiskunde werd volgens Beth[177] door de volgende zaken vergemakkelijkt. Bij alles wat hem interessseerde en wat hij bestudeerde, maakte hij altijd uitvoerige aantekeningen: dit vergemakkelijkte het schrijven later. Daarboven voelde hij een sterke drang om mee te werken aan verspreiding van denkbeelden die hem belangrijk voorkwamen. Ethische motieven, inzonderheid een gevoel voor verantwoordelijkheid en rechtvaardigheid speelden volgens hem eveneens een regulerende rol.

## 2.4 Lange noten

**Tarski en de leer van de prioriteiten.** Volgens Staal (1965) vond de eerste ontmoeting van Beth met Tarski plaats gedurende de *Entretiens d'Amersfoort* in 1938. Volgens Beths *Curriculum Vitae* en Beth (1960*b*) al een jaar eerder te Parijs. Dit zal wel het *Congrès Descartes* van 1–6 augustus 1937 geweest zijn. Beiden gaven daar een lezing.[178] Zijn eerste aanvaring met Tarski had Beth in 1937.[179] Hierin onderhield Tarski Beth over prioriteiten. Ook met betrekking tot Carnap (en Gödel),[180] had Tarski blijkens die brief zo zijn grieven: "Auch der Satz über die Widerspruchsfreiheit der Logik mit dem Unendlichkeitsaxiom (also der klassischen Analysis), der Satz, den Sie Carnap zuschrieben und der nur mit Hilfe sehr starker Mittel begründet werden kann, stammt von mir — ich habe ja hauptsächlich zu diesem Zweck die Wahrheitsdefinition konstruiert. Das Ergebniss stammt von 1929 (also noch vor den Ergebnissen Gödels), ich habe darüber noch im J. 1930 in polnischer Sprache und in 1932 in deutscher Sprache berichtet." [181] G. Gentzen merkte naar aanleiding hi-

[175]Brief Beth – A. Tarski, 29 mei 1953.
[176]Brief H.J. Pos – Beth, 23 mei 1950, (Haarlem).
[177]Brief Beth – H.J. Pos, 24 mei 1950.
[178]Zie ook Peckhaus (1999).
[179]Brief A. Tarski – Beth, 19 februari 1937, (Warszawa).
[180]Kurt Gödel,1906 – 1978
[181]'1932 in deutscher Sprache': bedoeld is Tarski's artikel, dat in de brief van Gentzen vermeld wordt. Beths artikel onder Tarski's vuur is Beth (1938).

ervan op: [182] "Mit der Widerspruchsfreiheit der Stufenlogik is es mir leider ebenso ergangen wie Ihnen; ich erfuhr nämlich nachträglich, dass im wesentlichen dasselbe schon in einer älteren Arbeit von Tarski, 'Einige Betrachtungen über die Begriffe der $\omega$-Vollständigkeit', Mhf. f.Math. u. Phys. 40, 1933, S. 97–112, durchgeführt wurde."

**Commissie Hoger Onderwijs, Sassen.** Notulen 13e vergadering van de cie. Hoger-Onderwijs: [183] "Wat betreft de wijsbegeerte deelt professor Sassen mede, dat de bedoeling is dat hiervoor een vakopleiding komt in de Centrale Interfaculteit. Voor een eigen candidaatsexamen wordt de studie in de wijsbegeerte een echte vakstudie, aansluitend bij de vakstudie in elk der faculteiten. Hier wordt dus gebroken met het systeem van het geldende statuut, dat elk candidaatsexamen tot een doctoraalexamen wijsbegeerte toegang geeft. Prof.dr Lam [gast van de RU Leiden] acht deze opzet wel aanvaardbaar."

Hiernaast kan men het Rapport van de Commissie voor Hoger-Onderwijswetgeving leggen: [184] "De in het eerste lid bedoelde scholen zijn voor het afleggen van de examens: [...] in de centrale interfaculteit de afdeling A en de afdeling B van een gymnasium, de hogere burgerschool A en de hoger burgerschool B, met dien verstande dat tot de examens in de wijsbegeerte alleen het eindexamen in de afdeling A van een gymnasium toegang geef,"

En tenslotte het commentaar in de brief van de nu sterk door Beth gewantrouwde en zeker niet meer als neutraal tussenpersoon geziene Sassen: [185] "In het door de Commissie Hoger-Onderwijswetgeving aan de Voorzitters van de faculteiten wis- en natuurkunde voorgelegde ontwerp-statuut voor die faculteit was in de lijst der hoofdvakken bij het doctoraal examen wis- en natuurkunde de wijsbegeerte weggelaten; de vergadering van 20 December 1951 heeft daartegen geen bezwaar gemaakt." Dit was net het gebied, waaraan Beth zijn bestaansrecht binnen Wis- en Natuurkunde ontleende.

**Hoger Onderwijs-wet, C.G. van Arkel, A. Heyting.** Brief C.G. van Arkel (voorzitster Faculteit Wis- en Natuurkunde, Univ. van Amsterdam): [186] "Zoals bekend werpen de onderzoekingen over de grondslagen der wiskunde, evenals de relativiteitstheorie en de quantenmechanica een geheel nieuw licht op de kennistheorie en de Logica en hebben zij daardoor ook [op] andere delen der Wijsbegeerte diepgaande invloed. Om over deze zelfstandig te kunnen oordelen is het niet voldoende, van de resultaten der moderne theorieën uit populaire uiteenzettingen kennis te nemen, maar is het noodzakelijk, deze theorieën met inbegrip van het omvangrijke wiskundige apparaat te beheersen, hetgeen alleen bereikbaar is voor hen, die de HBS-B of Gymnasum-B

[182] Brief G. Gentzen – Beth, 12 december 1936, (Göttingen). Veel extra's gaf het artikel van Beth nu ook weer niet — zie hiertoe ook Church (1937). Later kon Beth op zijn beurt m.b.t. dit onderwerp gaan terechtwijzen: Kreisel (1954*b*) sloeg Beth over en schreef alles aan Setsuya Seki toe (brief Beth –Kreisel, 24 april 1954). Beth had succes: een erratum door Kreisel in Mathematical Reviews 15, p. 1139.

[183] Notulen 13e vergadering van de commissie voor Hoger-Onderwijs, tezamen met de voorzitters van de faculteiten Wis- en Natuurkunde, op 20 december 1951 ten departemente.

[184] Rapport Cie. Hoger-Onderwijswetgeving, ingesteld bij beschikking van de minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschapen, van 18 Mei 1949, No. 98527, Afd. H.O.W., 's-Gravenhage (Staatsdrukkerij- en Uitgeversbedrijf), 1951: Afd. III, Hfdst. II, art. 91.

[185] Brief F.L.R. Sassen – Beth, Heyting, 23 juni 1953, ('s-Gravenhage).)

[186] Brief C.G. van Arkel – Voorzitter Commissie HO-wetgeving, 14 mei 1952.

hebben gevolgd. Nederland neemt, wat betreft de Wijsbegeerte der exacte wetenschappen, een eervolle plaats in, die het zal verliezen, als de in artikel 91h voorgestelde regeling ingevoerd wordt. De beoefening der Wijsbegeerte zal dan van de meest actuele problemen worden afgesneden. De tegenstelling tussen de beoefenaren der exacte wetenschap en die der Wijsbegeerte, die in de laatste decenia bezig was, overbrugd te worden, zou opnieuw worden verscherpt, hetgeen zowel voor de studie der Wijsbegeerte als voor die der exacte vakken een nadeel zou zijn"

De brief van van Arkel had precies zo door Beth opgesteld kunnen zijn. Heyting gaf als antwoord op de brief van Sassen van 23 juni 1953 naar hemzelf en Beth: [187] "De thans voorgestane regeling maakt de wijsbegeerte tot een vak naast vele andere vakken. In plaats van ze te verheffen tot de plaats, waar diepere bezinning op de waarde en de draagwijdte van de op alle gebieden van wetenschap verkregen resultaten mogelijk wordt gemaakt. Daardoor wordt de instelling der Centrale Interfaculteit, die ik als een grote vooruitgang heb beschouwd, voor mij vrijwel waardeloos."

**Beths maatschappelijke stellingname.** Beth had ook buiten de wetenschap weinig op met een verengde dogmatische houding, hetgeen o.a. uit het volgende citaat blijkt: [188] "Dit geldt ook voor het volgende punt, dat ik echter wel moet aansnijden, omdat dienaangaande onzekerheid en misverstand is gebleken. Ik ben Nederlands Hervormd opgevoed en door een predikant van de ethische richting 'aangenomen', maar zou nu niet meer als lid van een kerkgenootschap willen worden aangemerkt. Dit vloeit voort uit twee overwegingen.

Ten eerste voel ik niets voor de in de N.H. Kerk ingevoerde (resp. weer effectief te maken) leertucht. Ten tweede heb ik een afkeer van het bestaan van kerkgenootschappen, gefundeerd op een gefixeerde domatiek (dit is een geïmproviseerde formulering), die altijd tot schismatiek en sectarisme moet leiden.

Wanneer ik, anderzijds, de mensen in Christenen, Joden, Boeddisten, [...] zou moeten indelen, dan zou ik me zonder aarzeling tot de Christenen rekenen. Dit geldt overigens voor velen van hen, die men thans als Humanisten aanduidt; voor het Humanisme voel ik dus niet, al kan ik het bestaan van de beweging begrijpen."

Op maatschappelijk gebied liet Beth zich zien als liberaal; socialisme en communisme hadden niet zijn voorkeur: [189] "In het sociaal politieke vlak ben ik fel gekant tegen extremistische doctrines als fascisme en communisme maar sta ik ook zeer kritisch t.o. van het socialisme in het algemeen, dat $1^o$ deze doctrines naar mijn mening heeft voortgebracht en $2^o$ ook in zijn gematigde vormen de vrijheid in gevaar brengt." Voor Beths opvattingen omtrent het begrip van vrijheid kan men wellicht terugverwijzen naar sommige denkbeelden van de door Beth zo bewonderde K.R. Popper.[190] Dat de Universiteit van Amsterdam soms als een rode of een Leninistische universiteit omschreven werd vond Beth niet erg prettig, zoals blijkt uit zijn reactie op de brief van H. Reith.[191]

---

[187] Brief A. Heyting – F.L.R. Sassen, 7 juli 1953, (Laren).

[188] Brief Beth – F.L.R. Sassen, 11 november 1958.

[189] Brief Beth – F.L.R. Sassen, 11 november 1958.

[190] Zie hiertoe Beths recensie van Poppers *De vrije samenleving en haar vijanden, 1 en 2*: Vijanden der vrije samenleving, Sociale ingenieurskunst, in *Elseviers Weekblad* van 12 mei 1951.

[191] Brief H. Reith (Dean filosofie, Notre Dame U.) – directeur filosofie UvA, 17 februari 1959, (Notre Dame): Beth – H.M.J. Oldewelt, 2 maart 1959; Oldewelt – Beth, 1 maart 1959, 8 maart 1959.

Beths houding in de Tweede Wereldoorlog is al voldoende besproken in dit hoofdstuk. Over zijn houding met betrekking tot de in zijn tijd spelende Indische kwestie valt weinig te zeggen, brieven van zijn hand ontbreken.

# Hoofdstuk 3

# Methodologie en filosofie

*"Als wetenschap wordt aangemerkt een geheel van wetenschapsgebieden dat in ieder geval de wiskunde, de astronomie, de physica, de klassieke philologie en de vergelijkende en historische taalwetenschap omvat; tot de wetenschap wordt mede gerekend ieder gebied van intellectuele activiteiten en van daaruit voortvloeiende uitspraken, dat tot stand komt op grond van dezelfde of soortgelijke methoden als de reeds genoemde, dat een vergelijkbare mate van autonomie bezit, en dat in staat is tot een onbevangen verkeer met andere wetenschapsgebieden."* [1]

## 3.1 Filosofie en wetenschap

Als titel van het hoodstuk is voor methodologie en filosofie gekozen. Bij Beth is de waardering voor filosofie nogal eens afhankelijk van zijn methodologische eisen. Dit primaat van de methodologie komt ook vanwege de algemene lijn van deze dissertatie van pas. Bovenstaand citaat laat zien wat Beth in een later stadium van zijn leven onder wetenschap rangschikte.[2] Filosofische bedrijvigheid komt in het citaat in het geheel niet ter sprake, maar in dit hoofdstuk willen wij toch kort op Beths werk op dit gebied ingaan — meer beoogt dit 'tussenhoofdstuk' ook niet. Bij Beth valt algemene filosofie in eerste instantie in twee afdelingen uiteen. Zijn waterscheiding wordt door het citaat geleverd, in 1943 heette het: [3] "[Wetenschappelijke wijsbegeerte], te weten een wijsbegeerte die zich ontwikkelt in nauw verband met de vakwetenschappen en die slechts van de in de vakwetenschappen gangbare werkwijze en betoogtrant gebruik maakt" Daarnaast heeft men tal van mengvormen. Vaak zijn de grenzen niet altijd even scherp te trekken. Een voorbeeld betreft wetenschapsfilosofie:

[1] Uit ms. E.W. Beth, *Nieuwere opvattingen aangaande het begrip wetenschap*, voordracht voor Natuurfilosofische Faculteits Vereniging, Amsterdam, 7 februari 1958.

[2] De aard van deze dissertatie staat niet toe al te diep in te gaan op diversiteit van Beths denkbeelden, zelfs een oppervlakkige kennisneming staat niet op het programma. Dit gemis wordt goedgemaakt door Beth (1959*b*), waar uitgebreid op de diverse onderdelen wordt ingegaan. Daarnaast levert Beth (1953*a*) de nodige aanvullingen.

[3] Brief Beth – L. Hoyack, 28 augustus 1943, (Amersfoort).

wetenschapsfilosofie kan wetenschappelijk op de wijze van het citaat bedreven worden, maar hoeft dit niet.

Toch zal het bij de lezer bevreemding wekken dat in het citaat takken van geesteswetenschap onder wetenschap gerangschikt worden. In de beginperiode van zijn carrière had Beth op eenzelfde wijze gereageerd: [4] "In die tijd hechtte ik vooral waarde aan objectieve wetenschappelijkheid [...] Ik bleef afwijzend staan tegenover de geesteswetenschappelijke methodeleer zowel als tegenover de levensbeschouwelijke wijsbegeerte; hierin kwam mijn aanvankelijke positivistische en neo-critische oriëntering tot uiting." [5] Hierna is Beth zich breder gaan oriënteren, o.a. op het gebied van de ideeëngeschiedenis — dit werd door Beth zijn derde periode, van 1942 tot 1950, genoemd. Daarover zei hij later: [6] "Deze ontwikkeling stelde mij in staat, terug te komen op de reeds vermelde afwijzing van de geesteswetenschappelijke methodeleer en van de levensbeschouwelijke wijsbegeerte, al blijf ik sterk gekant tegen irrationalistische uitwassen."

In het geval van Beth is ook de plaats van de logica van belang. Valt logica onder wiskunde en heeft zij alleen daarop betrekking of is logica breder toepasbaar en niet zeer eng bij wiskunde alleen onder te brengen. Bovendien had men volgens Beth te maken met toenemende breukvlakken tussen verschillende wetenschappen onderling en tussen deze en filosofie: [7]

"Deze vruchtbare wisselwerking werd echter tussen 1750 en 1850 door de ontwikkeling van de wijsbegeerte en de exacte wetenschap onderbroken: 1. De philosophie brak met de wiskunde (Kant, Hegel) en met de natuurwetenschap (Hegel, Schopenhauer). 2. De wiskunde brak met de wijsbegeerte (niet-euclidische meetkunde, verzamelingenleer). 3. Wiskunde en natuurwetenschap werden zich van hun uiteenlopend karakter bewust (G. Boole, W. Whewell)."

Het valt op dat Beth in zijn latere periode een ruime opvatting had van wat onder wetenschap is te verstaan. Daarnaast stond hij niet volsterkt afwijzend jegens levensfilosofie — al kan men, ook volgens Beth, deze niet direct onder wetenschap rangschikken. Bovendien wordt er al aangegeven, zij het soms in negatieve zin, dat er diverse soorten wetenschap zijn. Beth heeft getracht deze denkbeelden uit te drukken in een theorie: de complementaire kengebieden.

### 3.1.1 Complementaire kengebieden

Beth heeft rond het midden van de jaren vijftig van de twintigste eeuw een begin gemaakt met het formuleren van een algemene wetenschapsfilosofie en

[4] Ms. E.W. Beth, *Selbstdarstellung*, Amsterdam, 10 oktober 1958.

[5] In die tijd (en ook daarna) lagen Beths bezigheden niet in het beoefenen van niet-wetenschappelijke wijsbegeerte zoals door hem omschreven. Maar zoals de brief Beth – L. Hoyack van 28 augustus 1943 laat zien, was hij er niet op uit anderen hun bezigheden te ontnemen: "Dat er naast de wetenschappelijke wijsbegeerte in dezen zin, die ik in mijn artikel bij uitsluiting op het oog had, behoefte bestaat en plaats is voor een niet-wetenschappelijke (maar daarom niet noodzakelijk onwetenschappelijke) wijsbegeerte, geef ik gaarne toe."

[6] Ms. E.W. Beth, *Selbstdarstellung*, Amsterdam, 10 oktober 1958.

[7] Typoscript E.W. Beth, *Zuivere rede en hare werkelijkheid, Over de wisselwerking tussen het wijsgerig en het wiskundig-natuurwetenschappelijk denken*, p. 1. Arthur Schopenhauer, 1788 – 1860; Immanuel Kant, 1724 – 1804.

kennistheorie in de vorm van een theorie van de *complementaire kengebieden*. Die theorie is door Beth evenwel nooit uitgewerkt en geadstrueerd, alleen een speculatieve basis rest ons. Chronologisch is het onjuist om hiermee te beginnen, maar het geeft wel een goede indruk van zijn liberale houding en van zijn algemeen wetenschappelijke denkbeelden die impliciet voorkomen in zijn andere arbeid.

Beth onderscheidde een aantal kengebieden, waarvan sommige clusters kunnen vormen. Een voorbeeld hiervan is het cluster logica en wiskunde. Voorbeelden van andere kengebieden zijn de fysica, het zelfbewustzijn en het maatschappelijke leven.[8] Volgens Beth bestaan er onderlinge relaties, maar dat hoeft nog niet volledige herleidbaarheid of afhankelijkheid in te houden. En omgekeerd: [9] "De wederkerige onherleidbaarheid der gebieden kan pas blijken uit het mislukken van de pogingen tot herleiden." Beth zwakte enigzins zijn theorie af door te zeggen dat men een beroep kan doen vanuit een kengebied op andere kengebieden, die complementair zijn: [10] "Maar zij zullen zich uitsluitend beroepen op gegevens van zeer elementaire aard [. . . ] en zullen het steeds zó inrichten, dat zij niet behoeven te treden in dieper gaande beschouwingen." Beth (1959*b*), p. 644, vormt een laatste publicatie over dit onderwerp: daar noemt Beth het een nieuwe versie van het realisme.

In het kader van dit werk gaat de belangstelling in de eerste plaats uit naar logica en wiskunde. Volgens Beth heeft men het hier voortdurend over de hoge graad van zekerheid van de verkregen kennis, maar anderzijds is het kenobject moeilijk te localiseren. Maar is dit cluster wel een onafhankelijk kengebied? Beths antwoord hierop is dat de beginselen van logica en wiskunde wel voor verheldering vatbaar zijn, maar dan alleen door de ontwikkeling van logica en wiskunde zelf. Introspectie, bijvoorbeeld over het principe van het uitgesloten derde, biedt daarentegen geen dieper inzicht.
De gedachte van complementaire kengebieden stond ook Heyting aan: [11]

[8] Deze tendens tot het erkennen van diverse naast elkaar staande gebieden, die soms met elkaar verweven kunnen zijn, komt ook tot uiting in de diverse onderwerpen, waarover Beth publiceeerde of van plan was dit te doen. Al vermeld zijn het niet uitgegeven *Natuur en Geest* (Beth had wel de intentie dit alsnog, zij het in herschreven vorm, op de markt te brengen) en het niet te achterhalen boek over economie. Maar ook wenste hij een boek te schrijven over de Nederlandse wijsbegeerte (brief Beth – H.J. Prakke (van Gorcum Uitg.), 11 oktober 1957): "In de eerste plaats wil ik het wijsgerige leven van onze tijd (te beginnen met, zeg 1900) in zijn volle omvang behandelen, zonder eenzijdig de nadruk te leggen op de een of andere school of richting, en ten tweede wil ik de nodige aandacht geven aan de niet-wijsgerige (sociale, wetenschappelijke, godsdienstige, politieke, . . . ) factoren in de beoefening van de wijsbegeerte, en aan de invloed van onze geschiedenis en van ons onderwijs-stelsel, om maar enkele punten te noemen." Met betrekking tot zichzelf wilde hij ooit nog eens een boek laten verschijnen over de relaties tussen wijsbegeerte en wetenschap, waarin werk van hemzelf over deze onderwerpen uitgemeten kon worden. Door zijn overlijden is dit, door anderen verzorgd, als Beth (1964*a*) uitgegeven. Tenslotte wenste hij een boekje met als titel *Praktische logica* het licht laten zien. Hier waren o.a. de taalkundigen de doelgroep. Posthuum is dit als Beth (1967) verschenen.

[9] (Beth 1953/54*a*).

[10] (Beth 1953/54*a*).

[11] Brief A. Heyting – Beth, 9 januari 1954, (Laren). Zie ook Heyting (1968*b*), i.h.b. p. 151: E.W. Beth en de filosofie der wiskunde.

"Het idee van complementaire kengebieden is verbazend interessant en verdient geloof ik nadere uitwerking. Hoe je een beslissing over de geldigheid van het uitgesloten derde voorstelt, is mij niet helder. Ik geloof veeleer, dat een zekere onbepaaldheid aan dit kengebied eigen zal blijven, in deze zin, dat verschillende standpunten met een verschillende mate aan zekerheid, die door verschillende personen op verschillende wijze zal worden geschat, kunnen worden ingenomen. De ontwikkeling van de verhouding tussen klassieke wiskunde en finiete methoden wijst in die richting."

Heyting vraagt om een nadere uitwerking en in het begin van deze paragraaf is al gewag gemaakt van 'nooit uitgewerkt' en 'geadstrueerd'. Men kan hierop afdingen. Als men 'kengebieden' opvat als theorieën heeft Beth in de loop der tijden wel het een en ander uitgewerkt. Zeker is dit het geval met zijn, nog later in dit hoofdstuk aan te roeren, bespreking van natuurkundige theorieën. Het complementariteitsbeginsel zal daar naar voren treden, nml. in de bespreking van deeltjes en golftheorieën: wat hebben ze gemeen, wat scheidt ze? In de eerste plaats heeft men hiertoe Beth (1948*c*) en Beth (1949*b*), een korte bespreking treft men in Beth (1948*b*), maar ook in Beth (1953*a*) p. 113 e.v. aan. In Beth (1948*b*) laat Beth de deeltjes- en golftheorie in ieder vier deeltheorieën uiteenvallen. Vervolgens gaat hij bepaalde verenigingen en doorsneden van de deeltheorieën beschouwen: soms levert dit wat op, soms ook niets.[12] Bovenstaande is natuurlijk louter interpretatie. In de diverse behandelingen van dit onderwerp treft men geen verwijzingen naar dit soort materiaal aan.

Bovenstaande laat zien dat Beth geen strikt lineair geordende afhankelijkheden voortstond. Dit herhaalde zich met betrekking tot filosofische denkbeelden. Tegenover onverdraagzaamheid, d.w.z. het naar voren brengen van een bepaalde theorie met uitsluiting van andere, jazelfs zonder nadere bestudering van andere, stond Beth afwijzend. Beth zou daardoor vele aanvaringen hebben, vooral binnen de filosofie. Toch verbond Beth eisen aan het beoefenen op academisch niveau van filosofie, en die eisen waren niet anders dan die men aan andere op academisch niveau te beoefenen disciplines oplegt. Daarnaast kan men naar hartelust allerlei denkbeelden er op na houden, als men maar het één niet met het ander verwart. Voor zichzelf verwoordde Beth dit als volgt: [13]

"Onder de philosophen uit het verleden bewonder ik vooral Aristoteles en Leibniz; na hen komen voor mij Plato en Spinoza. Mijn kritiek op deze denkers (en bijvoorbeeld ook op Husserl) geldt hun wetenschapsleer en meer i.h.b. het verband dat zij leggen tussen wetenschap aan de ene en wijsheid en mystiek aan de andere kant. Ik heb echter niet zozeer bezwaar tegen wijsheid en mystiek, als wel tegen het streven, wijsheid en mystiek op wetenschap te funderen of, om het anders uit te drukken, de wetenschap

[12] Zie later in dit hoofdstuk voor enkele van deze problemen. Zie ook Visser (1999).

[13] Brief Beth – F.L.R. Sassen, 11 november 1958. Beth vroeg in de brief Sassen om discretie te betrachten, want: "Ik bedoel daarmee natuurlijk niet, dat ik van mijn opvattingen ter zake een geheim zou willen maken. Maar deze opvattingen vallen buiten het terrein van mijn wijsgerige activiteit en de formulering ervan is dan ook noodgedwongen *zeer* inadequaat." (Cursivering door Beth). Beth wenste alleen op zijn wetenschappelijke merites beoordeeld te worden, niet op grond van de hem al dan niet terecht toegeschreven levensovertuiging; duidelijk komt dit tot uiting in Beth (1964*b*): *Het recht op eigen mening.* Aristoteles, 384 – 322; Plato, 4287 – 347; Edmund Husserl, 1859 – 1938.

geheel dienstbaar te maken aan wijsheid en mystiek. Ik beschouw overigens wijsheid en mystiek, waaronder ik (vrijblijvend geformuleerd) vormen van communicatie met het transcendente versta, als reële verschijnselen, en als menselijk levensdoel. Hierover spreek ik echter niet graag."

Een voorbeeld van hoe het volgens Beth niet moet, valt af te lezen uit zijn controverse met A.G.M. van Melsen. Van Melsen stond een tweesporenbeleid voor ten opzichte van de relatie tussen een vakgebied en de filosofie van zo een vakgebied. D.w.z. de eisen die gesteld worden om de gedane beweringen te staven, kunnen vanuit het gezichtspunt van van Melsen bij een vakgebied anders liggen dan bij de filosofie van zo een vakgebied. In het bijzonder met betrekking tot de relatie tussen natuurkunde en de filosofie van de natuurkunde was van Melsen deze mening toegedaan. Bovendien meende hij dat binnen de wijsbegeerte de eisen gesteld aan presentatie losser dan wel anders zijn vergeleken met andere vakken. Veelal vonden dergelijke gedachten hun oorsprong in de mening dat de wijsbegeerte de werkelijke grondslagen van de wetenschap levert en uitgaat van algemenere, diepere en altijd geldig blijvende inzichten. Een voorbeeld hiervan is het door Beth bestreden, voor eeuwig en altijd voor waar te houden, evidentiepostulaat. De eveneens door Beth (1946) bestreden van Benthem verduidelijkte de geclaimde uitzonderingspositie van de wijsbegeerte als volgt: [14] "Het objekt der wijsbegeerte is te algemeen om aan speciale theorieën op natuurkundig gebied gebonden te kunnen zijn." Dit is een wijsbegeerte, die staat boven de waan van de dag, d.w.z. boven de wetenschap en hare modes. Beth dacht m.b.t. zijn wetenschappelijke wijsbegeerte daar anders over: [15]

"Ik denk me de wetenschappelijke wijsbegeerte als een philosophia perennis, niet in dien zin echter, dat alle essentiële waarheden reeds eeuwenlang bekend zouden wezen, maar in de overtuiging, dat denkers als Parmenides, Plato, Aristoteles, de stoicijnen, Descartes, Leibniz inderdaad inzichten hebben verworven, die den toets ook van een [?] met moderne wetenschappelijke hulpmiddelen kunnen doorstaan, maar die niettemin voor uitbreiding, fundeering, systematiseering vatbaar blijven. [...] [I]k betwist niet, dat er iets is, of dat men daarvan zeker kan zijn (ik ben geen scepticus en geen idealist), maar ik stel de vraag, wat men ermee bedoelt en welke argumenten men ervoor kan aanvoeren."

Tegen van Melsen bracht Beth in: [16]

"[D]eze [de wetenschappelijke werkwijze] bestaat niet alleen in de zogenaamde exacte wetenschappen, maar ook daarbuiten [dus ook in de 'academische' filosofie], steeds

[14] (van Benthem 1938/1939), pp. 12–13.

[15] Brief Beth – L. Hoyack, 28 augustus 1943, (Amersfoort). René Descartes,1595 – 1650; Parmenides, 5e eeuw v.Chr.

[16] E.W. Beth, *Verklaring*, KNAW, dd. 9 april 1956. Tot deze verklaring kwam Beth doordat van Melsen voorgedragen was voor het lidmaatschap van de KNAW. Dit noopte Beth tot tegenmaatregelen waarmee hij dit lidmaatschap afwendde. Pas veel later, toen van Melsen voor Beth niet meer al te stuitende ideeën verspreidde, was Beths oordeel milder en stond hij alsnog van Melsens verheffing toe. Het ongenoegen van Beth werd vooral opgewekt door van Melsen (1954), i.h.b. pp. 17–18 (zie hiertoe ook *Het Handelsblad* van 15 november 1954). En van Melsens lezing *De onderlinge verhouding van natuurphilosophie, algemene wijsbegeerte en natuur-wetenschap* voor de Ned.Ver.Logica van 20 november 1954 (er bestaat een samenvatting, dd. 10 november 1954 (zie Beth-archief).

hierin, dat men de problemen, die men wil behandelen, eerst zo exact mogelijk formuleert, en daarna deze exact geformuleerde problemen met de daartoe voorhanden modellen tracht op te lossen. Zowel de formulering van een wetenschappelijk probleem als de oplossing ervan zijn dus altijd tijdgebonden. [...] Op grond daarvan moet de spreker [van Melsen] dus aan alle wetenschappen elke rechtstreekse waarde voor de kern der wijsgerige probleemstellingen ontzeggen, zodat wijsbegeerte en wetenschap principiëel volstrekt gescheiden worden."

In Beth (1949*b*), pp. 178, 179, werd al opgemerkt:

"The major theme of the work[17] is the increasing discrepancy between science and philosophy, which is conspicuously demonstrated by the rejection [...] of fundamental concepts quite unanimously accepted by men of science. This discrepancy is, in the author's mind, one of the main causes of the downfall of contemporary philosophy which is manifest e.g. in existentialism, and which seriously menaces the future development of Western civilisation."

Voor een deel is volgens Beth dit alles inherent aan de studie van de filosofie: [18]

"Er zijn namelijk aan de studie van de wijsbegeerte enkele zeer grote gevaren verbonden. Het komt voor dat reeds na korte tijd een bepaalde zienswijze zich in zodanige mate van de student meester maakt, dat hij in het vervolg alles wat tot hem komt aan deze ene maatstaf meet en naar vermogen ook de denkbeelden van anderen, met behulp van een zakelijk niet verantwoorde interpretatie, aan de eigen vooropgezette mening assimileert. Het komt vaak voor dat een wijsgeer niet bij machte is, zijn opvattingen op een door anderen begrijpelijke manier uiteen te zetten. Een kenmerkend symptoom van intellectuele vereenzaming is ook de afwezigheid van elk begrip voor de bedenkingen van anderen tegen de eigen opvatting. Dit zijn de *beroepsziekten* die heel goed kunnen worden voorkomen door een verstandige en zinrijke inrichting van de opleiding."

Eens te meer ziet men een slecht onderscheid tussen academisch te beoefenen filosofie en levenshouding bij de bijzondere hoogleraarschappen in de wijsbegeerte, die door allerlei stichtingen en belangengroepen in het leven worden geroepen, juist om hun denkbeelden als 'academisch erkend' onder het volk aan de man te brengen.[19] Beth vond het er op na houden van een niet uitgedragen levenshouding best, alleen had men op academisch niveau niet wetenschap en levenshouding met elkaar te verstrengelen.[20]

---

[17] 'the work', d.w.z. Beth (1948*c*).

[18] E.W. Beth, *Nota n.a.v. de termen theoretische en systematische wijsbegeerte*, september 1956, (cursief door Beth) (en als *Nota*, Amsterdam, september 1956). Zie ook Beth (1961*d*), pp. 75–87, i.h.b. paragrafen 6, 7.

[19] Een aardig voorbeeld verschaffen de professoraten ten bate van het nationaal-socialistisch gedachtengoed — die vervuld werden door T. Goedewaagen en R. van Genechten — maar in dit opzicht zijn ze niet erger dan andere. Ook Beth kreeg in later tijd te maken met voorstellen tot het instellen van bijzondere hoogleraarschappen in zijn eigen faculteit. Hij was daar niet altijd gelukkig mee. Over pseudowetenschap, zie de brief Beth – G. van den Bergh, 30 april 1953.

[20] Brief Beth – H. Oldewelt, 9 november 1957: "Ik ben dus van mening, dat wij nooit bezwaar kunnen maken tegen iemand op grond van zijn levensbeschouwing, maar dat we alleen iemand, die zijn werk dienstbaar maakt aan zijn levensbeschouwing, als ongeschikt voor onze Universiteit kunnen aanmerken. Door een andere houding rechtvaardigen we de

### 3.1.2 Afwijkingen van het rechte pad

In het bovenstaande zijn Beths ideeën over filosofie weergegeven. Men kan deze opvattingen als Beths ijklat m.b.t. diverse filosofische stromingen gaan gebruiken. Beth zelf hield er zeer consequent aan vast, eigenlijk heeft men hem op dit punt verder niet meer nodig. Tegen deze bewering kan worden ingebracht dat wegens Beths grote belangstelling voor ideeëngeschiedenis het interessant is om die voor- of afkeuren in zijn eigen woorden uitgedrukt te zien.[21] Zijn commentaren zullen hier beperkt blijven tot Kant, Hegel en hun opvolgers.

Kant was volgens Beth niet alleen een bron voor het uit elkaar gaan van wetenschap (wiskunde) en filosofie, maar ook had Beth het nodige op diens methodologische denkbeelden af te dingen: [22]

"In de laatste jaren ben ik evenwel door historische studie tot het inzicht gekomen, dat de actueele beteekenis van de traditionele wijsbegeerte in haar geheel genomen — d.w.z., afgezien van op zichzelf bestaande beschouwingen — veel geringer is, dan men gewoonlijk meent. De actueele betekenis van het kantianisme echter is nog veel geringer dan die van de leer van Plato, Leibniz of Hume, al was het alleen maar, omdat het zoo buitengewoon moeilijk is, te weten te komen, wat Kant's meening met betrekking tot een bepaalde kwestie eigenlijk is, en omdat dientengevolge ten aanzien van zijn meening zoo vaak misverstanden en verschil van opvatting bestaat."

Een voorbeeld hiervan werd volgens Beth gevormd door het door Kant geïntroduceerde onderscheid in synthetisch en analytisch. Dit was te danken aan het dooreen halen van begrippen, bovendien lagen in Kants voorstelling van zaken teveel onduidelijkheden opgesloten: [23] "de onderscheiding van analytische en synthetische oordelen [...] is altijd verkeerd opgevat. En daarop berust alles! Men zakt dan ook in Kant weg als in drijfzand." De in later tijd door Beth aangeschreven Stegmüller vond dat het niet zo eenvoudig was om hier iets definitiefs over te zeggen. Volgens hem kwam het begrip 'analytisch' bij Kant in wel vijf verschillende betekenissen voor. Het was Stegmüller evenwel niet duidelijk of deze begrippen met elkaar samenhingen.[24]

Beths belangstelling concentreerde zich in zijn vroege periode op de problematiek van inzichtelijk versus formeel. Dat is overigens een punt van discussie gebleven.[25] Ook Beths promotor J.C. Franken, aanvankelijk kritisch tegenover

---

exclusiviteit van anderen en ondergraven ons eigen fundament."

[21] Beth had wel eens afwijkende meningen op het zuiver wetenschappelijke vlak van de ideeëngeschiedenis. Een voorbeeld hiervan is zijn opvatting — hierin stond hij overigens niet alleen — dat de juiste interpretatie van de presocratici niet uit een 'zijnsleer' bestond, maar uit een poging om tot een beschrijving van de ruimte en verhoudingen te komen. Echt iets bewijzen aangaande of met deze spaarzame fragmenten kan geen enkele partij; het blijft, ook van Beths kant, grotendeels interpretatie.

[22] Brief Beth – G. Mannoury, 1 januari 1946, (Amersfoort). David Hume, 1711 – 1776.

[23] Brief Beth – B. Stonebrink, 25 februari 1945, (Amersfoort).

[24] Brief W. Stegmüller – Beth, (?) 1960, (München). Brief Beth – W. Stegmüller, 23 augustus 1960. Wolfgang Stegmüller, *1923.

[25] Vooral tijdens de nationaal-socialistische periode is deze tegenstelling in Duitsland opgeklopt. De 'inzichtelijke' wiskunde werd als Duits naar voren gebracht. De formelere wiskunde (abstracte algebra, logica) werd als decadent en niet-Duits (joods) ter zijde geschoven.

Beths opstelling, ging tenslotte in voor Beth gunstige zin overstag: [26]

"Ik ben geheel overtuigd geworden van de juistheid van uw standpunt, zoals dit in de hoofdstukken I en II is uiteengezet.[27] Duidelijk blijkt uit uw uiteenzetting de grote vooruitgang, sedert Kant, welke is bereikt ten aanzien van het mathematische en physische ruimtebegrip. Kant zelf heeft de verschillende aspecten niet helder uit elkaar gehouden en deze zelfs, dat blijkt nu, op ontoelaatbare wijze vermengd en verward. In zoverre zijn we dus, mede door uw voortreffelijke behandeling een stap vooruit gekomen, daar het zuiver 'philosophische' aspect een duidelijke beperking heeft ondergaan." [28]

Er is nog een ander punt waarop door Beth indertijd niet zo sterk is ingegaan, maar dat wel — met bijval van Beth[29] — door M. Aebi tot uitdrukking is gebracht.[30] Ook volgens haar waren de voorstellingen van Kant onduidelijk en was het bestuderen van Kant in Duitsland tot een substituut van godsdienst geworden. Bovendien trok zij een lijn van Kant naar Hegel en na Hegel komende filosofen. De haar evenzeer waarderende psychiater C.G. Jung formuleerde dit na lezing als volgt: [31]

"Wenn schon Hegel für das deutsche Denken in ganz ungewöhnlichem Ausmass verderb-

---

Ook Beth kreeg nadien hierover het nodige te horen van zijn Duitstalige correspondenten. Brief H.R. Müller – Beth, 27 september 1949, (Graz): "Ich selbst hatte mich vor meinem Militärdienst (1941–1945) ob der Schwierigkeiten, die ich unter dem damaligen Regime mit meiner logistischen Arbeit hatte — wurde dies doch vielfach als 'Judenmathematik' abgetan — anderen Dingen zugewandt und beschäftige mich auch seit Kriegsende eigentlich nur mehr mit Geometrie, Differentialgeometrie, Nicht-Euklidischer Geometrie usf." Brief H. Scholz – Beth, 24 augustus 1946, (Münster): "Unsere Grundlagenforschung ist während des Krieges durch Herrn Steck von der T.H. München und seinen Münchener Freunden auf das schwerste bedroht worden." Zie hiertoe: M. Steck, *das Hauptproblem der Mathematik*, Berlin, (Georg Lüttke), 1942 (partijdrukkerij): hierin werden Hilbert en navolgers verantwoordelijk gesteld voor de decadentie 'des mathematischen Geistes im Deutschen Raum und in der Welt' Voor de positie van Th. Vahlen, L. Bieberbach (Deutsche Mathematik) en de psychologen E.R. Jaensch en F. Althoff (typen-psychologie), etc.: zie de artikelen van H. Mehrtens (in 1987, 1989) en S.L. Segal (in 1986). Ook Beth had, zij het vanuit en onderwijskundig standpunt, belangstelling voor de typenpsychologie van Jaensch en Althoff; zie hiertoe Beth (1939/40).

[26] Citaat uit brief J.C. Franken – Beth, 8 maart 1941, (Utrecht). Aanvankelijk had Franken zijn bedenkingen tegen de denkbeelden van Beth: brief J.C. Franken – Beth, 5 juli 1935, (Utrecht). Maar Franken ging zich al snel heroriënteren (brief J.C. Franken – Beth, 3 juni 1936, (Utrecht)) en al eerder ging hij er toe over Beths ideeën in zijn onderwijs te gebruiken: brief J.C. Franken – Beth, 21 oktober 1935.

[27] 'hooofdstukken I en II' uit (Beth 1940).

[28] Niet overtuigd bleef van der Waerden. Al in van der Waerden (1926) wordt in stelling XI, p. 4, opgemerkt: "De bewering, dat Kant's opvattingen van ruimte (neergelegd in zijn 'Transcedentale Aesthetik') weerlegd zijn door de ontdekking der niet-Euklidiese meetkunde is onjuist; integendeel: dat de niet-Euklidiese meetkunden in zichzelf niet tegenstrijdig zijn, bewijst slechts dat de axioma's van Euklides geen analytiese oordelen zijn; en dat elke Euklidiese ruimte door verandering der maatbepaling als niet-Euklidiese ruimte kan worden opgevat, bewijst slechts dat de axioma's van Euklides geen oordelen a posteriori zijn. Van der Waerden baseerde zich hiermee op Brouwer (1919) en Kants *Kritik der reinen Vernunft*. In latere correspondentie met Beth bleef hij op zijn standpunt staan.

[29] (Beth 1947*a*). H. Scholz viel Beth bij m.b.t. Aebi.

[30] (Aebi 1947).

[31] Brief (fotocopie, Beth-archief) C.G. Jung – M. Aebi, 2 juli 1948, (Kübnacht-Zürich). Carl Gustav Jung, 1875 – 1961.

lich war, so trifft dies vollends für die Existenzialphilosophie zu: Sie ist in der Tat in Parallele zu setzen mit der weltfremden, politischen Phantasterei, wofür Sie [i.e. Aebi] mit Recht auf Rauchings Buch hinweisen. Das pathologische fängt schon in der Hegel'schen Sprache an und erklimmt die Höhen schizophrener Sympathologie bei Heidegger und seinen Nachbetern."

Beth uitte zijn bezwaren in de volgende woorden: [32]

"Chez nous [Nederland] l'existentialisme sous sa forme heideggerrienne et jaspersienne a été en vogue il y a quinze ans environ. Il va sens dire, que depuis l'invasion boche le crédit de cette sorte de philosophie a beaucoup diminué chez nous. Aussi ce n'est que dans des milieux littéraires très avant-garde (je n'ose dire: snobbiste) que le sartrisme ait causé une sensation. Je suis très heureux de pouvoir faire cette constation, puisque l'existentialisme, tant allemand que français, me semble constituer un signe de décadence. Par conséquent je crois bien que la situation spirituelle en France soit assez critique."

Dit zijn natuurlijk de ergste uitwassen. Loslaten zal men de speculatie in Duitsland wel niet, zoals Tarski tijdens zijn bezoek aan de 'Internationale Tagung Wissenschaft und Freiheit' te Hamburg (23 – 26 juli 1953) aan Beth voorspelde: [33] "I see that 'German metaphysics' has survived nazism and — if it comes to the worst — will survive communism as well". Maar ook de ideeën van N. Hartmann en Husserl konden Beth niet bekoren, zij het dat er volgens hem met Husserl meer aan te vangen was dan met Hartmann.[34] De inhoudelijke logica, waar Husserl om vroeg, werd volgens Beth niet door de filosofie, maar wel door de mathematische logica geleverd.[35]

In Beth (1961*d*) wordt met een indeling in vier groepen als volgt de balans opgemaakt:

" 1. Een reactionnaire groep erkent eenvoudig de nieuwe stand van zaken niet of acht hem wijsgerig niet relevant; deze houding maakt het vertegenwoordigers van verschillende scholen mogelijk aan één van de overgeleverde filosofische stelsels vast te houden.
2. Sommige fenomenologen en vele analytici trachten te komen tot de opbouw van een nieuwe kennisleer van meer beperkte strekking die zich bezighoudt met de inhouden van het natuurlijke bewustzijn en met de formulering daarvan in termen van de gewone omgangstaal en zich niet inlaat met het wetenschappelijke denken en redeneren.[36]

[32] Brief Beth – Bochenski, 24 juni 1946. Zie voor Beth over Hegeliaanse logica ook de 'Lange noten' op het einde van dit hoofdstuk. Karl Theodor Jaspers, 1883 – 1969. Martin Heidegger, 1889 – 1976.

[33] Brief A. Tarski – Beth, 23 juli 1953, (Hamburg, Hotel Reichshof).

[34] Brief Beth – H. Scholz, 8 juni 1951: "In 1948 hörte ich ihn [Hartmann] zufällig in Zürich sprechen; es war ganz unerträglich." Nicolai Hartmann, 1882 – 1950

[35] Volgens Beth lagen Husserls studietijd en dissertatie vóór de grote ontwikkelingen binnen de grondslagen van de wiskunde en de logica. De nieuwere ontwikkelingen in deze vakgebieden zijn de man voorbijgegaan, meer nog, alles aan exacte wetenschap en moderne filosofie is aan hem en het grootste deel van de fenomenologen voorbijgegaan. Zie hiertoe ms. E.W. Beth, *De phaenomenologie in verband met de wijsbegeerte der exacte wetenschappen*, voordracht voor 'Genootschap Plato', Utrecht, 3 februari 1953.

[36] Dit was ongenoegen dat Beth ook ten dele tegen de Engelse analytische filosofen had.

3. Vele vertegenwoordigers van de existentiële richting blijven zich weliswaar bedienen van de traditionele fraseologie van de systematische wijsbegeerte maar hebben niet meer de pretentie, een stelselmatige fundering te leveren voor de eenheid der wetenschappen en daarmee voor de eenheid der beschaving."
4. Beths eigen parochie, d.w.z. de logisten, neopostivisten en grondslagenonderzoekers. Hierover was Beths oordeel milder, maar daar zal hier niet verder op worden ingegaan.

De resultaten van Beths eigen parochie, punt 4, kunnen dienstbaar gemaakt worden aan de filosofie. Beth vond de toepassing van logica binnen de filosofie een onderdeel van zijn concept van wat onder de werktuigen van wetenschappelijke filosofie valt. Er zijn tal van kwesties waarin het gebruik van de logica oplossingen biedt of in ieder geval het probleem duidelijker onder woorden brengt. Een voorbeeld daarvan, het probleem van Locke – Berkeley, treft men aan in het hoofdstuk over deductieve tableaus.

Een verhaal apart vormen de paradoxen. Aan de bestudering hiervan hechtte Beth groot filosofisch belang. Omdat Beths eigen bijdrage aan de paradoxen zelf te verwaarlozen is, zal er verder geen aandacht aan geschonken worden.

### 3.1.3 Significa en taalfilosofie

Een tijd lang heeft Beth sympathie gehad voor de significi.[37] Volgens Beth hebben zij een lichte mate van vermenging van wetenschap en speculatie voortbracht. De significi hielden zich met semiotisch onderzoek bezig: taal gecombineerd met gedrag dat voortvloeit uit een 'talige' communicatie. Taal werd overigens gezien als een onderdeel van het gedrag. Men benoemde het onderzoek ook wel als onderzoek naar 'taaldaden' en een leer der onderlinge verstandhoudingen. Binnen het semiotische ontwikkelingskader gebruikte men het begrip van taaltrap (horizontale taalgradatie), waarbij de 'grondtaal' de primitieve begrippen leverde. Betekenisomschrijving van woorden op een hogere taaltrap kan men geven door middel van woorden uit een lagere. Bij de grondtaal houdt dit reductieproces op. Voor de betekeniselementen kan men ook bij Mannoury terecht met de door hem uitgedachte transformatiemethode of de exhaustiemethode. Hiernaast onderscheidde men een verticale taalgradatie: de ik-, hij-, het-taal.

[37] De 'Kring van Significisten' is voortgekomen (1922) uit het 'Internationaal Instituut voor Wijsbegeerte' te Amsterdam. Vanaf 1937 de 'Internationaal Significhe Studiegroep' , na de oorlog 'Internationaal Significh Genootschap'. Zij waren met hun soort onderzoek niet de enigen. Als verwante groepen kan men volgens Beth de Engelse analytische filosofie, Lady Victoria Welby, de Wiener Kreis, Ernst Mach (1838 – 1916), het Amerikaanse pragmatisme (John Dewey (1859 – 1952), William James (1842 – 1910), C.S. Peirce), Charles Morris aandragen. Brief G. Mannoury – Beth, 15 januari 1942: in tijd en ruimte kan men de voorlopers van de significa van ver weg halen: Indiërs en Grieken: Volgens Beth (in de brief Beth – G. Mannoury, 21 januari 1942, (Amersfoort)) geldt dit voor Grieken meer dan voor Indiërs; In de brief Beth – G. Mannoury, 13 januari 1942, (Amersfoort) wordt nader ingegaan op de 'signifische' positie van Plato (i.h.b. Meno, 7; De Staat, 14). Ten onzent werd de significa in de eerste plaats gedragen door G. Mannoury.

Men had ook een eigen logica ontwikkeld: [38] "en het *waarheidsbegrip*, waarin ik niet anders dan een *relatie* tussen spreker en hoorder kan zien en niet een *interne* eigenschap van een oordeel op zichzelf". De signifische logica kende twee soorten negatie, de uitsluitingsnegatie (Het '$\mu\eta$' der Ouden: emotioneel-volitionele betekenis) en de keuzenegatie ('$o\upsilon$': indicatieve betekenis). Het onderscheid diende zoals zoveel bij de significi in de eerste plaats psychologisch begrepen te worden — dit tot ongenoegen van de beoefenaren van de exacte vakken en zeker van Beth, die geen psychologismen in de logica duldde.

Beth nam al vrij snel afstand van de significa. Dit blijkt uit een brief uit 1949 van Beth aan de besturen van het studiegenootschap van psychische massahygiëne en het ISG. Beth bracht daarin drie punten van kritiek naar voren.[39]

- Men trachtte signifische methoden toe te passen op gebieden, zoals het wiskundig grondslagen-onderzoek, waar ze geen vrucht konden afwerpen.
- Bij de toepassingen op gebieden — zoals taalkunde, psychologie en sociologie — waar dit wellicht wel het geval was, hadden de significi zich teveel laten leiden door vooropgezette ideeën en heeft men niet in voldoende mate kennis genomen van de ideeën van niet-signifische wetenschappers.
- Wat betreft contact leggen met niet-significi is het bij pogingen gebleven.

Beths suggestie was dat men tezeer met een klein groepje op eenzelfde spoor was gebleven. Wel werd steeds meer samenwerking met anderen gezocht. Dit blijkt al uit de deelnemers aan en de onderwerpen van hun naoorlogse conferenties en colloquia. Bovendien had men door het voeren van de redactie van het blad *Synthese* een spreekbuis.[40] Ondanks dat is de significa met Mannoury een kalme dood gestorven. Voorzover de significa aansluiting zocht bij relevante wetenschappen was de significa voor die wetenschappen overbodig, en voorzover de significa dit niet deed was ze eveneens overbodig. Er was nog een positieve beoordeling — eigenlijk meer een Judaskus — van Beth: [41]
"Heel anders zal het oordeel echter luiden, als we Mannoury's signifika beschouwen als een oorspronkelijke speculatief-wijsgerige constructie. Dan kunnen we er vrede mee hebben, dat introspectie en begripsanalyse een empirische fundering moeten vervangen, en dan kunnen we ook de synthese, tot stand gebracht tussen gegevens, aan tal van wetenschappen ontleend, en de resultaten van eigen onderzoek, ten volle waarderen."

Beths belangstelling voor natuurlijke talen was op een andere grondslag gebaseerd. Hij wenste de logica als werktuig te gaan gebruiken. Bovendien had Beth een driehoek van relaties voor ogen, tussen logica, taal en wiskunde. In tegenstelling tot Brouwer was Beth de mening toegedaan dat doordacht formaliseren binnen de wiskunde inherent is aan de wiskunde en meteen een middel om wiskunde te bevatten. Volgens Beth is "De wiskundige taal een integrerend

[38] Brief G. Mannoury – Beth, 6 april 1950, (Amsterdam).
[39] Brief Beth – Besturen ISG, etc., 2 maart 1949.
[40] Dit blad bevatte ook mededelingen en artikelen die verschenen zijn onder het gezag van het I.S.S., het Unity of Science Forum, de Nederlandse Vereniging van Logica en het Industrial Relations Institute.
[41] Beth – besturen ISG, 2 maart 1949.

deel van de wiskunde, ze dankt haar bestaan aan het feit dat men in de gewone taal de wiskunde niet op adequate wijze kan uitdrukken. Daarom moet de leerling van den beginne de wiskundige taal (actief en passief) leren gebruiken." [42] Dat de formalisering een goed middel is om de wiskunde te bevatten blijkt volgens Beth vooral voor het doorredeneren bij die onderdelen waar men aanschouwelijk begint, maar vervolgens tot abstractere vormen overgaat: [43]

"1. Het gebruik van een geformaliseerde taal, waardoor de bij de gewone meetkundige termen bestaande associaties met bepaalde voorstellingen althans verzwakt worden.
2. De constructie van arithmetische voorstellingen voor de meetkunde.
3. De studie van meer abstract wiskundige theorieën, waarbij de geassocieerde aanschouwelijke voorstellingen zwakker en vooral minder specifiek zijn."

Het gebruik van formele en/of wiskundige taal loopt volgens Beth op met een goede beheersing van omgangstaal: [44] "Logisch denken en de beheersing van de taal zijn naar mijn mening niet te scheiden; [...] dat voor mij taalbeheersing iets geheel anders is dan eloquentie." Meer nog: [45] "Immers, het logische denken en redeneren is, zoals reeds werd uiteengezet, een verschijnsel van maatschappelijke, niet van individueel-psychologische aard." En: [46] "Het formeel logisch redeneren berust op een (zoals bekend, in hoge mate onvolledig) parallellisme tussen de regelmatigheden in het denken en in die van het spreken." Beth was natuurlijk niet een voorstander om al vanaf het begin in het onderwijs met een formeel-wiskundig systeem te komen.[47]

Maar niet alleen vanwege de relatie tot de wiskunde was Beth in talen geïnteresseerd. Hij had wel degelijk belangstelling voor het zelfstandig onderzoek naar de natuurlijke talen. Dit komt duidelijk tot uiting doordat hij in zijn, in het hoofdstuk over bewijsmechanisatie te bespreken, Euratom-project ook een werkgroep voor het bestuderen van natuurlijke talen onderschoof. Naast natuurlijke talen ging hij ook niet aan kunstmatige talen en hun structuur voorbij.

Bij het zich afwenden van de significa verdween bij Beth niet de zin tot toepassingen van psychologie. Hij bleef geïnteresseerd in didactiek van de wis-

[42] Citaat uit de brief Beth – S.J. Geursen, 13 augustus 1951. Het citaat is een onderdeel van de vraag of men bij het wiskunde-onderwijs dit moet aanpassen aan de taal van het kind.

[43] Brief Beth – L.N.J. Bunt, 11 oktober 1954; n.a.v. het uitkomen van Bunts schoolboek *Van Ahmes tot Euclides*, Groningen (Wolters) 1954 en n.a.v. Bunts werkzaamheden voor de onderwijscie. Voor het verkrijgen van een beter ruimtelijk inzicht was het volgens Beth niet altijd de beste weg om nog meer aanschouwelijke wiskunde te geven. Beter ontwikkelt men dit door tekenen, handenarbeid en lichamelijke oefening (Beth in 1940 in diverse reacties op de denkbeelden van J. Waterink).

[44] Brief Beth – J. Waterink, 29 maart 1940, (Amersfoort).

[45] Uit Beth (1937/38).

[46] Uit Beth (1937/38).

[47] Beth (1962/63): "Men zal derhalve de naïeve wiskunde niet onbeperkt kunnen besnoeien en men zal de kritische wiskunde zeker niet ongestraft kunnen overslaan [...] Een en ander stemt mij skeptisch ten aan zien van het welslagen van de geruchtmakende pogingen, de verzamelingenleer in te voeren bij het kleuteronderwijs." Hiermee ontsnapt Beth aan de verdachtmakingen van H. Freudenthal (*NRC-Handelsblad*, 13 oktober 1987); deze maakte gebruik van de aloude truc iemand iets in de mond te leggen wat hij nooit beweerd heeft, om dit dan vervolgens te gaan bestrijden.

kunde en de daartoe strekkende psychologie. Dit vertaalde zich in zekere aandacht voor de opvattingen van de leerpsycholoog en kenner van de kinderontwikkeling, J. Piaget, in Genève. Met dit contact met Piaget deed Beth niet heel erg veel, ook niet in het strikt in tweeën gedeelde boek Beth & Piaget (1961) (een psychologisch deel voor Piaget, een logisch deel voor Beth), dat hij samen met Piaget publiceerde.[48] Gezien de aard van dit proefschrift zijn wij echter in de eerste plaats geïnteresseerd in de plaats van de logica in Piagets psychologie en niet in diens verdere psychologische ideeën. Beth stond daar niet bepaald welwillend tegenover, soms dekte hij het toe met de mantel der liefde. Met Quine's[49] "[T]he misgivings induced by Piaget's persistent and evidently incorrigible stupidity over matters of logic" stemde Beth als volgt in: [50] "I certainly do not agree with Piaget's views on logic. He continues the traditional French doctrine that logic is a kind of more refined psychology of thought." Van psychologie in de logica — wat iets anders is dan de bestudering van lerende systemen — moest Beth niets hebben.

## 3.2 Logica en methodologie

### 3.2.1 Logica en wiskunde

**Een tolerant-klassiek mens.** Voor we aan Beths denkbeelden aangaande de relatie tussen logica en wiskunde beginnen, zullen we eerst Beths algemene standpunt bekijken: was hij een platonist, een formalist, een intuïtionist? Een intuïtionist was hij zeker niet, zo leert ons een citaat uit een brief naar K. Schröter: [51]

"In Ihrem Brief bezeichnen Sie mich als 'gegebenen Vertreter der intuitionistischen Begründung der Mathematik.' Ich bin zwar lebhaft am Intuitionismus interessiert und kenne diesen Standpunkt aus geographischen Gründen besser als viele Fachgenossen, möchte aber nicht als Anhänger, geschweige denn als Vertreter betrachtet werden. Ich möchte meinen Standpunkt etwa als tolerant-klassisch bezeichnen."

Volgens eigen zeggen was Beth een tolerant-klassiek wiskundige, gezien de inhoud van zijn eigen geschriften was hij vooral pragmatisch en eclectisch ingesteld. Men kan dan ook uitgaan van de omkering van de vraagstelling: welke filosofische stroming of combinatie daarvan leent zich er het beste toe om te gebruiken als een 'fundering' van de wiskunde; een tolerant-klassieke houding brengt dit al snel met zich mee. Beth onderkende in de verschillende stromingen voors en tegens.[52] Het platonisme is handig als leidraad bij de wiskundige

[48] In de recensie van Mendelson (1969) wordt er zware kritiek geleverd op Piagets deel: het berust niet op experimenteel verkregen gegevens, geen beschrijving van herhaalbare experimenten; bovendien was Piagets werk onduidelijk en slecht gedefinieerd.

[49] Brief W.V. Quine – Beth, 26 februari 1960, (Cambridge, Mass.).

[50] Brief Beth – W.V. Quine, 3 maart 1960.

[51] Brief Beth – K. Schröter, 16 juli 1960.

[52] Ms. E.W. Beth, *Remarks on the philosphy of mathematics*, (ongepubl.; na 1959): "a new version of ontological realism". Maar zie vooral Beth (1959*b*), hfdst. 'Philosophy of mathematics and general philosophy'.

productie, soms gaat men daarin weer te ver. Het nominalisme daarentegen is als principe heel fraai, maar vanuit productief oogpunt weer minder: [53]

"Als Grundlage für die klassische Mathematik, Logik und Grundlagenforschung ist, wie es mir scheint, der Platonismus kaum zu ersetzen; vom Platonismus kommt man zwangsläufig und natürlich auf die Konzeption einer reinen Mathematik und auf die Ausführung derselben. Vom Nominalismus aus kommt man in natürlicher Weise nur zu einem Bruchteil der klassischen Mathematik; für einen mehr oder weniger vollständigen Aufbau muss man auf Kunstgriffe verfallen.[54]

Als Grundlage für die Erfahrungswissenschaften aber ist der Platonismus viel weniger akzeptabel. Er lässt eigentlich den Aufbau derselben nicht zu, wenn man nicht auch wieder auf Kunstgriffe verfällt. Philosophisch erscheint mir somit der Platonismus als problematisch. Es sollte nach m.E. möglich sein, ihn in einer gewissen Synthesis 'aufzuheben', welche dann auch den Erfahrungswissenschaften ihren gebührenden Platz einräumen sollte.

In diesem Zusammenhang ist nun aber, glaube ich, der Versuch einer nominalistischen Grundlegung der reinen Mathematik und Logik, wenn auch in sich nicht ganz befriedigend, sehr wichtig. Denn er wird vielleicht eine Art Umdeutung des Platonismus ermöglichen." [55]

**Intuïtionisme.** Wij zullen niet ingaan op Brouwers, volgens Beth idealistisch getinte, filosofische denkbeelden; daar wilde Beth zeker niets mee te maken hebben.[56] Met betrekking tot Brouwers andere inzichten was Beths houding rekkelijker: [57] "As a matter of fact, the greater part of intuitionistic mathematics, as developed by Brouwer, can be understood as deriving from an urgent demand of complete constructivity, without reference to his idealistic doctrines.

[53]Brief Beth – Scholz, 21 februari 1956. Scholz was een platonist, die volgens Beth vaak veel te ver doordraafde, jazelfs de wiskunde als een soort zijnsleer beschouwde (brief Beth — H. Meyer, 5 januari 1941, (Amersfoort); zie ook Beth (1965*b*), p. 68, met een citaat van Scholz, dat sterk op een geloofsbelijdenis lijkt).

[54]Kunstgriffe: dit was de werkwijze van de 'nominalist' Tarski om toch nog iets met het nominalisme te kunnen beginnen. Zie hiertoe Beths verslagen van het in 1953 te Amersfoort gehouden congres *Nominalisme en Platonisme in de moderne logica*, waaraan naast de nominalist Quine, de intuïtionist Heyting en de realist Beth ook Tarski deelnam. Zie voor een algemener overzicht ms. E.W. Beth, *La réconstruction nominaliste de la logique*, voordracht aan Centre National de Recherches de Logique [Het instituut van R. Feys], Bruxelles, 24 januari 1953.

[55]Beth onderscheidde met betrekking tot de grondslagen van wiskunde naast het platonisme en het nominalisme nog andere stromingen. Binnen de filosofie in bredere zin komen deze stromingen volgens Beth niet zo pregnant naar voren. In bijvoorbeeld Beth (1961/1962*c*), p. 229, onderscheidde hij:

(a) intuïtionisme: geen klassieke logica; (b) klassiek constructivisme: klassieke elementaire logica, bestaan van predicatieve klassen en verzamelingen, de principes conceptueel of ook operatief geformuleerd; (c) operationalisme in engere zin: alleen intuïtionistische logica en bestaan van predicatieve klasse; (d) operationalisme in bredere zin: gaat uit van de intuïtionistische logica, maar verwerpt niet de klassieke logica.

[56]Het is wel eens anders geweest, vooral in de jaren dertig. In bijvoorbeeld Beth (1935*a*) wordt met meer sympathie tegen Brouwer aangekeken. In deze paragraaf (en in deze dissertatie) gaat de aandacht voornamelijk uit naar Beths denkbeelden, die iets te maken hebben met zijn werk m.b.t. de intuïtionistische logica, zodat er geen aandacht aan vroegere denkbeelden van Beth geschonken kan worden. Wel wordt dit gedaan in Visser (1999).

[57](Beth 1959*b*), p. 619.

In Heyting's work, the influence of these [idealistic] doctrines can hardly be found, though occasionally he expresses his agreement with the views of idealistic philosophers like Natorp." [58] Beth (1959*c*), p. 15: "In order to achieve this end [klip en klaar weergeven van intuïtionistische wiskunde] we must, in particular, try to eliminate such subjective, and sometimes even mystical, elements as can be found in most intuitionistic writings."

De filosofische positie van het intuïtionisme werd in Beth (1967), p. 47, nauwer omschreven als: "Anderzijds moet echter worden vermeld dat een opvatting, nauw verwant met de zienswijze van Descartes en van Kant, in verband met het wiskundig grondslagenonderzoek door L.E.J. Brouwer, A. Heyting en hun volgelingen met grote consequentie wordt verdedigd. Dit Amsterdamse intuïtionisme is zeker niet onder te brengen bij het rationalisme, maar past evenmin bij de meer gangbare vormen van het hedendaagse irrationalisme." Met 'de zienswijze van Descartes en van Kant' bedoelde Beth: [59] "Hiermee valt Kant, streng genomen, terug op de reeds door Descartes verdedigde leer volgens welke men in de wiskunde slechts in schijn logisch redeneert maar in werkelijkheid een 'Kette von Schlüssen' uit een met een voortschrijdende constructie gepaard gaande reeks van aanschouwelijke inzichten afleest. Die constructie en die inzichten vereisen echter een in de aanschouwing gegeven en dus bijzonder object." Over intuïtionisme gecombineerd met kenleer had Beth zo zijn eigen ideeën: [60]

"In het licht van bovenstaande beschouwingen [Beths bespreking van nominalisme, formalisme, platonisme en intuïtionisme] wil ik tot slot nog een enkel woord wijden aan de vraag, welk soort kenvermogen aansprakelijk is voor onze kennis van de beginselen van logica en wiskunde. [...] Ik merk thans op, dat termen als 'weten' en 'kennen' met grote omzichtigheid dienen te worden gebruikt. Maar vóór ik op dit punt inga,

[58] Beth vervolgde: "It is mainly in Griss' radicalism [van negatie-vrije wiskunde] and in the curious constructions, given by Brouwer to illustrate the rôle of essentially-negative predicates in intuitionistic mathematics, that the influence of idealism manifests itself." De basis van Griss laat zich kennen uit zijn artikelen 'Over de negatie' in de feestbundel aangeboden aan H.J. Pos in 1948, zijn monografie *Idealistische filosofie* uit 1946 en 'Mathématiques, mystique et philosophie' tijdens het filosofiecongres in 1948 te Amsterdam. Bergsons verwerping van de negatie in de wetenschap speelt daarin een rol. Het merendeel van de artikelen van Griss is echter een technische uitvoering van zijn negatieloze wiskunde en logica. Brouwer (1948) introduceerde in zijn verweer tegen Griss (en van Dantzig) het creatieve subject. Er is een mogelijkheid dat Brouwer technisch er al eerder mee begonnen was in de twintiger jaren, zij het niet onder de naam en niet in de context van creatief subject, maar wel onder die van keuzerij. In 1927 kwam dit in een postuum gepubliceerde lezing, Brouwer (1991), al voor. Vooreerst gepubliceerd in Brouwer (1930), wordt bewezen dat binnen Brouwers systeem voor het 'volle' continuum (bevat zowel wetmatige alsook keuzerijen) er een reëel getal is waarvan de ongelijkheid ($\neq$) met 0 wel, maar de apartheid ($\sharp$, Heyting (1956), p. 19) met 0 niet is te bewijzen. Alleen de wetmatige rijen leveren het gereduceerde continuum. (mondelinge toelichting van J. Niekus, maar zie ook van Dalen (1999), van Dalen (1997).) De mogelijkheid van bovenstaande interpretatie van creatief subject, in Beths taal 'curious construction', was blijkbaar aan Beth (maar niet aan hem alleen) voorbijgegaan. Als Beth het wel bedacht had, dan zou hij waarschijnlijk met nog meer wantrouwen zich tegenover de keuzerijen hebben opgesteld. George Francois Cornelis Griss, 1898 – 1953; Henri Louis Bergson, 1859 – 1941; Paul Gerhard Natorp, 1854 – 1924 (neokantiaan, Marburger School).

[59] Beth (1967), p. 46.

[60] Beth (1953/54*a*).

memoreer ik enkele opvattingen over de aard van de logisch-mathematische kennis. De intuïtionist vat haar op als een vorm van zelfkennis.[61] [...] Om tot een juister inzicht te komen, maak ik, voor een ogenblik, als volgt onderscheid tussen kennen en weten: *kennen* veronderstelt een transcendent ken-object, *weten* niet. We kunnen dan zeggen, dat logica en wiskunde volgens de intuïtionist tot het weten, volgens de formalist en platonist veeleer tot het kennen behoort."

Heyting verzette zich tegen deze opvatting: [62]

"Wiskunde als vorm van zelfkennis, lijkt mij, een star dogmatische, bekrompen, onhoudbare opvatting van het intuïtionisme. Brouwer heeft dit ook nooit zo gezegd. Ikzelf zie de intuïtonistische wiskunde als een cultuurverschijnsel en de kennis er van als vergelijkbaar met de kennis en waardering van wetenschap en kunst in het algemeen. Een bepaald persoon kan aan die cultuuruiting, evenals aan andere, actief of passief deel hebben. Ik ben het wel eens, dat de actieve beoefening van het intuïtionisme in jouw zin tot het weten en niet tot het kennen gerekend moet worden."

Beth stond met betrekking tot taal en logica diametraal tegenover Brouwers denkbeelden, zoals verwoord in diens *Eerste handeling van het intuïtionisme*: [63] 'de losmaking van de wiskunde van de wiskundige taal en logica en de onbegrensde zelfontplooiïng van de wiskundige oerintuïtie'. Brouwers *Tweede handeling van het intuïtionisme* omschreef 'de wijze, waarop men nieuwe wiskundige entiteiten kan scheppen'. De tweede handeling was wel een voortzetting van de eerste, maar toch concreter in die zin dat men van daaruit begon met een wiskundige opbouw. Hieronder vielen de keuzerijen als grondstenen van een intuïtionistische wiskunde.

Beth, hoewel geen intuïtionist, heeft zich uitgebreid met de semantische kant van de intuïtionistische logica beziggehouden, en ondanks afwijzing van bepaalde elementen uit de logica, werd logica door Heyting als relevant beschouwd. Voor de formele kant van het intuïtionisme was Heyting voor Beth het meest voor de hand liggende aanspreekpunt. Door de mogelijkheid van mondeling contact tussen Beth en Heyting is er weinig relevant schriftelijk materiaal bewaard. De correspondentie tussen Heyting en de voortdurend om verduidelijking vragende Kreisel, kan deze lacune ten dele vullen. Kreisel was door zijn houding ook voor Beth degene die hem tot verduidelijking aanzette. Heyting beschreef in zijn brief naar Kreisel van 22 september 1970 als volgt zijn positie tot het intuïtionisme: [64] "I do not consider myself a worshipper of Brouwer, though it is possible that many years of struggle against misunderstanding and superficial depreciation have somewhat stiffened my mental attitude."

[61] Introspectie (of ook directe aanschouwing, inner experience, etc.) is een vaak door Brouwer gehanteerd begrip, maar er wordt niet zelfkennis mee bedoeld.

[62] Brief A. Heyting – Beth, 9 januari 1954, (Laren).

[63] Zie de recentere publicaties Brouwer (1954), Brouwer (1956).

[64] Brief Heyting – G. Kreisel, 22 september 1970, (Heyting-archief: brieven). Intuitionisme houdt overigens niet in dat men geen determinist kan zijn. In zijn verhandeling 'Paradoxen van de mens' stelt Heyting zich op het standpunt dat er geen vrije wil is (ms. A. Heyting, *Paradoxen van de mens*, Heyting-archief onder nr. F23–group F: philosophical notes). Er is door mij in het Heyting-archief geen expliciete correspondentie tussen Kreisel en Heyting aangetroffen aangaande Beths denkbeelden.

De relaties, zoals Beth die zag, tussen logica en wiskunde, en tussen wiskunde en de intuitionistische variant daarvan, worden binnen de correspondentie het best onder woorden gebracht in de volgende brief aan Brouwer.[65]

"Wiskunde en logica zijn niet rechtstreeks als afzonderlijke entiteiten gegeven. Wat ons historisch gegeven is, doet zich voor als een complex van heterogene, maar toch bij elkaar passende, tendenties, activiteiten en resultaten. Uit dit complex laat zich, door een soort abstractie, een component afzonderen, die bij passende theoretische bewerkingen ontwikkeld kan worden tot een algemene logica. Door toepassing van deze algemene logica kan vervolgens het aanvankelijk gegeven complex worden geordend en zodoende doorzichtig gemaakt.

a. Het logisch-mathematisch complex kan niet restloos tot algemene logica worden herleid. Wat weerstand biedt aan deze herleiding kan worden omschreven als de wiskundige conceptie van het oneindige. Een logische opbouw van de wiskunde veronderstelt, behalve de apparatuur der algemene formele logica, op allerlei punten ook een beroep op de wiskundige conceptie van het oneindige.

Hoewel de algemene logica haar oorsprong vindt in een soort abstractie, toegepast op het aanvankelijk gegeven logisch-mathematisch complex, kan zij toch tot een zelfstandig systeem worden ontwikkeld, dat ook los van zijn verband met dat complex begrepen kan worden.

b. Ook de wiskundige conceptie van het oneindige heeft, zoals onder [punt a] reeds gezegd, een hoge mate van zelfstandigheid, maar deze uit zich op geheel andere wijze. Een logische opbouw van 'de' wiskunde moet op deze conceptie steeds een beroep doen, maar put deze conceptie nooit uit en omvat dus steeds ook maar een deel van de wiskunde. Anderzijds is de conceptie van het oneindige ook slechts in zoverre duidelijk, als ze in een logische opbouw van een deel van 'de' wiskunde verwerkt is.

Punt b verklaart, dat er tussen het deel van de wiskunde dat tot een logisch (deductief of axiomatisch) systeem verwerkt is en het in dat systeem nog niet verwerkte 'deel' van de conceptie van het oneindige steeds een zekere spanning bestaat; zulk een partiëel systeem kan ons dus ook nooit blijvend bevredigen. Anderzijds is een verruiming van zulk een systeem alleen mogelijk voorzover we erin slagen een nieuw 'deel' van de conceptie van het oneindige met behulp van passende begripsconstructies toegankelijk te maken voor het logisch redeneren."

En verder in de brief aan Brouwer: [66]

"Er zijn wel punten van aanraking met het intuïtionisme, maar ook tal van verschilpunten. Dit houdt mede verband met het feit, dat ik me niet ten doel stel, bepaalde vormen van logisch redeneren of van wiskundig denken ten detrimente van andere vormen aan te prijzen; het is veeleer mijn bedoeling, na te gaan, hoe verschillende vormen van logisch redeneren, c.q. van wiskundig denken, tot al dan niet rechtstreeks beoogde resultaten leiden."

---

[65] Brief Beth – L.E.J. Brouwer 15 december 1959. Er is geen antwoord van Brouwer aan schrijver dezes bekend.

[66] Brief Beth – L.E.J. Brouwer, 15 december 1959.

**Keuzerijen.** Ondanks de afwijzing van bepaalde aspecten binnen het intuïtionisme, is Beth er toch toe overgegaan zich technisch daarmee te bemoeien. Gaf dit discrepanties?

Beths bezigheden lagen in het vlak van het verschaffen van semantiek en een volledigheidsbewijs voor intuïtionistische logica. Het plan was om dit op een voor intuïtionisten acceptabele wijze uit te voeren, maar niet alles uit het intuïtionisme droeg Beths goedkeuring weg. Op het punt waar men een gebruik van de 'grondstenen' — de keuzerijen — van de intuïtionistische wiskunde verwacht, krijgt men door hem een equivalent van het topologische begrip van omgeving opgediend. Wel werd door Beth een poging ondernomen zijn theorie uit te laten monden in een spreiding tezamen met Brouwers waaierstelling.

De ontwikkeling van een *rij* (sequens) kan men zien als een proces dat in de tijd plaatsvindt. De omschrijvingen door Brouwer op dit punt waren van invloed op Beths latere besluit om de invloed van deze entiteiten in zijn geldigheidsdefinitie niet direct te verwoorden. Beth stond ambivalent tegenover het gebruik van dit in zijn ogen subjectieve element; zo wordt in Beth (1956*d*), pp. 384–385, het woord anthropomorfisme gebezigd; Kleene (1957) was het daar overigens niet mee eens.

Wat was Brouwers bedoeling met de keuzerijen? Volgens Heyting, in een brief aan Kreisel, onder andere: [67]

"It was known for a long time that methods for defining individual sequences (such as have later on be specified by the definition of recursive functions) will never yield more than a set of sequences which is in some sense enumerable. Thus the classical continuum is inaccessible by these methods. The Wahlfolge [keuzerij] meets this requirement: in an entirely free Wahlfolge every element of the continuum is present so to say in potentia. (Of course this is not an exact explanation, and I do not content that it is relevant in Brouwer's proofs; it only illustrates that a Wahlfolge not intended to be restricted to definition in any formal system)."

De vrije keuzerijen waren voor Beth de geëigende interpretatie voor de constructie van zijn Beth-modellen. Dientengevolge kan er dan ook een link gelegd worden met het intuïtionistische continuum en analyse.[68]

Men vindt de vraag naar de constructies terug binnen de intuïtionistisch aanvaardbare *verzamelingen* (*soort, species*). Om hun bestaan te rechtvaardigen wordt meer geëist dan bij klassieke verzamelingen; ze zijn niet los te zien van hun constructievoorschriften. De constructies moeten natuurlijk wel intuïtionistisch aanvaardbare constructies zijn. Dit geldt met name voor de welgeordende verzamelingen die de grondslag vormen voor de bar-stelling, bar-inductie en de waaier-stelling: een geordende verzameling is een geordende verzameling tezamen met de constructie die een dergelijke verzameling karakteriseert als een welgeordende verzameling. Deze inzichten wilde Beth verwerken in zijn intuïtionistische volledigheidsbewijs.

Beths houding deed ambivalent aan, maar dat lag al besloten in zijn denk-

[67] Brief A. Heyting – G. Kreisel, 5 mei 1952, (Oud-Blaricummerweg 5 [Laren], Heyting-archief). Over de keuzerijen later meer.

[68] Zie (van Dalen 1978).

beelden: het willen leveren van een intuïtionistisch aanvaardbaar bewijs zonder al te zeer het intuïtionisme als grondslag voor de wiskunde daarin te willen mengen.

**Zuiverheid van bewijzen.** Bij onderzoekers die zich niet ideologisch met het intuïtionisme wensten te identificeren, worden klassieke en intuïtionistische bewijzen vaak afwisselend gebruikt. Voor Beth en Kreisel waren formeel gezien klassieke bewijzen ook interessant. Kreisel was al eerder de mening toegedaan dat men klassieke bewijzen kon gebruiken om, indien mogelijk, intuïtionistische bewijzen te produceren. Hij was geïnteresseerd in de transformaties (algemene wetmatigheden), die men daarbij moest gebruiken en de metamathematische eigenschappen van die transformaties.[69] Ook had hij geen bezwaar tegen het behalen van klassieke resultaten met hulp van intuïtionistische.[70] Heyting stond niet de systematiserende methode van Kreisel voor en evenmin het met elkaar vervlechten van klassiek en intuïtionistisch: [71]

"[T]he purpose of intuitionists is to take the notion of constructiveness in its widest sense and to build up as much as possible of mathematics on this basis. A fundamental difference is that we do not admit that classical mathematics has a clear sense; hence it would produce confusion to express our results in classical terms. A sharp distinction between small emendations in classical proofs and genuinely new proofs cannot be made."

Volstrekt afwijzend was Heyting ook weer niet, want in dezelfde brief aan Kreisel van 17 april 1952 merkte hij op: "Though there is considerable divergence in aims, I am convinced that your method will give rise to considerable simplifications and to new results also in intuitionistic mathematics, but as yet I am not convinced that they can completely replace the older, more direct methods."

In een later hoofdstuk zullen we zien in hoeverre Beth zich aan al deze adagia hield en hoe hij laverend tussen Scylla en Charibdes bezig was het geleerde in praktijk te brengen. In Beth (1959*c*), p. 15 meende hij: "[W]e ought to beware of premature transfer of methods and results, and we must keep in mind that intuitionistic mathematics is entitled to a formalisation which is fully adapted to its own peculiar character."

[69] Brief G. Kreisel — A. Heyting, 5 maart 1952, (Reading), (Heyting-archief: brieven): "you take classical proofs as hints, indications, for constructing intuitionistic proofs, and do not set up *systematic rules* for making the transformations required [...]; instead you write up the proofs in the subject from scratch. On the other hand, I aim at setting up such rules, but on the whole, I am less concerned with the precise methods of proof used, but rather with the *form* the theorem to be proved (only free variables). The fact on which my transformation rules hinge is this: If $\exists n A(n)$ has been proved, and $A(n)$ *is decidable*, then one can find a recursive integer $n$ such that $A(n)$ holds. A method of doing this is provided by the Hilbert-Ackermann elimination of $\epsilon$-symbols." (cursief door Kreisel)

[70] Brief G. Kreisel – A. Heyting, 5 maart 1952: "I should say that one may produce confusion "

[71] Brief A. Heyting – G. Kreisel, 17 april 1952, (Laren), (Heyting-archief: brieven).

### 3.2.2 Logica en andere wetenschappen

#### Toepassingen van formalismen

Beth zag niet in alles wat op zijn weg kwam een prooi voor formalisering. In dit opzicht kan hij als een tegenpool van P. Suppes gezien worden. Illustratief is Beths briefwisseling met Suppes over algemene meettheorie. Bij het vergelijken van diverse meetsystemen belandt men al snel in algebra en topologie, daar deze beide disciplines zich er zo goed toe lenen om er algemene eigenschappen over meten in uit te drukken. Suppes was hier een groot voorstander van en het zinde hem niet dat mensen zoals P. Destouches-Février niet op deze wijze te werk gingen. Zijn recensies laten dit zien. Beth was een andere mening toegedaan: [72]

"As far as I can see, the real difficulties [binnen volkshuishoud-, ziel- en natuurkunde] are not of a kind which is to be treated by means of an application of axiomatic methods. The same sort of thing happens when a pure mathematician works in applied mathematics; he quickly goes beyond what may be useful in view of the applications, and he neglects matters which for the application are essential."

Eerder was Beth zelf in deze val getrapt. Zo had Beth lang daarvoor enkele van zijn stukken over economie ter controle naar J. Tinbergen gestuurd. Deze vond dat door Beth te weinig uitgegaan was van de denkwereld van de econoom. Naast de formele en wiskundige uitweidingen was er door Beth niet voldoende aandacht besteed aan de economische premissen zelf: [73]

"Er worden op enkele punten verstrekkende stellingen uitgesproken, die m.i. ten dele afhankelijk zijn van premissen, die echter niet genoemd worden. Bij de veelheid van mogelijke premissen omtrent het aantal variabelen dat het systeem vormt en tussen die variabelen bestaande relaties is het echter wel gewenst om op die premissen in te gaan, zelfs met enige uitvoerigheid."

Beth heeft zelf in de loop der tijden pogingen gedaan delen uit andere vakken m.b.v. logica te onderzoeken of te formuleren. Afgezien van natuurkunde en taalkunde heeft hij dit nooit systematisch gedaan. Beth heeft derhalve buiten de natuurkunde nooit meegedaan aan het bedenken van passende 'empirische' logica's. Hij had daar niets op tegen, zoals zal blijken uit een brief aan H.A. Kramers, maar zelf conformeerde hij zich voornamelijk aan de klassieke logica. Een uitzondering vormde zijn beantwoording van de door het Wiskundig Genootschap in 1942 uitgeschreven prijsvraag: *Men vraagt een intuïtionistisch correcten en voor de toepassingen geschikten opbouw van de waarschijnlijkheids-*

[72] Brief Beth – P. Suppes, 12 mei 1954. Patrick Colonel Suppes, *1922.

[73] Brief J. Tinbergen – Beth, 20 oktober 1942, (Den Haag). Jan Tinbergen, 1903 – 1994. In Brouwer (1919) wordt op een amusante wijze gewezen op een soms wel eens al te stringente en het doel voorbij schietende formalisering: "trachten dan ook de formalisten het gebruik van de gewone taal in de wiskunde te vermijden. Hoe goed dit mogelijk is, bewijst de tegenwoordige Italiaansche formalistische school, wier aanvoerder Peano zelfs één zijner belangrijkste ontdekkingen omtrent het bestaan der integralen van reële differentiaalvergelijkingen in de taal der symbolische logica in de Mathematische Annalen publiceerde, met het gevolg, dat ze slechts door enkele ingewijden kon worden gelezen, en eerst nadat één hunner de verhandeling in het Duitsch vertaald had, algemeen toegankelijk werd." Guiseppe Peano, 1858 – 1932.

*rekening te geven.* Beth trachtte een aan de empirie aansluitende waarschijnlijkheidsleer te ontwikkelen met een inbedding in een logische theorie.[74] Hij wilde hierin een semantische component op de wijze van Tarski verweven. Beths syntax was als volgt: "Deze syntax is niets anders dan de algemene wiskundige theorie van de systemen van kansrekening." De semantiek bestaat uit een tweewaardige valuatie op de kansproposities: $P(p) = m$ is waar, als de kans op $p$ van grootte $m$ is. Beth introduceerde een theorie van prognosen, waarmee hij de additieve verzamelingsfuncties hoopte te omzeilen. Von Mises' frequentie-limes theorie geeft aan elke kanspropositie $P(p) = m$ een empirische interpretatie, terwijl Beth deze empirische interpretatie alleen wilde toekennen aan de door een scherpte $h$ begrensde kansproposities $(m - h,\, m + h)$.

Beth baseerde zich op van Dantzig (1941) en Evans & Kleene (1939). Deze berustten op een combinatie van Kolmogoroff (1933), von Mises (1919) en Church (1940).[75] Church is interessant in verband met de extra eisen op de deelrijen: [76] een aan Turing-machines gekoppelde effectieve berekenbaarheid of primitieve recursiviteit. Bij van Dantzig (1941) heeft men de eis dat een rij volledig empirisch bepaald moet worden of een vrije keuzerij in de zin van Brouwer moet vormen.

Beth wilde niet von Mises' onregelmatigheidsaxioma of andere op oneindigheid berustende constructies gebruiken.[77] Bovendien wenste hij tal van axioma's en stellingen (die ook van oneindigheid uitgingen) van de axiomatici buiten zijn theorie te houden. Dit levert dan de vraag op hoe in de algemene vorm stellingen zoals die van Bayes en Bernoulli binnen zijn theorie te formuleren zijn. Juist hierin schoot Beth volgens het jury-rapport te kort: [78] Beth was te schematisch, werkte het geheel niet voldoende uit en bewees te weinig. De door Beth naar voren geschoven eigenschap van deductief niet-afgesloten zijn werd niet voldoende uitgewerkt, de klassieke stellingen werden niet met zijn methode bewerkt, de multiplicatiestelling werd niet behandeld. En om in de woorden van de beoordelingscommissie te eindigen: "Het blijft dus de vraag, of dit gelukt, zonder als hulpmidddel oneindige rijen van gebeurtenissen of althans eindige rijen van onbepaalde lengte in de beschouwingen te betrekken, waardoor hij van intuïtionistisch standpunt in moeilijkheden zou geraken."

[74] Zie onder de 'lange noten' van dit hoofdstuk.

[75] Andrej Nikolajewitsj Kolmogoroff, 1903 – 1987; Richard, edeleer von Mises, 1883 – 1953.

[76] Deelrijen: keuze van indices voor een subrij (deelrij) van een gegeven stochastische rij.

[77] Ook von Mises (1928) ging er niet van uit dat men bij gebruikmaking van delen verzamelingenleer ertoe gedwongen werd de volledige verzamelingenleer toe te laten: "Ein Teil der Mengenlehre? Nein! ... So ist die Wahrscheinlichkeitstheorie niemals ein Teil der Mengenlehre, sondern sie ist die Theorie beobachtbarer Erscheinungen, die in dem Bild des 'Kollektivs' idealisiert wurden." Maar niet alleen von Mises had bedenkingen. In Kolmogoroff (1933) treft men, zij het op bescheidener schaal, bedenkingen aan met betrekking op het als reëel aannemen van alles wat als een uitbreiding uit de verzamelingtheoretische pot komt van de afsluitingen op Borelse lichamen (de volledig additieve lichamen).

[78] D.w.z. in de eerste plaats A. Heyting (zijn schrijfmachine), en verder F. Zernike en A. Droste. Jury-rapport en oplossing van de prijsvraag 12, zie archief van het Wiskundig Genootschap (aanvankelijk opgeslagen op Mathematisch Centrum (Centrum voor Wiskunde en Informatica), tegenwoordig op het Rijksarchief Noord-Holland te Haarlem).

### Logica en natuurkunde

Ook binnen de natuurkunde kan men trachten formele theorieën, met daarin gebruik van logica, op te stellen. Vooral de quantummechanica had Beths aandacht. Juist door de opkomst van de quantummechanica had men op een duidelijke en leerzame wijze te maken met een verandering van dat soort inzichten waar Beth al langer op hamerde: verandering van fysische inzichten die, naast het aspect van dynamiek in wetenschap en filosofie, verandering in logische en filosofische inzichten met zich mee dragen. In Beth (1948*c*) diende de klassieke mechanica voornamelijk om de weg te bereiden voor de quantummechanica, de bij de quantummechanica passende logica en wetenschapsfilosofie.

Beth behoorde tot diegenen die in op natuurkundige theorieën passende logica's naast een syntactische ook een semantische component probeerden te construeren. Beths inbreng was de semantische methode naar Tarski. Als een eerste variant op Tarski's 'is waar' gebruikte Beth (1948*c*) 'is in overeenstemming met de empirie', hetgeen hij verantwoordde met: [79] "Het systeem van de semantische regels [m.b.t. logica voor natuurkundige theorieën] is een zeer gecompliceerde deductieve theorie, die we het best als *theorie van de natuurkundige meting* kunnen aanduiden." En voor de quantumlogica stelde Beth (1948*c*), p. 165: "Er bestaat dus een volledig parallellisme tussen de syntaxis en de semantiek van de quantumtheorie. Alleen niet-complementaire uitdrukkingen kunnen als praemissen aan een deductief quantumtheoretisch betoog ten grondslage worden gelegd, en de bij zulk een betoog getrokken conclusies zijn steeds met elkaar en met de praemissen niet-complementair; alleen niet-complementaire uitdrukkingen zijn voor een gelijktijdige interpretatie vatbaar." Door Beth wordt hier bovendien nog aan toegevoegd: "De volledige opbouw van een semantiek der natuurkundige theorieën vereist een interpretatie van de waarschijnlijkheidsrekening: deze eis is door de ontwikkeling van de quantummechanica al bijzonder urgent geworden."

Er is echter een zekere discrepantie tussen Beth (1948*c*) en de artikelen Beth (1949*b*) en Beth (1960*f*).[80] De eerste die uitgebreid op deze verandering van Beth ingaat is van Fraassen (1970), p. 323.[81] In Beth (1948*c*) gebruikte Beth bovenstaande omschrijving van de verhouding tussen semantiek en syntax en baseerde hij zich voor de quantummechanica op de lineaire operatoren, voor Beth (1949*b*) lag dit anders. Daar werd uitgegaan van Birkhoff & von Neumann (1936) met lineaire deelruimten en was de verhouding tussen semantiek en syntax duidelijker en eenvoudiger gedefinieerd.[82] Hiermee werd nauwkeuriger van Tarski's praktijk uitgegaan. Beth probeerde nu meer in de geest van von Neumann, Strauss en Destouches te werken — de toepassing van meerwaardige logica zoals bij Reichenbach vond hij overigens een doodlopende weg.[83] Deze

[79](Beth 1948*c*), p. 163, cursief door Beth.
[80]Er is nog een Beth (1948/49), maar dit wijkt niet af van Beth (1949*b*).
[81]Voor een algemene bespreking van Beths theorie zij men naar Bastiaan C. van Fraassen, *1941, verwezen.
[82]John von Neumann, 1903 –1957.
[83]Brief Beth – H.A. Kramers, 7 september 1948.

werd dan ook niet in Beth (1948*c*), en later, gebruikt.

Beth (1948*c*) was natuurlijk al veel eerder dan 1948 bedacht: [84] "Het enkele jaren geleden geschreven[e] herlezend, hel ik over tot de opvatting, dat het met behulp van de ruimte van Hilbert mogelijk is, een semantische opbouw van de quantumlogica te geven." De desbetreffende literatuur, waaronder Birkhoff & von Neumann (1936), wordt in Beth (1948*c*), p. 76, vermeld, maar niet in alle duidelijkheid gebruikt. Op p. 133 van Beth (1948*c*) wordt in verband hiermee ook afstand genomen van in hetzelfde boek opgestelde strenge syntactische deductieregels naar Gentzen en geeft hij de voorkeur aan al eveneens door hem geformuleerde 'gevolgtrekkingen' naar Tarski. En hieraan voegt Beth nog toe: "De in hoofdstuk 7 ['De ontwikkeling van de natuurwetenschappelijke theorieën'] ontwikkelde interpretatie is bijgevolg géén analogon van de semantiek." Meteen op Beth (1948*c*) verscheen Beth (1949*b*) als aanvulling en verbetering.

In de eerste instantie ging Beth uit van de klassieke mechanica en haar logica.[85] Er waren geen extra voorwaarden op de samengestelde formules en de deductieregels. De dynamica wordt gegeven door Hamiltons bewegingsvergelijkingen en de Hamilton-functie $H$,[86] de observabelen door potentiële en kinetische energie. Door Beth werd hieraan een mechanisch causaliteitsbeginsel toegevoegd. De causaliteitsregels deden dienst als extra deductieregels aan een verder normaal deductief systeem.

In de herformulering Beth (1949*b*) worden de atomaire formules geformuleerd als $m(m^*, t)$ met de bedoelde interpretatie 'meting van grootheid $m$ op tijd $t$ geeft waarde $m^*$. Deze formulering wordt in Beth (1949*b*) gebruikt voor zowel klassieke alsook quantummechanica.[87]

Beth (1949*b*) gaat voor de semantiek voor de klassieke mechanica uit van positie $q = Q(t, k, l)$ en moment $p = P(t, k, l)$, met $(k, l)$ een paar reële getallen, als algemene oplossingen voor de Hamilton-vergelijkingen. Deze substitueert Beth voor de $q$ en $p$ in $m = m(q, p, t)$ en dit levert $m = M(t, k, l)$ op. Overeenkomstig Tarski's inkledingen van syntax gecombineerd met semantiek definieerde Beth: de propositie $m(m^*, t)$ wordt door het paar reële getallen $(k, l)$ vervuld d.e.s.d. als $M(t, k, l) = m^*$. Hiermee verkrijgt men verzamelingen van reële getallenparen.[88]

[84] Beth (1948*c*), p. 133

[85] Men kan met enkele uitbreidingen er een relativistische mechanica van maken. En met inkrimpingen vanuit de relativistische een klassieke: Het kinematische deel blijft hetzelfde. De invoering van een vaste constante wordt door een juiste definitie weer ongedaan gemaakt. De Lorentz-contractie wordt opgeschoond.

[86] Bewegingsvergelijkingen: $\frac{dq}{dt} = \frac{\delta H}{\delta p}$, $\frac{dp}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta q}$. En verder de Hamilton-functie $H(q; p; t)$.

[87] Beth (1948*c*) werkte voor de klassieke mechanica met een systeem waarin de atomaire formules van de vorm $(q; p; t)$ waren met de bedoelde interpretatie: de bewegingstoestand van een deeltje (stoffelijk punt) wordt op tijdstip t door de grootheden q (positie) en p (moment) bepaald. Men kan dit generaliseren naar $(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n; t)$ met een interpretatie van een n-dimensionale ruimte met n vrijheidsgraden. Bovenstaand causaliteitsbeginsel formuleerde Beth hiermee als volgt: uit de premisse $(q; p; t)$ trekt men de conclusie $(q+\frac{1}{m}pdt; p-\frac{1}{n}qdt; t+dt$, en met de Hamilton-functie $H$: uit premisse $(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n; t)$ de conclusie $(q_1 + \frac{\delta H}{\delta p_1}dt \ldots, q_n + \frac{\delta H}{\delta p_n}dt; p_1 - \frac{\delta H}{\delta q_1}dt, \ldots, p_n - \frac{\delta H}{\delta q_n}; t + dt)$.

[88] Vergelijk ook van Fraassen (1970), p. 328 e.v.

Deductieregel: proposities $A = n(n^*, t')$ en $B = o(o^*, t^\dagger)$ geven als conclusie $C = m(m^*, t)$ d.e.s.d. als elk geordend paar $(k, l)$ van reële getallen dat $A, B$ vervult, dit ook met $C$ doet.

**Quantumlogica.** Het klassieke en het quantummechanische systeem verschillen zozeer van elkaar dat er met twee soorten logica gewerkt moet worden. Beth had hiertoe een pragmatisch standpunt dat ook al aan zijn logische formulering van de klassieke mechanica en de waarschijnlijkheidsrekening af te lezen valt: [89]

"Onder logica in het algemeen versta ik het onderzoek van deductieve theorieën en onder 'een logica' de deductieve structuur van een bepaalde theorie of van een groep samenhangende theorieën. Met een leer van het denken heeft dit niets te maken. In de laatste instantie gaat het over de exacte formulering van een bepaald gebied van kennis. [...] Nu is het eigenlijk niet geheel juist van 'de' deductieve structuur van een bepaalde theorie te spreken. Men kan een gegeven theorie vaak op meer dan één manier deductief formuleren."

De (propositionele) logica binnen de formele theorie van quantummechanica kenmerkt zich door het ontbreken van de distributieve wetten (die zijn er wel bij de klassieke natuurkundige theorieën).[90] Beter gezegd, quantumlogica's gebruiken distributieve wetten onder zekere voorwaarden. Alles wordt bekeken vanuit het oogpunt van de gebruikte (projectieve) meetkunden en de daarmee samenhangende tralies.

Niet iedereen zag meteen het nut hiervan in. Na lezing van Beth (1948*c*) vond Beths vroegere leermeester op het einde van de twintiger jaren, H.A. Kramers, dit verschil in logica maar vreemd:[91] "Vooral interesseert me wat je precies met een 'logica' bedoelt. Ik wil niet zeggen, dat ik precies weet wat ik zelf daar onder zou willen verstaan; het wil er echter niet bij mij in dat klassieke natuurkunde en quantentheorie een verschillende 'logica' aanhangen, al zijn de regels die $P_Q, M_Q, W_Q$ in samenhang brengen natuurlijk andere dan in de klassieke natuurkunde."

De afkortingen $P, M, W$, met i.h.b. $P_Q, M_Q, W_Q$ voor de quantumtheorie, komen uit Beth (1948*c*), p. 91. Beth onderscheidt binnen de quantumtheorie drie stelsels van beweringen:

- $W_Q$: de beweringen, die geformuleerd worden m.b.v. macrofysische terminologie. Zij beschrijven de uitslag van experimenten (de waarnemingsresultaten).
- $P_Q$: de beweringen waarmee m.b.v. $W_Q$ de inwendige toestand van de atomaire structuren beschreven wordt. Volgens Beth was dit de eigenlijke quantummechanica.
- $M_Q$: de beweringen vanuit de gebruikte mathematische formalismen. Ofwel: het gebruikte wiskundige apparaat.

[89] Brief Beth – H.A. Kramers, 7 september 1948.
[90] Zie Birkhoff & von Neumann (1936), p. 831.
[91] Briefkaart H.A. Kramers – Beth, 4 juli 1948, (Oegstgeest).

Het verband tussen $P_Q$ en $M_Q$ werd volgens Beth (1948*c*), p. 135, geleverd door de configuratieruimte [toestandenruimte] (in dit geval van de quantumtheorie de Hilbert-ruimte),[92] het verband tussen $P_Q$ en $W_Q$ door de fysische ruimte en tijd. Hier geven de observabelen moeilijkheden, daar men te maken heeft met een waarschijnlijkheidsdistributie en met observabelen die niet altijd simultaan gemeten kunnen worden

Naast het zoeven gegeven citaat waarin sprake is van 'logica' en 'een logica' meldde Beth verder aan Kramers dat, in dit bijzondere geval, bij een deductieve formulering van beide theorieën er punten van overeenstemming (correspondentie-beginsel) en van verschil (complementariteits-beginsel) zijn. Er zijn volgens Beth twee mogelijkheden om dit in te richten.

- Men houdt voor alles klassieke logica aan, maar dan heeft men:
  - Klassieke fysica met klassieke wetten.
  - Quantummechanica met gequantiseerde wetten. Maar er rollen dan wel vreemd lijkende natuurwetten uit.
- Men maakt onderscheid tussen 'Newtoniaanse' klassieke logica en quantumlogica. In dat geval sluit men beter aan bij de quantummechanica zoals door Bohr en Heisenberg bedreven.[93]

Wij zullen hier niet ingaan op alle details van het systeem uit Beth (1948*c*), voornamelijk zijn algemene denkbeelden zullen ter sprake komen. Aan het volgende willen wij echter niet voorbijgaan: de vorm van zijn atomaire formules, de voorwaarden om aan samengestelde formules te komen en zijn deductieve apparaat.[94] Wij zullen hier beurtelings gebruik maken van gegevens uit Beth (1948*c*) en uit Beth (1949*b*). Zoals bij Beths behandeling van de klassieke mechanica de Hamilton-functie een hoofdrol speelde, zal dit hier de Schrödinger-vergelijking (met Hamilton-operator) zijn.[95] Wij zullen nu naar de beide door Beth gebruikte formuleringen kijken: a. De formulering, waarbij de logica berust

[92] (Beth 1948*c*), p. 106 e.v.

[93] Beth had — in de lijn van zijn vroegere docent H.A. Kramers — een voorkeur voor de Kopenhaagse interpretatie.

[94] Mittelstaedt (1978) geeft quantumlogica weer met dialoogtableaus. Dialoogtableaus zijn gebaseerd op Beths semantische tableaus; op de relatie tussen dialoogtableaus en semantische tableaus wordt ingegaan in het hoofdstuk over deductieve tableaus.

[95] De algemene formulering hiervan gaat uit van de Hamilton-functie $H(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n; t)$ met $E = H(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n; t)$. Hiermee correspondeert een golffunctie $\Psi(q_1, \ldots, q_n, t)$ en wordt $i\hbar\frac{\delta}{\delta t}$ voor $E$ en $\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta q_i}$ voor $p_i$ gesubstitueerd ($h$ constante van Planck, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$). Nu heeft men de algemene gedaante van de Schrödinger-vergelijking $i\hbar\frac{\delta}{\delta t}\Psi(q_1, \ldots, q_n, t) = H(q_1, \ldots, q_n; \frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta q_1}, \ldots, \frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta q_n}; t)\Psi(q_1, \ldots, q_n, t)$. Hierin is $H(q_1, \ldots, q_n; \frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta q_1}, \ldots, \frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta q_n}; t)$ de Hamilton-operator (Messiah (1961), p. 68 e.v.). Al naargelang de context, waarin men werkt, kan de Schrödinger-vergelijking diverse gedaantes aannemen. De variant die door Beth in zijn boek en latere geschriften gebruikt wordt, is $d\vec{x} = \frac{2\pi i}{h}\mathbf{H}\vec{x}.dt$ [en $\mathbf{H}\vec{x} = h\nu\vec{x}$ als vector $\vec{x}$ richting behoudt, waaronder $d\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\lambda = 2\pi i\nu dt$, $\nu$ frequentie]. Beth (1948*c*), p. 108, geeft geen nette afleiding vanuit de algemene gedaante van de vergelijking.

op de lineaire deelruimten; en b. De formulering met een logica die berust op de lineaire operatoren

a.— *De lineaire deelruimten.* In Beth (1949*b*) maakte Beth eveneens gebruik van $m(m^*, t)$ als grondvorm voor zijn atomaire formules voor de quantumlogica. Als algemene oplossing voor de Schrödinger-vergelijking geeft Beth $\vec{x} = \vec{x}(t, \vec{y})$. De observabele $m$ wordt nu gerepresenteerd door de lineaire operator $\mathbf{M}$ met eigenwaarde $m^*$.

Als volgt legt Beth de voorwaarden voor zijn waarheidsdefinitie vast: propositie $m(m^*, t)$ wordt door vector $\vec{y}$ vervuld d.e.s.d. als $\mathbf{M}\vec{x}(t, \vec{y}) = m^*\vec{x}(t, \vec{y})$. Dus ook hier verzamelingen, ditmaal met vectoren.[96]

Beth (1949*b*), p. 182, 183 geeft de relatie weer van zijn voorstelling met een formulering in deelruimten naar von Neumann:
1. "The vectors $\vec{x}$ which satisfy a given phrase [propositie] $A$, constitute a linear subspace $\mathcal{A}$ of the Hilbert space, which in special cases may be void."
2. En nu het gebruik van de operatoren. Beth definieerde zijn systeem vanuit de aanname voor de quantumlogica van interdefinieerbaarheid van de logische operatoren, en wel door de Sheffer-stroke. Beth neemt voor implicatie niet de klassieke versie aan, maar één waarin de voorwaarden van het systeem verwerkt zijn. Voor de hier gebruikte logica is dit $A \to B = \neg A \vee \neg(\neg A \vee \neg B)$, en vanwege $A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B)$ ook $A \to B = \neg A \vee (A \wedge B)$. Voor de Shefferstroke heeft men: $\neg A := A|A$, $A \vee B := (A|A)|(B|B)$. Met deze gegevens kan men de Shefferstroke voor $A \to B$ formuleren. Beth (1949*b*), p. 182 geeft de interpretatie aan onder de Sheffer-stroke: "The vector $\vec{x}$ satisfies the phrase $A|B$ if, and anly if, it is orthogonal to any vector $\vec{x}'$ which satiesfies both phrases $A$ and $B$. Vanwege een beter begrip ook de negatie van $A$, met zijn lineaire deelruimte $\mathcal{A}$, Beth (1949*b*), p. 182: "The vectors $\vec{x}$, which satisfy its negation $\neg A$, will be orthogonal to any vector $\vec{x}'$ of $\mathcal{A}$ and will constitute a linear subspace $\mathcal{A}'$. The linear subspaces $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}'$ are uniquely determined by the phrase $A$."
3. Deductieregel: proposities $A = n(n^*, t')$ en $B = o(o^*, t^\dagger)$ geven als conclusie $C = m(m^*, t)$ d.e.s.d. als elke vector $\vec{x}$, die $A, B$ vervult, dit ook met $C$ doet.[97]

b.— *De lineaire operatoren.* Beth (1948*c*) geeft een verder niet nagevolgd systeem. Met Beth (1949*b*) nam hij er zelf ook nog eens afstand van. Toch is zijn persoonlijke inbreng in Beth (1948*c*) groter en daarom zullen wij een korte samenvatting van enkele punten geven. In Beth (1948*c*) waren atomaire formules van de vorm $P(p, t)$, waarbij $P$ een observabele, $p$ een eigenwaarde van de met $P$ gelieerde (lineaire) operator $\mathbf{P}$ en $t$ een reëel getal (tijd) — i.h.b. staat observabele $H$ voor energie, is $\mathbf{H}$ een daaraan gelieerde operator en is $E$ een eigenwaarde daarvan. De bedoelde interpretatie was: [98] "de observabele $P$ heeft op tijdstip $t$ de waarde $p$." (en Beth vervolgt: "Op deze interpretatie zullen we evenwel geen beroep doen.")

[96]Vergelijk ook van Fraassen (1970), p. 328 e.v.

[97]Een voorbeeld van het werken met Beths deductieve regel vindt men in Beth (1949*b*), p. 183, waar een voorbeeld in de vorm van een bespreking van de Einstein – Podolsky – Rosen paradox wordt gegeven.

[98](Beth 1948*c*), p. 111, e.v.

Notatie: $H, P, Q, \ldots$, staan voor observabelen, $\mathbf{H}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \ldots$ voor (lineaire) operatoren, $E, p, q, \ldots$ voor eigenwaarden van de operatoren. Nu is er een aantal voorwaarden waaraan het predicaat van 'niet-complementair' wordt gehecht. Het niet complementair zijn speelt een rol in de aanvaarding van samengestelde formules en het trekken van conclusies:

1. Als er een vector $\vec{x}$ bestaat die eigenvector is voor de observabelen $H, P, Q$, $\ldots$, en $E, p, q, \ldots$ de eigenwaarden van de met de observabelen gelieerde lineaire operatoren $\mathbf{H}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \ldots$ zijn, dan zijn $H(E, t_i), P(p, t_j)$ niet complementair.
2. Als er een vector $\vec{x}(t)$ bestaat die volgens de Schrödingervergelijking in tijd verandert, waarbij $\vec{x}(t_1), \vec{x}(t_2), \ldots$ eigenvectoren voor de operatoren $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \ldots$ zijn en $p, q, \ldots$ de eigenwaarden, dan zijn onderling de atomaire formules $P(p, t_1), Q(q, t_2), \ldots$ niet complementair.
3. Alles dat niet onder de punten 1. en 2. valt, is complementair.

Stel dat men een samengestelde formule heeft. Dan mogen de atomaire bestanddelen binnen zo een formule alleen uit niet-complementaire proposities bestaan. Verder zijn de formatieregels normaal.

Beth (1948*c*), p. 165: "De verwisselingsrelaties [zie hiertoe Beth (1948*c*), p. 107] bepalen welke uitdrukkingen van de theorie complementair zijn. Alleen niet-complementaire uitdrukkingen zijn voor een gelijktijdige interpretatie vatbaar. De verwisselingsrelaties zijn dus niet alleen voor de syntaxis, doch ook voor de semantiek van de quantumtheorie van belang; ze beheersen de overgang van de quantumtheoretische naar de klassieke terminologie. Heisenbergs onbepaaldheidsrelaties hebben we daarentegen nodig, als we van de klassieke naar de quantumtheoretische terminologie willen overgaan."
De deductieregels vallen uiteeen in twee groepen, (a) en (b):
(a) Normale deductieregels met de volgende extra voorwaarde. Alleen uit wederkerig niet-complementaire premissen valt een conclusie te trekken. De conclusie is niet complementair ten opzichte van haar premissen en ten opzichte van elke uitdrukking die gerelateerd aan die premissen niet complementair is. Een illustratie uit de klassieke natuurkunde: klassieke corpusculaire theorie en de klassieke golftheorie zijn in hun totaliteit onderling tegenstrijdig. Men kan de onderling niet-complementaire premissen afzonderen en evenzo redeneringen die zich alleen daarvan bedienen: dan heeft men volgens Beth niet langer onderling tegenstrijdige redeneringen. Met quantisering (de in de klassieke vergelijkingen optredende grootheden worden vervangen door operatoren) vervalt de strijdigheid tussen de deeltjes- en de golftheorie.
(b) Beth (1948*c*), p. 113, bediende zich van de volgende extra deductieregels:

- Als er slechts één vector $\vec{x}$ is, die tegelijk eigenvector is voor operatoren $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots \mathbf{P}_k$ met eigenwaarden $p_1, p_2, \ldots p_k$, én deze vector $\vec{x}$ tevens eigenvector is voor lineaire operator $\mathbf{Q}$ met eigenwaarde $q$, dan geven de premissen $P_1(p_1, t), P_2(p_2, t), \ldots, P_k(p_k, t)$ de conclusie $Q(q, t)$.

- Als er slechts één vector $\vec{x}$ is die volgens de Schrödinger-vergelijking met de tijd verandert, waarbij $\vec{x}(t_1), \vec{x}(t_2), \vec{x}(t_{k-1}), \vec{x}(t_k)$ eigenvectoren zijn van respectievelijk de operatoren $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots \mathbf{P}_{k-1}, \mathbf{P}_k$, dan geven de premissen $P_1(p_1, t_1), P_2(p_2, t_2), \ldots P_{k-1}(p_{k-1}, t_{k-1})$ de conclusie $P_k(p, t_k)$.
- Als energie $H$ een eigenwaarde $E$ heeft, dan geeft $H(E, t)$ de conclusie $H(E, t')$.

Met het totale pakket kan men een afleidbaarheidsbegrip vaststellen. En hiermee kan men zeggen dat: [99] "In de eigenaardigheden van de vormregels en deductieregels komt de voor de quantumtheorie kenmerkende verzwakking van het mechanicistische causaliteitsbeginsel duidelijk tot uiting."

Met betreking tot de technische 'ins and outs', en dit ook gerelateerd aan de quantumlogica, zijn Beths boek en artikelen — opgezet in de veertiger jaren met betrekking tot natuurkundige theorievorming uit de twintiger en dertiger jaren — verouderd. De door hem gepropageerde algemene methode, toepassing van een aan Tarski gelieerde semantiek, minder. Voor het latere belang van Beth kunnen we Wójcicki (1979), p. 49, citeren: [100]
"The multi-referential approach has been suggested by E.W. Beth (1949, 1960).[101] It underlies the account of empirical theories adopted by R. Montague [in 1962], B. van Fraassen [in 1970], J. Sneed [in 1971], F. Suppe [in 1971], W. Stegmüller [in 1973]. It is also intrinsically incorporated in P. Suppes's method of defining empirical theories as set theoretic predicates, cf. e.g. the definition given in his 'Introduction to logic' on p. 294 which starts: 'A system $\mathcal{P} = < P, T, m, f, [g], s >$ is a system of particle mechanics if and only if the following seven axioms are satisfied'." [102]

**Proposities vs. quantoren.** Bovenstaande sectie heeft betrekking op een propositioneel-logische benadering. Dit leverde controversen op. Sommige logici begrepen niet wat de bedoeling was en bleven naar het predicaatlogische deel vragen. Beths pijn m.b.t. de hem onder ogen gekomen — en tot zijn verontwaardiging telkens maar weer in de JSL gepubliceerde — kritiek op het niet aanwezig zijn van quantificatie was groot. Tot Beths ongenoegen liep de hoofdredacteur van de JSL, A. Church, hierin voorop in zijn recensie van Birkhoff & von Neumann (1936): [103] "But it to be regretted that they have confined their attention entirely to what they call the 'calculus of propositions' (really an analogue of the Boolean algebra of classes), and give no indication how quantifiers might be introduced so as to obtain adequate use of them without reestablishing the distributive law." Daar bleef het niet bij, want m.b.t. Strauss (1936)

---

[99] Beth (1948*c*), p. 113.
[100] Voor een verdere uitleg van Beth, zie o.a. van Fraassen (1970), van Fraassen (1974).
[101] (Beth 1949*b*), (Beth 1960*f*). Het zijn dus wel de artkelen na Beth (1948*c*).
[102] (Suppes 1957): $P$: eindige niet-lege verzameling deeltjes; $T$: tijd (reëele getallen of interval op de reëlen); $m$: waarde van de massa van een deeltje; $f$: de (interne) kracht, dat deeltje $p$ op deeltje $q$ op tijdstip $t$ uitoefent; $g$: de (externe) kracht van $p$ op tijdstip $t$; $s$: positie van deeltje $p$ op tijdstip $t$. $P, T, s$ zijn kinematische begrippen, $m, f, g$ zijn dynamische begrippen.
[103] JSL 2 (1937), p. 44.

merkte Church op: [104] "There is also a discussion of the Reichenbach probability calculus from this point of view, but no treatment of quantifiers."[105] Onder de vragenstellers was later ook C.G. Hempel met zijn recensie[106] van werk door C.F. von Weizsäcker. Hempel kreeg er persoonlijk van langs: [107]

"It is true that complementarity logic, as discussed by von Neumann, is a kind of sentential calculus, but it does not follow that it should (or could) be extended into a kind of quantification theory. Such a theory would be required of the calculus of von Neumann where concerned with, say, the description of the properties or states of single particles. Then we could, starting from expressions describing the states of single particles, pass on to expressions describing the properties and states of the particles in a system by introducing (preferably) numerical quantifiers. However, on account of the special structure of quantum theory, such a step is neither necessary nor (strictly speaking) admissable. In quantum theory we have two procedures for passing on from one-particle to many-particle problems, namely, composition and second quantization. The second procedure is superior to the first.[108] [...] Therefore, I feel ought to draw your attention on the importance of composition and second quantization as substitutes for ordinary quantification. Unfortunately the physicists, besides showing no particular interest with respect to quantum logic, have so far failed to give a satisfactory account to these procedures," [109]

Hempel gaf enerzijds toe: [110] "Your point is most intriguing to me because I have indeed been under the impression that any serious proposal to formulate quantum-theory in the framework of a non-Aristotelian logic would have

[104] JSL 2 (1937).

[105] Van eenzelfde aard m.b.t. quantoren waren de recensies door A. Bennett ( JSL 13, (1948), p. 212) over Beth zelf en over J.C.C. McKinsey, † 1953, door P. Suppes (JSL 19, (1954), p. 52) over P. Destouches-Février.

[106] JSL 23, (1958), pp. 65, 66.

[107] Brief Beth – C.G. Hempel, 6 december 1958.

[108] Beth (1960*f*): If second quantization is applied, then the number $n$ of the elementary particles of which a given system is composed is considered as a physical magnitude and thus characterized by a linear operator $\mathbf{N}$. (This is, presumably, connected with the fact that, from the point of view of classical physics, the energetic effect of adding or removing a single object can be made arbitrarily small and hence, in principle, neglected; thus the *number* of the objects in a system is not properly a physical magnitude. From the point of view of quantum mechanics this is, of course, not correct.)" Onder quantisering verstaat Beth (1948*c*), p. 108, het toevoegen van operatoren aan de observabelen en het opstellen van verwisselingsrelaties tussen de operatoren. Onder tweede quantisatie kan men verstaan het nemen van een operator $\mathbf{N}$ voor 'er zijn $n$ deeltjes zodat, ...'. Hiermee vervalt de noodzaak er quantoren op na te houden. Vergelijk verder de constructie-operatoren in Messiah (1961), p. 434 e.v. (i.h.b. p. 439): Messiah's creatie-operator $a^\dagger$: transformeert een toestand van $n$ deeltjes in één van $n+1$; Messiah's destructie-operator $a$: transformeert een toestand van $n$ deeltjes in één van $n-1$; en de al genoemde operator $\mathbf{N}$; Jauch (1968) onder 'creating operator' met op p. 282 de getaloperator $\mathbf{N}$. J. de Boer, Aanvullingsdictaat College Quantummechanica, Cursus 1969–1970, Constructie operatoren in de quantum mechanica, i.h.b. p. 20 e.v. Er is door mij bij Beth geen precieze omschrijving gevonden van compositie (tensor-product?).

[109] Beth (1960*f*) eindigde met: "It is somewhat depressing that, with respect to the problems under discussion, so little progress is made; it is still more depressing to realize that this may partly due to the fact that some logicians have raised objections by which prospective authors on the subject have been led astray."

[110] Brief C.G. Hempel – Beth, 16 december 1958, (Princeton).

to provide, not only for some plurivalued logic of statement composition, but also for a corresponding modification of quantification theory." Maar vond ook: "[I]t seems to me at any rate that an advocate of non-Aristotelian logic for the formulation of quantum mechanics must indicate that and how the need for a logic of quantification can be avoided, and why a logic of statement composition, together with the quantum-theoretical procedures you mention, should be sufficient; and as far as I can see, neither Reichenbach nor von Weizsäcker even considers the problem." Dit is een fraai voorbeeld van de omkering van de bewijslast. Beth (1948*c*) bedoelde in de eerste plaats een onderkenning te zijn van (en aanval op) een nog steeds onder tal van mensen in zwang zijnde op Aristoteles en zijn navolgers gebaseerde, en in het huidige tijdsbestek verouderde en onjuiste, natuurfilosofie en logica.[111] Ook op dit punt kreeg Beth kritiek: teveel greep hij terug op vroeger tijden. Het onbegrip m.b.t. de quantumlogica laat zien dat het niet ten onrechte was dat hij dit aspect naar voren bracht. Helaas had Hempel niet kennis genomen van de geschriften van Beth, zij het dat die ten dele in het Nederlands waren, waar dit alles in behandeld werd.[112] De wassende lijst van onbegrip voor het uiterlijk van de quantumlogica zal voor Beth een rol hebben gespeeld Beth (1960*f*) op te stellen om daarmee de leemten op te vullen. Overigens had men rond 1960 te maken met een oprisping van Beth, zijn echte belangstelling voor dit onderwerp was toen al zeker tien jaar vervloden.

## 3.3 Lange noten

**Hegeliaanse logica.** Uit de brief Beth – J. Clay, 12 mei 1942, (Amersfoort): "Onder logica verstaan dezen geheel iets anders dan wat logici daaronder verstaan. Het gaat hier niet zozeer om een leer van het redeneren alswel om: een leer van het redelijke, zooals zich dit in de werkelijkheid manifesteert, waarbij in het bijzonder aan dat deel van de werkelijkheid is te denken, dat men als het cultuurleven zou kunnen aanduiden.

Vervolgens tracht men dit te gaan extrapoleren zoals naar 'de loop van de geschiedenis', 'de ontwikkeling van de wijsbegeerte'.

In tweede instantie passen de hegelianen het bedoelde verklaringsbeginsel [overbrugging van tegenstrijdige belangen], nu echter toe op gebieden, waar het zijn zin verliest — reeds inzooverre, dat de toepassing ervan in het geheel geen verklaring oplevert. Dat ondanks belangenstrijd een ordelijke samenleving mogelijk blijkt, kan worden verklaard uit de redelijkheid van den menschengeest, de regelmatigheid van de planetenbeweging klaarblijkelijk niet. De hegeliaanse natuurphilosophie is op dien grond dan ook geheel onhoudbaar. Ten tweede verliezen de hegelianen uit het oog, dat het feit, dat een leerstelsel het optreden van een ermee strijdig systeem induceert, niet inhoudt, dat dat tweede leerstelsel uit het eerste logisch (in den gebruikelijke betekenis!) zou voortvloeien. Het beginsel van Hegel kan dan alleen het successievelijke optreden van onderling tegenstrijdige leerstelsels verklaren (althans tot op zekere

[111] Zie ook de brief Beth – A. Bennett, 26 januari 1950.

[112] Zelfs voor Church was dit niet altijd even duidelijk, ondanks de periode die hij voor zijn afreis naar David Hilbert in Nederland doorgebracht had.

hoogte), maar niet het logische verband tusschen de verschillende stellingen in elk leerstelsel afzonderlijk. Het pogen dit toch te doen, brengt de hegelianen tot het uitspreken van onzinnigheden als: 'Alles Wirkliche ist ein Schluss' e.d."

**Beths theorie van de prognosen.** Beth ging uit van een verzameling elementaire (mogelijke) gebeurtenissen $\mathtt{G} = \{p, q, \ldots\}$ en de afsluiting $\mathtt{G}^*$ hierover onder $\vee, \rightarrow, \neg$ en $\wedge$, maar zonder $\exists$ en $\forall$. Hiernaast voerde hij de verzameling $\mathtt{P}^*$, de kansproposities op $\mathtt{G}^*$, in. Met een kanspropositie $P(A) = m$ wordt bedoeld dat de kans dat $A \in \mathtt{G}^*$ zich voordoet $m$ bedraagt, met $m$ op het reële $[0, 1]$-interval. Men kan dit axiomatiseren en hiermee volgt Beth grotendeels Evans & Kleene (1939). Enkele voorbeelden uit de axioma's en stellingen: (a) axioma: als $P(A \wedge B) = m$ en $P(A \wedge \neg B) = n$, dan $P(A) = m + n$; (b) stelling: $P(\neg A) = 1 - P(A)$; (c) stelling: $P(A \vee \neg A) = 0$. Tot op dit punt verschilde Beth niet van zijn voorgangers. Maar Beth vond de gevormde verzameling $\mathtt{P}^*$ te groot, en wenste alleen kansproposities van een bepaald type te accepteren. Hiertoe legde hij enkele beperkingen op. Dit had gezien de aard van zijn beperkingen tot gevolg dat zijn systeem niet meer afgesloten was, alleen met een extra eis op een beperking was dit weer wel mogelijk.

Beths extra eisen op $P(A) = m$ bestonden uit: $m = 1/2 + 1/2 \cdot k \cdot (1 - \vartheta h)$, met $0 \leq h \leq 1, 0 \leq \vartheta \leq 1$ en $k = \pm 1$; $h$ heet scherpte en ligt na keuze van te voren vast; $\vartheta$ variëert naar de gevallen. Men verkrijgt na de keuze van scherpte $h$ de nu ingeperkte verzameling $\mathtt{P}_h \subseteq \mathtt{P}^*$, maar $\mathtt{P}_{h=1}$ levert de volledige $\mathtt{P}^*$, $\mathtt{P}_{h=0}$ levert een deductief systeem. Gebeurtenis $A$ met genomen scherpte $h$ heet *positief voorspelbaar* als voor zekere $\vartheta$: $P(A) = 1 - \vartheta h$; *negatief voorspelbaar* als voor zekere $\vartheta$: $P(A) = \vartheta h$.

Al naargelang de keuze van $k$ heeft men (a) $P(A)$ is *empririsch juist* onder (i) $k = +1$ en $A$ doet zich voor of (ii) $k = -1$ en gebeurtenis $A$ doet zich niet voor; (b) $P(A)$ is *empirisch onjuist* onder (i) $k = +1$ en gebeurtenis $A$ doet zich niet voor of (ii) $k = -1$ en $A$ doet zich voor.

Beth beschouwde die combinaties waarbij voor gekozen scherpte $h$ men $m \leq h$ of $m \geq 1 - h$ heeft. Alleen de kansproposities die — gerelateerd aan de gekozen $h$ — voldoende dicht tegen 0 of 1 aanliggen, noemde hij empirisch verifiëerbaar. Men omzeilt quantoren doordat empirisch verifiëerbare generalisaties (of verbijzonderingen) zich alleen over eindig veel gebeurtenissen kunnen uitstrekken, dus een eindige conjunctie (of disjunctie) vormen.

Met de leer van de prognosen heeft men geen gesloten systeem onder de regels: $p$, $p \rightarrow q$ geeft bijvoorbeeld niet automatisch q. Men kan hiermee een koppeling aanleggen tussen verwachting en beslissing met aan preferenties gekoppelde afwegingen. Als volgt kan men naar Beth een voorbeeld construeren: [113] "Het kan voorkomen, dat een boer komt tot een prognose: de wind zal wel gaan liggen, en dus een bepaalden knecht een dienovereenkomstige opdracht geeft; dat hij ook komt tot de prognose: als de wind gaat liggen, zal het wel gaan regenen, en een anderen knecht een opdracht geeft, die daar mee in overeenstemming is; terwijl hij ook de prognose, het zal gaan regenen, niet aandurft. De logische deductie kan dus in haar gewoonen vorm niet dienen voor het systematiseeren van dergelijke prognosen. Er is blijkbaar een opmerkelijk parallellisme tusschen de prognosen, die men in het dagelijksch leven stelt,

[113] Citaat uit het ms. van Beth, waarin het antwoord op het door het Wiskundig Genootschap in 1942 uitgeschreven prijsvraag, p. 11. Ms door Beth ingezonden onder het motto: 'Le destin de l'homme est d'enfanter des actes qui dépassent ses forces; ses impuissances témoignent pour sa grandeur.'

en de gebeurtenissen, die met behulp van een systeem van kansrekening met zekere scherpte $h$ positief voorspelbaar zijn. Dit opent de mogelijkheid van succes voor een poging, de bedoelde prognosen met behulp van dergelijke systemen van kansrekening te systematiseeren."

# Hoofdstuk 4

# Semantiek

*"Zur Einführung möchte ich mit wenig Worten den Hintergrund angeben derjenigen Probleme, Forschungen und Ergebnisse von denen ich heute zu berichten haben werde. Ich habe mich anfangs, um 1950 herum, anknüpfend an Henkin, Mostowski und Tarski, für die Möglichkeit eines topologischen Vollständigkeitsbeweises für die klassische Prädikatenlogik 1. Ordnung interessiert. Dies hat mich dann zunächst dazu geführt, metamathematische Einsichten aufgrund der Theorie der Modelle für die Begründung rein-mathematischer Ergebnisse zu verwenden."* [1]

## 4.1 Semantiek en algebra

### 4.1.1 Achtergronden

Al in de inleiding werd vermeld dat rond 1950 Beths logisch werk de eerste vruchten afwierp. Dit werd voor een groot deel beïnvloed door de modeltheorie en semantiek zoals die onder meer door A. Tarski ontwikkeld werd. Een extra impuls kreeg dit door zijn arbeid in Berkeley als assistent van Tarski. De door Beth ontwikkelde combinatie van semantiek met syntax op de wijze van Gentzen kan men als een geheel eigen ontwikkeling en als een aberratie ten opzichte van zijn logische mede-Berkeleyanen beschouwen.

In die tijd begon de modeltheorie een steeds grotere plaats in te nemen binnen de logica en werden er tal van bewijzen geleverd die nu iets vanzelfsprekends hebben, maar waar toen ijverig naar gezocht werd. Dit werd ook door Beth gedaan, zij het met wisselend succes. De grote stellingen, met hun topologische en algebraïsche inhoud, waar velen zich mee bezig hielden, leverden ook Beth geen succes. Wel was dit het geval met de definitiestelling, die eigenlijk, gerelateerd aan de algebraïsche arbeid van die tijd, uit de toon viel[2]

[1] Uit ms. E.W. Beth, *Deduktive und semantische Tafeln für die rein-implikative Logik*, voordracht aan Math. Institut der Universität Marburg/Lahn, 27 november 1959.

[2] Wij kunnen ons afvragen of in die tijd nog niet het belang van de definitiestelling, en vooral het cluster bestaande uit de definitiestelling, 'joint consistency' en de interpolatiestelling voldoende onderkend werd. Later lag dit anders.

en waarvan men zich kan afvragen waarom hij dit was gaan onderzoeken.

In de inleiding is reeds verteld langs welke weg Beth tot die definitiestelling is gekomen. Onderdelen van die route zullen nu bekeken worden, maar dat was niet het enige waar Beth zich in die tijd mee bezig hield. Hij heeft in breder en algebraïsch-logisch verband het een en ander willen bijdragen, ook al vanwege de interessante wiskundig-filosofische achtergrond. Dit is hem niet zo erg gelukt. Een voorbeeld hiervan is de rol van het keuze-axioma. Dit hing direct samen met enkele algebraïsche vragen, namelijk naar de verhouding van volledigheid tot het keuze-axioma — of anders geformuleerd: de verhouding van het keuze-axioma tot de priemideaalstelling (ultrafilterstelling). Hiermee zat hij midden in het terrein waar o.a. Tarski zich intensief mee bezig hield. Over zijn gegroeide belangstelling voor algebraïsche en topologische methoden schreef Beth in 1953 aan G. Hasenjaeger: [3]

"Die topologische Darstellungsweise interressiert mich, da sie die Konstruktion von Modellen durch Grenzübergang begründet und also einerseits den Anschluss ermöglicht an Prozesse welche den Mathematikern schon geläufig sind, und andererseits die Bedingungen hervorhebt welchen ein solches Verfahren untersteht. Die holländischen Signifiker haben nämlich wiederholt versucht, die unendliche Reihe der natürlichen Zahlen als Grenzfall einer unbegrenzt fortgesetzten endlichen Reihe darzustellen. Es stellt sich dann aber heraus, dass der Grenzübergang auch hier nicht ohne Gefahr ist; das brauche ich ja nicht weiter auszuführen. Und diese Gefahren kann man dann wieder darstellen nach Analogie ähnlicher Gefahren in der gewöhnlichen Analysis. Für die Logik höherer Ordnung geht das auch sehr schön."

Bovenstaand citaat wordt duidelijker, als men de volgende overwegingen daarbij betrekt: (a) De topologie is ontstaan uit onderzoek naar limieten en convergenties in de analyse; het is verder, vooral in de beginperiode, een studie naar continuïteit, limieten en afsluitingen. (b) Topologie zoals in het allereerste begin werd door de latere significus Mannoury in Nederland geïntroduceerd en werd nadien vooral door Brouwer, die door Beth misschien hier eveneens als een significus werd beschouwd, bestudeerd en ontwikkeld. De verwijzing naar de Hollandse significi is verder onduidelijk.[4] (c) Beth studeerde rond 1930, dus op het einde van de beginfase van het algemeen topologische onderzoek.[5] In die tijd begon de topologie als gebruiksgoed ook naar de logica door te sijpelen.

In het begin van de jaren vijftig maakte Beth zelf gebruik van topologie. Bovendien hield hij zich bezig met de constructie van modellen d.m.v. een limietproces. Dit kwam tot uiting in Beth (1953*d*) (met enig voorbereidend werk in Beth (1952)).[6]

[3]Brief Beth – G. Hasenjaeger, 12 mei 1953.

[4]D.w.z. in ieder geval voor mij onduidelijk.

[5]Algemeen topologische begrippen zoals compactheid en overdekking waren tegen 1930 uitgekristalliseerd. Na 1930 ontwikkelde zich het onderzoek naar algebraïsche topologie, homotopie-groepen, etc. Met betrekking tot Beths uitingen helpt Koetsier & van Mill (1997) ons niet uit alle moeilijkheden (zie het 'Handbook of general topology' dl. I (1997), dl. II (1998), waarin Koetsier & van Mill (1997), voor de ontwikkeling van de topologie).

[6]Voor een uitleg van Beths intenties in Beth (1953*d*), zie Kreisel (1954*a*). De modellen die in Beth (1953*d*) het limietproces dragen, zijn verzamelingen met typen. In dit opzicht

Naar aanleiding van een kritische beoordeling van zijn werk door de hiertoe door Tarski aangezette B.F. Thompson vermeldde Beth in zijn weerwoord aan Tarski met betrekking tot gebruik van topologie in het algemeen en zijn gebruik in het bijzonder: [7]

"I think the topologisation applied is the same as in metamathematics and in the representation theory for Boolean Algebras; at any rate, it allows to derive the main results found in these fields, by an immediate continuation of the considerations set forth in my M.S. I think that the situation is much the same as in geometry. When analytic methods are applied to very simple geometrical problems, they seem artificial and inadequate. Nevertheless it has become usual to apply these methods from the outset instead of applying elementary methods in the beginning and changing to analytic methods after deriving, say the contents of Euclid. Now it seems that the proof for the theorems under consideration is the very moment to introduce topology; as a matter of fact, the more advanced theorems in metamathematics can all be derived from a small number of basic theorems (the deduction theorem, the Löwenheim – Skolem basic theorems, and the prime ideal theorem).[8]

As far as two-valued logic is concerned, generalisations of the theorems under consideration were based on two main principles:

- The topological space involved is not only compact, but bicompact: [9]
- The method of relativising quantifiers."

Voor B.F. Thompson was Beths gebruik van topologie overbodig vanwege de manier waarop Beth deze in wilde zetten. Beth zelf gaf in zijn antwoord aan Tarski de indruk een 'topologische vertaling' van zijn beweringen te willen geven om op deze wijze zijn resultaten ook op dit gebied ingekaderd te weten: [10] "The paper has no pretention of stating results which are substantially new. As a matter of fact, Henkin mentions a topological completeness proof by Gale, and Bernays told me of a topological proof by Schröter. In my case, the first stimulus came from Mostowski's paper on absolute properties of relations." Dit zou

roept het een eerder artikel, Beth (1938) in herinnering dat al achterhaald was vanwege Tarski (1933). Beth (1953*d*) verwijst wel naar Tarski (1933), maar niet naar Beth (1938).

[7]Brief Beth – A. Tarski, 17 oktober 1950.

[8]Priemideaalstelling: zie Grätzer (1978)..

[9]Vroeger werden *aftelbaar compacte ruimten* wel compacte ruimten genoemd, en de compacte ruimten zoals tegenwoordig *bicompacte ruimten*. Zie verder de 'lange noten' op het einde van dit hoofdstuk en Engelking (1989).

[10]Brief Beth – A. Tarski, 17 oktober 1950. Tarski's reactie in de brief A. Tarski – Beth, 12 oktober 1950, (Berkeley) geeft dit ook al aan: "Since the essential part of your paper [d.w.z. het aan Thompson gegeven ms.] is a new version of the proofs of some old theorems and this version differs from the classical proofs mainly in one point". En nog iets sterker als antwoord op de brief van Beth naar Tarski van 18 juni 1951, waarin Beth beweerde dat Rasiowa & Sikorski (1950) een oplossing bood voor een probleem dat hij met Tarski al eerder bediscussieerd had, vroeg Tarski in de brief van 3 augustus 1951 (Berkeley) naar Beth zich af welk probleem Beth nu bedoelde: "In fact it seems to me that the main defect of the proof from the point of mathematical elegance is the application of topology. It seems strange to apply a rather difficult topological result in order to obtain a simple Boolean algebraic lemma which can be derived directly in a few lines. I mentioned this point in writing to friends in Poland and I hope that it will also be mentioned in reviews." Op bepaalde punten in de bewijzen maken Rasiowa & Sikorski (1950) gebruik van topologie, Tarski's laatste twee zinnen lijken overigens meer kritiek op het inmiddels ook door hem gelezen Rasiowa & Sikorski (1950) dan op Beth. Helena Rasiowa, 1917 – 1994.

anders komen te liggen bij Beths tweede poging die resulteerde in Beth (1951*b*): zoals al vaker gebeurde haalde Beth met een omwerking van het materiaal toch weer een resultaat, desnoods uit een onverwachte hoek.

Beth verlegde al vrij snel zijn belangstelling. Na zijn formulering van de definitiestelling in 1953 hield hij op met het gebruik van dergelijke technieken. Beth heeft wel voor de rest van zijn ontwikkeling veel baat gehad van deze topologische leerperiode. De constructie van een aantal van zijn valuatiemethoden valt tot die beginperiode te herleiden. Tal van orde-eigenschappen werden later door hem gebruikt. Het belang hiervan werd nog vergroot, toen hij eind vijftiger jaren, begin jaren zestig semantieken ontwierp waarbij hij ordetopologieën weer nuttig kon gebruiken.

### 4.1.2 Ups en downs

#### Volledigheid en topologie

Sommige resutaten van Beth zijn het toch waard om kort aan te roeren.[11] Belangrijker in de betreffende artikelen is een nevenproduct: zijn introductie van gereduceerde logica en diverse soorten van valuaties. Hierop zal later in dit hoofdstuk worden teruggekomen.

Later zal er door Beth nog wel eens van topologische herformuleringen van logische eigenschappen gebruik worden gemaakt. Vandaar dat hier zeer kort op enkele begrippen wordt ingegaan die hij bleef gebruiken (en die standaard waren in de topologische beschrijvingen van die tijd).

Beth (1951*b*) ging, zoals te doen gebruikelijk, uit van een verzameling $\mathtt{V}$ van alle valuaties $v$: deze vormde zijn topologische ruimte. Men kan de verzameling nemen van alle valuaties die een bepaalde formule $A$ (of een verzameling van formules, $\Delta$) waar maken: deze noemde Beth $\mathtt{V}(A)$; $\mathtt{V}(A)$ is een deelverzameling van $\mathtt{V}$. Deze verzamelingen nam Beth als basis voor de open verzamelingen.[12]

[11] Er zijn er meer dan hier behandeld, maar niet alles past binnen de hoofdlijn van dit geschrift.

[12] Voor een topologie $\mathcal{T} =< \mathtt{X}, \mathcal{D} >$ heet een familie $\mathcal{F}$ van open deelverzamelingen op $\mathtt{X}$ een *basis* van die topologie, als elke open deelverzameling van $\mathtt{X}$ gerepresenteerd kan worden als een vereniging van een deelfamilie van $\mathcal{F}$. De eigenschappen van een basis zijn als volgt:

1. Voor alle paren $(\mathtt{F}_1, \mathtt{F}_2)$, met $\mathtt{F}_1$ en $\mathtt{F}_2$ elementen van $\mathcal{F}$, en voor alle elementen $x \in \mathtt{F}_1 \cap \mathtt{F}_2$ bestaat er een $\mathtt{F} \in \mathcal{F}$, met $x \in \mathtt{F}$ en $\mathtt{F} \subset \mathtt{F}_1 \cap \mathtt{F}_2$.

2. Voor alle elementen $x \in \mathtt{X}$ bestaat er een $\exists \mathtt{F} \in \mathcal{F}$, z.d.d. $x \in \mathtt{F}$.

Voor een topologische ruimte ($\mathtt{X}$, D) heet een familie F van open deelverzamelingen op $\mathtt{X}$ een *deelbasis* van die topologie, als de familie van alle eindige doorsneden $\mathtt{F}_1 \cap \mathtt{F}_2 \cap \cdots \cap \mathtt{F}_n$, met $\mathtt{F}_i \in \mathcal{F}$ een basis is voor $(\mathtt{X}, \mathcal{D})$.

Voor een topologie $\mathcal{T} =< \mathtt{X}, \mathcal{D} >$: $\mathtt{U}$ heet een (open) *omgeving* voor punt $x$, als er een open deelverzameling $\mathtt{V}$ is zodat $x \in V \subset \mathtt{U}$. Op die manier kan aan elk punt $x$ van een topologische ruimte de collectie van $U_x$ van alle omgevingen van $x$ worden toegevoegd. Een omgevingsruimte wordt gegeven door een deelverzameling $\mathtt{U}_x$, $x \in \mathtt{X}$, die aan bepaalde eisen voldoet; $\mathtt{U}_x$ is hier een collectie deelverzamelingen van $\mathtt{X}$. Daaruit kan dan een topologische ruimte in de gewone zin worden gevormd door te definieren: $\mathtt{Y} \subset \mathtt{X}$ is open als voor elke $x \in \mathtt{Y}$ er een $\mathtt{U} \in \mathtt{U}_x$ is zodat $\mathtt{U} \subset \mathtt{Y}$. Een omgevingsruimte is een niet lege puntenverzameling waarbij aan ieder punt zekere deelverzamelingen als omgevingen van dat punt toegevoegd zijn. Zie verder Engelking (1989).

Er zijn gerelateerd aan de gebruikte logica tal van eigenschappen (al van vóór Beth). Enkele daarvan zijn dat (a) $\mathtt{V}$ bicompact is (en Beth gebruikt hier bicompact in de zin van het huidige gebruik van compact). (b) $\mathtt{V}$ is een homeomorf[13] beeld van Cantors verzameling $\mathtt{C}$.[14] (c) De verzamelingen $\mathtt{V}(A)$ zijn open en gesloten, bovendien zijn het de enige verzamelingen die open en gesloten zijn.[15] Voorts geldt voor $\mathtt{V}$, onder aanname van compactheid (Beths bicompactheid)[16] dat elke oneindige deelverzameling van $\mathtt{V}$ minstens één verdichtingspunt in $\mathtt{V}$ heeft.[17] Bij Beths later in te voeren normale valuaties kunnen er limietpunten zijn die niet normaal zijn.[18] Daarom zal Beth (1951*b*), p. 441, er toe overgaan een existentiestelling voor normale valuaties te bewijzen. In de loop van het verhaal komen we deze zaken weer tegen.

Tot het echte werk kunnen de volledigheidsstellingen gerekend worden. Beth meende dat met Beth (1951*b*) een verbetering gegeven werd van het eerder naar Tarski (en Thompson) gestuurde, en ook door ons al aangeroerde, manuscript: [19]

[13]Homeomorfismen: continue afbeeldingen van de ene topologische ruimte op een andere, waarbij de inversen eveneens afbeeldingen zijn. Een afbeelding heet gesloten (open) als het beeld onder die afbeelding van elke gesloten (open) deelverzameling van de domeinverzameling gesloten (open) blijft in de beeldverzameling. Een bijectie is een homeomorfisme d.e.s.d. als zij open en continu is d.e.s.d. als zij gesloten en continu is. Of ook: een continue bijectie is een homeomorfisme d.e.s.d. als zij open d.e.s.d. als zij gesloten is. Zie verder Engelking (1989).

[14]De Cantor-verzameling kan gerepresenteerd worden als de ruimte $\{0,1\}^{\aleph_0}$, voorzien als gewoonlijk met de product-topologie. Met een gegeneraliseerde Cantor-verzameling bedoelen we een ruimte $\{0,1\}^m$, met $m$ een oneindig kardinaalgetal, ook voorzien van de product-topologie. De Tychonoff-topologie kan gebaseerd worden op de Cantor-verzameling alsook op de gegeneraliseerde Cantor-verzameling. Zie verder Engelking (1989); in Beth (1959*b*), p. 526, pp. 558, 559. De Cantor-verzameling komt weer terug bij de modale logica, zie in dit werk het hoofdstuk over Beth-modellen, afdeling topologie.

[15]Volgens Beth een gevolg van de stelling van Borel: elke open overdekking van een gesloten verzameling in een compacte ruimte heeft een eindige deeloverdekking. Dit was standaard (vergelijk het gebruik door Tarski in de dertiger jaren), hierin was Beth niet de eerste. Vergelijk ms. E.W. Beth, *Les méthodes algébriques et topologiques dans la recherche des fondements des mathématiques*, p. 10. Borel, compactheid, overdekkingen: zie Engelking (1989). Beth (1951*b*), p. 438 geeft ook zijn definitie van open en gesloten.

[16]Beth (1951*b*), p. 438–439. Beths bicompact: $\mathcal{F}$ een familie van gesloten verzamelingen $\mathtt{M}$, met $\bigcap_{\mathtt{M}\in\mathcal{F}}\mathtt{M}=\emptyset$, dan voor elke dergelijke $\mathcal{F}$ bestaat er een eindige deelfamilie $\mathcal{F}^*$ met $\bigcap_{\mathtt{M}\in\mathcal{F}^*}\mathtt{M}=\emptyset$. Ofwel, overgaand over de complementen: een ruimte is compact d.e.s.d. als elke familie van open verzamelingen die de ruimte overdekt een eindige deelverzameling heeft met dezelfde eigenschap. In Tarski (1952) wordt overigens compact en bicompact gebruikt op dezelfde wijze als Beth.

[17]Een $x\in\mathtt{X}$ heet verdichtingspunt (accumulatie-punt) van een $\mathtt{Y}$, met $\mathtt{Y}\subset\mathtt{X}$, als $x\in c(\mathtt{Y}\backslash\{x\})$ (c closure, afsluiting). De verzameling van de verdichtingspunten van $\mathtt{Y}$ wordt afgekort tot $d\mathtt{Y}$. Als $x\in\mathtt{Y}\setminus d(\mathtt{Y})$, dan heet $x$ een geïsoleerd punt van $\mathtt{Y}$. Punt $x$ is geïsoleerd punt van $\mathtt{X},(\mathtt{X},\mathcal{D})$ als $\{x\}$ open is. Deelverzameling $\mathtt{Y}$, met $\mathtt{Y}\subset\mathtt{X}$, heet dicht in $\mathtt{X}$ als $c\mathtt{Y}=\mathtt{X}$. Zie verder Engelking (1989).

[18]Voor convergenties in topologische ruimten kan men gebruik maken van filters. Laat $\mathcal{F}$ een familie van deelverzamelingen van een ruimte $\mathtt{X}$ zijn met de (*filter*)eigenschappen (a) als $\mathtt{Y}\in\mathcal{F}$, met $\mathtt{Y}\subset\mathtt{Z}$, dan $\mathtt{Z}\in\mathcal{F}$, (b) als $\mathtt{Y},\mathtt{Z}\in\mathcal{F}$, dan $\mathtt{Y}\cap\mathtt{Z}\in\mathcal{F}$, (c) $\emptyset\notin\mathcal{F}$. Het punt $x\in\mathtt{X}$ heet een limiet van de filter $\mathcal{F}$ [$x\in lim\mathcal{F}$, of ook de filter $\mathcal{F}$ *convergeert* in $x$], als voor alle $\mathtt{Y}_x$ geldt dat $\mathtt{Y}_x\in\mathcal{F}$. Als de uitdrukking 'voor elke filter in $\mathtt{X}$ is er een limiet' veranderd wordt in 'voor elke filter in $\mathtt{X}$ is er één limiet', dan heet zo een ruimte een Hausdorff ruimte. Zoals men filters heeft, zo heeft men idealen.

[19]Brief Beth – Tarski, 18 juni 1951.

"This morning I received a reprint of the paper by H. Rasiowa and R. Sikorski which contains a solution of the problem we discussed some months ago.[20] Their proof constitutes an important simplification with regard to the proof which I submitted you.[21] A few days ago, however, I got an idea of a further simplification, which goes beyond both their and my own proof."
En: [22]
"The relations of this proof to other extant proofs are roughly as follows. The argument which in the standard version completes the proof is given at the beginning and yields Lindenbaum's theorem; this feature is common to all the newer proofs. It leads to the construction of a compact topological space, as in Rasiowa – Sikorski's proof.[23] Then I use the method of my first ms. and obtain the necessary [en de later in dit hoofdstuk uitgebreid ter sprake komende] existence proof directly from the theorem of Borel.[24] I do not need the theorems on the Skolem or even the prenex normal form, nor any system of enumeration of the variables as in the standard proof.[25] The whole proof seems to me more straightforward than the others I have seen so far."

In bovenstaand citaat komt voor: "and obtain the necessary existence proof directly from the theorem of Borel." Dit werd door Beth in verband gebracht met stelling 17 (compactheidsstelling voor arithmetische klassen) in Tarski (1952), p. 711: [26]
"I now found a topological proof for the stronger form[27] of Gödel's theorem [volledigheid] which corresponds to your Th. 17, using only Borel's theorem. I need somewhat more calculation than is used by R. and S.,[28] but this part of the argument is not nearly as involved as the calculations in Church's or Hilbert – Ackermann's proof of the simple

[20](Rasiowa & Sikorski 1950).

[21]Dit was het ms. waarover Thompson schreef.

[22]Brief Beth – A. Tarski, 4 november 1951.

[23](Rasiowa & Sikorski 1950), pp. 196, 197.

[24]'First ms.: het naar Tarski opgestuurde en door Thompson bekeken ms. 'Theorem of Borel': dit zal hier wel de overdekkingsstelling van Borel zijn; zie verder Engelking (1989); 'necessary existence proof': de al vermelde existentiestelling voor normale valuaties.

[25]Uit de beoordeling door F.B. Thompson die tezamen met de brief A. Tarski – Beth, 12 oktober 1950 was opgestuurd: "The standard proof reduces the question of validity of a sentence of the lower predicate calculus to the validity of any one of an infinite sequence of sentences in the sentential calculus. The essential step is the use of Skolem normal form. The proof in this [Beths] paper imitates this reduction. [in de beoordeling door Thompson staat hier in de kantlijn 'avoidable', waarschijnlijk in het handschrift van Beth] Once this sequence of sentences of the sentential calculus is obtained, the question arises whether any member of this sequence is a tautology." Brief Beth – Tarski, 17 oktober 1950: "The argument could eventually be revised so as to avoid the introduction of the Skolem normal form." Echt met plezier Skolem verwijderen deed Beth op dat moment nog niet, want hij vervolgde: "This however, make the last part of the proof even more troublesome". Meer nog: "Moreover, the introduction of the Skolem normal form seems to be interesting also from a topological point of view." Een jaar later dacht Beth er dus anders over.

[26]Brief Beth – A. Tarski, 24 juli 1951. Arithmetische klasse: elk algebraïsch systeem waarvan de definitie geen verzameling-theoretische begrippen gebruikt. De verzameling van alle commutatieve algebra's is een arithmetische klasse. Later gebruikt Tarski specifieke arithmetische klassen, **AC**, uitgaande van de klasse van de algebra's van het type $(A, +)$.

[27]D.w.z. gerelateerd aan desnoods oneindige formuleverzamelingen in plaats van een enkele formule.

[28](Rasiowa & Sikorski 1950).

case. Also I do not need the reduction to the Skolem (or even the prenex) normal form. But you will understand that I am not fully satisfied with the proof as long as I have no clear insight into your Th. 13."

Tarski (1952), p. 711: stelling 17 is een corollarium van stelling 13 (compactheidsstelling voor arithmetische functies).[29] Tarski's uitleg liet niet lang op zich wachten: [30]

"As regards theorem 13, assume that you want to obtain it for a class K of systems formed by a set and a number of operations and relations. Let L be the class of all systems obtained from those of the class K by enriching them by means of an infinite sequence of individuals. Clearly theorem 17 holds for this new class L.[31] From theorem 17 for the class L we can now easily derive theorem 13 for the original class K; we treat so to speak, free variables as individual constants. hence I think there must be some error in your argument aiming to refute theorem 13."

Het ontbreken bij Beth van eisen van standaardformules (Skolem-normaalvorm, etc.) zal later niet alleen een rol spelen bij het opstellen van de definitiestelling, maar ook bij het ontwikkelen van de op de subformules berustende tableaus. Dit was ook een reden dat later Beth op Hintikka's claim, dat hij, Hintikka, eigenlijk al voor 1955 bezig was geweest met de grondslagen voor de Hintikka-modellen, opmerkte ook al een aanloop achter de rug te hebben: [32] "It [bedoeld: Beth (1955*b*)] is a sequel to a series of papers published in 1951 and subsequent years."

Na een kort intermezzo over een andere, gelijktijdige belangstelling van Beth, het keuze-axioma, gaan we verder met Beths toepassing van topologie: Beths introductie van gereduceerde logica tezamen met enige topologie om daarmee een volledigheidsbewijs te leveren. Dit zal aan de hand van een uitvoerige brief van Beth aan Kleene besproken worden.

---

[29] Arithmetische functies. Laat $B$ een volzinsfunctie zijn, en te gebruiken bij algebraïsche (arithmetische) systemen $\mathcal{A} = (A, +)$: $B$ drukt dan arithmetische waarden uit. In dat geval wordt door $B$ een deelverzameling $X$ in $A^\omega$ (de hier zeer algemeen genomen getallenrijen waaronder $B$ vervuld wordt) vastgelegd. Men kan ook $B$ nemen m.b.t. een verzameling van dergelijke systemen $(A, +)$. In dat geval bepaalt $B$ niet een deelverzameling op $A^\omega$, maar een functie $\mathcal{F}$; het domein van $\mathcal{F}$ is dan een verzameling van theorieën $(A, +)$, en $\mathcal{F}(\mathcal{A}) \subseteq A^\omega$ met elke algebra $\mathcal{A} = (A, +)$; $\mathcal{F}(\mathcal{A}) = \{\alpha \in A^\omega \mid \alpha \text{ vervult } B\}$, $\alpha$ is een getallenrij. Zo een functie $\mathcal{F}$ die door een arithmetische volzinsfunctie $B$ bepaald wordt, noemt Tarski (1952), p. 707 een arithmetische functie. De klasse van deze functies noemt hij **F** en de klasse van de functies die corresponderen met theorieen (en zinnen) die som en identiteit hebben, elementaire functies **EF**. Hiermee en met operaties (begrippen) uit cylindrificatie (voor de quantoren, Tarski (1952), p. 708) vallen de bovenstaande stellingen 13 en 17 preciezer uit te drukken; voor stelling 17 komt daar voornoemde **AC** nog bij. Het zou echteer echter te ver voeren hier nader op in te gaan.

[30] Brief A. Tarski – Beth, 3 augustus 1951, (Berkeley).

[31] Hier plaatste Tarski de nevenopmerking: " From what I remember the original proof of Gödel for this stronger theorem holds independent of the fact whether the system of sentences involved contains finitely many or infinitely many predicates, At any rate Henkin explicitly point out that his proof applies to systems with infinitely many predicates."

[32] Brief Beth – K.J.J. Hintikka, 12 juli 1955. Kaarlo Jaakko Juhani Hintikka, *1929.

### Keuze-axioma met verzwakkingen

Een ander belangrijk thema uit de verzamelingtheoretische topologie in deze periode betreft de aandacht voor het keuze-axioma. Rond 1950 waren er nog tal van problemen die daarmee samenhangen, nog niet beslist: niet alleen met betrekking tot belangrijke vragen zoals onafhankelijkheid, maar ook in de categorie van de sterkte van de aannamen van allerlei principes. Juist vragen uit die tweede categorie kwam men onder het dagelijkse werk in de logica tegen. Als eerste zal in deze reeks aan de hand van Beth een maximaalprincipe worden bekeken, dat equivalent is met het keuze-axioma. Daarna komen in toenemende mate van verzwakking volledigheid en ordening aan bod. Toevallig is dit ook het historische verloop van Beths onderzoek geweest.

**Maximaalprincipes.** Het eerste resultaat bestond uit een formulering van het keuze-axioma zelf, zoals tenslotte geformuleerd in Beth (1953*c*).[33] Beth ging uit van een verzameling $\mathtt{M}$ met een binaire relatie $R$. Op $\mathtt{M}$ nam hij een deelverzameling $\mathtt{C}$. Hiermee heeft men ook een inperking van de binaire relatie $R$ tot die $\mathtt{C}$. Veronderstel dat de precieze omschrijving van $\mathtt{C}$ door een elementair-logische formuleverzameling $\Delta$ geleverd wordt. Met $\Delta$ wordt $R$ beschreven. Beth nam daarbij als voorwaarde voor $\Delta$ dat alleen prenex-universele quantoren gehanteerd mogen worden. Als voor $\mathtt{C}$ bovenstaande voorwaarden vervuld worden, dan noemt Beth zo een $\mathtt{C}$ een $(R, \Delta)$-keten. Als $\mathtt{C}$ niet een echte deelverzameling is van een andere $(R, \Delta)$-keten in $\mathtt{M}$, dan heet $\mathtt{C}$ een maximale $(R, \Delta)$-keten in $\mathtt{M}$. Hiermee kwam Beth (1953*c*) op p. 69 tot de volgende stelling die een equivalent van het keuze-axioma is: 'Elke $(R, \Delta)$-keten $\mathtt{C}$ in een verzameling $\mathtt{M}$ is bevat in een maximale $(R, \Delta)$-keten $\mathtt{C}^*$ in $\mathtt{M}$.' [34]

Beth kwam in 1952 op bovenstaande omschrijving door zijn voorbereidingen van een heruitgave van Beth (1950). Hij bekeek de uitspraak 'Elke keten $\mathtt{C}$ in een partieel geordende verzameling $\mathtt{M}$ is bevat in een maximale keten $\mathtt{C}^*$ in $\mathtt{M}$'. Volgens Beth was dit al in Hausdorff (1914), p. 140 te vinden. Beth schrapte 'partieel geordend' en nam op $\mathtt{M}$ een willekeurige binaire relatie $R$. Beth meende dat het bewijs van Hausdorff geldig bleef en formuleerde daarmee het boven gegeven equivalent van het keuze-axioma.

Hierover schreef hij Tarski aan. Tarski formuleerde het volgende equivalent van het keuze-axioma: [35] 'Elke functie die een deelverzameling is van een relatie $R$, kan ingebed worden in een maximale functie in $R$.' Volgens Beth voldeed zijn veranderde Hausdorff aan de Skolem-normaalvorm, zij het dat dit iets duidelijker geformuleerd diende te worden: [36] "For any set of relations and for any set of conditions definable by sentences in satisfaction theoretic Skolem normal form" gevolgd door zijn versie van Hausdorff. In dat geval zou volgens

[33] Zie ook Beth (1959*b*), pp. 539–540.

[34] Voor een uitgebreider bewijs, zie Beth (1959*b*), pp. 539–540.

[35] Brief A. Tarski – Beth, 21 december 1952.

[36] Brief Beth – A. Tarski, 12 januari 1952 [het zal wel 1953 i.p.v. Beths 1952 moeten zijn]. Felix Hausdorff, 1868 – 1942.

Beth Tarski's functionele relatie een bijzonder geval zijn.[37]

Ook H. Hermes werd door Beth geraadpleegd.[38] Volgens Hermes kon men het nodige al in Wallace (1944) aantreffen.[39] Wallace was gebaseerd op Hausdorff en beoogde een eenvoudiger equivalent daarvan te zijn: "The simplicity lies in the fact that we make no assumptions concerning the relation $R$ which replaces partial order. [...] Any R-simple subset of [a set] Q is contained in a maximal R-simple subset of Q." [40] Verder gaf Hermes net als Tarski een eigen versie in de vorm van een generalisatie waarbij hij uitging van Zorns Lemma.[41]

Met de in het begin gegeven algemene formulering in Beth (1953*c*) op p. 69 kan men met de nodige variaties op $R$ en $\Delta$ verschillende formuleringen van het keuze-axioma invangen. Men kan $R$ $n$-plaatsig nemen, of in plaats van $R$ een verzameling $\{R_1, \ldots, R_n\}$, met voor elke $R_i$ een bepaalde plaatsigheid. In $\Delta$ kan men allerlei axioma's stoppen, maar het is ook mogelijk om de syntactische eisen te veranderen, bijvoorbeeld door de voorwaarde 'prenex-universele quantoren' af te zwakken tot 'semantische normaalvorm'.

Beth (1953*c*) verschaft de nodige voorbeelden:

- Neem voor $R$ een partiële ordening en in $\Delta$ de axioma's voor lineaire orde, dan verkrijgt men Hausdorff.
- Laat $R$ een willekeurige binaire relatie zijn en $\Delta = \{\forall x \forall y(R(x, y) \vee R(y, x))\}$, dan heeft men de stelling van Wallace.
- Neem $\Delta = \{\forall x \forall y R(x, y)\}$, dan heeft men de bijdrage van Hermes.
- Neem $\Delta = \{\forall x \exists y R(xy), \forall x \forall y \forall z(R(x, y) \wedge R(x, z)) \rightarrow y = z\}$ ofwel $R$ moet een functie zijn, dan heeft men Tarski's equivalent.

Gezien de mogelijkheden om door keuzen op $R$ en $\Delta$ tal van equivalenten van het keuze-axioma op te voeren geeft aan dat Beths principe vrij algemeen is. In Rubin & Rubin (1963), p. 40 spreekt men er dan ook over als: [42] "It is one of the most general forms of the axiom of choice we have come across."

**Priemidealen.** Het volgende verhaalt van een mislukking. Beth meende in 1953 ontdekt te hebben dat het keuze-axioma uit de volledigheidsstelling van

[37] 1. Bewijstheoretische normaalvorm is een prenexformule waarbij alle existentiële quantoren op kop staan; 2. semantische normaalvorm (satisfaction-theoretic normal form) is een prenexformule waarbij alle universele quantoren op kop gaan. In geval 1 kan men voor een gegeven formule effectief een formule in de beschreven vorm vinden z.d.d. als de ene formule bewijsbaar is, de ander dat ook is; evenzo voor geval 2, maar dan dienen de beide formules binnen hetzelfde domein vervulbaar te zijn. Zie verder Kleene (1952*a*), p. 435 e.v., verder Hilbert en Bernays I en II.

[38] Brief Beth - H. Hermes, 2 november 1952.

[39] Brief H. Hermes – Beth, 20 november 1952, (Münster).

[40] Citaat uit Wallace (1944); R-simple: voor alle elementen $a$ en $b$: $Rab$ of $Rba$.

[41] Zorns lemma: als elke keten in een partieel geordende verzameling een bovengrens in die verzameling heeft, dan bevat die verzameling een maximaal element.

[42] Voor de samenhang van de verschillende vormen van het keuze-axioma, zie het diagram van Beths aantekeningen voor het college van 28 november 1963 (Beth-archief). Dit is door hem opgesteld naar Rubin & Rubin (1963). Zie ook Beth (1959*b*), sectie 117, p. 376 e.v.

de elementaire logica af te leiden viel. Dit schreef hij aan Tarski.[43] De in deze brief voorkomende redenering m.b.t. de opbouw van een systeem en modellen is evenwel dermate verward dat een zinvolle interpretatie onmogelijk is.[44] Beth refereerde in die brief tweemaal naar volledigheid: "Now on the strenght of a suitable version of the completeness theorem we can say that our axiom system must have a model." En "So it seems that indeed the axiom of choice can be derived from a suitable version of the completeness theorem for elementary logic." In zijn antwoord op Beths brief ging Tarski aan Beths opzet voorbij, maar vroeg Beth wel wat deze precies met een 'geschikte versie' van volledigheid bedoelde.[45] Had Henkin aan hem, Tarski, niet laten zien dat hij volledigheid uit de priemideaalstelling kon afleiden.[46] In dat geval zou men met Beth ook het keuze-axioma uit de priemideaalstelling kunnen afleiden.

Beth dacht een sterke versie van volledigheid nodig te hebben.[47] Deze zocht hij in de stelling van Tychonoff: een product van compacte topologische ruimten is compact.[48] Hiermee verlegde Beth het probleem, want voor de stelling van Tychonoff is er een zwakke en een sterke versie. Met de sterke versie, een algemeen geformuleerde stelling over ruimten heeft men een equivalent van het keuze-axioma in handen.[49] Met de zwakke, de beperking tot (Hausdorff-) T2-ruimten,[50] een equivalent van de priemideaalstelling. Pas in 1964 (Halpern) en 1967 (Halpern, Levy) zou er volledige duidelijkheid ontstaan over de onderlinge verhoudingen, namelijk dat het keuze-axioma sterker is dan de priemideaalstelling (maar dit is van na Beths dood).[51]

Het kan zijn dat de kardinaliteit van de modellen Beth aanvankelijk parten heeft gespeeld. Later werd er op dit aspect in Beth (1959*b*), p. 536–537 terug-

[43] Brief Beth – A. Tarski, 15 september 1953.

[44] Tot op zekere hoogte doet het aan de constructie in Beth (1959*b*), pp. 537–538 denken.

[45] Brief Tarski – Beth, 23 september 1953. In dit opzicht is het geval vergelijkbaar met de door Beth aangekaarte discussie met Tarski m.b.t. Heytings intuïtionistische projectieve meetkunde en Tarski's meetkunde gekoppeld aan diens beslisbare algebraïsche systeem (Tarski 1948*a*). Ook deze discussie verzandde door de onduidelijkheden van Beth.

[46] Zie hiertoe Henkin (1954). Priemideaalstelling (ultrafilterstelling): elke Boolese algebra heeft een priemideaal (ultrafilter); of ook: elk ideaal (filter) in een Boolese algebra kan tot een priemideaal (ultrafilter) uitgebreid worden.

[47] Brief Beth - Tarski, 3 oktober 1953.

[48] Ofwel: $\mathtt{X} = \prod_{i \in \mathtt{I}} \mathtt{X}_i$, met $\mathtt{X}_i \neq \emptyset$, is compact als alle $\mathtt{X}_i$ compact. Er is voor de producten geen inperking gemaakt op eindigheid. Die inperking op eindigheid is er wel bij de gelijksoortige stelling voor sommen. Overigens legt de stelling van Tychonoff een verband met de Tychonoff-ruimte: een topologische ruimte $\mathtt{X}$ is een Tychonoff-ruimte d.e.s.d. als $\mathtt{X}$ inbedbaar is in een compacte Hausdorff-ruimte. Een stelling: Een ruimte $\mathtt{Z}$ heeft een compactificatie d.e.s.d. als $\mathtt{Z}$ een Tychonoff-ruimte is. Het tweetal $(\mathtt{X}, c)$ heet een compactificatie van ruimte $\mathtt{Z}$, waarbij $\mathtt{X}$ een compacte ruimte, $\mathtt{Z} \subset \mathtt{X}$, en $c : \mathtt{Z} \to \mathtt{X}$ een inbedding is z.d.d. $-c(\mathtt{Z}) = \mathtt{X}$. Een T1-ruimte $\mathcal{T} = (\mathtt{X}, \mathcal{D})$ is een Tychonoff ruimte (volledig reguliere ruimte) als voor alle $x \in \mathtt{X}$ en voor alle gesloten $\mathtt{Z}$, met $\mathtt{Z} \subset \mathtt{X}$ en $x \notin \mathtt{Z}$, er een continue functie $f$ bestaat, met $f : X \to [0, 1]$ op $\Re$, met $f(x) = 0$ en voor $z \in \mathtt{Z}, f(z) = 1$. Zie verder Engelking (1989).

[49] (Kelley 1950).

[50] T2-ruimte (Hausdorff-ruimte), als voor alle $(x_i, x_j)$, met $x_i, x_j \in \mathtt{X}$ en $x_i \neq x_j$, er open verzamelingen $\mathtt{Y}, \mathtt{Z}$ bestaan met $x_i \in \mathtt{Y}, x_j \in \mathtt{Z}$ en $\mathtt{Y} \cap \mathtt{Z} = \emptyset$. Elke T2 is T1, maar niet omgekeerd. Zie verder Engelking (1989).

[51] Zie hiertoe (Jech 1973). Er zijn verschillende methoden voor het bewijs, waaronder forcing en Mostowski's permutatie-model.

gekomen, zij het zonder eigen inbreng. Voor eindige en aftelbare kardinaliteit was volledigheid door Gödel gegeven, maar: "For non-denumerable $\mathsf{k}$, the theorem was stated and proved by A. Malcev in 1936; another proof was given by Henkin (1949).[52] These proofs are based upon the axiom of choice. However, as stated under (4) [een paragraaf in Beth (1959*b*), pp. 535–536], A. Tarski recently observed that a weaker supposition is sufficient, for instance the prime ideal theorem for Boolean algebras." In Henkin (1949) wordt de omschrijving bij volledigheid wijder genomen dan in Henkin (1950). Bij aftelbaar heeft men te maken met Löwenheim – Skolem.[53] Maar, zegt Beth (1959*b*), p. 537: [54] "In 1934, Tarski stated still another generalisation of Gödel's result [volledigheid] for the first-order calculus with identity: 'if $\Delta$ has a model of infinite cardinal number $\mathsf{k}_1$, then for every $\mathsf{k}_2 > \mathsf{k}_1$, $\Delta$ has also a model of cardinal number $\mathsf{k}_2$.' In this case, the axiom of choice cannot be avoided, as this version of the completeness theorem implies the axiom of choice."

**Ordeningen.** Beth heeft veelvuldig te maken gehad met het toepassen van ordeningsrelaties. Afgezien daarvan heeft hij zich ook met de theorie over de ordeningen zelf bezig gehouden. Hier draait het om verzwakkingen van het keuze-axioma [AC]:

> 1. AC — 2. de B-principes (in sterkte vergelijkbaar met compactheid) — 3. de S-principes — 4. de O-principes — 5. $\mathrm{AC}^{<\omega}$.

Bovenstaand staatje doorlopend heeft men achtereenvolgens:

> 1. Het keuze-axioma AC: $\prod_{i\in \mathtt{I}} \mathtt{A}_i$ bestaat. 2. B-principes, we zijn hier alleen geïnteresseerd in B3: 'in elke Boolese algebra is elk eigenlijke ideaal bevat in een priemideaal.'[55] 3. Alleen principe S3 is hier van belang; S3 is een ingeperkte (verzwakte) versie van principe B3 tot de volledige verzamelingenalgebra's.[56] 4. Principe O1 houdt in: 'Elke verzameling kan simpel (d.w.z. lineair) geordend worden'.[57] 5. $\mathrm{AC}^{<\omega}$: AC beperkt tot families van eindige verzamelingen $\mathtt{A}_i$.

Tarski (1954*c*) neemt de equivalentie aan tussen S3 en de B-principes. Volgens Tarski (1954*b*) liet Beth evenals hijzelf zien dat het principe O1 uit het

[52] Cardinaalgetal $\mathsf{k}$, zie Beth (1959*b*), p. 536: formuleverzameling $\Delta$ met $k$ predicaat- en individuen-parameters heeft een model van cardinaliteit $\mathsf{k}$ d.e.s.d. als de afsluiting door eerste orde logica over $\Delta$ consistent is (als $\mathsf{k}$ eindig, dan is het model aftelbaar). Zie voor $\mathsf{k}$ ook Beth (1953*c*), p. 66.

[53] Zie ook Bell & Slomson (1969), pp. 80–84: verwijzing naar Vaught (1956) en verder p. 103, stelling 4.3.

[54] Helaas geeft Beth niet de plaats waar dit citaat bij Tarski voorkomt. In 1934 is alleen de Poolse voorloper van Tarski (1935*b*) verschenen (volgens de opsommingen in de door Givant samengestelde Tarski-bibliografie in Tarski's verzameld werk): daar is dit niet te vinden.

[55] Voor de definitie van de B-principes, zie Tarski (1954*a*). Voor idealen, priemidealen, zie Grätzer (1978).

[56] Voor de omschrijving van S3, S-principes, zie Tarski (1954*c*).

[57] 'structure *simplement* ordonnée' (lineaire ordening) in Beth (1954), p. 29 (lezing in 1952, uitgegeven in 1954). Voor O1: zie (Henkin 1954) en (Tarski 1954*b*).

principe S3 afleidbaar is; Tarski vertelde evenwel niet waar dit bij Beth gezocht moet worden.[58] Henkin (1954) had al gewezen op de afleidbaarheid van O1 uit B-principes (i.h.b. B5). In Tarski (1954*b*) was de weg van O1 terug naar S3 nog een vraag. In Jech (1973), sectie 7.2, wordt de weg van de ordeningsprincipes in die richting afgesneden. De weg van $AC^{<\omega}$ terug naar O1 is niet mogelijk volgens (Jech 1973), sectie 7.3.[59]

De drie paragrafen afsluitend kan men de volgende toenemende verzwakkingen van het keuze-axioma opstellen, waar Beth een (zeer bescheiden) rol heeft gespeeld

> AC — Beths keuze-axioma — volledigheid en de priemideaalstelling — principe S3 — principe O1 — principe $AC^{<\omega}$ .

**Beslisbare sommen en producten**

Er was nog een vervolg op dit logisch onderzoek van ordeningen in de vorm van beslisbaarheid van ordeningstheorieën sec, en onder samenstellende operaties (som, product) op die theorieën. Dit blijkt uit een correspondentie tussen Beth en Feferman. Feferman hield zich met onderzoek op dit terrein bezig en had van Tarski te horen gekregen dat Beth ook een resultaat had geboekt.[60] Het bleek Beth (1954) te zijn;[61] pp. 33–34 met de volgende uitspraken komen ervoor in aanmerking:

"Pour chaque algèbre de Boole finie ou dénombrable, il y a une base, c'est-à-dire qu'on peut construire une structure simplement ordonnée $(\mathtt{S}, <)$ telle que corps d'ensembles engendré par les segments $E(a < x \leq b)$ est isomorphe à l'algèbre de Boole donnée. [...] Il y a donc un parallélisme étroit entre la classification des algèbres de Boole et types booléens et celle des structures simplement ordonnées et types eudoxiens.[62] Pourtant, l'énumération des types booléens par Tarski n'implique pas encore une énumération des types eudoxiens, puisque une algèbre de Boole donnée aura en général plusieurs bases qui appertiennent à des type eudoxiens différents."

Eerst de beslissingsvraag in het algemeen zoals in Beth (1954): "On dira qu'on a résolu le problème de décision pour une structure simplement ordonnée $< \mathtt{S}, \leq >$ si, pour toute expression eudoxienne close, on sait décider si elle est satisfaite par cette structure ou non." En in het bijzondere geval van zijn stelling: "Supposons qu'on ait résolu de problème de décision pour les structures simplement ordonnée $(\mathtt{S}_1, <)$ et $(\mathtt{S}_2, <)$; alors on peut résoudre également le problème de décision pour leur somme ordonnée." Om Beth (1954), stelling 5 gaat het: "Soit $(\mathtt{S}_3, <)$ la somme ordonnée de $(\mathtt{S}_1, <)$ et $(\mathtt{S}_2, <)$. Alors la type

[58] Het kan ook een mondelinge mededeling geweest zijn.

[59] Voor wie precies wat heeft bedacht, zie de historische opmerkingen in Jech (1973) over zijn hoofdstuk 7.

[60] Brief S. Feferman – Beth, 1 november 1954, (Fair Haven, NJ). Solomon (Sol) Feferman, *1928.

[61] Brief Beth – S Feferman, 7 november 1954.

[62] 'expression eudoxienne' in Beth (1954) omschreven als 'les expressions obtenues, en partant des atomes $x = x, x = y, \ldots, y = x, z = x, \ldots, x < x, x < y, \ldots, y < x, \ldots$ par application des opérateurs de la logique du premier ordre.'

eudoxien de $(\mathtt{S}_3, <)$ est uniquement déterminé par les types eudoxiens de $(\mathtt{S}_1, <)$ et $(\mathtt{S}_2, <)$."

Het resultaat van Beth was volgens Feferman het eerste, naast Mostowki's werk over directe producten, dat hij gezien had.[63] Feferman behandelde daarop twee stellingen: het beslissingsprobleem voor elke geschikte eindige som — of product —van algebra's kan gereduceerd worden tot de beslissingsproblemen van de afzonderlijke algebra's. Cardinaal- en ordinaalsommen — of producten — kunnen evenzo afgehandeld worden.[64] Feferman generaliseerde als volgt Beths stelling 5. Neem aan dat men voor de systemen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ de theorieën Th($\mathcal{A}$) en Th($\mathcal{B}$) heeft, dan: "(4*) If Th($\mathcal{A}$), Th($\mathcal{B}$) are both decidable, so is Th($\mathcal{A} +_\varphi \mathcal{B}$). By suitable specifications of $\varphi$, $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ the operation $+_\varphi$ may be made to agree with the cardinal sum. Thus (4*) generalizes a result of Beth."

Men heeft dus de beslissingsproblemen gekoppeld aan directe producten in Mostowski (1952), de eindige ordinaalsommen in Beth (1954), de uitbreiding door Feferman van Beth (1954) naar willekeurige eindige gegeneraliseerde sommen en producten, en tenslotte de oneindige ordinaalsommen door Fraïssé in 1955.[65]

## 4.2 Afwijkende valuaties en hun afgeleiden

Zoals in de inleiding tot dit hoofdstuk is vermeld, zijn er door Beth vanaf 1950 diverse soorten valuaties ontwikkeld: d.w.z. functies die aan formules waarheidswaarden toekennen. Men kan twee hoofdgroepen onderscheiden: 1. reguliere valuaties, die Beth tezamen met een gereduceerde logica ontwikkelde, en 2. pseudovaluaties.

1. In de eerste helft van de vijftiger jaren definieerde Beth gereduceerde logica. Aan de hand hiervan construeerde hij normale en reguliere valuaties. In een reeks van publicaties bracht Beth veranderingen en verbeteringen op dit thema aan:
   - normale valuaties (1951): toegepast op gereduceerde logica.
   - reguliere valuaties (uitbreiding van normale valuaties) (1951): toegepast op gereduceerde logica, en verder gebruikt voor subformules, tableaus (1954/55) en definitiestelling (1953).
2. Beth begon in 1954 met zijn pseudovaluaties. De pseudovaluaties zijn tweewaardige valuaties van het normale soort, maar met singulariteiten. In de context van de pseudovaluaties gebruikte Beth zo nu en dan de term reguliere valuaties: dit zijn de gebruikelijke klassieke valuaties. De pseudovaluaties zijn dan in dit verband niet-reguliere valuaties. Dit heeft niets

[63] Brief S. Feferman – Beth, 13 november 1954, (Fair Haven, NJ). (Mostowski 1952).
[64] (Feferman 1955*b*), (Feferman 1955*a*).
[65] Voor overzichtje: zie Feferman & Vaught (1959): de inleiding en p. 76 noot 15.

van doen met de gereduceerde logica en de daar voorkomende valuaties.[66] Beth ontwikkelde eind jaren vijftig, begin jaren zestig, de volgende pseudovaluaties en hun afgeleiden:

- pseudovaluaties (1954): volledigheid, adequaatheid (1954), onafhankelijkheidstests (1958).
- uitgebreide pseudovaluaties (rond 1960):
  - I(mplicatieve) valuaties (1961): gebruikt bij implicatieve intuïtionistische systemen.
  - modale valuaties (1961): implicatieve en strikt implicatieve S4 en S5.

### 4.2.1 Gereduceerde logica

#### Syntax en semantiek

**Reguliere valuaties.** De reguliere valuaties waren volgens Beth (1959*b*) door hemzelf, Henkin en Hasenjaeger onafhankelijk van elkaar gevonden.[67] Zij kunnen gebruikt worden voor een vereenvoudiging van volledigheidsbewijzen. Beth maakte ook van de gereduceerde logica gebruik bij het bewijs van zijn definitiestelling. Hierdoor is het mogelijk om op bepaalde punten predicaatlogica te behandelen als ware het propositionele logica. Gereduceerde logica was volgens Beth (1951*b*): "a logical structure [...], which apart from 'typographical' differences, is equivalent to sentential logic." Zijn doel met de gereduceerde logica werd door Beth in 1955 als volgt omschreven: [68] "Pour jeter un pont entre la logique des énoncés et la logique élémentaire, nous construirons un système logique que nous appelons *logique réduite*."

Men kan onderdelen op hun topologische mérites gaan beschouwen wat ook door Beth gebeurde. Aan de hand hiervan kan men een topologisch volledigheidsbewijs construeren.[69] In deze sectie zal gekeken worden naar de ontwikkeling en de begrippen van gereduceerde logica; het gebruik komt in de volgende sectie, 'Volledigheid, (gereduceerde) subformules en de aanloop tot de definitiestelling' ter sprake. Enkele hier al vermelde begrippen komen pas later, in het hoofdstuk over de definitiestelling, tot hun recht.

**Gereduceerde logica.** De syntax wordt door Beth als volgt gedefinieerd:

- Atomen: deze zijn van de vorm:

[66] Rond 1958 gaf Beth definities van reguliere valuaties; wat daar buiten viel was niet regulier. Begin jaren zestig gebruikte viel hij weer terug op pseudovaluaties. Men kan ook zeggen dat een pseudovaluatie één van de niet-reguliere valuaties is.

[67] Beths eerste verwijzing naar Henkin en Hasenjaeger (1953) in Beth (1953*b*), p. 332, noot 7. Zie ook (Smullyan 1968), p. 95, 'The Henkin-Hasenjaeger proof'.

[68] (Beth 1950), tweede druk uit 1955, p. 87.

[69] Het door Beth gehanteerde topologische bewijs kreeg navolgers waaronder van Fraassen (1968): hierin wordt een uitbreiding van Beths valuatie gegeven om deze beter geschikt te maken voor meerdere 'free logic' systemen waaronder 'vrije variabelen systemen'. Naast van Fraassen heeft ook H. Leblanc zich met 'free logic' bezig gehouden.

(a) $\forall x A(x)$ ($\exists x Ax$ gedefinieerd als $\neg\forall x \neg A(x)$).

(b) $P(p_1, \ldots, p_n)$, waarbij $P$ een n-plaatsig predicaat.

In de elementaire gereduceerde logica worden alle vrije variabelen door getalconstanten (numerals) $1, 2, \ldots, p, \ldots$ vervangen.[70]

*Reductie* Als $A(x)$ een formule is met $x$ een vrije variabele, dan heet deze formule *gereduceerd* met betrekking tot de variabele $x$ als $A(x)$ vervangen wordt door de formules $A(1), A(2), \ldots$ (dit valt uit te breiden naar n vrije variabelen en naar een verzameling formules). $Constit(A) = \{A_p(1), A_p(2), \ldots, A_p(n), \ldots\}$ de constituentenverzameling van $A$), als $A$ van de vorm $\forall x_m A_p(x_m)$ is. Evenzo voor $A = \exists x A(x)$.

Atomen zijn formules die echte atomen zijn, zoals $P(5)$, en alle formules die een quantor als hoofdoperator hebben, zoals $\forall x(Px \wedge Q(x, 6))$; maar formules, waarin dit niet het geval is, zoals $\forall x Px \wedge \forall x Q(x, 6)$ vallen buiten de boot.

- Operatoren worden zoals in klassieke logica gedefinieerd.

Wij kunnen nu de volgende begrippen invoeren:

- *CA-verzameling* werd (als een ingeperkte subformuleverzameling) door Beth bij de gereduceerde logica gebruikt.[71] Een formuleverzameling $\Delta$ uit de gereduceerde logica is een CA-verzameling als $\Delta$ gesloten is onder het nemen van constituenten en de atomen. De verzameling van de atomen en de constituenten van een formule $A$, aangeduid als redsubf($A$) [de gereduceerde subformules van $A$], zullen vooral in het hoofdstuk over definitietheorie een rol spelen.[72]
- *CA-operatie*, door Beth als volgt gedefinieerd: $\mathrm{CA}(\Delta) := \bigcap\{\Delta^* | \Delta \subseteq \Delta^*, \Delta^*$ is CA-verzameling $\}$. $\mathrm{CA}(\Delta) = \Delta$ als $\Delta$ een CA-verzameling is. De operatie CA heeft de topologische afsluitingseigenschappen.[73]

Semantiek:
*normale valuatie* werd door Beth als volgt gedefinieerd:
Voor elke formule $A$ binnen de gereduceerde logica en valuatie $v$, is $v(A) \in \{0, 1\}$. Bovendien moet gelden:

- De valuatie op de atomen: $v(\forall x A(x)) = 1$ d.e.s.d. als $v(A(1)) = v(A(2)) = \cdots = v(A(p) = \cdots = 1$

  [voor $A = \forall x A(x)$ heet $v$ $A$-normaal; $v$ heet $\Delta$-normaal, als $v$ $A$-normaal is voor elk atoom $A$ in $\mathrm{CA}(\Delta)$]
- De valuaties op de operatoren: zoals gebruikelijk.[74]

[70] Zo een getalconstante, zeg $n^\star$, heeft als denotatie een $n \in \mathcal{N}$.
[71] Zie (Beth 1953*b*), p. 333 en (Beth 1959*b*), p. 267 e.v. (The Subformula Theorem).
[72] Alsd $A = B \circ C$, met $\circ$ een operator, dan redsubf($A$) = redsubf($B$) $\cup$ redsubf($C$).
[73] Zie (Engelking 1989).
[74] Beth (1953*b*), p. 332.

*Opsommingen.* Voor de reguliere valuaties had Beth een vaste opsomming nodig van alle existentiële formules in de gereduceerde logica, in het vervolg aangegeven als $\exists x_1 A_1(x_1), \exists x_2 A_2(x_2), \ldots$ (of, al naargelang Beths artikel, als een opsomming van alle universele quantoren $\forall x_1 A_1(x_1)$, $\forall x_2 A_2(x_2), \ldots$). [75]

Pas in de loop der tijden, van Beth (1951*b*) af, kreeg deze de hier uit Beth (1959*b*), p. 264, geciteerde vorm met een speciale 'nieuwe getuige' functie $s : \mathtt{N} \rightarrow \mathtt{N}$, die voldoet aan: [76]

— $s(1) = \mu x\ [x \in \mathtt{N}\ \&\ \forall n \in \mathtt{N}$ (getalconstante $n$ of individuele variabele $x_n$ treden op in $\exists y_1 A_1(y_1) \rightarrow x > n)]$ [77]
— $s(r+1) = \mu x\ [x \in \mathtt{N}\ \&\ x > s(r)\ \&\ \forall n \in \mathtt{N}$ (getalconstante $n$ of individuele variabele $x_n$ treden op in $\exists y_{r+1} A_{r+1}(y_{r+1}) \rightarrow x > n)]$

*Reguliere valuaties*:

- $v$ heet een reguliere valuatie, als $v$ een normale valuatie is en bovendien voor alle $p$ als $v(\exists x_p A_p(x_p)) = 1$, dan $v(A_p(s(p))) = 1$.
- Een alternatieve formulering naar analogie met Henkin (1949), p. 162, 163, maar vooral Hasenjaeger (1953), p. 43, zoals vermeld in Beth (1953*b*), p. 332, noot 7: $\exists x_q X_q(x_q) \rightarrow X_q(s(q))$; of zoals in Beth (1959*b*), p. 265: Een valuatie v heet regulier d.e.s.d. als $v$ de volgende formules vervult, waarbij $p, q, r = 1, 2, \ldots$:

  $\forall x_p A_p(x_p) \rightarrow A_p(q)$; $\exists x_r A_r(x_r) \rightarrow A_r(s(r))$.

Enkele eigenschappen, die met reguliere valuaties samenhangen: [78]

a Elke normale valuatie $v$ definieert een aftelbaar model voor de formules $A$ waarvoor $v(A) = 1$ geldt ((Beth 1951*b*), p. 440); en omgekeerd: elk aftelbaar model met een opsomming van zijn elementen definieert een normale valuatie ((Beth 1951*b*), p. 441).

[75]Beth ging uit van een opsomming van formules naar een bepaalde open plaats: alle variabelen zijn gebonden door een quantor of zijn gesubstitueerd door een getalconstante op één variable na op de k-de plaats (voor lopende k).

[76]$\mu x[\ldots]$: de kleinste $x$, die voldoet aan .... Vergelijk Beths definitie van de $s$-functie met de analoge definitie in Hasenjaeger (1953), p. 43 en noot 3 op p. 42. Hasenjaeger (1953), p. 42, noot 3 vermeldt nog een brief van Henkin (van 4 mei 1951) waarin deze zegt al vroeger deze vereenvoudiging te hebben bedacht. Zie ook Church (1956), hoofdstuk 5, i.h.b. sectie 54 'Henkin's completeness theorem' (suggestie in Hasenjaeger (1953).

[77]Op later leeftijd werd Beth preciezer in de leer. In Beth (1959*b*) wordt i.p.v. getalconstante $n$, de getalconstante $n^*$ gebezigd ($n^*$ heeft als denotatie $n \in \mathtt{N}$); dit geeft bij de toepassing van de s-functie hetzelfde beeld. Beth gebruikt daar $s^*(n)$ waarmee hij $(s(n))^*$, dus wederom een getalconstante voor een getal in $\mathtt{N}$, bedoelt; evenzo met Beths functie $f^*(k)$. Om de tekst hier niet nodeloos ingewikkeld te maken wordt Beth hierin niet nagevolgd.

[78]We geven de opsomming voor een algemene indruk van wat men met reguliere en normale valuaties vermag. Er worden geen bewijzen gegeven, maar wel de plaatsen waar men Beths bewijs kan vinden. Dit hoofdstuk wordt weliswaar gepresenteerd alsof de vermelde resultaten onze eerste belangstelling hebben, maar dit is ten dele waar. Dit hoofdstuk wordt in de eerste plaats gebruikt als aanloop tot de definitiestelling. Derhalve zal er over tal van zaken (bewijzen) heengelopen worden.

b Elke normale valuatie $v$ kan door een reguliere valuatie $v^\star$ vervangen worden die dezelfde formule vervult. Men kan dit ook voor een formuleverzameling definiëren ((Beth 1959*b*), pp. 264–265).

c Voor elke formuleverzameling $\Delta$ is er een reguliere valuatie die alle formules van $\Delta$ vervult d.e.s.d. als voor elke eindige deelverzameling $\Delta^*$ van $\Delta$ er een reguliere valuatie is die elke formule van $\Delta^*$ vervult ((Beth 1959*b*), p. 265).

d Voor elke formuleverzameling $\Delta$ is er een normale valuatie $v$ die alle formules van $\Delta$ vervult d.e.s.d. als $\Delta$ is consistent relatief elementaire logica ((Beth 1959*b*), p. 266) [hiertoe gebruikt men de punten b en c].

e Als er geen reguliere verzameling is die een formule $A$ vervult, dan $\vdash_{EL} \neg A$ [Het bewijs hiervan zal deels ter sprake komen in de nog te bespreken brief van Beth naar Kleene. Bij dat bewijs zijn wel bovengenoemde punten als basis nodig].

Beth gebruikte enkele punten van bovenstaande opsomming, waaronder (a) en (e), om van daaruit naar de door hem als Löwenheim – Skolem – Gödel benoemde stelling (eigenlijk meer een conglomeraat van stellingen, nml. die van Gödel, Skolem en Löwenheim) te komen ((Beth 1951*b*), p. 443):
1. Een formuleverzameling $\Delta$ heeft en aftelbaar model d.e.s.d. als de intersectie over al de uitbreidingen van $\Delta$ consistent is. 2. Een formuleverzameling $\Delta$ heeft een model van een oneindig kardinaalgetal d.e.s.d. als de intersectie van alle uitbreidingen van $\Delta$ consistent is.
Uit punten 1. en 2. haalt Beth vervolgens 3. Een formuleverzameling $\Delta$ heeft een aftelbaar model d.e.s.d. als het een model van een oneindig kardinaalgetal heeft; en 4. Een formuleverzameling $\Delta$ heeft een model d.e.s.d. als elke eindige deelverzameling van $\Delta$ een model heeft.

### Volledigheid, subformules en de aanloop tot de definitiestelling

Beth leverde met de combinatie van gereduceerde logica met topologie volledigheid. In Beth (1959*b*), pp. 267–274 wordt alles veel toegankelijker uitgewerkt na eerst een bespreking van de gereduceerde logica op pp. 263–267. Na de subformulestelling komen daar de stelling van Herbrand en Gentzens hoofdstelling aan de beurt.[79] Men kan Beth parafraseren om een hoeveelheid technisch materiaal te omzeilen. Gelukkig is dit niet nodig doordat Beth dit al voor ons gedaan heeft in een brief naar Kleene.[80] Waar het in de brief naar Kleene vooral om gaat is paragraaf 10 van Beth (1951*b*). Daar wordt een existentiestelling voor de normale valuaties gegeven. Dit moet wel volgens Beth (1959*b*), p. 441, want: `V` wordt verondersteld bicompact [compact in onze zin] te zijn, dus weten we dat elke oneindige puntenverzameling een limietpunt moet hebben. Maar een verzameling normale punten kan limietpunten hebben die geen van alle normaal zijn: derhalve benodigen we een existentiestelling voor normale valuaties.

[79] Zie de 'Lange noten' op het einde van dit hoofdstuk.

[80] Brief Beth – S.C. Kleene, 16 april 1953. In dit hoofdstuk zal een deel van die brief geciteerd worden, de restanten treft men in het hoofdstuk over definitietheorie aan.

Uitgangspunt in de brief vormde Beth (1951*b*), p. 441 e.v. Daar wordt een deelverzameling $\mathtt{V}'$ van de valuatieverzameling $\mathtt{V}$ genomen m.b.t. een gegeven verzameling gesloten formules $\{C_1, \ldots, C_k, \ldots\}$ uit de elementaire logica.
Beth bewijst de stelling dat de verzameling $\{C_1, \ldots, C_k., \ldots\}$ inconsistent is d.e.s.d. als $\mathtt{V}' = \emptyset$. Als volgt definieerde Beth $\mathtt{V}'$ met behulp van $\mathtt{V}$: [81]

$$\mathtt{V}' = \bigcap_k \mathtt{V}(C_k) \cap \bigcap_p \bigcap_m (\mathtt{V}(\neg\forall x_m X_p(x_m)) \cup \bigcap_r \mathtt{V}(X_p(r))) \cap$$
$$\cap \bigcap_q \bigcap_n (\mathtt{V}(\forall x_n X_q(x_n)) \cup \bigcup_s \mathtt{V}(\neg X_q(s))).$$

Dit houdt in: de valuaties van $\mathtt{V}'$ voldoen aan alle formules $C_i$ plus alle disjuncties van de formules $\forall x_m X_p(x_m) \to X_p(r)$, terwijl voor elke formule $\forall x_n X_q(x_n)$ die niet wordt waargemaakt, een 'tegenvoorbeeld' $\neg X_q(s)$ wordt waargemaakt. De lezer herkent hier de normale valuatie. En nu de brief naar Kleene: [82]

"Now I prove:

(i) Every normal valuation (as just described) provides a denumerable model (this is pretty obvious),

(ij) If $\mathtt{V}'$ is empty, then the formulas $C_k$ are inconsistent.[83] The proof of (ij) involves the following steps:

 (ija) If $\mathtt{V}' = \emptyset$, then a fortiori the smaller set $\mathtt{V}''$ is empty. The set $\mathtt{V}''$ is obtained by replacing the union of sets $\mathtt{V}((\neg X_q(s))$ [dus $\bigcup_s \mathtt{V}((\neg X_q(s))$] by one set $\mathtt{V}(\neg X(s(q)))$. The trick in the proof consists mainly in the choice of the function $s(q)$. [dit was ook in Beth (1951*b*) de omzetting van $\mathtt{V}$ over $\mathtt{V}'$ in $\mathtt{V}''$, ofwel van $\bigcup_s \mathtt{V}(\neg X_q(s))$ in uiteindelijk $\mathtt{V}(\neg X_q(s(q)))$][84]

 (ijb) If $\mathtt{V}'' = \emptyset$, then $\mathtt{V}''' = \emptyset$, where $\mathtt{V}'''$ is obtained by taking in account only those $k, m, n, p, r, s$ which are smaller than a certain constant $M$; this step is non-finitary [introductie van $\mathtt{V}'$ gecombineerd met compactheid; zie de sectie 'Volledigheid en topologie' met de opgesomde eigenschappen].

(iij) If $\mathtt{V}''' = \emptyset$, then the expression obtained by dropping the $V$'s and replacing set-theoretic by logical operations is a contradiction of sentential logic; this follows, of course, from the completeness of sentential logic.

[81] In de brief naar Kleene maakt Beth gewag van 'correction sheets'. Vanwege de context en de beschrijving van de indices kan men veronderstellen dat de door Beth gebruikte, maar niet in de brief genoteerde formule, die uit Beth (1951*b*), p. 441, maar met de verbetering van Beth (1953*c*), p. 70, is (deze correctie bestaat uit het toevoegen van extra indices). De herziene versie (1955) van Beth (1950) ligt dan nog te ver in de toekomst. Wel komt daar in tegenstelling tot Beth (1950) een uitvoerige bespreking van de topologisch — algebraïsche aspecten voor. Het ms. E.W. Beth, *Les méthodes algébriques et topologiques dans la recherche des fondements des mathématiques* is daar een voorloper van. Beth (1956*b*) (Beths lezingen uit 1954) geeft wederom in het Frans een bespreking van alle hier voorkomende zaken. In Beth (1959*b*) treft men Beths laatste versie. In Beth (1953*b*) wordt in noot 2 op p. 331 ook Kleene bedankt voor 'reading a draft of this paper'. In Beth (1953*b*) wordt wel een deel van Beth (1951*b*) gebruikt, maar voor een hoeveelheid technische uitweiding wordt er in Beth (1953*b*) toch doorverwezen naar Beth (1951*b*); en juist naar een behandeling zoals in Beth (1951*b*) wordt in de brief naar Kleene door Beth gerefereerd en geparafraseerd.

[82] Brief Beth – S.C. Kleene, 16 april 1953.

[83] Met de formules $C_k$ bedoelde Beth de elementen uit de boven omschreven verzameling $\{C_1, \ldots, C_k., \ldots\}$.

[84] Voor de reden hiertoe, zie onder 'Valuatie-verzamelingen' in de 'Lange noten' op het einde van dit hoofdstuk..

[het gaat hier dus om de formule
$\bigwedge_k C_k \wedge \bigwedge_p \bigwedge_m (\neg\forall x_m X_p(x_m) \vee \bigwedge_r X_p(r)) \wedge \bigwedge_q \bigwedge_n \forall x_n X_q(x_n) \vee \bigvee_s \neg X_q(s))$,
of liever, in de volgende stap: dezelfde formule, maar nu met $\neg X_q(s(q)))$ op het eind i.p.v. $\bigvee_s \neg X_q(s))$]

(iv) Now the indices $p, r, \ldots$ are replaced by free variables, as pointed out on the correction sheet, and quantification theory is applied in an obvious manner, using the properties of the function $s(q)$ [zoals in de vorige sectie vastgelegd]; it follows that the conjunction of all $C_k$ with $k$ smaller than $M$ is a contradiction of elementary logic. Let us consider the negation $C$ of the conjunction under consideration, then $C$ is a theorem of elementary logic."

Gebruikmakend van $\mathtt{V}'''$ als leeg stelt Beth (1951*b*), p. 442, dat
$\bigwedge_{k\leq M} C_k \wedge \bigwedge_{p,m,r\leq M}(\forall x_m X_p(x_m) \rightarrow X_p(r)) \wedge (\bigwedge_{n,q\leq M}(X_q(s(q)) \rightarrow \forall x_n X_q(x_n))$
voor geen valuatie op 1 komt; maar dan is onder negatie die formule in de omzetting
$\bigwedge_{p,m,r\leq M}(\forall x_m X_p(x_m) \rightarrow X_p(r)) \rightarrow (\bigwedge_{n,q\leq M}(X_q(s(q)) \rightarrow \forall x_n X_q(x_n)) \rightarrow \neg \bigwedge_{k\leq M} C_k)$
een stelling uit de gereduceerde logica ($r$ en $s(q)$ in de formule zijn getalconstanten). Van hieruit wil Beth (1951*b*), p. 443 laten zien dat $\neg \bigwedge_{k\leq M} C_k$ een stelling uit de elementaire logica is en de elementair-logisch deductieve afsluiting van $\{C_1, \ldots, C_k, \ldots\}$ inconsistent. Wij zullen niet alle stappen in dit bewijs gaan aflopen, slechts enkele kenmerkende onderdelen worden bekeken.[85]

De manier waarop Beth weer naar elementaire logica gaat, wordt in bovenstaande niet aangegeven. Hier en in het hoofdstuk over de definitiestelling, waar Beth deze stap ook moet maken, hebben wij dit nodig.
Laat $x_1, x_2, \ldots$ een opsomming zijn van de variabelen, dan kan men voor elke $M$ een getal $Z$ vinden z.d.d. $n < Z$ voor elke $n$ in de opsomming ($Z$ is de grootste index). Ga nu elke ingevoerde getalconstante $j$ vervangen door een variabele $x_{j+Z}$. Vanwege het onhandige opschrijfwerk verving Beth $x_{j+Z}$ door $z_j$, en hierin volgen wij hem. Elke gereduceerde formule $X_p(r)$ wordt hiermee stapsgewijs vervangen door een elementair-logische formule $X_p^\star(z_r)$. Beth gebruikte $X_p^\star(z_r)$ i.p.v. $X_p(z_r)$, want naast $r$ kunnen er nog andere constanten in zitten. Als voorbeeld nemen we bovenstaande formule, maar nu met de bewerking toegepast op de beide getalconstanten $r, s(r)$ en een nadere specificatie op de afschattingen:
$\bigwedge_{p\leq P,m\leq M,r\leq R}(\forall x_m X_p(x_m) \rightarrow X_p^\star(z_r) \rightarrow (\bigwedge_{n\leq N,q\leq Q}(X_q^\star(z_{s(q)}) \rightarrow \forall x_n X_q(x_n)) \rightarrow \neg \bigwedge_{k\leq K} C_k)$
Met de al gebonden variabelen gebeurt er natuurlijk niets. Met deze omzetting komen we weer de elementaire logica binnen.

Wij gaan naar de twee delen van bovenstaande formule kijken, namelijk vóór en na de hoofdimplicatie. Er van uitgaande dat $\vdash_{EL} \forall x X_p^\star(x) \rightarrow X_p^\star(z_r)$, heeft men volgens Beth ook
$\vdash_{EL} \bigwedge_{p\leq P,m\leq M,r\leq R}(\forall x_m X_p(x_m) \rightarrow X_p^\star(z_r)$ en

[85]Men wordt voor het nauwkeuriger werk verwezen naar de oorspronkelijke tekst in Beth (1951*b*), pp. 442, 443 (gecombineerd met verbeteringen uit Beth (1953*c*), p. 71), Beth (1950), maar dan de tweede druk uit 1955, pp. 90–92 en Beth (1959*b*), p. 266, 267.

$\vdash_{EL} (\bigwedge_{n\leq N,q\leq Q}(X_q^\star(z_{s(q)}) \rightarrow \forall x_n X_q(x_n)) \rightarrow \neg \bigwedge_{k\leq K} C_k)$, maar dan heeft men ook met de existentiële generalisatie van de vorige formule van doen:
$\vdash_{EL} \exists z_{s(1)} \cdots \exists z_{s(Q)}(\bigwedge_{n\leq N,q\leq Q}(X_q^\star(z_{s(q)}) \rightarrow \forall x_n X_q(x_n)) \rightarrow \neg \bigwedge_{k\leq K} C_k)$
Beth gaat er nu toe over om te bewijzen dat het linkerdeel van deze implicatie, d.w.z. $\bigwedge_{n\leq N,q\leq Q}(X_q^\star(z_{s(q)}) \rightarrow \forall x_n X_q(x_n)$, een elementair-logische stelling is.[86] Daarmee kan hij laten zien dat $\vdash_{EL} \neg \bigwedge_{k\leq K} C_k)$. Hiermee komt hij op de gevraagde inconsistentie uit.

Wij gaan weer terug naar de brief van Beth naar Kleene op het punt waar wij opgehouden zijn:
" Now if we consider $C$ [in de vorige formules hadden we al $C := \bigwedge_{k\leq M} C_k$ kunnen inzetten], then we have a situation which strongly reminds of Gentzen's Extended Hauptsatz.[87] If $C$ is a theorem of elementary logic, then the derivation of $C$ can be given a certain normal form. First we derive, by sentential logic, the expression mentioned under (iij). Then we apply quantification theory in a certain well-specified manner, as indicated on the correction sheet.

As far as I see, there are the following differences between the Extended Hauptsatz [E.H.] (as stated in your book,[88] p. 460) and its proof, and mine.

1. The E.H. is concerned with sequents; but this does not matter on account of your theorem 1 in your 'Two papers'.[89]
2. My proof is not finitary. But this does not matter either. For if we know that $C$ is a theorem, we have a proof of $C$, and this enables us to determine the constant $M$ mentioned under (ijb). So the part of my proof that is relevant from a finitary point of view remains intact.
3. The expression mentioned under (iij) contains quantifiers, which is not the case with the formulas occurring in Gentzen's midsequent [t/m de middensequent alleen propositions in een bewijs, waarin EH gebruikt]. This again does not matter. For if the negation of the expression mentioned under (iij) is a theorem of sentential logic, then we can obtain new theorems of sentential logic by applying the rule of substitution, and prenex formulas play up to stage (iij) the rôle of atoms of sentential logic. Now either $C$ is simply an identity of sentential logic in terms of its prenex constituents, or we have a valuation $v$ for these constituents with $v(C) = 0$.

   (a) In the first case, the derivation of $C$ is trivial,

   (b) In the second case we can perform a substitution in the expression under (iij) which eliminates the quantifiers (if for a prenex constituent of $C$, $v(C) = 1$, then we substitute an identity of sentential logic for it, etc.). This trick is applied in my own application of the theorem under consideration).

4. I do not suppose $C$ to be prenex."

[86]Voor de uitvoering van dit deel van het bewijs, zie Beth (1951*b*), pp. 442, 443 en Beth (1950), tweede druk uit 1955, pp. 91, 92.
[87]Zie de 'Lange noten' op het einde van dit hoofdstuk.
[88](Kleene 1952*a*), pp. 460–463.
[89]'Two papers': Kleene (1952*c*).

Wij gaan nu over tot een volgend probleem, en dat brengt ons met een verdere stap eigenlijk ook bij de definitiestelling en de tableaus.[90] Hoe vallen Beths gereduceerden te relateren aan Gentzens subformules. Beth gaat in onderstaande tekst in op de invoer, naast normale valuaties, van de C-normale valuaties. Deze zijn we al eerder tegengekomen bij de bespreking van de CA-verzameling en de normale valuaties voor zowel een formule $A$ ($A$-normaal; hier toevallig $C$-normaal geheten voor een formule $C$) alsook een verzameling van formules $\Delta$ ($\Delta$-normaal).

"Now the theorem discussed so far, which is the Löwenheim – Skolem – Gödel theorem, but the proof of which, as given in my paper, suggests, if I am not mistaken, Gentzen's E.H., is not sufficient for my present purpose. And this brought me to proving a theorem which also seems to include the Subformula Theorem. I show that the expression mentioned under (iij) can be chosen so as to contain only subformulas of $C$. This can be done by considering, instead of normal valuations, the larger set of all $C$-normal valuations, in which correct behaviour is only required with regard to the subformulas of $C$.

Let $\mathtt{V}_C$ be the set of all $C$-normal valuations.

Now if $\mathtt{V}_C = \emptyset$, then $\mathtt{V}' = \emptyset$, trivially. But we have also that, if $\mathtt{V}_C \neq \emptyset$, then $\mathtt{V}' \neq \emptyset$ (for it is easy to change a $C$-normal into a normal valuation without changing the values of the subformulas of $C$), hence if $\mathtt{V}' = \emptyset$, then $\mathtt{V}_C = \emptyset$.

The condition $\mathtt{V}_C = \emptyset$ is expressed by the formula on the correction sheet with this qualification that only those values of $p$ and $q$ are taken into consideration, for which $\forall x_m X_p(x_m)$ and $\forall x_n X_q(x_n)$ are subformulas of $C$. Hence the whole argument remains unchanged."

Recapitulerend, met enige negatie-transformaties, kunnen wij nu de volgende equivalenties en stellingen naar Beth opsommen. Laat $C$ een gesloten formule uit de elementaire logica zijn, dan heeft men de volgende equivalenties: [91]

a. Er is geen model voor $\neg C$ (d.w.z. $C$ is logisch geldig).
b. Voor elke normale valuatie $v$: $v(C) = 1$.
c. Voor een index $M$ is de formule $Z$,

$$Z = \bigvee_{m,p,r \leq M}(\forall x_m X_p(x_m) \wedge \neg X_p(r)) \vee \bigvee_{n,q \leq M}(X_q(s(q)) \wedge \neg \forall x_n X_q(x_n)) \vee C,$$

een stelling uit de gereduceerde logica.
d. $C$ is een stelling uit de gereduceerde logica [of ook omgekeerd: als voor een gesloten formule $C$ er geen reguliere valuatie $v$ bestaat die $C$ vervult, dan is $\neg C$ een stelling uit de elementaire logica (Beth 1959*b*), p. 266].
e. Voor elke $\{C\}$-normale valuatie $v$: $v(C) = 1$.

[90] De door Beth gebruikte bewijzen zullen wij hier niet bespreken, zie hiertoe Beth (1959*b*), pp. 267–274 voor de subformulestelling en de stelling van Jacques Herbrand, 1908 – 1931; Beth (1950), tweede druk uit 1955, p. 93–97: stelling van Herbrand. In het hoofdstuk over semantische tableaus wordt nog kort ingegaan op een tableaumatige formulering van Gentzens hoofdstelling.

[91] (Beth 1953*b*): a, b, c, d equivalenties op p. 332; uitbreiding e, f equivalenties p. 334.

f. Een formule $Z$ gelijk als onder punt c is een stelling uit de gereduceerde logica, waarin voor alle $\forall x_m X_p(x_m), \exists x_n X_q(x_n)$ geldt dat $\forall x_m X_p(x_m)$, $\exists x_n X_q(x_n) \in CA(C)$.

Formule $Z$ van punt (c) in bovenstaande opsomming correspondeert min of meer met Gentzens middensequent. Tot en met $Z$ wordt de afleiding van $C$ uitgevoerd met gereduceerde (='propositionele') logica, vanaf $Z$ elementaire logica. Zie voor het belang van dit punt het hoofdstuk definitietheorie met Beths stappenplan en natuurlijk Gentzens hoofdstelling. Beth (1953*b*), p. 333 merkt op: $Z$ geeft een lay-out voor een afleiding van $C$ in elementaire logica, behoudens dat $Z$ niet automatisch Gentzens subformule eigenschap bezit (zie ook het hieraan voorafgaande laatste deel van het citaat uit de brief van Beth naar Kleene). Beth (1953*b*), p. 334 merkt op dat voor elke stelling $C$ in de elementaire logica er zo een formule $Z$ bestaat [zoals onder punt c], waarbij die $Z$ een stelling in de gereduceerde logica is en waarin alle atomen subformules van $C$ zijn. Hieraan dient men niet voorbij te gaan, ofwel zoals Henkin in een brief tegen Beth opmerkte: [92] "I must confess that when I first read it [Beth (1951*b*)] through I quite failed to appreciate the fact (or its significance) that a formula $C$ is a theorem of functional [elementaire] logic if and only if a related formula $Z$ is a theorem of reduced logic." Die $C$ hoeft bij Beth in tegenstelling tot Gentzen geen prenex-formule te zijn.

Wij besluiten hiermee Beths gebruik van gereduceerde logica en reguliere valuaties dat essentieel zou blijken voor zijn afleiding van de definitiestelling. Hiertoe introduceren wij nu een bewering die een hoofdrol zal vervullen in het volgende hoofdstuk:
als $\vdash_{EL} A$, dan $\vdash_{RL} \bigvee \text{redsubf}(A) \vee A$.
$\bigvee \text{redsubf}(A) \vee A$ is een vergroving van de formule $Z$ die wij onder punt c van de laatste opsomming zijn tegengekomen.

Wij gaan nu verder met Beths tweede soort valuaties — de pseudovaluaties — die veel sterker afwijkt van normale 'witness constructies' zoals bij Henkin c.s.

### 4.2.2 Pseudovaluaties

**Pseudovaluaties door de jaren heen.** De pseudovaluaties zijn tweewaardige valuaties van het normale soort, maar met singulariteiten.[93] Beth gebruikte de pseudovaluaties voor de volgende doeleinden:

- Subformulestelling en volledigheid.
- Tarski's beslissingsprobleem m.b.t. adequaatheid van axiomastelsels.
- Twee- of meerwaardige valuaties bij onafhankelijkheidsproblemen
- Modale en derivatieve logica (pas in het hoofdstuk over implicatieve logica te bespreken).

[92] Brief L. Henkin – Beth, 22 augustus 1953, (Berkeley). $C$ i.p.v. Henkins $T$ gebruikt.

[93] Voor een historisch overzicht van de ontwikkeling van deze valuaties door Beth van 1954 tot 1964: zie de Jongh & van Ulsen (1999).

In het begin van 1954 werkte Beth aan een aan Robert Feys op te dragen artikel over pseudovaluaties en hun consequenties. In dit typoscript[94] gebruikte hij zijn in eerdere jaren verworven kennis van Gentzens stellingen — i.h.b. de subformulestelling.

Naast een behandeling van de subformulestelling en volledigheid dacht Beth in de aan Feys opgedragen manuscripten ook een beslisbaarheidsprobleem met zijn pseudovaluaties te kunnen oplossen. Het betrof een in 1946 door Tarski gestelde vraag naar de beslisbaarheid of een willekeurige groep logisch geldige formules al dan niet een adequaat axiomastelsel voor de propositielogica was. Dit liep echter spaak. Zijn werk voor een lezing[95] en het aan Feys opgedragen artikel was aanvankelijk voor niets.

Helemaal vruchteloos was Beths werk echter niet. Tezelfdertijd was Beth ook op het idee van zijn tableaus gekomen die afgeleid worden uit normale valuaties. Voor zijn pseudovaluaties maakte Beth in die tijd gebruik van soortgelijke configuraties. Men kan beider gebruik het beste omschrijven als prototableaus. Het eerste echte tableau verscheen in Beth (1955*a*), en dit werd het alsnog aan Feys opgedragen artikel.

In de tweede helft van de jaren vijftig probeerde Beth het opnieuw met de pseudovaluaties (soms onder een andere naam: niet-reguliere valuaties). In dit geval ging het om onafhankelijkheid en adequaatheid te demonstreren.

Dit houdt in dat zo een valuatie voor minstens één formule een afwijking vertoont vergeleken met de andere 'normale klassieke' valuaties. Binnen een dergelijke formule kan de afwijking tot gevolg hebben dat op een aantal subformules van die formule een normale klassieke waardering plaatsvindt, maar dat op één of meerdere plaatsen subformules met afwijkende valuaties aanwezig zijn. De singulariteiten vindt men in diverse soorten — hierover later meer. Als men hiermee een model kan construeren, waarbij een beoogd axioma op een afwijkende waarde uitkomt en de rest van de beoogde axioma's niet, dan kan men de pseudovaluaties gebruiken voor onafhankelijkheidsbewijzen. Als deze procedure voor alle beoogde axioma's gebruikt kan worden en de axioma's onafhankelijk zijn, dan is er sprake van een *adequaat* axiomastelsel.[96] De door anderen hiertoe gebruikte modellen zijn zeer verscheiden, bijvoorbeeld n-waardige valuaties. Voor Beths tweewaardige valuaties zal de irregulariteit ergens anders vandaan moeten komen. Als men met een normaal klassiek valuatietype werkt zullen de axioma's onder alle valuaties op waar uitkomen. Men is derhalve gedwongen een extra valuatie toe te voegen die dit niet doet. Derhalve moet men pseudovaluaties iets ruimer formuleren dan de gebruikelijke klassieke valuaties

[94]Van dit typoscript zijn er twee van elkaar verschillende versies: versie A. Ms. E.W. Beth, *A subformula theorem for the sentential calculus, and a characterisation of its axioms*; versie B. ms. E.W. Beth, *A subformula theorem for the sentential calculus, and a characterisation of axiom systems adequate for it.* In beide gevallen wordt vermeld: 'dedicated to Robert Feys'.

[95]Ms. E.W. Beth, *A subformula theorem for the sentential calculus, and a characterisation of axiom systems adequate for it* (abstract, bedoeld om in 1954 voorgedragen te worden).

[96]Voor een uitgebreidere bespreking hiervan, zie het hoofdstuk over definitietheorie.

**Een eerste definitie van pseudovaluaties.** Beth beperkte zich aanvankelijk tot sytemen met negatie en implicatie, vandaar de volgende definitie van *pseudovaluatie*:

a. $v(A) = 1$ of $v(A) = 0$
b. als $v(A) = 1$, dan $v(\neg A) = 0$
c. als $v(A) = 1$ en $v(B) = 0$, dan $v(A \to B) = 0$

Beth legde uitdrukkelijk slechts een deel van de valuaties vast. Voor de rest van de combinaties kan men de gebruikelijke klassieke bedelingen kiezen, maar het is nu ook mogelijk daarvan af te gaan wijken. Vandaar Beths lemma 3: [97] elke gebruikelijke klassieke valuatie is een pseudovaluatie, maar niet elke pseudovaluatie is een gebruikelijke klassieke.

Die ruimere keuzemogelijkheid werd in Beths ms. 'A subformula theorem ...'-versie A, p. 2 als volgt met de term singulariteit omschreven:
$\neg A$ is een singulariteit van de 1e soort voor $v$, als $v(A) = v(\neg A) = 0$; $A \to B$ singulariteit van de 2e soort, als $v(A) = v(B) = v(A \to B) = 0$; van de 3e soort, als $v(A) = v(A \to B) = 0$ en $v(B) = 1$; van de 4e soort, als $v(A) = v(B) = 1$ en $v(A \to B) = 0$. Hierop sloot Beths lemma 5 aan: [98] "Any pseudo-valuation is either a valuation [d.w.z. een normale valuatie], or it presents at least one singularity of the first, the second, the third or the fourth kind."

Men kan het anders doen, de soortnaam is ook niet van belang; de enige voorwaarde is dat er aan de definitie van pseudovaluaties wordt voldaan. Daarnaast telkens een ander voorschrift kiezen bood de mogelijkheid om de onafhankelijkheid van telkens andere formules te testen, d.w.z. hij moest één formule (axiomaschema of een speciaal geval daarvan) anders interpreteren dan de rest van de groep.

Wij zien bij de tableaus met pseudovaluatie een propositie en de negatie daarvan soms ondergebracht bij eenzelfde kolom. Bij de semantische tableaus zou die negatie nog verder worden afgebroken, hier niet. Dit verschijnsel wordt door Beth ook syntactisch geformuleerd: [99]
∘ "We assert the *sequent* $A_1, A_2, \ldots, A_k \Rightarrow_0 B$ if at least one of the following conditions is satisfied:
1. The closure of $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ under *modus ponens* contains two contradictory formulas $A$ and $\neg A$. 2. The above-mentioned closure contains the formula $B$."
Aan de hand van de definitie voor valuaties en bovenstaande opmerking komt Beth tot de volgende begrippen: Een pseudovaluatie $v$ *blokkeert* de bovenstaande sequent, als $v$ de antecedent $A_1, A_2, \ldots, A_k$ vervult, maar niet de succedent $B$. En zo kan een dergelijke sequent worden aangenomen, als er niet zo een blokkerende $v$ bestaat. Wij kunnen nu op de toepassingen overgaan.

[97] Beths ms. 'A subformula theorem ...'-versie A, p. 2
[98] Beths ms. A subformula theorem ...'–versie A, p. 3.
[99] Ms. Beth, 'A subformula theorem ...'–versie A, B, p. 2.

**Tarski's beslissingsprobleem.**

In 1946 formuleerde Tarski het volgende beslissingsprobleem: [100]

"Tarski then surveyed the status of the decision problem in various logical fields: sentential (propositional) calculus, [...]. In all of these, even in two-valued sentential calculus, where we would like to be able to decide when a set of formulas is an adequate axiom system, he pointed out open, important problems."

Beth meende hier een antwoord op te kunnen geven met zijn pseudovaluaties: [101]
"One problem was to find for the two-valued sentential calculus a subformula theorem corresponding to the subformula theorem for the lower predicate calculus, which I applied in my paper on Padoa' method. It occurred to me that it would be interesting to have such a theorem as it would at once entail a solution of a problem which you stated at Princeton in 1946, namely, to find a method by which we would be able to decide when a set of [logisch geldige] formulas is an adequate axiom system."

Beths gedachten dienaangaande worden als volgt verwoord in het abstract van een nooit gehouden lezing: [102]
"Suppose we have an axiom system for the sentential calculus which is adequate in the following sense: it enables us to derive all logical identities by means of substitution and modus ponens. Then for the derivation of a given logical identity $A$ it is sufficient to substitute, in the axioms [en de volgende opsomming geeft eigenlijk de subformule-stelling voor de volzinnencalculus[103]]:

1. $A$ and its subformulas,
2. One single logical identity previously derived (for instance, one of the axioms),
3. Certain formulas built up from the formulas under 1 and 2 in accordance with rules which do not depend of the axiom system under consideration, and to apply modus ponens.

A proof for this theorem is given by means of pseudo-valuations, that is, functions $v$ which assign to each formula $A$ a value $v(A)$, such that [en hier volgt de al gegeven definitie van pseudo-valuatie]: a. $v(A) = 0$ or $v(A) = 1$, b. If $v(A) = 1$, then $v(\neg A) = 0$, and c. If $v(A) = 1$ and $v(B) = 0$, then $v(A \to B) = 0$.
The theorem provides a decision procedure for the adequacy of an axiom system; this solves a problem stated by Tarski."

Als volgt ging Beth over naar Tarski's beslisbaarheidsvraag: [104] "There is a decision procedure for the adequacy of a given axiom system $\mathtt{Ax}$ for the sentential calculus. Let $\mathtt{Ax}_0$ be an axiom system the adequacy of which has been previously established (various systems of this kind are found in the literature). Then for $\mathtt{Ax}$ to be adequate, it is necessary and sufficient that for each axiom in $\mathtt{Ax}_0$ it permits a derivation as described in the statement of theorem 19 [zie geciteerde abstract]. [. . . ] This solves a problem stated by A. Tarski." Ofwel, laat zien dat je een al als afdoende bewezen axiomastelsel kunt afleiden uit je nieuwe

[100](Tarski 1947).
[101]Brief Beth – A. Tarski, 30 juni 1954. Alessandro Padoa, 1868 – 1937.
[102]*A subformula theorem for the sentential calculus and a characterisation of axiom systems adequate for it.*
[103]Dit is tevens stelling 19 in Beths ms. 'A subformula theorem . . . '-versie B, p. 9
[104]Beths ms. 'A subformula theorem . . . '-versie B, p. 9.

stelsel en je bovendien niet de klassiek geldige formules te buiten gaat. Als corollarium nam Beth: "There is a decision procedure for the independence of a given adequate axiom system `Ax` for the sentential calculus."

Tarski was minder enthousiast over deze resultaten dan Beth: [105] "I haven't had time to study your paper, but there is one remark which I have to make at once. Your corollary 3 (which gives an affirmative answer to a problem formulated in my Princeton talk) is in direct contradiction to a result stated by Lineal and Post in the Bulletin of the Amer. Math. Soc. vol. 55, 1949, p. 50." [106]

Beter dan parafraseren van Lineal & Post (1949) is het om één van de auteurs aan het woord te laten. Dit is mogelijk vanwege S.L. Guldens [Gulden publiceerde onder het pseudoniem 'S. Lineal'] antwoord op de al vermelde brief van Beth naar Post: [107]

"Since the abstract[108] is not as clear as one would like, permit me to give a clear (I hope) statement of the central result of this work:

Given a finite set $A_1, \ldots, A_n$ of tautologies of the sentential calculus we say that the deducibility problem for this set is recursively solvable if there is an effective (recursive) procedure for determining whether any tautology $A$ is derivable from $A_1, \ldots, A_n$ using only substitution and modus ponens.

The theorem is then:

'The deducibility problem for finite sets of tautologies of the sentential calculus is in general unsolvable.'

In fact the following stronger result holds:

'One can write down explicitly a set $A_1, \ldots, A_n$ of tautologies whose deducibility problem is recursively unsolvable.'

From this we have as immediate corollaries that the following problems are recursively unsolvable.

1. Is there an effective decision procedure which will determine in general whether a finite set of tautologies is independent or not?
2. Is there an effective procedure for determining in general whether a finite set of tautologies is a complete set of axioms for the sentential calculus or not.

I assume that from what you say in your letter that your results would have produced a positive solution to 2."

[105] Brief A. Tarski – Beth, 13 juli 1954, (Berkeley). 'Your corollary 3' in het citaat betreft de verwijzing naar de 'oplossing' van Tarski's beslissingsvraag in Beths ms. 'A subformula theorem . . . '–versie A, p. 6.

[106] Emil L. Post, 1897 – 1954 en Lineal lieten in hun mededeling zien dat er een correspondentie van het Tarski-probleem aan te tonen valt met de woordproblemen. Dit zijn afleibaarheidsvragen van identiteiten in zgn. 'productiesystemen'. In het geval van de partiële propositielogica's worden hiertoe de 'semi-Thue' systemen gekozen. Hierdoor is het mogelijk om door middel van over te hevelen resultaten een aantal stellingen die samenhangen met Tarski's vraag, te beantwoorden.

[107] Beth had van G. Post te horen gekregen dat haar man op 21 april 1954 aan trombose overleden was (brief Gertrude Post – Beth 21 september 1954, (New York, NY)) Wel had ze de brief naar S.L. Gulden (S. Lineal) doorgestuurd. Deze nam nu de voorlichtende taak op zich: het citaat is genomen uit de brief Samuel L. Gulden – Beth, 18 oktober 1954, (Bethlehem, Pennsylvania).

[108] (Lineal & Post 1949).

Lineal & Post (1949) was een 'abstract' zonder bewijzen (toch door een ieder geaccepteerd). Pas in latere tijd is er een nauwkeurig bewijs voor Lineal & Post (1949) geleverd: als eerste een schets van een bewijs in Davis (1958) p. 137–142; dit werd later gepreciseerd in Yntema (1964).[109]

Al eerder had een en ander ten gevolge gehad dat Beth afzag van een op de 'meeting' van de Association for Symbolic Logic op 1 september 1954 in Amsterdam te houden lezing. Beth had zich, samen met Feys, inspanningen getroost om aan de vooravond van het in Amsterdam te houden internationale wiskundecongres in 1954 de eerste volledig wetenschappelijke bijeenkomst van de ASL in Europa te houden. Een bekroning hierop lag in het zelf kunnen aandragen van een mooi resultaat.

Beth probeerde zijn onderzoek een andere wending te geven.[110] Hij dacht met een verzwakking de kwestie van Tarski's vraagstuk en de beantwoording daarvan door Post en Lineal te kunnen omzeilen en wel resulaten te kunnen boeken op:

a. Het gebied van de subformulestelling waar hij in zijn artikel over Padoa en de definitiestelling gebruik van had gemaakt. Het resultaat op dit terrein kan gezocht worden in de semantische tableaus waar de subformulestelling een hoofdrol vervulde.[111]
b. De onafhankelijkheidsbewijzen.

Met betrekking tot punt a merkte Beth tegen Tarski op: [112] "The considerations in connection with the suformula theorem I presented in the lectures which I gave in Paris [in 1954]: Beth (1956*b*)] and they will be published as part of the full text of these lectures." En met betrekking tot punt b: "and in connection with the non-normal interpretations of the sentential calculus to which recently Church had devoted a paper." Dit sloeg op Church (1953) dat meerwaardige valuaties behandelde.[113] Beths opmerking is derhalve een eerste aanzet tot zijn in 1958 uitgewerkte denkbeelden —deze zullen in dit hoofdstuk nog aan bod komen als onafhankelijkheidsbewijzen.

Beth bleef doorwerken aan mogelijkheden om zijn tweewaardige, maar niet normale valuaties, te kunnen gebruiken: [114] "And there is also the notion of a pseudo-valuation which I still expect to be useful in some connections." In zekere zin zou hem dit gelukken, zij het niet op het terrein van beslissingsproblemen. Afgezien van de onafhankelijkheidsbewijzen lag later bij Beth vooral de waarde op de toepasbaarheid voor de semantiek van implicatieve fragmenten van klassieke, intuïtionistische en modale logica. In een verder stadium werden deze valuaties gekoppeld aan een systeem van clusters van hulpvaluaties en

[109] Een overzicht van dit alles wordt gegeven in Singletary (1968).

[110] Brief Beth – A. Tarski, 22 juli 1954. Zie voor een verzwakking van punt 3 van zijn definitie ook de brief Beth – Post, 24 juli 1954.

[111] Zie hiertoe het hoofdstuk over de semantische tableaus.

[112] Brief Beth – A. Tarski, 22 juli 1954.

[113] Church (1953) niet geraadpleegd, wel de recensies daarvan: G.F. Rose (1954*b*), A. Rose (1954*a*) en Müller (1956).

[114] Brief Beth – Tarski, 11 februari 1955.

hulptableaus in navolging van S. Kripke. Bovendien had hij oog voor de algebraïsche aspecten van pseudovaluaties (niet door hemzelf verder uitgewerkt).[115]

**Onafhankelijkheidsbewijzen.**

**Church.** Toepassingen lagen voor Beth in de al gememoreerde onafhankelijkheidsbewijzen: [116] "It is often suggested that the matrix method is the only more or less systematic approach to independence problems, and therefore the existence of a different approach might be a fact of some interest, even though at present I am not in a position to offer any new results." En naar Church: [117] "In my studies on semantic tableaux I have come across a method which seems to be unknown and which lends itself to systematic application. We can stick to two-valued truth-tables, provided we admit non-regular formulas, whose values are not consistent with these truth tables."

De inhoud van de laatste zin in bovenstaand citaat vindt men bij uitstek weergegeven in het 'prototableau' dat Beth gebruikte voor het zoeken naar een niet-reguliere valuatie.[118] En in Beth (1960*a*) heet het: "In their original shape, semantic tableaux also suggest *non regular valuations* [pseudovaluaties] by means of which we can establish the relative independence of Church's axioms. [. . . ] Again, non-regular valuations, suggested by suitable semantic tableaux, can be used in proofs of relative independence." [119]

Beth wenste door middel van een *tweewaardige valuatie* onafhankelijkheid te bewijzen. Per te beschouwen formule moet er een valuatie genomen worden waaronder die formule een andere waarde krijgt dan formules ten opzichte waarvan hij onafhankelijk moet zijn.[120] Onder niet-regulier valt alles wat niet regulier, maar wel tweewaardig is: dus ook de pseudovaluaties.[121]

Volgens Beth was zijn methode ook bruikbaar voor meerwaardige systemen: [122] "in order to prove independence for an axiom system for three-valued logic, one may try to construct a non-regular valuation using the given three truth-values."

---

[115] Brief Beth – A. Tarski, 30 juni 1954. Later zal hier op worden teruggekomen, ook i.v.m. de Jongh & Troelstra (1966). Dick Herman Jacobus de Jongh, *1939; Anne Sjerp Troelstra, *1939.

[116] Brief Beth – A. Tarski, 30 juni 1958

[117] Brief Beth – A. Church, 12 juli 1958.

[118] Zie voor een voorbeeld het hoofdstuk over semantische tableaus; dit werd gehaald uit ms. E.W. Beth, 'A subformula theorem . . . '–versie B, p. 1.

[119] In 'A subformula theorem . . . '–versie B, p. 3 e.v., tipte Beth een transformatie van pseudovaluaties in reguliere valuaties aan.

[120] Wij herhalen nog eens onze eerdere waarschuwing over terminologie. Beth onderscheidde hiertoe reguliere en niet-reguliere valuaties. Onder reguliere valuaties verstond hij de normale klassieke tweewaardige bedeling. Zie hiertoe o.a. Beths ms. 'A subformula theorem . . . '–versie B, p. 2. Men moet hier niet aan Beths gereduceerde logica denken (die is trouwens alleen van belang voor de volle elementaire logica, niet voor propositie-logica).

[121] Definitie naar de brief Beth – A. Church, 12 juli 1958. Zoals hier geformuleerd zijn de extra voorwaarden van de pseudovaluaties vervallen en bestrijken de niet-reguliere valuaties iets meer. In Beth (1961*f*) heet evenwel alles weer pseudovaluatie, en dit geldt voor alle hierna volgende voorbeelden.

[122] Brief Beth – A. Church, 12 juli 1958.

Church (1956), p. 112, maakte bij zijn onafhankelijkheidsbewijzen gebruik van meerwaardige valuaties binnen een matrix-methode: "In the propositional calculus a standard device for establishing the independence of axioms and rules is to generalize the method of §15 as follows. Instead of two truth-values, a system of two or more truth-values, $0, 1, \ldots, n$, is introduced, the first $m$ of these, $0, 1, \ldots, m$, (where $1 \leq m < n$) being called designated truth values."

Hierna wordt door Church de methode beschreven met behulp waarvan een onafhankelijkheidsbewijs te leveren valt: [123] "The foregoing method of finding independence examples by means of a generalized system of truth values suggests also a generalization of the propositional calculus itself. [...] Especially if this is done in such a way that every tautology is a theorem, the resulting logistic system is called a many-valued propositional calculus in the sense of Łukasiewicz."

Het systeem, waarop Beth zijn methode uitprobeerde, was P2 uit Church (1956), p. 119. Naast modus ponens en substitutie heeft men voor P2 de axiomaschema's 202, 203 en 204. Afgezien hiervan zal ook Peirce een rol spelen. Bovendien wilde Beth zijn methode ook tot de elementaire logica uitstrekken (hier gemakshalve 205* en 206* genoemd).[124] Daarbij nam Beth nog Churchs regel 301 van universele generalisatie en substitutie. Dit was volgens Beth voldoende voor een volledige axiomatisatie van bovenstaand fragment.

202. $A \to (B \to A)$;
203. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;
204. $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$.
Peirce $((A \to B) \to A) \to A$.
205* $\forall x A(x) \to A(y)$ [125]
206* $\forall x((A(x) \to \forall y A(y)) \to p) \to p$.

Bij elk axiomasysteem zal Beth weer nieuwe niet-reguliere (pseudo-) valuaties moeten bedenken voor elk axioma in dat systeem. Hier zullen enkele voorbeelden gegeven worden. In de eerste plaats gebeurt dit voor het systeem P2. Daarvan zal slechts één geval behandeld worden: axioma's 202, 204 zijn waar en axioma 203 is onwaar. [126]
Eerst de niet-reguliere valuatie $v$:

> 1. $v(a) = 1$ voor de atomaire formule $a$, en voor alle andere atomaire formules $p$: $v(p) = 0$; 2. $v(\neg A)$ zoals gebruikelijk regulier voor willekeurige formule $A$; 3. $v(a \to b) = 1$ voor de atomaire formules $a$ en $b$, $v(A \to B)$ voor willekeurige formules $A$ en $B$ zoals gebruikelijk regulier.

De door Beth hieruit getrokken conclusie behelsde de punten a, b en c:

[123](Church 1956), p. 114.
[124]Brief Beth – A. Church, 12 juli 1958: een systeem bestaande uit negatie, implicatie en universele quantificatie als primitieve begrippen.
[125]In Beth (1960*a*), p. 283, bevorderd tot $\forall y((\forall x A(x) \to A(y))$
[126]Voorbeeld naar de brief Beth – A. Church, 12 juli 1958 en in Beth (1960*a*), p. 282.

> a. Voor willekeurige formule $A$: $v(A) = 1$ als $A$ bewijsbaar uit alleen de axioma's 202 en 203; b. Maar nu volgt voor het volgende speciale geval van het axioma 203, waarbij $a, b, c$ atomaire formules: $v((a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))) = 0$. c. Enerzijds volgt niet dat als $v(A) = v(A \to B) = 1$, dan ook binnen (202, 203) $v(B) = 1$, anderzijds volgt dit wel als men het volledige systeem (202, 203, 204) neemt.

Een tweede illustratie betreft de elementaire logica: stelsel P2 tezamen met 205* en 206*. Voor de onafhankelijkheid van axioma 205* ten opzichte van 202 – 204 en 206* construeerde Beth de volgende niet-reguliere valuatie $v$: [127] Ook hier zal Beth d.m.v. een speciaal geval het axioma op onwaar zetten.

> 1. De valuaties op de operatoren gedragen zich regulier. De quantoren vormen hier de uitzondering: 2. Als $X$ een atomaire formule is van de vorm: $a, b, \ldots, a(x), a(y), \ldots, b(x), \ldots, r(x, x), r(x, y), \ldots$, etc, dan is $v(X) = 0$. 3. $v(\forall x A(x))$ is regulier zoals gebruikelijk met evenwel één uitzondering: $v(\forall x a(x)) = 1$. In Beth (1959*b*), p. 681 worden alle vrije variabelen, zoals $y$ in $\forall x A(x) \to A(y)$, door 1 vervangen en neemt men een uitverkoren atoom $a(x)$. Geval 3 wordt dan: $v(\forall x A(x)) = v(\exists x A(x)) = v(A(1))$ behalve $v(\forall x a(x)) = 1$.
>
> Uit dit alles verkrijgt men $v(\forall x a(x) \to a(y)) = 0$.

**Peirce** Een speciaal geval is de formule van Peirce: Deze zal in een later hoofdstuk een rol spelen als een toegevoegd axioma, wanneer men van intuïtionistisch naar klassiek gaat: [128] Als Peirce wel in stelsel P2 afleidbaar zou zijn, dan was P2 niet intuïtionistisch, en als Peirce in P2 niet afleidbaar zou zijn, dan zou P2 niet klassiek zijn. Alles staat of valt met de onafhankelijkheid van Peirce m.b.t. P2. Men kan ook zuiver implicatief te werk gaan: dan heeft men 204 te verwijderen en draait het om de positie van Peirce t.o.v. 202 en 203. Als Beth de onafhankelijkheid kon bewijzen, dan nam Peirce een aparte positie in. In de loop van zijn resterende jaren zou Beth bij de bespreking van een systeem (en hij concentreerde zich vooral op implicatieve systemen) de positie van Peirce nooit vergeten: [129] "Or, ce cas spécial est particulièrement intéressant étant donné qu'il suffit de supprimer l'axioma-schéma 3 [Peirce] pour obtenir une axiomatisation de la théorie intuitioniste de l'implication."

De pseudovaluaties voor Peirce kon Beth aanvankelijk niet goed construeren. Dit wordt door hem in Beth (1961*f*) toegegeven.[130] Wel liep het goed met de axioma's 1 en 2 van Beths gehanteerde systeem (202 en 203 van P2): [131] "Il n'est pas difficile de construire des pseudo-valuations qui permettent de démontrer

[127] Uit de brief Beth – A. Church, 12 juli 1958.
[128] Voor dit voorbeeld: brief Beth – A. Tarski, 30 juni 1958.
[129] (Beth 1961*f*); zuiver implicatief systeem: 202, 203 en Peirce, p. 33.
[130] Zie ook de Jongh & van Ulsen (1999).
[131] (Beth 1961*f*).

l'indépendance relative des schémas 1 et 2" [132] Maar niet m.b.t. Peirce: [133] "Je n'ai pourtant pas immédiatement réussi à construire une pseudo-valuation qui montre l'indépendance du schéma 3 [Peirce]."

Beths eerste poging, zoals in de brieven naar Tarski en Church, liep mis.[134] Tegen Church merkte hij nog op: [135] "However it turns out to be difficult to show by this method that Peirce' law cannot be derived from 202 and 203 alone." Hierdoor werd er ook in zijn lezing uit 1958 [136] geen pseudovaluatie voor Peirce beproefd en in 1959 was hij nog steeds niet zo ver: de opgave over pseudovaluaties in Beth (1959*b*), p. 681 slaat Peirce over. Wel werd het goed uitgewerkt in Beth (1961*f*), in Beth (1962*a*) en in Beth (1960*d*). Beth maakte daarbij geen gebruik van tableaus met hulptableaus, hoewel hij deze toen al tot zijn beschikking had, maar ging op zijn oude manier door. Wel had hij intussen een beter inzicht verkregen in de semantiek van de intuïtionistische logica hetgeen de positie van Peirce kan hebben verhelderd.

Voor een uitvoeriger schets aan de hand van Beth zij men verwezen naar Beth (1962*a*), 125, 126. Daar vindt men de bewijzen van de onafhankelijkheid van 202 uit Churchs stelsel P2 t.o.v. 203 uit Churchs P2 en Peirce, van 203 t.o.v. 202 en Peirce en tenslotte voor Peirce t.o.v. 202 en 203. Ter afsluiting bespreken we het laatste geval. Hiertoe merkt Beth (1961*f*) op dat elke formule $A$ uit een implicatief systeem uniek gerepresenteerd kan worden in de vorm $A_1 \to (A_2 \to (\cdots \to (A_k \to M)\cdots))$, waar $A_j$ een willekeurige formule is, maar $M$ een atoom.[137] Men noemt $A$ van type $a$, als $M = a$. Hieruit haalt Beth de volgende pseudovaluatie:

> 1. $v(a) = v(b) = 0$, maar $v(M) = 1$ voor elk ander atoom; 2. Als $A$ van type $a$, $B$ van type $b$, $v(A) = v(B) = 1$, dan $v(A \to B) = 0$ en $A \to B$ heet een singuliere formule. In alle andere gevallen wordt $A \to B$ op de gebruikelijke reguliere manier van een waarde voorzien.

Beth laat nu achtereenvolgens met behulp van bovenstaande pseudovaluatie zien dat axioma's 202 en 203 niet singulier kunnen zijn en beide de waarde 1 verkrijgen, en dat modus ponens waarde behoudend is. Peirce komt voor $a$ en $b$ uit op 0, en vanwege modus ponens kan het niet uit 1 en 2 afgeleid worden.

## 4.3 Lange noten

**Compact en bicompact.** Compacte ruimten [d.w.z. de oude bicompacte ruimten] hebben boven de aftelbaar compacte ruimten dat zij multiplicatief zijn [en de andere niet eens eindig multiplicatief]. Of anders gezegd, men gebruikt compact (in de zin van

[132] Zoals in Beth (1960*a*) en in de brief Beth – A. Church,12 juli 1958.
[133] (Beth 1961*f*), p. 33.
[134] Brief Beth – A. Tarski, 30 juni 1958; brief Beth – A. Church, 12 juli 1958.
[135] Brief Beth – A. Church, 12 juli 1958.
[136] Later gepubliceerd als (Beth 1960*a*).
[137] Van deze methdode gaat ook Beth (1960*d*) uit.

Bolzano-Weierstraß), indien elke oneindige deelverzameling van een ruimte minstens één verdichtingspunt in die ruimte heeft.
Een topologische ruimte (geldt dus ook voor de omgevingsruimten) is bicompact, indien elke overdekking van die ruimte door een aantal deelverzamelingen een eindige overdekking bevat.
Bij metrische ruimten vallen compact en aftelbaar compact samen, ofwel iedere compacte metriseerbare ruimte is bicompact [alles in de oude zin] (de overdekkingsstelling van Heine-Borel-Lebegue). Men heeft compacte separabele ruimten. Elke separabele ruimte (onder Hausdorff) is metriseerbaar. Elke compacte separabele ruimte is bicompact volgens de overdekkingsstelling. Merk op: 1. Een separabele ruimte is een reguliere ruimte met aftelbare basis. 2. Een metrische ruimte is het paar $(\mathtt{X}, \rho)$, met metriek $\rho$ op $\mathtt{X} \times \mathtt{X}$ als volgt gedefinieerd: (a). $\rho(x, y) = 0$ d.e.s.d. als $x = y$, (b). $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, (c). $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$. 3. Ruimte $\mathtt{X}$ heet metriseerbaar als er een metriek $\rho$ op $\mathtt{X}$ bestaat z.d.d. de door $\rho$ geïnduceerde topologie samenvalt met de oorspronkelijke topologie van $\mathtt{X}$. Zie verder Engelking (1989).

**Snede-eliminatie, subformules.** Met Gentzens structurele snederegel kan men de middenterm elimineren. De snederegel kan vlgs. Gentzens Hoofdstelling geëlimineerd worden: met behoud van de eindsequent verkrijgt men een equivalente afleiding zonder snedetoepassing.[138] Als extra is er de subformule-eigenschap: in een snedevrij bewijs treden al de in het bewijs gebruikte formules als subformules op in de te bewijzen formule (eindsequent).[139]

Een variant op de snede-eliminatie is de 'verschärfter Hauptsatz'[140] met extra eisen op de vorm van het bewijs. Doel is naast snede-eliminatie het gebruik voor consistentiebewijzen (Gentzen). Extra eisen: (a) Formules alleen in prenex-vorm en geen variabelen mogen vrij alsook gebonden in een sequent voorkomen. (b) Het verloop van het bewijs zonder snede is als volgt: ergens in het bewijs treedt een middensequent op; om deze af te leiden mag men geen quantoren gebruiken (en ook niet in de middensequent voorkomen). Tot en met dit punt mag er alleen van propositionele gevolgtrekkingen en structurele regels gebruik worden gemaakt, daarna alleen van predicatieve en structurele regels. De 'verschärfter Hauptsatz' is gerelateerd aan Herbrands stelling uit 1930 die door Gentzen ten onrechte als een speciaal geval werd gezien. De stelling van Herbrand is algemener geformuleerd: geen beperking tot prenex-formules. Alleen zijn de bewijzen van de stellingen bij Herbrand niet zo duidelijk.[141] (Zie verder het hoofdstuk over semantische tableaus.)

[138] Gentzen (1935*a*), p. 195 e.v. Van het versterven van Gentzen in Praag — een stad met een door de Duitsers in beslag genomen universiteit (in het vroegere en toen heroverde Duitse rijksgebied; vgl. hetzelfde lot van Poznan en Straatsburg) waar Gentzen zich in de oorlog aan verbonden had — was Beth al vroeg op de hoogte gesteld in de brief H. Scholz – Beth, 15 juli 1946, (Münster): "Der grösste Verlust für uns ist Herr Gentzen. Er ist im Mai des vergangen Jahres in einem Prager Gefängnis zu Grunde gegangen. Er hatte zu uns [Univ. Münster] stossen und hier mit uns zusammenarbeiten wollen."
[139] (Gentzen 1935*a*), (Gentzen 1935*b*), (Kleene 1952*a*).
[140] Extended Hauptsatz, normal form theorem, Herbrand – Gentzen theorem, midsequent theorem.
[141] Gentzen 1935, p. 196 e.v., (én Gentzen 1969, p. 87, 88); zie ook (Kleene 1952*a*), p. 450, (Herbrand 1930) ('le théorème fundamental', voor verbeteringen en aanvullingen door Denton en Dreben, zie ook (Herbrand 1971)) en (van Heijenoort 1967).

**Valuatie-verzamelingen.** In Beth (1959*b*), p. 525 wordt de reden voor de inperkingen van de valuatieverzamelingen uitvoeriger besproken (cursief door Beth): "As reduced logic was simply a version of sentential logic, it follows that the set $\mathtt{V}^\circ$ of *all* valuations of reduced logic is again a separable compact Hausdorff space. However, we only used *normal* valuations, and the set $\mathtt{V}'$ of all normal valuations, which can be defined as

$$\bigcap_p (\mathtt{V}((\exists x_p X_p(x_p)) \cup \bigcap_r \mathtt{V}(\neg X_p(r))) \cap \bigcap_q (\mathtt{V}((\neg\exists x_q X_q(x_q)) \cup \bigcap_s \mathtt{V}(X_q(s)))$$

is not a set of satisfactory topological character. Therefore, it is replaced by a certain subset $\mathtt{V}^*$, namely, the set

$$\bigcap_p (\mathtt{V}((\exists x_p X_p(x_p)) \cup \bigcap_r \mathtt{V}(\neg X_p(r))) \cap \bigcap_q (\mathtt{V}((\neg\exists x_q X_q(x_q)) \cup \mathtt{V}(X_q(s)(q)))$$

of all *regular valuations.* As a subset of $\mathtt{V}^\circ$, $\mathtt{V}^*$ is clearly a closed set. Therefore, in itself it is a compact (and of course, a separable Hausdorff) space. This fact provides the basis of the completeness of elementary logic."

In Beth (1951*b*) kwam dit natuurlijk ook al naar voren in verband met de door Beth aangenomen compactheid (in de moderne zin). Daarvan is al iets aangeroerd in de sectie 'Volledigheid en topologie' onder de diverse eigenschappen. Nu een aanvulling op de algemene formulering van Beths bicompactheid: de toepassing op $\mathtt{V}$. $\mathtt{V}$ bicompact, $\mathtt{V}(A) \subseteq \mathtt{V}$, $\mathcal{A}$ een familie van gesloten verzamelingen $\mathtt{M}$, met de in de hoofdtekst aangenomen eigenschap van een eindige deelfamilie met overdracht van eigenschap. Laat nu $\mathcal{F}$ de familie van die $\mathtt{V}(A)$ zijn waarvoor voor een eindige deelfamilie $\mathcal{B}$ van $\mathcal{A}$ geldt dat $\bigcap_{\mathtt{M}\in\mathcal{B}} \mathtt{M} \subseteq \mathtt{V}(A)$. Dan is $\mathcal{F}$ een ideaal.[142]

[142] Zie voor ideaal Grätzer (1978). Voor topologische begrippen, zie de al eerder in dit hoofdstuk gegeven voetnoten en Engelking (1989).

# Hoofdstuk 5

# Definitietheorie

*"Sodann habe ich mir als Gegenstück zur deduktionstheoretischen Vollständigkeit der Prädikatenlogik den Begriff der definitionstheoretischen Vollständigkeit gebildet. Der Beweis der definitionstheoretischen Vollständigkeit der klassischen Prädikatenlogik 1. Ordnung konnte durchgeführt werden mit Hilfe eines nicht-finiten Analogons des Gentzenschen Teilformelnsatzes, der zugleich eine verschärfte Form des deduktionstheoretischen Vollständigkeitssatzes darstellt. Zum gleichen Gedankenkreis sind zu rechnen das Craigsche und das Lyndonsche Lemma."* [1]

## 5.1 Beths definitiestelling

### 5.1.1 Beths globale omschrijving

Zoals uit bovenstand citaat blijkt, komt in dit hoofdstuk Beths bijdrage aan de definitietheorie aan bod: naast de tableaus en de Beth-modellen is dit het derde kroonjuweel in Beths bijdrage aan de logica. Al deze juwelen zitten in eenzelfde setting: Gentzen-sequenten, Gentzens Hoofdstelling en Gentzens Subformulestelling.

In het vorige hoofdstuk, over semantiek, is al de ondergrond verschaft voor de definitiestelling. Eigenlijk waren we daar technisch al vrij ver op weg, rest ons de juiste toevoegingen en een bespreking van het belang van deze stelling. Anderzijds is het niet zo dat deze stelling louter als een toevoeging gezien kan worden aan het vorige hoofdstuk. Publicaties over de definitieleer waren er al gedurende vele eeuwen en Beths stelling kan beschouwd worden als een schakel in die keten. Daarnaast kan men stellen dat Beths stelling naar voren springt, juist als een onverbrekelijk onderdeel van de logica in de eerste helft van de twintigste eeuw.

De definitiestelling belichaamt de twee aspecten waarin de hedendaagse logica uiteenvalt: syntax en semantiek. Beth onderscheidde expliciete (syntactis-

[1] Uit ms. E.W. Beth, *Deduktive und semantische Tafeln für die rein-implikative Logik*, voordracht Math. Institut der Universität Marburg/Lahn, 27 november 1959.

che) en impliciete (semantische) definieerbaarheid en liet vervolgens voor de elementaire logica zien dat impliciet ook expliciet impliceert (het omgekeerde was al vóór hem bekeken). Dit was voor Beth een volledigheidsstelling voor de definitieleer of ook de definitietheoretische volledigheid van de elementaire logica (zoals al in bovenstaand citaat ter sprake komt). In navolging van Tarski trok Beth de lijn als volgt door in een onderscheid tussen de deductieleer met een syntactisch en semantisch component, en een definitieleer met eveneens een syntactisch en semantisch component: [2]

"Van oudsher houdt de logica zich niet alleen met de *redenering*, maar ook met de *definitie*, bezig. Vooral Tarski heeft het parallelisme tussen deductie-theorie en definitie-leer in het licht gesteld: tegenover de vraag, of een gewenste conclusie $B$ uit de gegeven premissen $A_1, A_2, \ldots$ kan worden afgeleid, staat de vraag, of een definiendum $a$ met behulp van gegeven termen $t_1, t_2, \ldots$ kan worden gedefiniëerd. Door A. Padoa was omstreeks 1900 de tegenvoorbeeld-methode tot de leer der definitie uitgebreid. Daarmee rijst de vraag, of ook met betrekking tot de leer der definitie een volledigheidsstelling geldt. Deze vraag, die merkwaardigerwijs niet eerder zó gesteld was, kon ik in 1953 in bevestigende zin beantwoorden voor de elementaire logica; dit punt is sindsdien nader onderzocht door A. Robinson (1956) en W. Craig (1956)." [3]

In deels dezelfde bewoordingen wordt in Beth (1958*c*), pp. 87–88, de anologe positie van deductie en definitie met betrekking tot de begrippen model en volledigheid uitgewerkt, maar nu met een sterkere benadrukking van het begrip tegenmodel:

"[T]hat whenever a certain conclusion B is *not* deducible from certain premisses $A_1, A_2, \ldots, A_m$, there is a structure which is a model for all premisses but *not* for the conclusion and which, therefore, can be used to show the non-deducibility of this conclusion from the given premisses by means of the *model method* which first applied by E. Beltrami (1868). Parallel to the theory of deducibility, we have a theory of *definability*. A. Padoa has (about 1900) developed a version of the model method which can be used to prove that a certain notion $a$ cannot be defined in terms of certain given notions $t_1, t_2, \ldots, t_k$. A formal system will be *complete* from the standpoint of the theory of definability if, whenever within this system a notion $a$ is not definable in terms of certain notions $t_1, t_2, \ldots, t_k$, this can be proved by means of Padoa's method."

In de loop van dit hoofdstuk zal er uitgebreider op worden ingegaan of de definitiestelling zelf syntactisch dan wel semantisch is en of het bewijs semantisch dan wel syntactisch gevoerd dient te worden.

De volgende aspecten hebben in de vorming van de definitietheorie een rol gespeeld — en in deze volgorde zullen ze ook behandeld worden (na eerst het werkterrein vastgelegd te hebben).

1. De definitietheorie in het verre verleden, d.w.z. vóór 1900: Aristoteles, Pascal.[4]

[2] Uit ms. E.W. Beth, *Problemen der hedendaagse logica*, voordracht Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, 8 oktober 1956.

[3] William Craig, *1929.

[4] Blaise Pascal, 1623 – 1662.

2. Rond 1900 heeft men de opkomst van de formele logica in Duitsland, de Verenigde Staten en Italië. De Italianen leveren een eerste half geformaliseerde stap van expliciet naar impliciet: Padoa, Peano, Burali-Forti. Pas hierna deed de formele semantiek zijn intrede.
3. Eén van degenen die aan deze ontwikkeling bijdroeg, was A. Tarski. Hij verbond definieerbaarheid met een formele theorie en kon over de formule-, predicaat- en constantenverzamelingen spreken, waartegen de diverse begrippen afgezet dienden te worden. Van Tarski is de definitiestelling voor hogere orde-logica afkomstig.
4. Tot Beths bemoeienis bleef evenwel de kwestie van de inwisselbaarheid van expliciet en impliciet voor de elementaire logica open.
5. Na Beth werden er midden vijftiger jaren van de twintigste eeuw ruimere formuleringen bedacht, waar ook de definitiestelling in gepast kan worden: de interpolatiestelling van Craig en de 'joint-consistency' van Robinson.
6. Na de ruimere aankleding van de definitiestelling kwamen de varianten los, ook voor de logica's tussen de elementaire logica en de tweede orde-logica in. Naast de voornamelijk syntactische (Gentzen-achtige) bewijzen van Beth en Craig met een semantische influx, gingen nu ook grotendeels modelmatige bewijzen een rol spelen. De eerste in die richting was dat van Robinson voor 'joint-consistency'. Het soort bewijs hing natuurlijk ten nauwste samen met de achtergrond van waaruit men werkte, bij Lyndon waren dit bijvoorbeeld preservatieproblemen.

### 5.1.2 Begrippen

#### Expliciet en impliciet

Vóór we bovenvermelde punten nauwkeuriger gaan bekijken zullen eerst globaal de belangrijkste begrippen doorgenomen worden. Als eerste dienen zich expliciet en impliciet hiertoe aan.

*Expliciet definieerbaar.* Als volgt werd 'expliciet' in Beth (1953*b*), p. 335, gedefinieerd:

> "4.1. Let $\Delta$ be any set of closed expressions of elementary logic, containing predicate parameters $a$ (which we suppose to be k-ary), $t_1, t_2, \ldots, t_l, \ldots$ Then $a$ will be said [explicitly] definable with respect to $\Delta$ and in terms of $t_1, t_2, \ldots, t_l, \ldots$, if there is an expression $A(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ containing no predicate parameters except $t_1, t_2, \ldots, t_l, \ldots$, and in which the free variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$ and no others appear, such that $\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_k\ (a(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leftrightarrow A(x_1, x_2, \ldots, x_k))$ is derivable from $\Delta$."

**Interpretaties en onafhankelijkheid.** Een formele theorie kan men als in eerste instantie betekenis-neutraal opvatten: een verzameling zinnen voortgebracht door een deelverzameling door middel van één of ander 'voortbrengend principe'.[5] Door middel van een interpretatie geeft men er een betekenis aan. Met de toekenning van interpretaties heeft men bovendien een krachtig hulpmiddel in handen om de afhankelijkheid of de onafhankelijkheid van stellingen, maar ook van begrippen te onderzoeken. Verder kan men het gebruiken bij het onderzoek van de relatie tussen impliciet en expliciet definiëren. Als volgt werd het onafhankelijkheidsonderzoek gedaan. Beschouw de volledige groep van postulaten binnen een theorie. Tracht twee interpretaties te geven die ten opzichte van het beoogde postulaat van elkaar verschillen. Slaagt dit, dan is het postulaat onafhankelijk van de rest; blijkt dit onmogelijk, dan is het postulaat afhankelijk. Zo ook kan men tewerk gaan met de begrippen.

Op dit punt aangekomen kan men verder Beth gaan parafraseren — hij heeft evenwel het volgende niet als eerste bedacht. Beth gaat uit van een onderscheid tussen syntax en semantiek. Laat $\{a, t_1, t_2, \ldots\}$ een verzameling begrippen zijn.

Stel dat men $a$ op onafhankelijkheid test. Dan zijn er twee elkaar uitsluitende gevallen a en b.

a Er zijn twee modellen, zodat $i'(a) \neq i''(a)$ en voor alle j, $i'(t_j) = i''(t_j)$

b Bij alle modellen $i', i''$ zodat $i'(a) \neq i''(a)$ geldt voor minstens een k: $i'(t_k) \neq i''(t_k)$

In het eerste geval is er niets aan de hand. Bij het laatste wordt de vooronderstelling van alleen verschil van interpretatie in $a$ geschonden en dus is $a$ niet onafhankelijk. Men heeft nu voor een begrip semantisch aangetoond dat dit afhankelijk is. De volgende vraag is naar de syntactische kant: wordt dit in een zin duidelijk gemaakt, d.w.z. kan het begrip dan ook expliciet gedefinieerd worden? En zo ja, hoe vindt men die definitie? Men kan zich ook voor ogen stellen dat men over een tweetal verzamelingen zinnen beschikt: de verzameling zonder dat niet-expliciet gedefinieerde begrip en de verzameling zinnen daarmee uitgebreid. Het is in dit geval niet zo dat de zeggingskracht van de ene verzameling groter is dan de andere (dit had men ook niet door de wel expliciet vastgelegde begrippen).

*Impliciet definieerbaar* Nu kan de puur syntactisch geformuleerde 'definitie' van 'impliciet' uit Beth (1953*b*), p. 335, gehaald worden:

> "Then our main proof-theoretic result can be stated as follows. (4.2). Let $\Delta$ be any set of closed expressions as described under 4.1.[6] For $a$ to be [implic-

[5] In dergelijke formaliseringen komt men twee groepen symbolen tegen: logische en niet-logische. De definitietheorie heeft betrekking op de niet-logische symbolen, voor de logische symbolen is geen begripsinhoudelijke rol weggelegd (in Tarski (1943/44) wordt op de begripsneutraliteit van de logica gewezen). Voor de mogelijkheden van logische operatoren alleen, zie Lindenbaum & Tarski (1934/35). Adolf Lindenbaum, 1904 – 1941(?). Ook naar de aard van logische operatoren (wel, niet onafhankelijk) kan men onderzoek doen; kan men het aantal verminderen? In 1923 promoveerde Tarski in de wijsbegeerte op een verhandeling over 'een primitieve term voor de logistiek', ('Sur le terme primitif de la logistique') onder Stanisław Leśniewski, (1886 – 1939): A. Tarski (A. Tajtelbaum), O wyrazie pirwotnym logistyki, (Teza doktorska), *Revue Philosophique (Przeglad Filozoficzny) 26* (1923), pp. 68-89.

[6] 4.1: d.w.z.— de expliciete definieerbaarheid.

itly] definable with respect to $\Delta$ and in terms of $t_1, t_2, \ldots, t_l, \ldots$, it is necessary and sufficient that the expression $C = \forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_k\ (a(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leftrightarrow b(x_1, x_2, \ldots, x_k))$ is derivable from the union $\Delta \cup \Gamma$ of the set $\Delta$ with the set $\Gamma$ of expressions obtained by replacing every occurence of $a$ in $A$ by a k-ary predicate parameter $b$ not occurring in $\Delta$."

Vergeleken met de semantische geformuleerde definitie:

- Stel $a$ is definieerbaar t.o.v. $\Delta$ en de begrippen $t_1, \ldots$: maar dan is $\Delta \cup \Gamma \cup \{\neg C\}$ inconsistent en kan geen model hebben.
- Stel $a$ is niet definieerbaar t.o.v. $\Delta$ en de begrippen $t_1, \ldots$: dan is $\Gamma \cup \Delta \cup \{\neg C\}$ consistent en heeft een model. Laat dat model $< D, i(a), i(b), i(t_1, \ldots >$ zijn. Neem nu $i(a) = i'(a), i(b) = i''(a), i'(t_1) = i''(t_1), \ldots$ voor $i'$ en $i''$ zoals helemaal in het begin. Hiermee heeft men interpretaties en de machinerie om de onafhankelijkheid van $a$ te bewijzen.

**Beths werkprogramma.** We zijn nu al zo ver gekomen dat een overzicht van Beths denkbeelden hoe impliciet definieerbaar in expliciet definieerbaar valt om te zetten, gegeven kan worden. Dit gebeurt aan de hand van een al eerder in het hoofdstuk semantiek gebruikte brief aan Kleene: [7]

"Let us suppose that in a deductive theory (of elementary logic) I have primitive notions $a, t_1, t_2, \ldots$ and that I wish to prove the independence of $a$. Then according to Padoa it is sufficient to exhibit two interpretations of the primitive notions which coincide for $t_1, t_2, \ldots$, but not for $a$.

*Now I ask, conversely: if it is impossible to find two such interpretations, is it always possible to find a definition of a in terms of* $t_1, t_2, \ldots$*?*[8]

The answer is not always affirmative (even if inconsistent theories are excluded). For suppose that our theory contains only the primitive notion $a$ and only the axiom $\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_k\ a(x_1, \ldots, x_k)$, then $a$ is trivially independent, but there are no interpretations to show it. (You might argue that in this case you have interpretations trivially showing the independence of $a$, but this argument does not work if we take account that, in order to be metamathematically relevant, the ranges $\mathrm{Var}_s$ for individual variables must coincide for two interpretations used in an independence proof of this kind. Anyhow, the trivial cases emerge in a certain stage of my proof.)

I have been able to show that, apart from these trivial cases,

*the absence of an interpretation proving the independence of a implies the existence of a suitable definition for a.*[9]

In the elementary logic with identity, $a$ is of course definable even in the trivial case. So to obtain the same degree of completeness for definability as for derivability, we must have elementary logic with identity."

---

[7]Brief Beth – S.C. Kleene,16 april 1953, ms. p. 2–3.
[8]Cursief door mij.
[9]Cursief door mij.

### Axioma's en gedefinieerde begrippen

Wij gaan er nu toe over om de achtergrond van waaruit de begrippen expliciet en impliciet definieerbaar ontstonden aan een nader onderzoek te onderwerpen. In de eerste instantie is dit hier onderzoek naar de volgende vragen: a. Bestaan er meer soorten definities; b. Valt er een parallel te trekken tussen de behandeling van axioma's en die van begrippen; en c. Beschikt men over een volledig begrippenapparaat of is er op niet triviale wijze daar nog iets aan toe te voegen. Men kan hier nog de vraag naar definieerbaarheidsvragen en met Tarski de vraag naar de definieerbaarheid van het begrip 'definieerbaar' aan toe voegen. Dit gaat echter aan de strekking van dit hoofdstuk voorbij en zal hier niet behandeld worden.[10]

**Soorten definities.** Het hoofdstuk over definitietheorie levert een ingeperktere studie dan wat meestal onder de leer van de definities verstaan wordt. Daar bestudeert men diverse soorten definities, vergelijkt deze en schrijft wellicht uitverkoren soorten voor. Men heeft in dat opzicht keus te over. Als voorbeeld Burali-Forti (1901); deze onderscheidde naast nominaal nog twee andere soorten, namelijk definitie door postulaten en definitie door abstractie: [11]

"Il y a trois formes de définitions logiques. La *définition nominale* de l'objet $x$ à la forme: $x = a$, ou $a$ est une expression formée avec des éléments déja connus.[...] On emploie la définition *par postulats* pour un groupement $x$ d'objets, quand nous ne savons ou ne voulons pas le définir nominalement. Le groupe $x$ est défini par postulats au moyen de relations logiques [...] On définit *par abstraction* une opération $f$, lorsqu'on dit à quelle classe $a$ elle est applicable et que, $x$ étant un élément quelconque de $a$, on établit quels sont les $y$ de $a$ tels que $fy = fx$. [...] L'opération $f$ pour les $a$ une fois définée par abstraction, on définit nominalement la classe $fa$ qu'on obtient en appliquant $f$ à tous les $a$."

In deze dissertatie worden alleen nominale definities bekeken. Deze treden binnen de definitietheorie in twee verschijningsvormen op: expliciete definities en impliciete definities, en in wezen zijn de impliciete nominale definities tegelijk expliciete nominale definities met een te verhelpen gebrekje. In een aantal gevallen heeft men te maken met definitiesoorten die toch weer te herleiden zijn tot nominale.

Bovenstaande houdt wel in dat Beths definitiesteling niet naar willekeur

[10] Een bijzonder geval van definieerbaarheidsvragen betreft de definieerbaarheid van het begrip 'definieerbaar'. Na de Tweede Wereldoorlog heeft Tarski zich met dergelijke kwesties bezig gehouden: Tarski (1948*b*), dat ook door Beth gerecenseerd is (Beth 1949*a*) en later herhaalde malen aangehaald: (Beth 1953/54*a*), (Beth 1953/54*b*) en (Beth 1959*b*), pp. 568–571. Beth heeft zelf geen bijdrage aan dit onderwerp geleverd. Volgens Beth leverde Tarski hiermee een bijdrage aan het nominalisme; bovendien vielen naar (Beth 1959*b*), p. 487, Tarski's denkbeelden aangaande definieerbaarheidsvragen ook te combineren met de paradox van Richard. Deze vindt hierin zijn oorsprong dat men met 'definieerbaar' bedoelt 'definieerbaar met behulp van een eindig aantal woorden'. Zowel Gödel alsook Tarski zijn in de weer geweest om deze moeilijkheden op te lossen. Tarski's gebruik van de term van 'definieerbaarheid' komt dan overeen met Gödels begrip van 'construeerbaarheid'.

[11] (Burali-Forti 1901), pp. 294–295.

kan worden toegepast; het toepassingsgebied van de stelling werd door Beth nauwgezet vastgelegd. Moeilijkheden uit later tijd — of de definitiestelling wel of niet houdbaar is — zijn nogal eens te herleiden op onbegrip of het niet onderkennen van Beths afgrenzingen. Op het einde van dit hoofdstuk zal daar kort op worden ingegaan.

**Axioma's en begrippen.** Met definieerbare begrippen worden afhankelijke begrippen bedoeld. Derhalve gaat aan het onderscheid tussen expliciet en impliciet een onderscheid tussen afhankelijk en onafhankelijk (primitief, onafleidbaar) vooraf. Over de relatie tussen primitief en niet-primitief begrip[12] merkte Padoa in 1900 tijdens het internationale filosofiecongres op: [13] "On peut répéter pour ces Propositions les considérations faites au sujet des symboles non-définis, en y remplaçant respectivement les mots symbole, défini, idée et simple par les mots proposition, démontrée, fait et évident."

Het onderscheid tussen definieerbare en primitieve begrippen vindt men binnen een theorie terug tussen de axioma's en de niet gepostuleerde stellingen. Beide onderscheidingen weten zich bovendien met elkaar verbonden doordat binnen een formele theorie de onafhankelijke begrippen binnen de postulaten ingevoerd worden. Padoa formuleerde dit tijdens het internationale wiskundecongres van 1900 als volgt: [14]

"Malgré cette frappante analogie entre leur rôle, la préoccupation du choix des postulats est très ancienne, tandis que la préoccupation du choix des symboles non définis est tout à fait moderne. [...] Pour remplacer la phrase proposition non démontrée, il y a le mot postulat, mais on n'a pas encore inventé un mot pour remplacer la phrase symbole non défini, car cette phrase a été employée si peu jusqu'à présent, qu'on n'a pas trouvé nécessaire de l'abréger."

Tarski (1935*b*) formuleerde in navolging van Padoa, maar wel binnen een uitgebreidere logische context, naar analogie van de begrippen 1. axioma, 2. stelling, 3. inferentie en 4. bewijs (en 5. deductietheoretische volledigheid) de begrippen 1. grondbegrip, 2. afgeleid begrip, 3. definitieregel, 4. definitie (en 5. definitietheoretische volledigheid). Tarski probeerde deze begrippen in een niet-elementair logisch systeem met typen te formuleren en te kijken hoe deze begrippen zijn af te leiden. Ook de semantiek speelde daarbij een rol, zoals blijkt uit het volgende citaat: [15]

"Es ist nicht schwer klar zu machen, warum sowohl der Begriff der Definierbarkeit wie auch alle abgeleiteten Begriffe auf eine Satzmenge bezogen werden müssen: es hat keinen Sinn, zu erörtern, ob sich ein Zeichen mit Hilfe anderer Zeichen definieren läßt, ehe die Bedeutung des betrachteten Zeichens festgestellt ist, und auf Grund einer deduktiven Theorie können wir die Bedeutung eines vorher nicht definierten Zeichens nur auf dem Wege feststellen, daß wir die Sätze beschreiben, in denen das Zeichen

[12] Veelal zullen de termen begrip en symbool door elkaar worden gebruikt. Met begrip bedoelt men eigenlijk een interpretatie van een symbool.
[13] (Padoa 1901), p. 317,
[14] (Padoa 1902), p. 354.
[15] (Tarski 1935*b*), p. 98, noot 6.

auftritt und die wir als wahr anerkennen."

**Definitorische volledigheid.** [16] Er zijn nu al analoga bekeken voor van elkaar (on)afhankelijke axiomas en stellingen. Bij een hiermee gevormde theorie heeft men allerlei eigenschappen. De meest in het oog vallende is wel die van (logisch) syntactische volledigheid. Bij een echte toevoeging aan een logisch-syntactische volledige theorie ('Post-completeness') vervalt men in een triviale theorie. Heeft men iets dergelijks ook bij begrippen? Men kan een verzameling begrippen hebben, waaraan niets meer valt toe te voegen en, als men dan nog iets gaat toevoegen, dit dan een triviale (ofwel expliciet definieerbare) uitbreiding geeft?

Hiertoe moeten enkele hulpbegrippen worden ingevoerd. Valt er een verzameling te construeren die volledig is in zijn constanten (begrippen)? Dat wil zeggen, er is geen verzameling zinnen te construeren, waar symbolen in zitten die niet met behulp van de in de als volledig te beschouwen verzameling voorkomende constanten definieerbaar zijn en ook geen triviale toevoeging inhouden van nieuwe symbolen. Bij elke verzameling is het mogelijk een logisch bewijsbare zin toe te voegen met een nieuwe constante om zo tot een triviale uitbreiding van de theorie te komen. Om dit te vermijden ging Tarski (1935*b*) naar de modellen kijken — die toch al een belangrijke rol in de ideologie spelen, gezien zijn al geciteerde noot 6 (zie de vorige paragraaf 'Axioma's en begrippen'). Hij voerde het begrip 'categorisch' in. Dit is van toepassing wanneer de modellen wederkerig isomorf zijn: [17]

"Aus verschiedenen Gründen, die wir nicht näher analysieren werden, schreibt man dem Kategorizitätsbegriff eine große Bedeutung zu: eine nicht kategorische Satzmenge (speziell wenn sie als Axiomensystem einer deduktiven Theorie verwendet wird) macht den Eindruck einer nicht abgeschlossenen, nicht organischer Ganzheit, sie scheint den Sinn der in ihr enthaltenen Begriffe nicht genau zu bestimmen."

Als de verzameling isomorfismen uit één element bestaat, dan heet de theorie monotransformeerbaar. Volgens Tarski zijn alleen dergelijke theorieën volledig met betrekking tot de verzameling primitieve begrippen, andere theorieën kunnen nog verrijkt worden: [18] "Jede monotransformable Satzmenge ist in Bezug auf ihre spezifischen Zeichen vollständig."

### 5.1.3 Geschiedenis van de definitietheorie

#### Periode vóór de moderne semantiek en syntax

**Prehistorie.** Voorgaande denkbeelden zijn niet uit de lucht komen vallen. De belangstelling voor een leer van definities gaat ver terug. Reeds bij de oude Grieken treft men het gebruik van definities aan. Zij kenden een lange periode van een wiskundige en logische ontwikkeling. Gedurende die tijd werden al

[16] Met 'definitorische volledigheid' wordt alleen hier even iets anders bedoeld dan het al eerder ingevoerde begrip.

[17] Tarski (1935*b*), p. 92.

[18] Tarski (1935*b*), p. 93, stelling 4.

begripsvastleggingen gebruikt. Een algemene theorie opstellen over begripsvastleggingen en theorieën is een andere zaak. Men laat veelal de leer van de definities bij Aristoteles beginnen. In later tijd werd dit weer opgepakt door mensen zoals Pascal in zijn *De l'esprit géométrique* uit 1657.[19] Beth (1962*b*), p. 83, verwees er als volgt naar:

"Dans son admirable opuscule *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader* [...] Pascal fait observer qu'on 'ne reconnaît en géométrie que les seules définitions de nom' Ce procédé permet 'de substituer [...] la définition à la place du défini'.[20] Et 'rien n'éloigne plus promptement et plus puissamment les surprises captieuses des sophistes que cette méthode, qu'il faut avoir toujours présente, et qui suffit seule pour bannir toutes sortes de difficultés et d'équivoques.' "

**1900: Padoa.** Na Pascal lag het onderzoek naar definities lange tijd stil. Rond 1900 trad een opleving op. Dit had te maken met hernieuwde belangstelling op het einde van de negentiende en in het begin van de twintigste eeuw voor het bestuderen van logica op een meer formele basis. Bij de formelere opzet van de logica werden nadere omschrijvingen gegeven waaraan een formele theorie moet voldoen. Bovendien werd langzamerhand de relatie duidelijker tussen een formele theorie en de interpretatie van een formele theorie. Rond 1900 was men nog niet in alle aspecten zo ver, maar wel al ver genoeg om aanleiding te geven tot het nader beschouwen van de rol van definities met betrekking tot primitieve en niet-primitieve begrippen.

Een deel van dit onderzoek vond plaats binnen het kader van de 'School van Peano'. Deze Italiaanse school hield zich bezig op het gebied van formalisering van de wiskunde en deed pogingen tot het opzetten van een moderne geformaliseerde logica. Leden van de school, zoals C. Burali-Forti en Peano[21] zelf, schreven over dit onderwerp, maar veel verder dan het beschrijven van wat een nominale definitie was en de combinatie met de leer van de postulaten kwamen zij niet. Anders lag dit bij Padoa met zijn definitieleer en onafhankelijkheidstest. Men treft bij Padoa overigens wel hetzelfde euvel aan als bij de rest van de 'school': [22] een voornamelijk de problemen omschrijvend taalgebruik zonder dat formeel precies duidelijk wordt gemaakt wat er bedoeld wordt. Padoa's gebruikte systeem stamde af van Peano. Diens systeem was primitiever en minder formeel dan het systeem waar Frege mee werkte. Het meest exacte deel bij Padoa bestond uit zijn interpretaties (en modellen). De gebruikte logica liep achter, evenals de constellatie van de modellen gerelateerd aan de theorie. Volgens McKinsey was dit ook de oorzaak van het geringe gebruik dat nadien

[19] Volgens R. Tâton stammen de fragmenten van Pascals 'De l'esprit géométrique' uit 1657. Pas na Pascals dood in 1662 is deze verhandeling uitgegeven. Zie hiertoe R. Tâton in *L'Oeuvre scientifique de Pascal*, (Centre International de Synthèse, Section d'Histoire des Sciences), Presses Universitaires de France, Paris, 1964.

[20] Het gebruik van de nominale (expliciete) definitie.

[21] (Peano 1901).

[22] Soms wordt Padoa tot Peano's school gerekend. Hij was wel bevriend met Peano, maar niet diens leerling, al omschrijft Peano dit wel eens anders.

van Padoa's onafhankelijkheidstest werd gemaakt.[23]

### Moderne technieken doen hun intrede

**1926: Tarski.** Degene die een kwart eeuw later als eerste het werk van de Italianen hervatte en daar een nieuwe draai aan wist te geven, was A. Tarski. In die tijd was er het nodige aan de logica veranderd. De semantiek had zich langzamerhand ontwikkeld en werd exacter geformuleerd. Relaties tussen semantiek en syntax begonnen hun plaats te krijgen, een preciezer geformuleerde metalogica evenzo. In 1926 probeerde Tarski in een verhandeling voor de Poolse academie van wetenschappen het definitiebegrip vast te leggen. Voor zijn logica putte Tarski uit Russells Principia Mathematica. Tarski's aanpak was derhalve niet elementair-logisch. Dit blijkt al uit zijn eersteling op het gebied van de definitietheorie: [24]

"I. Soit un système d'axiomes ne contenant que deux termes primitifs, $R$ et $S$, dont le second désigne une relation binaire; soit $\Delta'$ le système obtenu de $\Delta$ après y avoir remplacé le terme $S$ par $S'$; soit $\Delta^\star$ le système composé de tous les axiomes de systèmes $\Delta$ et $\Delta'$; soit enfin $P^\star$ la proposition suivante: $\forall x \forall y (S(x,y) \leftrightarrow S'(x,y))$. Alors, pour que le terme $S$ ne puisse pas être défini à l'aide du terme $R$ seul (c.a.d. qu'il soit indépendant de $R$) dans le système basé sur $\Delta$, il faut et il suffit que la proposition $P^\star$ soit indépendante du système $\Delta^\star$.

En analysant I, M. Tarski est parvenu encore au théorème II, où l'expression $A(\Sigma)$ remplace le proposition obtenue du produit logique des axiomes $\Delta$, après y avoir substitué une variable '$\Sigma$' au lieu de '$S$'.

II. Soit $\Delta$ le système remplissant les conditions de I. Si le terme $S$ peut être défini —de quelque manière que ce soit— à l'aide du terme $R$ dans le système $\Delta$, la proposition $P$ suivante, qui est alors une conséquence du système $\Delta$ peut servir aussi de définition: $\forall x \forall y (S(x,y) \leftrightarrow \forall \Sigma (A(\Sigma) \rightarrow \Sigma(x,y)))$.

A l'aide de II, on obtient aisément une telle simplification de I que les systèmes $\Delta'$ et $\Delta^\star$ deviennent superflus."

Met $A(\Sigma)$ wordt een conjunctie ('produit logique des axiomes $\Delta$') van de postulaten van het systeem (ofwel de formuleverzameling) $\Delta$ bedoeld, waarin de relatie $S$ door de relatievariabele $\Sigma$ vervangen is. Hierover quantificeert Tarski en daarmee verlaat hij de elementaire logica.

**Tarski's onderzoek uit 1935.** Tarski (1935*b*) is een volgende stap in de formalisering. Zijn definitie van expliciet op p. 82 is vergelijkbaar met de al gegeven definitie van Beth. Alleen blijft Tarski werken met een niet-elementaire logica

[23] McKinsey (1935), p. 294, eerste noot.

[24] Lindenbaum & Tarski (1926), Lindenbaum is voor het citaat en het definitorische deel niet van belang. In Lindenbaum & Tarski (1926) en in Tarski (1935*b*) werden de voorbeelden, net als bij Padoa, voor een deel gehaald uit de meetkunde of de aan de meetkunde gerelateerde mechanica. De vraag in het laatste artikel is of men de mechanica (met haar dynamische en statische deel) volledig vanuit de statische begrippen kan formuleren. Lindenbaum & Tarski (1926) is gehaald uit de verhandelingen van de Poolse akademie van wetenschappen; het is mij niet duidelijk wie genotuleerd heeft of dat Tarski (Lindenbaum) zelf een samenvatting van de verhandeling opgeschreven heeft.

met typen; zijn niet-logische symbolen zijn van verschillend type, bijvoorbeeld verzamelingen.[25]

In Tarski's onderzoekingen komt men een nieuw aspect tegen: het onderzoek naar de status van een bepaald symbool. Als dit symbool gedefinieerd is, dan heeft men eigenlijk twee theorieën. De theorie `T` zonder het gedefinieerde symbool, maar wel met het primitieve, en de theorie $\mathtt{T}^\star$ met het gedefinieerde symbool; de theorie $\mathtt{T}^\star$ met het gedefinieerde symbool is dan een uitbreiding van de theorie `T`. Beide theorieën hebben hetzelfde axiomasysteem gemeen (en dezelfde modellen), alleen is er aan theorie $\mathtt{T}^\star$ een definitiezin toegevoegd, waarin verteld wordt hoe het gedefinieerde begrip uit een constellatie van primitieve begrippen te vormen is. De syntactische afsluiting omvat natuurlijk meer zinnen, maar semantisch is er geen verandering. De volgende stap is om de uitbreidingen expliciet als uitbreidingen van een taal op te vatten. Dit is dan meer in overeenstemming met het huidige gebruik; Tarski heeft daartoe wel een eerste stap gezet. De rol van de zin, waarin een definitie geformuleerd wordt, en de condities, waaraan zo een zin moet voldoen, werden door Padoa impliciet aangegeven. Als eerste expliciteerde Tarski dit. In Tarski (1935*b*) kwam dit uitvoerig aan de orde.

Tarski ging als volgt te werk om vanuit impliciet naar expliciet te lopen. Men heeft een niet-logisch symbool $a$ en een verzameling niet-logische symbolen $\mathtt{B} = \{b_1, \ldots\}$ waarbij $a \notin \mathtt{B}$. Verder een eindige verzameling zinnen $\Delta$. In de zinnen van de verzameling $\Delta$ komt $a$ voor (men kan denken aan een stelsel axioma's). De conjunctie over *alle* zinnen van $\Delta$ wordt voorgesteld als $A(a; b_1, b_2, \ldots; c_1, c_2, \ldots)$. In een zin vindt men derhalve drie soorten niet-logische symbolen (of de variabelen die daarover lopen): het te definieren symbool $a$, de $a$ definierende symbolen $b_i$ in `B` en de $c_i$, die niet onder de al genoemde twee soorten vallen (deze doen eigenlijk niet mee). In de hier volgende stellingen zal er over alle groepen gequantificeerd kunnen worden, er is dus geen sprake van elementaire logica. We nemen het begrip expliciet definieerbaar als gegeven aan. In navolging van Tarski willen we bij stellingen 1, 2 en 3 terecht komen. Tarski introduceerde hiertoe eerst de volgende algemeen, niet elementair-logisch geformuleerde formules II, III en IV: [26]

II. $\forall x\ (x = a \leftrightarrow \exists z_1 \exists z_2 \cdots\ A(x; b_1, b_2, \ldots; z_1, z_2, \ldots)$.

III. $\forall x_1 \forall x_2\ \forall y_1 \forall y_2 \cdots\ \forall z_1 \forall z_2 \cdots\ \forall t_1 \forall t_2 \cdots\ ((A(x_1; y_1, y_2, \ldots; z_1, z_2, \ldots) \wedge$
$A(x_2; y_1, y_2, \ldots; t_1, t_2, \ldots) \rightarrow x_1 = x_2)$

IV. $\exists x_1 \exists x_2\ \exists y_1 \exists y_2\ \cdots\ \exists z_1 \exists z_2 \cdots\ \exists t_1 \exists t_2 \cdots\ (A(x_1; y_1, y_2, \ldots; z_1, z_2, \ldots) \wedge$
$A(x_2; y_1, y_2, \ldots; t_1, t_2, \ldots) \wedge\ x_1 \neq x_2)$

De stellingen 1, 2 en 3 zijn als volgt:

[25]Tarski schreef in een periode waarin er vaak naar gestreefd werd om alles zo algemeen mogelijk te formuleren (hogere orde, gebruik van typen); hierin was nogal eens de invloed van Russell's Principia voelbaar. Pas later krijgt men dat men zich meer op de elementaire logica richt.

[26](Tarski 1935*b*), pp. 94–96.

1. $a$ is met behulp van de elementen uit de verzameling B en gerelateerd aan de formuleverzameling $\Delta$ definieerbaar d.e.s.d. als formule II uit de axioma's van $\Delta$ afleidbaar is.[27]
2. $a$ is definieerbaar als formule III logisch bewijsbaar is.[28]
3. $a$ is niet definieerbaar als formule IV contradictieloos is.[29]

Van het rijtje stellingen 1, 2, 3 laat Tarski de equivalentie zien.[30] Hiervan berust het echte bewijs bij stelling 1. Dit bewijs, en de omzettingen naar de andere bewijzen, werd door Tarski volledig syntactisch uitgevoerd. In stelling 2 wordt door formule III de impliciete definitie verwoord, en met formule IV wordt de overstap naar de methode van Padoa gemaakt. Tarski merkt nog op dat formule IV uit stelling 3 equivalent is aan de ontkenning van formule III uit stelling 2. Het semantische gedeelte met interpretaties, zoals dit door Padoa wordt verwoord, krijgt daarna uitgebreid bij Tarski de ruimte, maar alles wordt door de voornoemde syntactische stellingen van Tarski gedragen. Het zijn stellingen 2 en 3, die volgens Tarski in Beth (1953*b*) worden uitgedragen: [31]

"E.W. Beth, who has extended Ths. 2 and 3 of this article to a much wider class of deductive theories, in fact, to all theories based upon the lower functional calculus (which is a much weaker logical system than Principia Mathematica), and has thus shown that Padoa's method can be applied to all theories of this class."

Men is er niet klaar mee door binnen Tarski enkele veranderingen aan te brengen, zoals in formule III in de trant van $A(a; b_1, b_2, \ldots; c_1, c_2, \ldots) \wedge A(a^\star; b_1, b_2, \ldots; c_1, c_2, \ldots) \vdash a \leftrightarrow a^\star$. Men heeft hier $a = a^\star$ vervangen door $a \leftrightarrow a^\star$, en gaat daarmee van hogere orde over naar elementaire logica. Hiermee zijn we aangeland bij Beths bijdrage aan dit onderwerp.

## 5.2 Beths bijdragen

### 5.2.1 Schets van het bewijs

#### Beths ontluikende belangstelling

Wanneer en waarom is Beth zich met de definitiestelling bezig gaan houden? Erg eensluidend zijn de teksten van Beth over dit onderwerp niet. Een aantal componenten die hij gebruikte bij zijn definitiestelling, zat in het in de daaraan voorafgaande jaren afgeleverde werk. Daarnaast had hij, als filosofisch geïnteresseerde, belangstelling voor het gebruik van definities en het opzetten van theorieën. Deze belangstelling valt door de jaren heen al bij hem te traceren. Bovendien legde hij een grote belangstelling voor de logica en filosofie van de wiskunde in de Oudheid aan de dag. Daar speelde het gebruik en omschrijvingen van definities al een rol. Ook van belang was zijn inzicht in de feilen

[27] Tarski (1935*b*), p. 84.
[28] (Tarski 1935*b*), p. 85.
[29] (Tarski 1935*b*), p. 86.
[30] (Tarski 1935*b*), pp. 84, 85.
[31] (Tarski 1956), de later door Tarski toegevoegde noot 2, p. 300.

van de filosofie zoals die in zijn omgeving beoefend werd. Een deel van de feilen bestond erin dat men ondoordacht werkzaam was en weinig begrip toonde voor een coherente aanpak en een goede omschrijving van de gebruikte termen. Een bestrijding van dit kwaad kan liggen in het duidelijk omschrijven hoe definities eruit zien. De relaties tussen impliciet en expliciet definiëren spelen hier zeker een rol.

Jammer genoeg bestaat het bovenstaande uit veronderstellingen. Er werd door Beth zelf een verband gelegd met Tarski; daar is bovendien correspondentie over, zij het niet veel. Tijdens de vertaling uit het Engels naar het Nederlands van Tarski (1946) was Beth begonnen commentaar te leveren op sommige beweringen van Tarski in dit leerboek. In verband hiermee schreef Beth aan Tarski: [32] "It needs hardly saying that I have found the work interesting and stimulating. Actually, my paper on Padoa's method took its first origin from our discussion on p. 205." [33]

Tarski voerde aldaar enkele systemen in en bekeek in hoeverre deze equipollent zijn, [34]. Beth vond dat men de volgende situatie kan veronderstellen.[35] Er zijn twee axiomasystemen met dezelfde primitieve termen, maar niet equipollent. Zij zijn wel equipollent te maken na invoer van een gedefinieerde term (dit kan voor beide systemen desnoods op een andere wijze). Beth vond bovendien dat Tarski een te grote sprong maakte en te weinig informatie verschafte. Tarski ging overstag en laste op suggestie van Beth een extra opgave in om daarmee extra informatie te verschaffen:[36] opgave 14* van de vertaling Tarski (1953), p. 229.[37]

Na Beth bleef de definitieleer en de definitiestelling een tijdlang niet zo in het beeld. Men had Craigs interpolatiestelling, waar men de definitiestelling van af kon leiden, en de aan de interpolatiestelling equivalente consistentiestelling van Robinson. Bovendien beschikte men over meer algebraïsche getinte formuleringen zoals door Lyndon. Beth zelf had tot op zekere hoogte schuld aan deze verwaarlozing. Na het leveren van de definitiestelling heeft hij zich ternauwernood nog met dit onderwerp bemoeid, niet op logisch vlak maar ook niet op het vlak van de toepassingen (wiskunde, wetenschapsfilosofie).

---

[32] Brief Beth – A. Tarski, 15 juni 1953.

[33] 'discussion on p. 205': deze discussie uit 1952 heeft betrekking op hoofdstuk IX, 'Methodological considerations on the constructed theory', i.h.b. §57, 'Elimination of superfluous primitive terms and subsequent simplification of the axiom system, concept of an ordered Abelian group' en sectie 58, 'Further simplification of the axiom system, possible transformations of the system of primitive terms'.

[34] Equipollent: systemen kunnen onderling verschillende axiomas of (primitieve) begrippen hebben, maar toch eenzelfde verzameling zinnen voortbrengen

[35] Brief Beth – A. Tarski, 12 januari 1952

[36] Brief A. Tarski – Beth, 19 mei 1953.

[37] De oefening gaat uit van een theorie, waarin de axioma's alleen ongedefinieerde begrippen hebben. Laat $A$ een formule van die theorie zijn met primitieve begrippen. Dan: als A afleidbaar is uit de axioma's van de theorie met definities, dan is A ook rechtsreeks uit de axioma's afleidbaar zonder definities (dit wordt als een logische wetmatigheid aangenomen: wet L). De opgave is dan om bij het impliciet aanwezig zijn van wet L in het bewijs van de equipollentie van beide systemen, te laten zien waar dit bewijs gebruikt wordt en alle axioma's van de twe systemen af te leiden zonder gebruik van wet L.

### Beths bewijs: van quantoren naar propositielogica

**Afbraak en opbouw van formules.** Voor Beths definitiestelling moeten wij van impliciet naar expliciet kunnen komen. Wij grijpen weer terug op de al eerder gegeven definities door Beth van expliciet en impliciet en nemen de omschrijving van impliciet definieerbaar als uitgangspunt. De laatste strofe van impliciet luidde: "For $a$ to be [implicitly] definable with respect to $\Delta$ and in terms of $t_1, t_2, \ldots, t_l, \ldots$, it is necessary and sufficient that the expression $C = \forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_k \ (a(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leftrightarrow b(x_1, x_2, \ldots, x_k))$ is derivable from the union $\Delta \cup \Gamma$ of the set $\Delta$ with the set $\Gamma$ of expressions obtained by replacing every occurence of $a$ in $A$ by a k-ary predicate parameter $b$ not occurring in $\Delta$."

Als impliciet (punt 4.2 van Beth (1951*b*)) geldt, dan is elk model voor $\Delta \cup \Gamma$ ook een model voor $C$. Elementaire logica met volledigheid (Löwenheim – Skolem – Gödel) wordt verondersteld, dus $\Delta \cup \Gamma \vdash C$. Aan de hand van Beth zijn nu diverse wegen bewandelen:
— Stel dat $a$ wel definieerbaar is, dan is $\Delta \cup \Gamma \cup \{\neg C\}$ inconsistent.
— Stel $a$ niet definieerbaar, maar dan is $\Delta \cup \Gamma \cup \{\neg C\}$ wel consistent, en bovendien heeft $\Delta \cup \Gamma \cup \{\neg C\}$ volgens Löwenheim – Skolem – Gödel een model.[38]

∘ *Definitiestelling* ( Beth). De vraag is of alles nu op expliciet te herleiden valt. Ofwel, als men impliciete definieerbaarheid heeft, is er dan ook een *expliciete definitiezin* af te leiden. Door Beth werd dit vertaald in 'als $\Delta \cup \Gamma \vdash C$, dan wordt $a$ expliciet gedefinieerd'.

De definitie van impliciet definieerbaar berust volgens Beth op de afleiding $\Delta \cup \Gamma \vdash C$. Het door Beth gegeven bewijs zal deze volgorde met de nodige verfijningen precies volgen. Men heeft $\Delta \cup \Gamma \vdash C$, maar dan is er voor eindige $\Delta^\star$ en $\Gamma^\star$, met $\Delta^\star \subseteq \Delta$, $\Gamma^\star \subseteq \Gamma$, eveneens $\Delta^\star \cup \Gamma^\star \vdash C$. Veronderstel $\Delta$ en $\Gamma$, dus ook $\Delta^\star$ en $\Gamma^\star$, *symmetrisch* ten opzichte van de beide begrippen $a$ en $b$.
Vervang nu $\Delta^\star$ en $\Gamma^\star$ door de ten opzichte van elkaar *symmetrische axioma's* $A$ en $B$.

Symmetrie speelt een belangrijke rol in het bewijs, de gereduceerde logica evenzo. Wij zullen de belangrijkste onderdelen van de gereduceerde logica (uit het vorige hoofdstuk) hier eerst in herinnering roepen.

Met de gereduceerde subformules redsubf($A$) van een formule $A$ wordt hier niet de bredere definitie van subformules subf($A$) bedoeld, maar de formules die in de CA($\{A\}$) zitten: [39] de verzameling van de gereduceerden, d.w.z. constituenten en de atomen. Met $\bigvee$redsubf($A$) wordt de disjunctie over alle formules in redsubf($A$) bedoeld. De gereduceerden lenen zich er toe om een propositioneel systeem op te bouwen; de operatoren gedragen zich als in de normale propositionele logica.

Beths bedoeling met symmetrie laat zich aflezen uit zijn beantwoording

[38] (Beth 1953*b*), pp. 339.

[39] Wellicht was het beter geweest om bij de formulering van de gereduceerde subformules iets met CA te gebruiken, maar dit wijkt weer af van mijn gebruikelijke wijze van noteren. Als voorbeeld: laat $C = \neg A$, $A$ atomair, dan $A, C \in$ subf($C$), $A \in$ redsubf($C$), maar $C \notin$ redsubf($C$).

van een vraag van R.L. Vaught. De vraag naar symmetrie had betrekking op de disjunctie over alle gereduceerde subformules (atomen en constituenten) van een formule $A$ [$=\bigvee$ redsubf($A$)] en de disjunctie over alle gereduceerde subformules van een formule $B$ [$=\bigvee$ redsubf($B$)]:[40] "There is also something else, perhaps not a gap, but which I don't fully understand. This is what you mean by the statement that $\bigvee$ redsubf($A$) and $\bigvee$ redsubf($B$) are symmetric." Het antwoord van Beth luidde als volgt: [41] "Now the symmetry between $\bigvee$ redsubf($A$) and $\bigvee$ redsubf($B$). The (free or bound) individual variables appearing in any of the above formulas can be exclusively enumerated as $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$, without repetitions and in such a manner that $A, B$, and $C$ contain only variables $x$, that $\bigvee$ redsubf($A$) contains only variables $x$ and $y$, and that $\bigvee$ redsubf($B$) is obtained from $\bigvee$ redsubf($A$) if we replace $a$ by $b$ and $y_1, y_2, \ldots$ by $z_1, z_2, \ldots$, respectively."

Men heeft hiermee de loop van het bewijs van 'uit $\Delta$ verenigd met $\Gamma$ kan men $C$ afleiden' ($\Delta \cup \Gamma \vdash C$) teruggebracht tot 'uit $A$ en $B$ kan men $C$ afleiden' ($A \wedge B \vdash C$). De voorwaarden op de verzamelingen $\Delta$ en $\Gamma$ gelden nog steeds op de formules $A$ en $B$, d.w.z. $B$ is identiek $A$ maar met $b$ voor $a$ gesubstitueerd. Het bewijs zal bij Beth het verloop hebben van

1. $A, B$ naar de opbouw van een middenterm (tussenstappen 1: hierbij komt gereduceerde logica $\mathcal{RL}$ van pas, evenals het gebruik van subformules),
2. vandaar naar een term die in aanleg $a \leftrightarrow b$ uitdrukt (tussenstappen 2: dit door propositielogische wetmatigheden) en dan
3. verder naar de formule $C$ (tussenstappen 3: om bij $C$ te komen heeft men weer elementair-logische quantificatietheorie nodig).

Wat opvalt is het gebruik van subformules en een bewijsverloop zoals bij Gentzens aangescherpte hoofdstelling [E(xtended) H(auptsatz)]. Bij Gentzen heeft men de volgorde van

1. quantoreliminatie op zinnen in prenex-normaalvorm,
2. propositielogica, en
3. generalisatie.

De loop van het bewijs kan men door Beth in de al deels geciteerde brief naar Kleene laten vertellen: [42]

"We take the *axioms* of the deductive theory under consideration and add all axioms obtained by substituting $b$ for $a$. The enlarged axiom set is still consistent. Now for every model $< \mathtt{S}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots >$ [43] we must have $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, otherwise we would have two interprations proving the independence of $a$. Hence the formula $C$ expressing the equivalence of the predicates $a$ and $b$ is derivable, on the account of the Löwenheim

[40] Brief R.L. Vaught – Beth, 25 februari 1958, (Seattle, Washington). Beth en Vaught gebruikten $V$ en $W$ i.p.v. $\bigvee$ redsubf($A$), $\bigvee$ redsubf($B$), In sectie 'Beths bewijs: het inzetten van de gereduceerde logica' komen wij daar nog kort op terug.

[41] Brief Beth – R.L. Vaught, 1 maart 1958.

[42] Brief Beth – S.C. Kleene, 16 april 1953, ms. p. 3. Zie hoofdstuk over semantiek, sectie 'Volledigheid, subformules en de aanloop tot de definitiestelling'.

[43] $\mathtt{S}$ is het universum, met $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots$ worden interpretaties voor $a, b, t_1, t_2, \ldots$ bedoeld.

– Skolem – Gödel theorem. On account of my proof of this theorem, the derivation of $C$ can be made symmetric in $a$ and $b$, but no more can be said. But the stronger theorem mentioned above allows to complete the proof. The derivation of $C$ must consist of three parts:

1. Starting from the original axioms and containing only predicate $a$;
2. Symmetric with 1. and containing $b$;
3. Taking up the results of 1. and 2. and remaining symmetric in $a$ and $b$ until it concludes with $C$.

Now it can be shown that 3. can be reduced to one single step. This step consists of two expressions $M$ [$=A \wedge \bigvee$ redsubf$(A)$ (de constituenten en atomen van $A$)] and $N$ [$=B \wedge \bigvee$ redsubf$(B)$] being proved equivalent with each other, and $M$ with $a$, $N$ with $b$. It follows that $M$ and $N$ must be identical; and so cannot contain $a$ or $b$. So $M$ provides, with some caution, a suitable definition for $a$."

En Beth besluit tegenover Kleene met te verklaren wat wij voortdurend als schema aantreffen:

"An interesting feature in my proof is, that I do not really discuss derivations. I discuss the expression mentioned under (iij) [d.w.z. $\bigwedge_k C_k \wedge \bigwedge_p \bigwedge_m (\neg \forall x_m X_p(x_m) \vee \bigwedge_r X_p(r)) \wedge \bigwedge_q \bigwedge_n \forall x_n X_q(x_n) \vee \bigvee_s \neg X_q(s(q)))$] which contains so to speak, the lay-out for a derivation.[44] This expression is an identity of sentential logic, and so it can be submitted to substitution and detachment." [de twee operaties substitutie en modus ponens zal Beth gebruiken voor het omzetten van de formules.]

**Beths bewijs: het inzetten van de gereduceerde logica.** Wij hebben in het vorige hoofdstuk 'Semantiek' gezien dat voor elke stelling $A$ uit de elementaire logica, $\vdash_{EL} A$, er een correspondende stelling in de gereduceerde logica $\bigvee$ redsubf$(A) \vee A$, $\vdash_{RL} \bigvee$ redsubf$(A) \vee A$, bestaat. Daarmee hebben wij in het vorige hoofdstuk de sectie 'Volledigheid, subformules en de aanloop tot de definitiestelling' afgesloten.

Wij waren al gekomen tot de afleiding $A, B \vdash_{EL} C$, en over de deductiestelling tot

$$\vdash_{EL} \neg A \vee \neg B \vee C.$$

Als we dit combineren met bovenstaande relatie tussen elementaire logica en gereduceerde logica krijgen wij de volgende omzetting [Beths formule $Z$, (Beth 1953*b*), p. 335]:

$$\vdash_{RL} \bigvee \text{redsubf}(A) \vee \bigvee \text{redsubf}(B) \vee \bigvee \text{redsubf}(C) \vee \neg A \vee \neg B \vee C.$$

Met behulp van bovenstaande formule zal het gehele bewijs worden opgetrokken. Formule $C$ is daarbij onze doelformule en zijn gereduceerden in redsubf$(C)$ spelen bovendien een belangrijke rol in het bewijs, daarom nu over naar de opbouw van redsubf$(C)$. Wij hebben al gezien hoe $C$ eruit ziet, nml. $\forall x_1 \ldots \forall x_k (a(x_1, \ldots x_k)$

[44] Voor nadere uitleg m.b.t. de formule onder (iij), zie hoofdstuk Semantiek onder de sectie Volledigheid, subformules en de aanloop tot de definitiestelling.

$\leftrightarrow b(x_1, \ldots x_k))$, en uit het vorige hoofdstuk weten we hoe we een opsomming kunnen verkrijgen met de s-functie op universele quantoren [(Beth 1953*b*), p. 335]:

* $\forall x_1 X_1(x_1) = C = \forall x_1 \cdots \forall x_k(a(x_1, \ldots x_k) \leftrightarrow b(x_1, \ldots x_k))$ [dus $s(1) = 1$].
* $\forall x_2 X_2(x_2) = X_1(s(1) = X_1(1)$ [$= \forall x_2 \ldots \forall x_k(a(1, x_2, \ldots, x_k) \leftrightarrow b(1, x_2, \ldots, x_k))$] [dus $s(2) = 2$].
  ...
* $\forall x_k X_k(x_k) = X_{k-1}(s(k-1)) = X_{k-1}$ [$= \forall x_k(a(1, 2, \ldots, k-1, x_k) \leftrightarrow b(1, 2, \ldots, k-1, x_k))$] [dus $s(k) = k$].
* $X_k(s(k)) = X_k(k) = a(1, 2, \ldots, k) \leftrightarrow b(1, 2, \ldots, k)$.

Dit geeft voor $\bigvee$ redsubf($C$) het volgende resultaat: 1. schematisch met de $X$'n, 2. zoals het er echt uitziet.

1. $\bigvee \text{redsubf}(C) = (X_1(1) \wedge \neg\forall x_1 X_1(x_1)) \vee (X_2(2) \wedge \neg\forall x_2 X_2(x_2)) \vee \cdots \vee (X_k(k) \wedge \neg\forall x_k X_k(x_k))$.
2. $\bigvee \text{redsubf}(C) = (\forall x_2 \cdots \forall x_k(a(1, x_2, \ldots, x_k) \leftrightarrow b(1, x_2, \ldots, x_k)) \wedge \neg\forall x_1 \cdots \forall x_k\ (a(x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow b(x_1, \ldots x_k)) \vee \cdots \vee((a(1, 2, \ldots, k) \leftrightarrow b(1, 2, \ldots, k)) \wedge \neg\forall x_k(a(1, 2, \ldots, k-1, x_k) \leftrightarrow b(1, 2, \ldots, k-1, x_k)))$.

Laat $a\vec{k} := a(1, 2, \ldots, k)$ [=Beths $a_0$], $b\vec{k} := b(1, 2, \ldots, k)$ [=Beths $b_0$]. En nu de formule $\bigvee \text{redsubf}(A) \vee \bigvee \text{redsubf}(B) \vee \bigvee \text{redsubf}(C) \vee \neg A \vee \neg B \vee C$ met bovenstaande formule voor $\bigvee$ redsubf($C$) gesubstitueerd:

> $\bigvee \text{redsubf}(A) \vee \bigvee \text{redsubf}(B) \vee (\forall x_2 \cdots \forall x_k(a(1, x_2, \ldots, x_k) \leftrightarrow b(1, x_2, \ldots, x_k)) \wedge \neg\forall x_1 \cdots \forall x_k(a(x_1, \ldots x_k) \leftrightarrow b(x_1, \ldots x_k)) \vee \cdots \vee((a\vec{k} \leftrightarrow b\vec{k}) \wedge \neg\forall X_k(a(1, 2, \ldots, k-1, x_k) \leftrightarrow b(1, 2, \ldots, k-1, x_k))) \vee \neg A \vee \neg B \vee C$ [= omzetting van Beths formule $Z$, (Beth 1953*b*), p. 336].

Bovenstaande formule is d.m.v. modus ponens en substitutie om te zetten in de eenvoudigere formule [Beths formule $Z_1$, (Beth 1953*b*), p. 336]:

$$\vdash_{RL} \bigvee \text{redsubf}(A) \vee \bigvee \text{redsubf}(B) \vee (a\vec{k} \leftrightarrow b\vec{k}) \vee \neg A \vee \neg B.$$

### Van propositielogica terug naar quantoren

**Middensequent** Vóór de definitieve fase in zijn bewijs omschreef Beth zijn procedure als volgt aan Feys [de plaats van de letters en de symbolen in de redenering is terug te vinden in het bijgevoegde schema]: [45]
"La formule $Z$ [$= \bigvee \text{redsubf}(A) \vee \bigvee \text{redsubf}(B) \vee \text{redsubf}(C) \vee \neg A \vee \neg B \vee C$] se distingue du 'Midsequent' de Gentzen par la circonstance qu'elle contient des quantificateurs. Mais cela est peut-être un vertu plutôt qu'un défaut. En effet, j'effectue en

[45] Brief Beth – R. Feys, 17 april 1953. Beth verwijst in deze brief wellicht naar een overdruk of een ms.; de paragrafen en bladzijden (§4.3, p. 6) en (§2.1, p. 2) zijn dan in het artikel (§4.3, p. 335), respectievelijk (§2.1, p. 331–332; deze paragrafen geven de voorbereiding en hulpjes aan, maar niet de eigenlijke vorming van $Z_1$, $Z_2$.

4.3 (p. 6) une substitution qui me permet de remplacer $Z$ par la formule simplifiée $Z_1$ [$= \bigvee \text{redsubf}(A) \vee \bigvee \text{redsubf}(B) \vee (a\vec{k} \leftrightarrow b\vec{k}) \vee \neg A \vee \neg B$]. Cette opération entraîne une coupure dans la dérivation de $C$ en partant de $A$ et $B$, puisque $Z_1$ ne correspond qu'à la dérivation de $C$ en partant $a_0 \leftrightarrow b_0$ [$=a(1, 2, \ldots, k) \leftrightarrow b(1, 2, \ldots, k)$], et basée uniquement sur la théorie de la quantification.

$Z_1$ contient encore des quantificateurs qui correspondent aux quantificateurs qui se présentent dans $A$ et $B$. On pourrait se débarrasser de ces quantificateurs par une nouvelle substitution du même genre, qui résulterait dans le remplacement de $Z_1$ par une formule encore plus simple qui ne contiendrait plus aucun quantificateur et se constituerait donc exclusivement de 2me espèce (2.1, p. 2). Cette formule, $Z_2$, serait encore une identité de le logique réduite et correspondrait problamement au 'Midsequent' de Gentzen. Alors on tomberait sur une analyse plus détaillée de notre dérivation, soit [de horizontale lijnen geven de deductie-stappen aan]:

$$\begin{array}{rc}
\text{quantificational theory:} & \dfrac{A; B}{M; N} \\
\text{[from] quantificational logic [to sentential logic]:} & \dfrac{M; N}{Z_1} \\
\text{sentential logic:} & \dfrac{Z_1}{Z_2} \\
\text{sentential logic:} & \dfrac{Z_2}{a\vec{k} \leftrightarrow b\vec{k}} \\
\text{quantificational theory:} & \dfrac{a\vec{k} \leftrightarrow b\vec{k}}{C}
\end{array}$$

In bovenstaande opsomming zijn $a\vec{k} = a(1, 2, \ldots, k$ [= Beths $a_0$, evenzo voor $b_0$], $M = A \wedge \neg \bigvee \text{redsubf}(A)$, $N = B \wedge \neg \bigvee \text{redsubf}(B)$. De eerste stap is van $A$ naar $M$ en van $B$ naar $N$, de volgende is die naar $M \wedge N$.
Wij zullen nu deze stappen en formules nauwkeuriger bezien.

**Beths bewijs: middensequent en hergroepering.** Wij waren gekomen tot de volgende vereenvoudigde formule $Z_1$:

$$\vdash_{RL} \bigvee \text{redsubf}(A) \vee \bigvee \text{redsubf}(B) \vee (a(1, 2, \ldots, k) \leftrightarrow b(1, 2, \ldots, k)) \vee \neg A \vee \neg B.$$

Nu gaat Beth er toe over met onze verworven kennis opnieuw, maar met de nodige hergroepering, van $A \wedge B$ naar $C$ te gaan. De bedoeling wordt duidelijk gemaakt in het schema in de geciteerde brief van Beth naar Feys van 17 april 1953 (en in Beth (1953*b*) op p. 336).

In eerste instantie hergroepeerde Beth (1953*b*), p. 336, zijn $Z_1$ tot:

$$\vdash_{RL} (A \wedge \neg \bigvee \text{redsubf}(A) \wedge B \wedge \neg \bigvee \text{redsubf}(B)) \rightarrow (a(1, \ldots, k) \leftrightarrow b(1, \ldots, k)).$$

Hierbij $A \vdash A \wedge \neg \bigvee \text{redsubf}(A)$ en $B \vdash B \wedge \neg \bigvee \text{redsubf}(B)$ [Bij Beth $M := A \wedge \neg \bigvee \text{redsubf}(A)$; $N := B \wedge \bigvee \text{redsubf}(B)$] Dit is punt 4.6.(i) in Beth (1953*b*), en op dit punt was er kritiek van Vaught en Craig.

Op dit punt aangekomen gaat Beth met de diverse stukken schuiven (nog steeds in gereduceerde logica). Dit deed hij m.b.v. $M$ [$= A \wedge \neg \bigvee$ redsubf($A$) en $N$ [$= B \wedge \bigvee$ redsubf($B$)], zodat $Z_1$ nu als $(M \wedge N) \to (a\vec{k} \leftrightarrow b\vec{k})$ te herschrijven is. Helemaal in het begin was er al aangenomen dat predicaat $b$ niet in $A$, dus ook niet in $M$, en predicaat $a$ niet in $B$, dus ook niet in $N$ optreedt, en bovendien, dat $A$ en $B$ symmetrisch m.b.t. $a$ en $b$ zijn en dus ook dat $M$ en $N$ dat zijn. Beth omschrijft nu $M$ en $N$ als volgt:
Laat $M := (M_1 \vee a\vec{k}) \wedge (M_2 \vee \neg a\vec{k})$ en $N := (N_1 \vee b\vec{k}) \wedge (N_2 \vee \neg b\vec{k})$.
Hierbij: $M_1, M_2$ bevatten niet $a(1, \ldots, k)$ en niet $b$. En $N_1, N_2$ bevatten niet $b(1, \ldots, k)$ en niet $a$. Beth geeft geen precieze omschrijving van $M_1, M_2, N_1, N_2$; dat is ook niet nodig, zijn beschrijving is voor ons doel voldoende: we weten gerelateerd tot $M$ en $N$ en de predicaten waarom het gaat, wat er wel en wat er niet in zit.
Nu valt volgens Beth (1953*b*), p. 336, $Z_1$ te herschrijven in:

$$\vdash_{RL} ((M_1 \vee a\vec{k}) \wedge (M_2 \vee \neg a\vec{k}) \wedge (N_1 \vee b\vec{k}) \wedge (N_2 \vee \neg b\vec{k})) \to (a\vec{k} \leftrightarrow b\vec{k}).$$

Uit deze laatste gedaanteverandering van $Z_1$ vallen volgens Beth $\vdash_{RL} \neg M_1 \vee \neg N_2$ en $\vdash_{RL} \neg M_2 \vee \neg N_1$ af te leiden (volgens Beth (1953*b*), p. 336 d.m.v. waarheidstafels).

**Commentaren: Craig en Vaught.** W. Craig en Vaught hadden kritiek op syntactische punten van §4 uit Beth (1953*b*). Als eerste Craig: [46]
"The proof uses a variant of Gentzen's Extended Hauptsatz. The proof seems to need revision since assertion i) of 4.6 seems erroneous. If $V'$ is obtained from $V$ by replacing distinct numerals by distinct variables not occurring in $A$ or $V$, then it can probably be shown that $\neg A \vee V' \vdash \neg A$. Yet this does not imply that $A \vdash \neg(\neg A \vee V')$.

For example, let $V = (X_q(s(q)) \wedge \neg\forall x_n X_q(x_n)$ and $V' = X_q(y) \wedge \neg\forall x_n X_q(x_n)$ where $y$ does not occur in $A$ or $V$. Then $\neg A \vee ((X_q(y) \wedge \neg\forall x_n X_q(x_n)) \vdash \forall y(\neg A \vee (X_q(y) \wedge \neg\forall x_n X_q(x_n))$ and $\forall y(\neg A \vee (X_q(y) \wedge \neg\forall x_n X_q(x_n)) \leftrightarrow \neg A$. Hence $\neg A \vee V' \vdash \neg A$. Yet if $A = \neg\forall x_n X_q(x_n)$, then in general $A \vdash \neg X_q(y) \vee \forall x_n X_q(x_n)$ and therefore $A \vdash \neg(\neg A \vee V')$ fail.

It is also doubtful that one can always carry out the stipulation in [Beths §] 4.4 that $V$ [$=\bigvee$ redsubf($A$)] and $W$ [$=\bigvee$ redsubf($B$)] be chosen symmetric in $a$ and $b$. To be sure, if $V \vee W \vee X \vee \neg A \vee \neg B \vee C$ [= Beths formule $Z$, $X = \bigvee$ redsubf($C$)] is tautologous, then one can find a $V'$ and $W'$ symmetric in $a$ and $b$ so that $V' \vee W' \vee X \vee \neg A \vee \neg B \vee C$ is tautologous. But is doubtful that from the latter tautology we can obtain $\neg A \vee \neg B \vee C$ by the same limited set of rules as from the former."

Beths antwoord was als volgt: [47]
"The assertion (i) of 4.6 does not really matter. It only matters that $Z_1$ is symmetric in $a$ and $b$ and that it is a tautology of reduced logic. Now the argument continues as

[46] Ms. W. Craig, (extra) p. 3 (met aantekening 9 door Beth(?)) van ms. van de recensie door Craig van Beths definitiestelling. Het hier gegeven citaat is niet in de uiteindelijke recensie terecht gekomen. Ms. onder de brieven uit 1956, wellicht bij de brief van Craig naar Beth van 15 februari 1956.

[47] Brief Beth – W. Craig, 30 januari 1956. We nemen weer $a\vec{k} = a(1, \ldots, k)$ [= Beths $a_0$], $b\vec{k} = b(1, \ldots, k)$ [= Beths $b_0$].

follows. $Z_1$ is a formula of reduced logic. Atoms of reduced logic containing $a$ (except $a\vec{k}$) must occur in $M$; for any such atom we substitute $a\vec{k}$. Similarly for $b$. The resulting formula: $(M' \wedge N') \rightarrow (a\vec{k} \rightarrow b\vec{k})$ is still a tautology, and it has the necessary symmetry. Hence, if $M' \rightarrow ((M_1 \vee a\vec{k}) \wedge (M_2 \vee \neg a\vec{k}))$, then also: $N' \rightarrow ((M_1 \vee b\vec{k}) \wedge (M_2 \vee \neg b\vec{k}))$; it follows by truth-table methods that: $(M' \wedge N') \rightarrow (M_2 \rightarrow a\vec{k})$ is a tautology."

De opmerking van Craig bleef ook in zijn JSL-recensie een opmerking. Derhalve kwam later R.L. Vaught opnieuw op (Beth 1953*b*) -4.6 (i) terug: [48] "Then there is a gap, namely, the one pointed out in Craig's 1956 JSL review: the passage from $A$ to $A \wedge \neg V$ [$=A \wedge \neg \bigvee \mathrm{redsubf}(A)$], $B$ to $B \wedge \neg W$ [$=B \wedge \neg \bigvee \mathrm{redsubf}(A)$]." [49] Beth reageerde: [50]
"There is no really gap in my paper, but it is true that the argument is badly stated. A correct statement can be easely given in terms of sequents. Consider the following outline of a sequent derivation:

> 1. $\emptyset \Rightarrow Z_1$ [$=\bigvee \mathrm{redsubf}(A) \vee \bigvee \mathrm{redsubf}(B) \vee (a\vec{k} \leftrightarrow b\vec{k}) \vee \neg A \vee \neg B$]. 2. $A \wedge \neg \bigvee \mathrm{redsubf}(A), B \wedge \neg \bigvee \mathrm{redsubf}(B) \Rightarrow a\vec{k} \leftrightarrow b\vec{k}$. 3. $A, B \Rightarrow a\vec{k} \leftrightarrow b\vec{k}$. 4. $A, B \Rightarrow C$.

We do not actually derive $A \wedge \neg V$ [$=A \wedge \neg \bigvee \mathrm{redsubf}(A)$] from $A$, but we show that, in this particular context, the premiss $A \wedge \neg V$ can be replaced by the premiss $A$. The step from 2. to 3. contains the essential contribution of quantification theory."

**Beths bewijs: eindformule en quantificatie.** Wij zijn nu in een beslissende fase van het bewijs beland: we hebben met de laatste gedaanteverwisseling van $Z_1$ als $\vdash_{RL} ((M_1 \vee a\vec{k}) \wedge (M_2 \vee \neg a\vec{k}) \wedge (N_1 \vee b\vec{k}) \wedge (N_2 \vee \neg b\vec{k})) \rightarrow (a\vec{k} \leftrightarrow b\vec{k})$ en met de daaruit afgeleide formules, $\vdash_{RL} \neg M_1 \vee \neg N_2$ en $\vdash_{RL} \neg M_2 \vee \neg N_1$, de stukken in handen van waaruit wij gaan combineren en uiteindelijk bij het beoogde resultaat belanden. Dit deed Beth (1953*b*), p. 337, in het volgende cluster:

1. $M \vdash_{RL} a\vec{k} \rightarrow M_2, M \vdash_{RL} M_2 \rightarrow \neg N_1$ en $N \vdash_{RL} \neg N_1 \rightarrow \vec{b}$, derhalve $a\vec{k} \rightarrow b\vec{k}$.
2. En omgekeerd $N \vdash_{RL} b\vec{k} \rightarrow N_2, N \vdash_{RL} N_2 \rightarrow \neg M_1$ en $M \vdash_{RL} \neg M_1 \rightarrow a\vec{k}$, derhalve $b\vec{k} \rightarrow a\vec{k}$.
3. Uit 1 en 2: $a\vec{k} \leftrightarrow b\vec{k}$ [$=a(1, \ldots, k) \leftrightarrow b(1, \ldots k)$].

Ogenschijnlijk zijn wij nu aan het einde van het bewijs gekomen. Hebben wij nu niet $A, B \Rightarrow a\vec{k} \leftrightarrow b\vec{k}$, $A, B \Rightarrow C$ zoals onder de punten 3 en 4 in de brief van Beth naar Vaught? Helaas is er nog een weg te gaan, want de afleiding heeft nog steeds optredens van $a$ en $b$.
Beth had de afleiding onafhankelijk van de optredens van $a$ en $b$ te maken: dit deed hij door alle optredens van $a$ en $b$ uit de formules $M_1, M_2, N_1$ en $N_2$ te werken. M.a.w. wij gaan bovenstaand cluster 1 t/m 3 overdoen — maar niet het hele bewijs.

[48] Brief R.L. Vaught – Beth, 25 februari 1958, (Seattle, Washington).
[49] 'Craig's 1956 JSL review': (Craig 1956).
[50] Brief Beth – R.L. Vaught, 1 maart 1958.

Vanwege de met de definities van de ten opzichte van elkaar symmetrische $M$ en $N$ gerelateerde $M_1, M_2, N_1, N_2$ weten we dat, als er in de ene groep atomen $A_1, A_2, \ldots, A_m$ met $a$'s verschijnen, in de andere groep er evenzo atomen $B_1, B_2, \ldots, B_m$ met $b$'s zijn. Als volgt wordt er in Beth (1953*b*), p. 337, geëlimineerd.

a Eerst reikt hij de instrumenten aan waarvan we gebruik moeten maken: de hergegroepeerde formules.
b Vervolgens gaat Beth hiermee bovenstaand cluster 1 t/m 3 langs: stap voor stap worden hierin de atomen met $a$ en $b$ verwijderd: eerst doet hij dit voor $A_1$, dan vanwege de hiervoorgenoemde argumenten voor $B_1$. Hiermee doorloopt Beth het gehele cluster. Daarna doet hij dit keer op keer voor $A_2, B_2$ t/m $A_k, B_k$. Dan zijn de formules $M_1, M_2, N_1, N_2$ vervangen door de $a$- en $b$-vrije formules $M_1^*, M_2^*, N_1^*, N_2^*$ .
c Tenslotte geeft Beth kortere herformuleringen van de punten 1 t/m 3, en vandaar neemt hij opnieuw een laatste stap naar het eindresultaat van zijn definitiestelling.

Voor het bewijs zal er alleen uitgebreider gekeken worden hoe dit loopt voor de combinatie van atomaire $A_1$ met $B_1$.
a. *De instrumenten.*
$M_2 = (M_2' \vee A_1) \wedge (M_2'' \vee \neg A_1)$, $N_1 = (N_1' \vee B_1) \wedge (N_1'' \vee \neg B_1)$, zodat $\neg N_1 = (\neg N_1' \wedge \neg B_1) \vee (\neg N_1'' \wedge B_1)$.
b. *De eliminatie.*
Uitgaande van punt 1 in het cluster aan het begin van deze sectie 'eindformule en quantificatie' en voor de combinatie $(A_1, B_1)$ komt Beth tot de volgende conclusies:

* $a\vec{k} \rightarrow M_2$ [punt 1], dan over substitutie van bovenstaande tot $a\vec{k} \rightarrow ((M_2' \vee A_1) \wedge (M_2'' \vee \neg A_1))$, dus $a\vec{k} \rightarrow (M_2' \vee A_1)$, $a\vec{k} \rightarrow (M_2'' \vee \neg A_1)$, derhalve $a\vec{k} \rightarrow (M_2' \vee M_2'')$.
* Evenzo over $\vdash_{RL} M_2 \rightarrow \neg N_1$ [ook uit punt 1 van het cluster] met substitutie: $\vdash_{RL} (M_2' \vee A_1) \wedge (M_2'' \vee \neg A_1)) \rightarrow (\neg N_1' \wedge \neg B_1) \vee (\neg N_1'' \wedge B_1)$; dan met substitutie van $M_2''$ voor $A_1$ en $N_1''$ voor $B_1$: $\vdash_{RL} (M_2' \vee M_2'') \rightarrow (\neg N_1' \wedge \neg N_1'')$.
* Uit punt 1 van het cluster hadden we $\neg N_1 \rightarrow b\vec{k}$, dus nu ook $(\neg N_1' \wedge \neg N_1'') \rightarrow b\vec{k}$.

c. *De herformulering.*

* Ga nu in punt 1 van het cluster $M_2$ vervangen door $M_2' \vee M_2''$ en $N_1$ door $N_1' \vee N_1''$: er zijn dan geen formules waarin $A_1$ of $B_1$ zitten. Evenzo voor punt 2 van het cluster. Punt 3 van het cluster blijft onveranderd.
* Ga nu over op de combinatie $A_2, B_2$, werk deze af, en verwijder zo alle voorkomens van $A_2$ en $B_2$. Loop zo de gehele groep tot en met $A_m, B_m$ door: alle $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m$ zijn nu geëlimineerd.

* Beth gaat nu uit van de $a$- en $b$-vrije formules $M_1^*, M_2^*, N_1^*, N_2^*$: zij vervangen $M_1, M_2, N_1, N_2$ in bovenstaand cluster met de stappen 1 t/m 3. Daarmee is op p. 337 van Beth (1953*b*) het bewijs rond.[51]

*De eindstap*

1. Neem $a(1,\ldots,k) \leftrightarrow M_2^*$.
2. Vervang elke $j, (1 \leq j \leq k)$ door $y_j$ in $a(1,\ldots,k)$ en in $M_2^*$: dan heeft men $a(y_1,\ldots,y_k$ en $M_2^{**} = M_2^*[y_j/j]$ [ofwel voor elke $j$: $y_j$ gesubstitueerd voor $j$], dus ook $a(y_1,\ldots,y_k) \leftrightarrow M_2^{**}$.[52]
3. $A \vdash_{EL} a(y_1,\ldots,y_k) \leftrightarrow M_2^{**}$.
4. $a(y_1,\ldots,y_k) \leftrightarrow M_2^{**}(y_1,\ldots,y_k)$.

Met punt 4 wordt $a$ in termen van de overgebleven primitieve begrippen van $\Delta$ gedefinieerd.

Hiermee zijn we aan het einde van de bespreking van Beths stelling gekomen.

## 5.3 Directe reacties

### 5.3.1 Definitiestelling: syntax of semantiek?

**Tarski.** De eerste reacties op het werk van Beth kwamen los na het opsturen van zijn werk naar Kleene en Tarski. Kleene reageerde niet zo uitgesproken.[53] Echte reacties kwamen meer uit de Californische hoek. Tarski gaf op de hem gebruikelijke manier het manuscript aan een student, nu S. Feferman. Gezien Tarski's belang bij de zaak — er waren prioriteiten te verdedigen — kreeg Beth al snel van hem een brief terug.[54] Tarski vond (ook met betrekking tot de prioriteiten) dat Beth gelijk had door te zeggen dat zijn (Beths) resultaat niet nauw verbonden was met het resultaat in Tarski (1935*b*):

"My result applies to the predicate calculus of order $\geq 2$ and, mathematically is rather trivial. I do not agree, however, that the difference between the two results consists in the fact that one is syntactical and the other semantical. It seems to me that your result is primarily syntactical, but that by Gödel's theorem, it admits a semantical interpretation since it applies to the first order logic.[55] In fact, if I were you, I would start with a syntactical formulation (which is simpler) and only later would give a semantical translation. More specifically, using your symbolism, I would put it this way.

[51] Het bewijs kan korter. Vanwege de symmetrie komt Beth tot $M_1^* = N_1^*, M_2^* = N_2^*$. Nu met het door Beth gegeven voorbeeld: $M \vdash_{RL} a\vec{k} \rightarrow M_2^*$, $M \vdash_{RL} \neg M_1^* \rightarrow a\vec{k}$. Dus $M \vdash_{RL} \neg M_1^* \rightarrow M_2^*$. Bovendien $\vdash_{RL} M_2^* \rightarrow \neg M_!^*$, derhalve $M \vdash_{RL} a\vec{k} \leftrightarrow M_2^*$ etc.

[52] Voor het weer op quantoren overgaan: zie hiertoe het hoofdstuk over semantiek in de sectie 'Volledigheid, subformules en de aanloop tot de defintiestelling' onder de bespreking van de brief van Beth aan Kleene; maar zie ook Beth (1951*b*), p. 442, Beth (1950), druk uit 1955, p. 91.

[53] Brief S.C. Kleene – Beth, 14 mei 1953, (Madison, Univ. of Wisconsin). Wel is ruimschoots van Beths brieven naar Kleene gebruik gemaakt.

[54] Brief A. Tarski – Beth, 19 mei 1953.

[55] 'Gödel's theorem': bedoeld is de volledigheidsstelling van Gödel.

Definition: A constant $a$ of a theory $\Delta$ is said to be definable in terms of the remaining constants if there is a sentence of the form $\forall x_1 \cdots \forall x_n\ a(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \Phi$ which is provable in $\Delta$ and where $\Phi$ stands for a formula (of $\Delta$) not containing $a$.
Theorem: For $a$ to be definable in terms of the remaining constants of the theory $\Delta$ it is sufficient (and of course, necessary) that the sentence $\forall x_1 \cdots \forall x_n\ a(x_1, \ldots, x_n)$ be provable in $\Delta \cup \Gamma$.

By the way, I would define explicitly what is meant by the union $\Delta \cup \Gamma$ of two theories."

De relatie met volledigheid van Tarski is anders dan die van Beth doordat Beth, anders dan Tarski, binnen de elementaire logica werkte.[56] Daarnaast was er de kwestie hoeveel semantiek en syntax er in het bewijs gestopt was voor deze in wezen syntactische aangelegenheid. Beth was niet los te zien van Gentzen, maar er waren semantische componenten. Op deze syntactische wijze met hier en daar wat semantiek werd ook de interpolatiestelling van Craig volvoerd. De bewijsvoering van Lyndons interpolatiestelling en Robinsons consistentiestelling waren semantisch en zo door beiden uitdrukkelijk onder die noemer geformuleerd; de vraagstelling echter niet. De uitgangspunten van Lyndon en Robinson waren anders dan die van Beth en Craig. In sommige logica-centra lag bovendien de nadruk op het geven van semantische uitgevoerde bewijzen: [57]
"I have profited much from discussions related to the present topic with A. Tarski and L. Henkin; in particular, Tarski has emphasized the desirability of establishing the Interpolation Theorem by methods independent of the theory of proof. The idea of providing semantic proofs of results from the theory of proof is not new: a proof by E. Beth [1, 2], in a quite different formalism, of Craig's Lemma would certainly serve as well to prove the Interpolation Theorem; and A. Robinson has likewise provided semantic proofs of closed related results [10]."[58]

Robinsons bewijs was wel semantisch, over de stelling zelf werd door Robinson (1956), p. 53, anders geoordeeld: "This [de consistentiestelling] completes the proof of 2.6.[59] It will be seen that although the proof is based largely on semantic considerations, the theorem as such is purely syntactical."

In het Californische rond Tarski had men blijkbaar niet zoveel op met syntactische bewijzen. Een voorbeeld hiervan wordt gegeven in het hoofdstuk over semantische tableaus in Beths brief aan Tarski. Daar constateerde Beth een aversie van Tarski jegens Gentzens bewijstheorie.

---

[56] Brief Beth – A. Robinson, 22 augustus 1955. Reactie van Beth op de brief A. Robinson – Beth, 19 augustus 1955, (Toronto). Robinson kon zich volledig vinden in Beths bewering (brief A. Robinson – Beth, 31 augustus 1955, (Toronto). Voor een afleiding van Tarski's definitiestelling uit die van Beth, zie (Beth 1959*b*).

[57] Citaat uit Lyndon (1959*a*), p. 130.

[58] Beth [1] = (Beth 1953*b*), Beth [2] = (Beth 1959*b*), Robinson [10]= (Robinson 1956). Het aanhalen van Beth (1959*b*), pp. 288–290, door Lyndon laat zien dat hij Beths latere tableaumatige bewijs van interpolatie (en daaruit afgeleid de definitiestelling) rangschikte onder de semantische bewijzen (niet iedereen zal het daarmee eens zijn). Lyndon was al in 1958 door een, later nog te behandelen, brief van Beth op de hoogte gesteld. Met de kennis van de semantische tableaus loopt het bewijs een stuk sneller en eleganter dan het hier gegevene. In het hoofdstuk over semantische tableaus komen wij op dit bewijs terug.

[59] de consistentiestelling (2.9) is een direct gevolg van 2.6.

**Feferman.** Tarski en Feferman waren na het verkrijgen van Beths voorlopige manuscript dan ook aan het werk gegaan gegaan om te zien of men Beths resultaten ook zonder gebruik van Gentzen volledig semantisch kon uitvoeren: [60]

"In the past few weeks, both Prof. Tarski and I were very much interested in seeing whether your theorem could be deduced from results related to the Löwenheim – Skolem – Gödel theorem which would be more familiar than your analogue of Gentzen's theorems on derivability. We each worked along several different lines, all without success, and I think this certainly testifies to the ingenuity of your argument."

Vooral in Beths §4 zag Feferman het syntactische argument benadrukt: [61]

"I think §4 deserves a general comment: Your solution of the problem is really a solution of a problem in proof theory and only incidentally an application of Löwenheim – Skolem – Gödel theorem. Indeed, it seems to me that your main result has its proper phrasing as follows: If $A, B$ are formulas symmetric in $a, b$ (which are consistent), and if $\forall x_1 \cdots \forall x_k\ (a(x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow b(x_1, \ldots, x_k))$ is derivable from $A \wedge B$ by elementary logic, then either:

- The formula $A$ contains further primitive notions $t_1, \ldots, t_n$ in terms of which a formula $M^\star(x_1, \ldots, x_k)$ can be constructed for which $\forall x_1 \cdots \forall x_k)\ (a(x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow M^\star(x_1, \ldots, x_k))$ is derivable from $A$ by elementary logic;
- The formula $A$ contains no notions other than itself and one of the formulas $\forall y_1 \cdots y_k\ \neg a(y_1, \ldots, y_k)$, $\forall y_1 \cdots \forall y_k\ a(y_1, \ldots, y_k)$ is derivable from $A$ by elementary logic.

From this theorem it is, of course, a quick step to the solution of your problem via the Löwenheim – Skolem – Gödel theorem. I believe it is worthwile putting the problem in this form, since then the difference between your problem and the problem of exhibiting models for independence of axioms is quite sharply pointed up."

**Beth.** Volgens Feferman was het in de eerste plaats bewijstheorie waarmee Beth zich bezig hield. In dit opzicht stemde Feferman in met het oordeel van Tarski. Het gebruik van de stelling van Löwenheim – Skolem – Gödel was incidenteel. In zijn antwoord op de aanmerkingen van Fefermans zei Beth dat ook hij begonnen was met Löwenheim – Skolem – Gödel. Deze stelling is volgens Beth alleen nuttig bij het bekijken van de afleidbaarheid van een zin. Beth wilde echter de afleidbaarheid van een zin aantonen waarmee men een definitie invoert, maar waarbij die definitiezin er verder niet toe doet: [62]

"At first I started about the way you point out and tried to apply the Löwenheim – Skolem – Gödel theorem. But later it occurred to me that this was not an effective

[60] Brief S. Feferman – Beth, 22 juni 1953, (Berkeley, Calif.); cit. pp. 5–6. In tegenstelling tot de hier gewekte indruk is Feferman gedurende zijn werkzame leven vooral bewijstheoreticus en niet modeltheoreticus geweest.

[61] Brief S. Feferman – Beth, 22 juni 1953, (Berkely, Calif.), pp. 5–6. Voor verdere kritiek op §4, i.h.b. §4.6 door R.L. Vaught en W. Craig tezamen met de verdediging door Beth, zie de appendix van dit hoofdstuk. §4, d.w.z. de gang van $\vdash_{EL} \neg A \vee \neg B \vee C$, over de omzetting daarvan in $\vdash_{RL} \bigvee \mathrm{redsubf}(A) \vee \bigvee \mathrm{redsubf}(B) \vee \bigvee \mathrm{redsubf}(C) \vee \neg A \vee \neg B \vee \neg C$ [Beths formule $Z$] naar $\vdash_{RL} (A \wedge \neg \bigvee \mathrm{redsubf}(A) \wedge B \wedge \neg \bigvee \mathrm{redsubf}(B)) \rightarrow (\vec{a} \leftrightarrow \vec{b})$ [Beths hergroepering van zijn formule $Z_1$].

[62] Brief Beth – S. Feferman, 29 juni 1953.

method. Indeed this theorem is helpful if we wish to discuss the derivability of a given statement. But this is not the case here.

We wish to show the derivability of a statement which enables us to construct a certain definition but is otherwise indefinite. And the only line of attack starts from the fact that the formula $C$ is derivable. Therefore we have to analyse the derivation of $C$, hence this derivation must be given a simple or at least a convenient shape. It seems to follow that my method of proof is rather straightforward."

Hoe dacht Beth zelf over de al eerder gestelde vraag betreffende semantisch versus syntactisch? Hierin was Beth expliciet: syntactisch.
Eerst een onvolledig citaat uit een manuscript (gezien het credo van de dissertatie hebben deze nu eenmaal voorrang): [63] "On account of Gödel's completeness theorem, this semantical problem [...] if $a$ is independent of $t_1, t_2, t_3, \ldots$, such an interpretation can always be found, reduces to a proof-theoretical problem, of which I shall try to point out the [?...?]." En voor wie nog niet overtuigd is nu Beth (1953*b*), p. 339:

"The results of Sections 3–5 [en in deze secties wordt het bewijs van de definitiestelling geleverd] can be established by the methods of finitary proof theory. It will be clear, for instance, that, if we are given a derivation of the formula $C$, we are able, on account of Theorem 4.2 $[A, B \vdash C]$, effectively to rearrange this derivation in such a matter as to obtain, either a suitable definition of the notion $a$, or a proof of (I) $[=\Delta \vdash \forall y_1 \cdots \forall y_k \neg a(y_1, \ldots k_k)]$ or (II) $[=\Delta \vdash \forall y_1 \cdots \forall y_k a(y_1, \ldots k_k)$, $a$ het enige primitieve begrip in $\Delta$]."

### 5.3.2 Interpolatie

#### Craigs lemma

Er bestaan diverse generalisaties waarin de definitiestelling van Beth kan worden ingebed: één daarvan is Craigs interpolatiestelling. Craig was al langer op de hoogte van het bestaan van Beths definitietheorie gezien noot 2 op p. 331 van Beth (1953*b*): "[H]e [Beth] also wishes to extend his thanks to H.B. Curry and W. Craig, and to S.C. Kleene, for reading a draft of this paper." In de periode 1955 – 1956 was Craig bezig een recensie over Beth (1953*b*) samen te stellen voor de JSL. In de periode, waarin hij deze recensie voorbereidde, nam hij met Beth contact op. De belangrijkste, rhetorische vraag, die hij Beth in 1956 te stellen had, bestond uit: [64]

"Do the results of your paper still hold for arbitrary formulas $A(x_1, \ldots, x_q)$, $B_1(y_1, \ldots, y_{r_1})$, ... , $B_p(y_1, \ldots, y_{r_p})$ in place of the primitive predicates $a(x_1, \ldots, x_k)$, $t_1(y_1, \ldots, y_{n_1})$, ... , $t_l(y_1, \ldots, y_{n_l})$, ... respectively? The answer is affirmative, as can be shown by the following argument."

[63] Ms. (onvolledig), E.W. Beth, *On Padoa's method*, (niet gehouden; deel van) voordracht voor XIe Internationale Filosofiecongres, Brussel, 1953. Beths wel gehouden voordracht werd later uitgegeven als Beth (1953*d*), het citaat is komen te vervallen en is bovendien onvolledig.

[64] Brief W. Craig – Beth, 1 februari 1956, (State College, Pennsylvania). De eerste brief van Craig waarin dit verscholen zat, was van 24 januari 1956; deze brief met Beths antwoord daarop zal later besproken worden .

De bedoeling was dat Craigs antwoord op deze door hemzelf gestelde vraag in de recensie terecht zou komen. Beth vond dat zonde en hij gaf Craig de raad er een afzonderlijk artikel van te maken: [65]
"Therefore, it seems that the result (which seems to be essentially stronger than my original result, and not derivable from it in any obvious manner) ought to be published in some way. Various methods are available: you could point out the matter in your review, or you could publish it along with the material contained in your thesis."

Craig nam deze raad van Beth ter harte. De door Craig aangedragen generalisatie zou zich nadien afsplitsen, en in een zelfstandig artikel voor JSL worden verwerkt tot zijn interpolatiestelling. Hierbij kon Craig volgens Beth tevens gebruik maken van resultaten uit het proefschrift Craig (1951). Uiteindelijk bestond Craigs bijdrage uit twee artikelen: [66] Craig (1957*b*) en Craig (1957*c*); in een derde artikel, Craig (1957*a*), wordt een verdere uitwerking gegeven, ook in verband met Lyndon's resultaat. In Craig (1957*b*) wordt interpolatie als stelling 5 op p. 267 genoemd: interpolatie heeft daar over de voorafgaande stellingen 1 – 4 de stelling van Herbrand – Gentzen (Gentzens aangescherpte hoofdstelling) als grondslag. Herbrand – Gentzen wordt op p. 259 in Craig (1957*b*) als volgt geformuleerd: 'If $A \to A'$ is a theorem of first-order predicate calculus and if $A$ is a conjunction and $A'$ an alternation of prenex normal forms, then there is an H-deduction of $A \to A'$." Deze stelling is volgens Craig naar Kleene (1952*a*), stelling 50, p. 460; ook in Kleene (1952*a*) speelde de middensequent de sleutelrol. Craigs H-deductie is een Gentzen-afleiding, met als regels vereenvoudiging in antecedent en consequent en invoer van de quantoren $\exists$ en $\forall$ in antecedent en consequent. [67]
De *Interpolatiestelling* behelsde: [68]

> "If $A \to A'$ and if $A$ and $A'$ have a predicate parameter in common, then there is is an 'intermediate' formula $B$ such that $\vdash A \to B$, $\vdash B \to A'$, and all parameters of $B$ are parameters of both $A$ and $A'$. Also if $\vdash A \to A'$ and if $A$ and $A'$ have no predicate parameter in common, then either $\vdash \neg A$ or $\vdash A'$." [69]

Craig onderkende in zijn en Beths bewijs een samenspel van semantische alsook syntactische elementen. Craig (1957*c*), 'Three uses of the Herbrand – Gentzen theorem', bestond uit de uitwerking van drie op interpolatie berustende gevallen: [70] "In all three cases, a fundamental lemma (interpolatie) is used which is derived from the Herbrand-Gentzen Theorem." Deze gevallen waren — en eigenlijk interesseert hier ons alleen het eerste geval: [71]

- Beth met zijn gelijkwaardigheid van een semantisch met een syntactisch definieerbaarheidsbegrip — in dit opzicht vermeldde Craig ook Robinson (1956).

[65] Brief Beth – W. Craig, 3 februari 1956.
[66] Of Beths voorslag beide artikelen of slechts één daarvan tot gevolg had is mij niet duidelijk.
[67] Voor H-deductie: zie Craig (1957*b*), p. 258 e.v.
[68] Craig (1957*c*), Lemma 1, p. 270, Craig (1957*b*), stelling 5, p. 267.
[69] Men kan het lemma ook als gesteld in sequenten lezen.
[70] (Craig 1957*c*), p. 270.
[71] Craig (1957*c*), p. 269.

- ∘ Hogere orde talen: "A certain relationship is shown to hold between first-order formulas and those second-order formulas which are of the form $\exists T_1, \ldots, \exists T_k A$ or $\forall T_1, \ldots, \forall T_k A$ with $A$ being a first-order formula."[$T_i$ predicaten uit $A$. .0]
- ∘ Axiomatiseerbaarheid: "More generally, given a system and given certain proper subsets of the set of extralogical constants of the system, the question arises whether or not there is an axiomatization such that each extra logical axiom involves only the constant of one of the subsets."

Craig wist dat A. Robinson aan een gelijksoortige stelling werkte. Beth had hem op Robinsons, op het punt van verschijnen staande, publicatie gewezen: [72] "In connection with our previous correspondence, may I draw your attention upon a paper by Professor A. Robinson, which has just appeared in Indagationes Mathematicae volume 18, pp. 47–58 [...] and especially on his Theorem 2.9, by which he gives a new proof of my result? It seems that his approach is somehow related to yours."

Robinson en Craig werkten onafhankelijk van elkaar. Nadien hadden zij ook niet veel contact: [73] "Our exchanges about his joint-concistency theorem and my interpolation theorem were not very extended. [...] It took both of us some time, I believe, to realize that the respective theorems that we used in the proof of Beth's results were of intrinsic interest. [...] The equivalence of Robinson's theorem and mine, for first order-logic, which only then became an issue, also did not come out until some time after our papers had been published." [74]

### Discussie over interpolatie

**De middenterm.** Er zal nu op de wordingsgeschiedenis van Craigs Lemma worden overgegaan voorzover Beth daarmee te maken had. Wat kwam in Beths ogen het meest Beth (1953*b*) nabij? Voor Beth was dat de middenterm. In Craigs voorlopige, niet verschenen JSL-recensie[75] van Beth (1953*b*), is een globale uitwerking van interpolatie te vinden, waar Beth de middenterm in terug vond. Nu eerst Craig: [76]

"It follows from the following Lemma (proved in the reviewer's [i.e Craigs] Ph.D. thesis, Harvard 1951,[77] by parallelling the Gentzen derivation of the end sequent

[72] Brief Beth – W. Craig, 29 maart 1956.

[73] Brief Craig – J.W. Dauben, 18 december 1990 (opgaaf door Dauben en opgenomen in Dauben (1995), pp. 220–221).

[74] De equivalentie van interpolatie met 'joint consistency' zal moeten wachten tot de behandeling van Robinsons stelling.

[75] Craig (1956) is een latere versie van de recensie.

[76] Citaat is een toegevoegd deel aan de door Craig aan Beth opgestuurde uitgebreide, en als zodanig niet gepubliceerde, recensie; het citaat is te vinden op pp. 3(*) – 4 (p. 3(*) is een veranderde p. 3). Het citaat is niet in de latere recensie gebruikt. Alles wellicht opgestuurd tezamen met de brief Craig – Beth, 15 februari 1956.

[77] Craig (1951) is door de schrijver dezes nergens aangetroffen en dus niet geraadpleegd. Gezien Craigs verwijzing is het wellicht van belang Craigs vroegere resulaten uit 1951 tegen die van Beth uit 1953 af te wegen.

$F \to G$ from a mid sequent $F' \to G'$ by a derivation of $U \to G$ from a mid sequent $U' \to G'$):

If $\vdash F \to G$, then there is a $U$ such that $\vdash F \to U$ and $\vdash U \to G$ and such that, with the possible exception of the identity sign, all predicates occurring in $U$ occur in both $F$ and $G$. For suppose that $\vdash (A \wedge B) \to (a(x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow b(x_1, \ldots, x_k))$, where $B$ is like $A$ except for containing $b$ exactly where $A$ contains $a$. Then

1. $\vdash (A \wedge a(x_1, \ldots, x_k)) \to (B \to b(x_1, \ldots, x_k))$ and
2. $\vdash (B \wedge b(x_1, \ldots, x_k) \to (A \to a(x_1, \ldots, x_k)$.

   By 1 and the Lemma, there is a $U$ containing neither $a$ nor $b$ such that

3. $\vdash A \wedge a(x_1, \ldots, x_k) \to U$ and also $\vdash U \to (B \to b(x_1, \ldots, x_k))$.

   By 2, the Lemma, and the symmetry of $A$ and $B$ in $a$ and $b$, for the same $U$ also

4. $\vdash U \to (A \to a(x_1, \ldots, x_k))$.
   By 3 and 4, $\vdash A \to (U \leftrightarrow a(x_1, \ldots, x_k))$. Similary, if $H'$ is like $H$ except for containing $b$ exactly where $H$ contains $a$ and if $\vdash (A \wedge B) \to (H \leftrightarrow H')$, then there is a $U$ containing no $a$ such that $\vdash A \to (U \leftrightarrow H)$. Thus the results of this paper apply to an arbitrary formula $H(x_1, \ldots, x_k)$ in place of $a(x_1, \ldots, x_k)$"

De crux van het bewijs was volgens Beth bij zowel Craig alsook hemzelf toch wel sterk op elkaar gelijkend: [78]

"I think the method of the proof used in my paper is, in principle, closely related to yours. In a letter to Feys of february 12th 1955 I made the following remark on an article by Ladrière on 'Le théorème fondamental de Gentzen': [79]

'On p. 378 it is said that the search for a middle term to be eliminated later, which is required in accordance with tradition, is by no means necessary. I do not all agree with this, and in my study on Padoa's method I used an aristotelian 'principle of the middle term', which can be formulated about as follows. . . .' [80]

This middle term is your $U'$, so our methods are substantially alike, though your lemma is more general." [81]

Met bovenstaande gegevens is het nu tijd om de desbetreffende passages uit de brief van Beth naar Feys te geven: [82]

"Mag ik u in dit verband een opmerking voorleggen naar aanleiding van het artikel van Ladrière over 'Le théorème fondamental de Gentzen'?[83] Op p. 378 wordt daar gezegd dat het, volgens de traditie onmisbare, zoeken naar een middelterm, die vervolgens geëlimineerd wordt, in het geheel niet noodzakelijk is. Ik ben het daar in het geheel niet mee eens, en heb zelf in mijn studie over de methode van Padoa gebruik gemaakt van een aristotelisch 'principe van de middenterm', dat ongeveer als volgt kan worden geformuleerd.

---

[78] Brief Beth – W. Craig, 3 februari 1956.

[79] Her en der is al van deze brief aan Feys gebruik gemaakt. Zie in dit verband ook Beth (1959*b*), p. 293. Het citaat heeft betrekking op het aan R. Feys opgedragen (Beth 1955*a*).

[80] 'as follows . . . ': dit werd door Beth hier niet verder uitgewerkt. Zie voor de rest de al eerder geciteerde brief Beth – R Feys, 12 februari 1955.

[81] $U'$ is de interpolant van Craig. Beth gebruikte in zijn tekst $U'$ vanwege de context. Binnen de context van de bewerking wisselt de interpolant nogal eens, soms $U$, soms $U'$, dan weer eens een andere letter.

[82] Brief Beth – R. Feys, 12 februari 1955.

[83] (Ladrière 1951).

Onderstel dat uit zekere premissen $U, U', \ldots$ afleidbaar is de conclusie: $\forall x \forall y \cdots \forall z$ $(A(x, y, \ldots, z) \leftrightarrow B(x, y, \ldots, z))$; dan zijn steeds subformules $M, M', \ldots, N$ van de premissen te vinden, zodanig dat de intermediaire premissen $A(\ldots) \leftrightarrow M, M \leftrightarrow M', \ldots, N \leftrightarrow B(\ldots)$ óók uit de premissen afleidbaar zijn. In het paradigma in mijn 'Remarks on natural deduction' zijn deze intermediaire premissen bijvoorbeeld: $A(a) \leftrightarrow \exists x A(x), \exists x A(x) \leftrightarrow \forall y B(y)$, en $\forall y B(y) \leftrightarrow B(b)$.[84]

Of dergelijke premissen in deze vorm ook in de formele afleiding daadwerkelijk optreden, hangt ervan af, welke formalisering van de predicatenlogica men kiest.

In het systeem $\mathcal{F}$ (en dus ook in de systemen van Gentzen c.s.) treden de intermediaire conclusies niet expliciet op, maar dat is m.i. onwezenlijk.[85]

Wezenlijk is m.i. dat men, indien men eenmaal de subformules $M, M', \ldots, N$ van $U, U', \ldots$ gevonden heeft, de gevraagde afleiding in elke bruikbare formalisering effectief kan neerschrijven."

Hoe komt men aan de middenterm? In een eerste brief werden door Craig de volgende punten (gecombineerd semantisch en syntactisch) hiertoe aangedragen: [86]

"Consider a sentence $A(a, t_1, \ldots, t_l, \ldots)$ of elementary logic and a formula $H(a; y_1, \ldots, y_m)$, such that given any domain $\mathtt{S}$, any $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_l, \ldots$ and any $H \subseteq S^m$, there is at most one model $(\mathtt{S}, \mathbf{a}, \mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_l, \ldots)$ of $A(a, t_1, \ldots, t_l, \ldots)$ such that the value (interpretation) of $\hat{y}_1 \cdots \hat{y}_m\ H(a; y_1, \ldots, y_m)$ is $H$.[87] More briefly, $a$ is implicitly defined with respect to $A$ in terms of $t_1, \ldots, t_l$ and $H$. Then $\vdash (A \wedge B \wedge \forall y_1 \cdots \forall y_m$ $(H(a \leftrightarrow H(b))) \rightarrow (a(x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow b(x_1, \ldots, x_k))$, where $A$ and $B$ are symmetric in $a$ and $b$, and similarly $H(a)$ and $H(b)$. Does it follow that there is a $U$ composed of $t_1, \ldots, t_l$, and $H(a; y_1, \ldots, y_m)$ such that $A \vdash U \leftrightarrow a(x_1, \ldots, x_k)$?"

Beth antwoordde hierop: [88]

"It seems that the question in your letter can be answered positively, as follows. Let us add to $A$ a second axiom $h(\ldots) \rightarrow H(\ldots)$, $h$ being an m-termed predicate. By your suppositions $h$ is implicitly defined with respect to $A \wedge A'$ ($A'$ being the second axiom) in terms of $h$ and the t's. If $U(\ldots)$ is its definiens, then clearly $A \wedge A'$ entails $a \rightarrow U(H, \ldots)$, so $A \rightarrow ((h \rightarrow H) \rightarrow (a \rightarrow U(h, \ldots)))$ is a logical thesis. Now substitute $H$ for $h$. Clearly $A \rightarrow (a \rightarrow U(H, \ldots))$ is a logical thesis, so $A$ entails $a \rightarrow U(H, \ldots)$."

**Functionele volledigheid.** Men kan ook zeer in het algemeen tegen Beths en Craigs resultaten aankijken. Dit gebeurde in Craigs beschouwing van functionele volledigheid gebaseerd op Beth en hemzelf. Aanvankelijk was dit bestemd voor de recensie, maar Beths al gememoreerde waarschuwing had tot gevolg dat het door Craig samen met de brief van 24 januari 1956 aan Beth opgestuurde

[84] Remarks...: (Beth 1955*a*).

[85] 'systeem $\mathcal{F}$': zie de supplementen.

[86] Brief W. Craig – Beth, 24 januari 1956; dit was de eerste brief van Craig naar Beth uit de briefwisseling over interpolatie.

[87] Met $\hat{y}_1 \cdots \hat{y}_m\ H(a; y_1, \ldots, y_m)$ wordt de (m-plaatsige) abstractie van de formule H bedoeld, $\hat{y}$ als abstractor, vergelijk $\lambda y_1 \cdots \lambda y_m(\ldots)$ in combinatorische gevallen; $y_1$ t/m $y_m$ zijn dan als vrije variabelen te beschouwen.

[88] Brief Beth – W. Craig, 30 januari 1956.

manuscript van de recensie meer omvatte dan de uiteindelijke recensie (Craig 1956): [89]

"Using related methods one can generalize the results of this paper [(Beth 1953*b*)] to arbitrary formulas $G, H_1, \ldots, H_p \ldots$ as follows: Suppose that any two models $(\mathtt{S}, \mathbf{a}, \mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_l, \ldots)$ and $(\mathtt{S}, \mathbf{a}', \mathbf{t}'_1, \ldots, \mathbf{t}'_l, \ldots)$ of $A$ which agree in the interpretation of $\hat{y}_1 \cdots \hat{y}_{r_1} H_1(y_1, \ldots, y_{r_1}), \ldots, \hat{y}_1 \cdots \hat{y}_{r_p}\ H_p(y_1, \ldots, y_{r_p}), \ldots$ also agree in the interpretation of $\hat{x}_1 \cdots \hat{x}_q\ G(x_1, \ldots, x_q)$.

More briefly, suppose that $G$ is defined implicitly with respect to $A$ in terms of $H_1, \ldots, H_p, \ldots$. Then there is a formula $U$ composed only of $H_1, \ldots, H_p, \ldots$ such that $A \vdash G(x_1, \ldots, x_q) \leftrightarrow U$, so that $U$ defines $G$ explicitly with respect to $A$ in terms of $H_1, \ldots, H_p, \ldots$.

Thus any first order system $\Delta$ may be regarded functionally complete." [90]

Volgens Beth verliep dit als volgt: [91]

"Let us consider the following theorem: let $a, t_1, \ldots, t_k, t_{k+1}, \ldots, t_n$ be all terms occurring in $A$. Then, if $a$ is implicitly defined by $t_1, \ldots, t_k$ alone with respect to $A$, then $a$ is explicitly definable by these terms alone. This is a special case of the result in your second letter, but from this special case the general statement can be derived by the method in my first letter.[92] In this specialised form, the result is not only more easily understood, but also its importance seems to me more obvious. It very often occurs, that we should like a defined term $a$ in a theory with primitive terms $t_1, \ldots, t_n$ to be definable in some of the $t$'s alone."

Door Craig werd, als een volgende en afsluitende stap, dit alles omschreven als een algemene eigenschap van elementaire logica: [93]

"This result may be regarded as a functional completeness of arbitrary first-order systems $\mathtt{A}$, since any $\hat{x}_1 \cdots \hat{x}_q\ G(x_1, \ldots, x_q)$ which, with respect to $\mathtt{A}$, is an implicit function of $\hat{y}_1 \cdots \hat{y}_{r_1}\ H_1(y_1, \ldots, y_{r_1}), \ldots, \hat{y}_1 \cdots \hat{y}_{r_p}\ H_p(y_1, \ldots, y_{r_p})$ (and the underlying domain) can also be expressed as an explicit function.' Of zoals later functioneel volledig in Craig (1957*c*), p. 269, omschreven werd: "Any functional relationship which obtains between concepts that are expressible in the system is itself expressible and provable in the system."

**Beths kwalificatie van Craigs Lemma.** Beth vond de bewijsmethode bij Craig beter en duidelijker dan die van hemzelf: [94] "As far as I see, the connections between my work and Craig's are very clear. My original proof of my result on Padoa's method.[95] and also the proof which appears in 'L'existence en mathématiques',[96] was rather badly stated. The idea underlying these proofs is

[89] Citaat uit p. 3 van de uitgebreide, maar niet in zijn oorspronkelijke staat verschenen, recensie; waarschijnlijk toegevoegd aan de brief Craig – Beth, 15 februari 1956.

[90] Op het begrip 'functionally complete', en wat men daarmee doen kan, zal in deze paragraaf nog worden teruggekomen.

[91] Brief Beth – W. Craig, 3 februari 1956.

[92] Met 'your second letter' wordt de brief W. Craig – Beth, 1 februari 1956 bedoeld. Met 'my first letter': wordt de brief Beth – W. Craig, 30 januari 1956 bedoeld.

[93] Brief W. Craig – Beth, 1 februari 1956, pp. 2 – 3.

[94] Brief Beth – R.C. Lyndon, 20 juli 1958.

[95] (Beth 1953*b*).

[96] (Beth 1956*b*).

stated very clearly (and independently) in Craig's Lemma, and hence my result can be proved very easily if this Lemma is explicitly applied."

Beth zelf zou ook vereenvoudigingen ontwikkelen, maar dan over de tableaus (men kan er over twisten of tableaus een syntactische dan wel een semantische vereenvoudiging opleveren). Op 29 maart 1956 meldde hij al aan Craig: "Meanwhile I have found that both my own result and your results can be proved very conveniently by means of semantic tableaux." Pas veel later zou Beth nader op de mogelijkheden om Craigs resultaat door middel van zijn semantische tableaumethoden af te leiden publicitair ingaan, en daarvan een bewijs leveren.[97]

### Lyndon: preservatie

Een generalisatie op Craigs interpolatiestelling werd geformuleerd in Lyndon (1957), tijdens een zomerconferentie van de ASL aan de Cornell University. Ook Beth nam aan die zomerconferentie deel.[98] In 1959 zijn naar aanleiding hiervan door Lyndon een drietal artikelen gepubliceerd in de Pacific Journal of Mathematics. Op Lyndons lezing van 1957 werd door Craig ter plaatse in zijn lezing gereageerd — blijkbaar wist hij al wat komen zou. Om verschillende redenen is de inbreng van Lyndon van belang. Hij is al eerder geciteerd in verband met het geschil met betrekking tot een semantische of bewijstheoretische aanpak der problemen.

Het bewijs van Lyndon verliep anders dan bij Beth en Craig. De context, waarin hij tot interpolatie kwam, was ook anders: [99]

"In studying the formal structure of sentences whose validity is preserved under passage from an algebraic system to a homomorphic image of the system, we have had occasion to use a lemma from formal logic.[100] A proof of this lemma, our Interpolation theorem, can be given within the theory of deductive inferences, as formalized by Gentzen. [...] Moreover, the use of any formalized system of deductive logic seems to extent alien to the primarily algebraic nature of our intended application.

Therefore we give here a proof of the Interpolation Theorem that lies within the theory of models: our arguments are as far as possible in the spirit of abstract algebra, and, in particular, borrow nothing from formal logic beyond an understanding of the intended meaning."

Een resultaat hiervan is de bewering Lyndon (1959*c*), p. 143: "A sentence of the predicate calculus is preserved under homomorphisms if and only if it is equivalent to a positive sentence." In Lyndon (1959*b*) heeft men te maken met een volgende formulering van de te gebruiken taal: atomaire formules verkrijgt men door het inzetten van termen op de argumentplaatsen van relatiesymbolen. Een *positieve formule* wordt gevormd vanuit atomaire formules door middel van conjunctie, disjunctie en universele en existentiële quantificatie, maar zonder

[97](Beth 1959*b*), (Beth 1962*a*).

[98]Alle definitionisten waren aanwezig: Robinson, Craig, Beth, Tarski en Lyndon.

[99]Lyndon (1959*a*), p. 129.

[100]Preservatie-eigenschappen onder homomorfismen, en daarbij opnieuw de interpolatiestelling (p. 144): zie (Lyndon 1959*c*)]. Voor preservatie onder subdirect product, zie Lyndon (1959*b*).

gebruik van negatie (en ook niet van implicatie en equivalentie). Een relatiesymbool treedt positief op, indien het valt onder het bereik van een even aantal negaties, negatief voor een oneven aantal. De gebruikte taal is nauw verweven met bepaalde algebraïsche systemen. Als volgt formuleerde Lyndon zijn *Interpolatiestelling*: [101]

> "If $A$ and $B$ are sentences of the predicate calculus, and $A$ implies $B$, then there exists a sentence $C$ such that $A$ implies $C$ and $C$ implies $B$, and that a relation symbol occurs positively (negativily) in $C$ only if it occurs positively (negatively) in both $A$ and $B$."

Craig komt volgens Lyndon (1959*a*), p. 130 als volgt weer te voorschijn: [102] "This theorem is a generalization of a result of W. Craig [3, 4][103]; Craig's lemma is obtained from it by suppressing the distinction between positive and negative sentences. As indicated, our first proof of the Interpolation Theorem used the Gentzen calculus; it did not differ essentially from Craig's proof, at that time unpublished, of this lemma." En evenzo volgens Beth: [104] "This interpolation theorem is an important extension of Craig's Lemma, which results if the distinction between positive and negative occurences is suppressed."

Het antwoord van Craig (1957*a*), p. 178, op Lyndon (1957) luidde: "In a symmetric K-deduction[105] the set of predicate symbols occurring positively (negatively) (cf. [3]) can change only in that middle segment which consists of the matrix changes.[106] Thus the proof of the initial Interpolation Lemma, and also that of a stronger interpolation lemma discovered and used by Lyndon [3], is reduced to that for the quantifier-free case."

Hierop borduurde Vaught in zijn correspondentie met Beth gedurende 1958 voort. Dit was niet zo vreemd, want volgens de inleiding van Craig (1957*a*) werd hier eigenlijk al indirect melding van bemoeienissen van Vaught gemaakt. Vaught: [107]
"The second aspect is that I include proofs of some of Lyndon's results. Indeed, I establish a certain theorem $T$ closely related to a result of Craig (in his Ithaca notes) from which, as Craig remarks, all the various interpolation theorems of himself and Lyndon can be obtained by purely tautological [...? ...] methods.[108] All of these have a defect, compared to your [Beths] work, in that it applies only to prenex sentences; on the other hand, this is of course not a defect, but essential, in the case of Lyndon's work."

Lyndon is een van de eersten bij wie de algebraïsche aanpak van dergelijke stellingen optreedt, terwijl deze stellingen niet het hoofddoel zijn van het

[101] Lyndon (1959*c*), p. 144.
[102] Omgekeerd kan Lyndons lemma heel eenvoudig uit dat van Craig worden afgeleid.
[103] Craig [3]= (Craig 1957*b*), Craig [4]= (Craig 1957*c*).
[104] (Beth 1960*e*).
[105] 'K-deduction', zie Craig (1957*a*), p. 176, 178, e.v.: Gentzen-achtige structurele en operationele regels.
[106] 'cf.[3]', 'Lyndon [3]': bedoeld is (Lyndon 1957).
[107] Brief R.L. Vaught – Beth, 24 maart 1958, (Seattle, Washington).
[108] 'Ithaca notes': bedoeld wordt (Craig 1957*a*).

onderzoek. Dit is bij de nu volgende sectie, gewijd aan de consistentiestelling van Robinson, anders: daar wordt van algebra als hulpmiddel gebruik gemaakt. Lyndon valt meer binnen de werklijn van de nog te bespreken varianten op de definitiestelling door Kueker, Chang, Makkai en Svenonius. Ook bij hen zijn interpolatie- en definitiestelling een bijproduct van onderzoek naar algebra, functies en algemene eigenschappen van taal en logica. Van hun bezigheden zullen later enkele voorbeelden volgen.

### 5.3.3 Consistentiestelling

**Robinson versus Beth**

**Robinsons stelling** Na de stellingen van Beth en Craig komen wij nu toe aan de derde stelling in het rijtje van definitiestelling met generalisaties en uitbreidingen. Op 19 augustus 1955 verzond A. Robinson een manuscript naar Beth. Robinson vroeg aan Beth om dit te plaatsen in *Indagationes Mathematicae*. Door middel van A. Heyting, die lid was van de sectie Wetenschappen van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen lukte dit.[109]

In Robinson (1956) werd i.t.t. Craig en Beth modelmatig te werk gegaan.[110] Robinson (1956) bestaat uit de volgende onderdelen. Een inleidend deel over al behaalde resultaten en de op de achtergrond gebruikte stellingen. Vervolgens zijn eigen stelling en tenslotte de afleiding uit zijn eigen stelling 2.9 die van Beth in Robinsons §3. Als toegift wordt er een definitiestelling voor de propositielogica gegeven in Robinsons §4. Alles draait om de *Consistentiestelling*:

> ○ Robinson (1956)-*stelling 2.9*: "Let $\mathtt{K}$ be a complete set of sentences and let $\mathtt{K}_0$, $\mathtt{K}_1$ be two consistent sets of sentences which include $\mathtt{K}$, $\mathtt{K} \subseteq \mathtt{K}_0$, $\mathtt{K} \subseteq \mathtt{K}_1$ such that all the relations and constants which are common to $\mathtt{K}_0$ and $\mathtt{K}_1$, are included in $\mathtt{K}$. Then $\mathtt{K}_0 \cup \mathtt{K}_1$ is consistent [en heeft derhalve een model]."

Wellicht wordt als volgt in Keisler (1971) bovenstaande stelling iets duidelijker geformuleerd: Laten $L_0$ en $L_1$ twee uitbreidingen van de taal $L$ zijn met $L_0 \cap L_1 = L$. Laat $T$ een volledige theorie in $L$, $A$ een formule uit $L_0$ en $B$ een formule uit $L_1$ zijn. Als $T \cup \{A\}$ en $T \cup \{B\}$ beide consistent, dan is $T \cup \{A, B\}$ consistent. Met compactheid erbij is Craigs interpolatie equivalent aan Robinsons 'consistency'. Op p. 115 van Robinson (1963) wordt aangevoerd, dat "The following theorem [Craigs interpolatie] which is essentially equivalent to the consistency lemma differs from it by its syntactical character. Op p. 115, 116 van Robinson (1963) wordt het bewijs vervolgens uitgevoerd. Op p. 137 wordt in een historische noot vermeld "The fact that 5.1.6 [joint consistency] entails 5.1.8 [interpolatie] has been pointed out to the author by several logicians

[109]Beth zelf was lid van de sectie Letteren, brief Beth – A. Robinson, 22 augustus 1955.
[110]Een verder onderscheid tussen Robinson en Beth was dat Robinson gebruik maakte van de diagrammethode zoals in Robinson (1956)-stelling 2.5.

from Warsaw and Berkeley." [111] Craigs interpolatie en Robinsons 'consistency' impliceren elk afzonderlijk Beths definieerbaarheid.[112] Volgens Keisler (1971) is compactheid essentieel voor bovenstaande stelling van Robinson en geldt deze stelling niet meer in $L_{\omega_1\omega}$ vanwege het ontbreken van de compactheidsstelling aldaar. Wel geldt Robinson in een verzwakte vorm (Keisler (1971), p. 22). Ook Beths definieerbaarheid kent een verzwakte vorm.

Aan Robinsons hoofdresultaat gaat een aantal stellingen vooraf. De twee belangrijkste zijn als volgt. In de eerste plaats Robinsons stelling 2.1; dit is een stelling waarvan Robinsons consistentiestelling 2.9 een generalisatie is.

> ◦ Robinson (1956)-*stelling 2.1*: "Let $\mathtt{K}$ be a complete set of sentences and let $\mathtt{K}_0$, $\mathtt{K}_1$ be two consistent sets of sentences which include $\mathtt{K}$, $\mathtt{K} \subseteq \mathtt{K}_0$, $\mathtt{K} \subseteq \mathtt{K}_1$ such that $\mathtt{K}_0$ does not include any individual constants other than the constants of $\mathtt{K}$ (but may include additional relations) while $\mathtt{K}_1$ does not include any relations other than the relations of $\mathtt{K}$ (but may include additional constants). The set $\mathtt{K}_0 \cup \mathtt{K}_1$ is consistent."

Van Robinsons volgende stelling 2.6 is Robinsons consistentiestelling 2.9 een direct gevolg.

> ◦ Robinson (1956)-*stelling 2.6*: "Let $\mathtt{K}$ be a complete set of sentences and let $A_1$ and $A_2$ be two sentences such that all relations and constants which occur in both $A_1$ and $A_2$, occur in $\mathtt{K}$. Suppose that $A_1$ and $A_2$ are, separately, consistent with $\mathtt{K}$. The conjunction $A_1 \wedge A_2$ also is consistent with $\mathtt{K}$."
>
> ['it should be mentioned that 2.6 is not valid without the condition that $\mathtt{K}$ is complete.']

**Beths claims.** Beth had als antwoord op de brief van Robinson van 19 augustus 1955 zo zijn op- en aanmerkingen. Volgens hem was een aantal stellingen te relateren aan Beth (1953*c*): [113]

1. "Your theorem 1.6 is presupposed in theorem 5.2 of my paper on 'Some Consequences of the theorem of Löwenheim – Skolem – Gödel – Malcev'. Henkin told me that this group of theorems is useful in view of algebraic embedding theorems, and therefore I believe they might be of some interest to you."
2. "Your theorems 2.1–2.6 seem to be related to my theorems 2.1–2.5 in the above mentioned paper. It might be of some interest to combine the two groups of results in order to obtain still more."
3. "The difficulty with methods based upon the Skolem form theorem is that they do not carry over the case of intuitionistic logic. I have a very simple method for proving the completeness of first order logic and related results, and which carries over to intuitionistic logic."

[111] De informatie over de rol van Robinson m.b.t. equivalentie van 'joint consistency' met interpolatie is afkomstig uit de e-mail W. Hodges – P. van Ulsen, 12 maart 2000. Hodges eindigt met: "I remember that in the mid 1960s people were amused that both directions need compactness."

[112] (Keisler 1971), (Barwise & Feferman 1985).

[113] Brief Beth – A. Robinson, 22 augustus 1955. Hernummering door de schrijver van de aangedragen punten; 1 hier is 2 bij Beth etc. Robinsons stelling 1.6: zie de volgende sectie.

Robinsons generalisatie 2.9 valt buiten de claims van Beth, maar een deel van het voorwerk van Robinson (1956), i.h.b. (Robinson 1956)-2.1 en (Robinson 1956)-2.6, loopt dan wel ten dele op met het al eerder gepubliceerde artikel van Beth.

Als eerste kwam Robinsons stelling 1.6 aan de beurt. Deze stelling is een onderdeel van een aantal punten, waarmee Robinson zijn uitgangspositie vastlegde.

> ◦ Robinson (1956)-*stelling 1.6*: "Let $A$ be a sentence of class (`AE`) which holds in a monotonic set of models $\{\mathcal{M}_\nu\}$. Then $A$ holds also in the union $\mathcal{M} = \cup\{\mathcal{M}_\nu\}$." [114]

Volgens Beth was Robinson (1956)-stelling 1.6 al terug te vinden in Beth (1953*c*)-stelling 5.2: [115]

"In addition, the suppositions concerning the expressions in the set $\Delta$ [uit Beth (1953*c*)-2.4: $\Delta$ is een volledig en consistent systeem uit de elementaire logica] can also be weakened. Instead of requiring these expressions to be closed and to have only prenex universal quantifiers, it is sufficient to require that they are closed and in the satisfaction-theoretic normal form." [116]

Deze stelling was een generalisatie van een door Beth gevonden equivalent van het keuze-axioma. Beth haalde dit equivalent uit bepaalde relaties op ketens. Het is niet gelijk aan het principe van Hausdorff, maar lijkt er wel veel op.[117] Robinson dacht er het volgende van: [118] "I think it is clear from my paper that I regard 1.6 merely as an auxiliary result. Actually the idea used in its very simple proof can be found already in one of Skolem's papers on the Skolem- Löwenheim theorem." Op het antwoord van Robinson had Beth slechts op te merken: [119] "My remark on your 1.6 was only meant to point out the connections between your paper and mine." Hiermee gaf ook Beth min of meer aan dat zekere delen van de werkomgeving van de één terug te vinden waren bij de ander. Het is nu evenwel tijd om dergelijke schermutselingen verder te laten voor wat ze zijn en het eigenlijke werk te beschouwen. Waar het om draaide was Beths stelling 2.4.

> ◦ (Beth 1953*c*)-*stelling 2.4*: "Let $\Delta$ be any complete and consistent sytem of the first-order predicate calculus with identity. Then there is a model $\mathcal{M}_0$ of $\Delta$ which is complete in the following sense: for any set $\Gamma$ of expressions of the first-order predicate calculus with identity containing only the free variable $x$ (and containing no predicate or individual parameters which do not occur in $\Delta$), the set $\mathcal{M}_0(\Gamma)$ of those elements of $\mathcal{M}_0$ which satisfy all expressions in $\Gamma$

[114] Class (`AE`): $A$ een $\forall\exists$-zin: bedoeld wordt '$A = (\forall \cdots \forall\exists \cdots \exists(\ldots)$'-zin.
Een familie van modellen $\mathcal{F} = \{\mathcal{M}_\nu\}$ heet *monotoon*, als voor alle $\mathcal{M}_\mu, \mathcal{M}_\kappa \in \mathcal{F}$ geldt dat $\mathcal{M}_\kappa$ is een extensie of een reductie van $\mathcal{M}_\mu$.

[115] Brief Beth – A. Robinson 22 augustus 1955.

[116] (Skolem) Proof-theoretic normal form: als bewijstheoretische normaalvorm; en satisfaction-theoretic normal form: als semantische normaalvorm. Beide te vinden in noot in hoodstuk Semantiek, sectie Keuze-axioma met verzwakkingen, onder de Maximaalprincipes.

[117] Zie hoofdstuk Semantiek, sectie Keuze-axioma met verzwakkingen, Maximaal-principes.

[118] Brief A. Robinson – Beth, 31 augustus 1955, (Toronto), p. 1.

[119] Brief Beth – A. Robinson, 5 september 1955.

> will be empty if and only if the set $\Gamma$ is inconsistent with $\Delta$, that is, if and only if, for every model $\mathcal{M}$ of $\Delta$, the corresponding set $\mathcal{M}(\Gamma)$ is empty."

Beths beweringen betreffende zijn stelling 2.4 maakte bij Robinson de nodige kritiek los op deze stelling en de aanloop daartoe d.m.v. Beths stellingen 2.1, 2.2 en 2.3. [120] Beths punt 2.3 uit Beth (1953*c*) speelde een belangrijke rol:

"Now let `I` be a set of indices such that the family $\mathcal{E}$ of all sets $\Gamma_u$ ($u$ in `I`) consists of all sets $\Gamma$ which are consistent with $\Delta$. We consider the system $\Theta$ which results from $\Delta$ by adding all axioms $\exists x\ a_u(x)$ and all axioms $\forall x\ (a_u(x) \rightarrow A(x))$ (where u is in I, $A(x)$ is in $B_u$, $a_u$ is a predicate parameter not yet occurring in $\Delta$, and $a_u \neq a_v$ for $u \neq v$).

Let us suppose that there is no model for the system $\Theta$. Then $\Theta$ would be inconsistent. Hence there would be a finite subset $\{u_1, u_2, \ldots, u_m, \ldots, u_p\}$ of `I` and for each $m \leq p$, a finite subset $\{A_{m_1}(x), A_{m_2}(x), \ldots, A_{m_n}, \ldots, A_{m_{q(m)}}(x)\}$ of $\Gamma_{u_m}$, such that $\bigvee_{m \leq p} ((\bigwedge_{n \leq q(m)} \forall x(a_{u_m}(x) \rightarrow A_{m_n}(x))) \rightarrow \forall x\ \neg a_{u_m}(x))$ [ = formule $A^*$ uit het nog volgende commentaar van Robinson] is derivable from $\Delta$. In view of the definition of the sets $\Gamma_u$, and on account of 2.1 this cannot be the case. So we have proved: [(Beth 1953*c*)-stelling 2.4]."

Volgens Robinson zaten er de nodige gaten in Beths bewijs en kwam tenslotte tot de volgende conclusie: [121] "The impossibility of deriving $A^*$ [d.w.z. $\bigvee_{m \leq p} ((\bigwedge_{n \leq q(m)} \forall x(a_{u_m}(x) \rightarrow A_{m_n}(x))) \rightarrow \forall x\ \neg a_{u_m}(x))$] from $\Delta$ also follows without difficulty from 2.6 of my paper 'On consistency', as I am to explain now. First of all, we may generalise 2.6 (my paper)." [122] Robinson komt nu op het punt waar hij de combinatie met de definitiestelling uit de doeken gaat doen. Nogmaals, de consistentiestelling wordt door Robinson gekarakteriseerd als een generalisatie van Robinson (1956)-stelling 2.1. Voor het zover is nu eerst de reactie van Beth op Robinsons gedachten over Beth (1953*c*)-stelling 2.4: [123]

"I agree that my proof of 2.4 is very sketchy and that your argument fills the gap. However, I had in mind a different approach which explains the form given to the criterion of [(Beth 1953*c*)-] 2.1.

My idea was as follows. For any finite set $\Gamma$, there is in every model of $\Delta$ a suitable value $V(a)$ for the parameter $a$, namely, the intersection of the sets $V(A_m)$. Hence there is also in every model of $\Delta$ a system of suitable values $V(a_{u_m})$. If we give each parameter $a_{u_m}$ this particular value, the disjunction in [(Beth 1953*c*)-] 2.3 (Formula $A^*$ in your letter) is clearly false.[124] Hence this formula is not derivable from $\Delta$."

[120] Brief A. Robinson – Beth, 31 augustus 1955.

[121] Brief A. Robinson – Beth, 31 augustus 1955, p. 3. Helaas is het vanwege de omvang niet mogelijk de volledige discussie, gecombineerd met ter zake doende stellingen van Beth en Robinson, hier op te voeren.

[122] Zoals al vermeld vormt Robinson (1956)-stelling 2.6 de direct aan de consistentie voorafgaande stap.

[123] Brief Beth – A. Robinson, 5 september 1955.

[124] $A^*$, d.w.z. $\bigvee_{m \leq p} ((\bigwedge_{n \leq q(m)} \forall x(a_{u_m}(x) \rightarrow A_{m_n}(x))) \rightarrow \forall x\ \neg a_{u_m}(x))$

**Relatie tussen consistentie- en definitiestelling**

Aan alle moeilijkheden komt volgens Robinson een eind, wanneer men uitgaat van Robinson (1956)-2.6. Hiertoe ontwikkelde Robinson in zijn brief de stellingen Robinson I — IV. Als eerste is een generalisatie van Robinson (1956)-2.6 aan de beurt: [125] "First of all, we may generalise 2.6 (my paper[126] by repeated application from 2 to $p$ as to obtain theorem I.":

> ◦ Robinson — *stelling I*: [127] "Let $\mathtt{K}$ be a complete set and let $\{X_1, \ldots, X_p\}$ be a set of sentences such that all relations and constants which occur in at least two of the $X_j$ occur also in $\mathtt{K}$. Suppose that the $X_j$ are separately consistent with $\mathtt{K}$. [Then] the conjunction $X_1 \wedge \cdots \wedge X_p$ also is consistent with $\mathtt{K}$." [Robinson: "Note that 'relations and constants' are, in your terminology 'predicate and individual parameters'."]

Robinson voorzag al zijn stellingen van commentaar, waarin hij lijnen trok naar Beths stellingen, zo ook op zijn stelling I: [128] "By passing to the negations, we may also express the above result as a theorem on deducibility."

> ◦ Robinson — *stelling II*: [129] "Let $\mathtt{K}$ be a complete set of sentences and let $\{Y_1, \ldots, Y_p\}$ be a set of sentences such that all relations and constants which occur in at least two $Y_j$ occur also in $\mathtt{K}$. Suppose that $Y_1 \vee \cdots \vee Y_p$ is deducible from $\mathtt{K}$. Then at least one of the $Y_j$ is deducible from $\mathtt{K}$."

In stelling II werd volgens Robinson Beths stelling 2.4 afgehandeld: [130] "This provides an immediate proof of your 2.4 with [Beths] $\Delta$ for [Robinsons] $\mathtt{K}$ and [Robinsons] $Y_i$ for the disjuncts of [Beths] $A^*$. For none of the disjuncts of $A^*$ are deducible from $\Delta$, in view of consistency of the $\mathtt{B}_{u_m}$ with $\Delta$.[131]

Since the above presupposed the proof of 2.6 of my paper we may ask whether we have gained anything by this implicit implication. The answer is —yes.

For it is no longer necessary to assume that the predicate and individual parameters of the $\Gamma_u$ are in $\Delta$. Thus we have proved (in your terminology)." . . . de volgende stelling:

> ◦ Robinson — *stelling III*: [132] "Let [Beths] $\Delta$ be any complete and consistent system of the first order predicate calculus (with or without identity) and let $\{\Gamma_u\}$ be a set of sets of one-place predicates such that each $\Gamma_u$ is consistent with $\Delta$ and such that any predicate or individual parameter which occurs in at least two $\Gamma_u$ occurs in $\Delta$. Then there exists a model $\mathcal{M}_0$ of $\Delta$ for which all the sets $\mathcal{M}_0(\Gamma_u)$ are non-empty."

[125]Brief A. Robinson – Beth, 31 augustus 1955, p. 3.
[126](Robinson 1956).
[127]Brief A. Robinson – Beth, 31 augustus 1955, p. 3–4.
[128]Brief A. Robinson – Beth, 31 augustus 1955, p. 4.
[129]Brief A. Robinson – Beth, 31 augustus 1955, p. 4.
[130]Brief A. Robinson – Beth, 31 augustus 1955, p. 4.
[131]'disjuncts of $A^*$', bedoeld is: $\bigvee_{m \leq p} ((\bigwedge_{n \leq q(m)} \forall x(a_{u_m}(x) \rightarrow A_{m_n}(x))) \rightarrow \forall x \neg a_{u_m}(x))$.
[132]Brief A. Robinson – Beth, 31 augustus 1955, p. 4.

Commentaar van Robinson op III: [133] "It has be convenient, for the purpose of this discusssion, to concentrate on $A^*$.[134] Alternatively we might have proved III more directly by introducing individual parameters $d_u$ as indicated earlier and by generalising 2.9 of my paper as follows [en daarbij overgaand op Robinsons terminologie]:"

> ∘ Robinson — *stelling IV*, (de *Consistentiestelling*: [135] "Let K be a complete set of sentences and let $\{\mathtt{K}_\nu\}$ be a (finite or trans-finite) set of consistent sets of sentences which include K such that any relation or constant which occurs in at least two $\mathtt{K}_\nu$ occurs also in K. Then the set $\bigcup\{\mathtt{K}_\nu\}$ (union of $\{\mathtt{K}_\nu\}$) is consistent."

Robinson over zijn stelling IV: [136] "One might ask whether it would be possible to II above also by the artifice employed earlier, viz. by the substitution of suitable predicates of K for the relations of the $Y_j$ which are not included in K, thus avoiding the complicated argument of my paper. However, it appears that this is impossible. I can give an example of a complete set K and a sentence $X$ which contains a single additional relation $F(x)$ such that $X$ is consistent with K but the substitutions of any predicate $Q(x)$ of K for $F(x)$ yields a sentence which is inconsistent with K."

Als afsluiting Beth over Robinsons stellingen I, II en III: [137] "Your theorems I — III fully clear up the connections between your paper and mine and presumably show the way to further results."

## 5.4 Beths latere werk

### 5.4.1 Modellen en definieerbaaarheid

#### Twee, één en geen modellen

**Beths aandeel.** Met Padoa is er een tweemodellen-methode geïntroduceerd om ondefinieerbaarheid aan te tonen. Het kan met minder: de één-, zo men wil geen, modelmethode. Beth (1962*a*), p. 110, zegt er het volgende over: "Suppose we find a model $\mathcal{M}_{sub}$ of $T_{sub}$ which cannot, by any choice of a predicate $a$, be converted into a model $\mathcal{M}$ of $T$. Then again it clearly follows that the primitive notion $a$ is independent." Hier gaat men uit van een theorie $T$ met model $\mathcal{M}$ en een theorie $T_{sub}$ (met een model $\mathcal{M}_{sub}$), die een deeltheorie van $T$ is. In $T$ zit $a$, maar $T_{sub} = T \setminus \{A \mid A \in T, a \in Nls(A)\}$, dus $a \notin Nls(T_{sub}$ ($Nls(A)$ de niet-logische symbolen van $A$). Beth gaat verder: "A first example of the application of this method was discussed by the present author in 1956.[138] Its methodological background was then very thouroughly examined by K.L. de

[133]Brief A. Robinson – Beth, 31 augustus 1955, p. 4.
[134]Voor $A^*$, zie dezelfde formule als onder stelling II.
[135]Brief A. Robinson – Beth, 31 augustus 1955, p. 4–5.
[136]Brief A. Robinson – Beth, 31 augustus 1955, p. 5.
[137]Brief Beth – A. Robinson, 5 september 1955.
[138](Beth 1956*b*). In ms. E.W. Beth, *Observations sur un projet de recherche*, Réunion de travail (17-18 oktober 1960), Euratom-project, wordt de claim nog iets duidelijker gelegd:

Bouvère (1959)[139] who pointed out among other things, that by a model $\mathcal{M}_{sub}$ as described not only the independence of the primitive notion $a$, but its essential undefinability, is demonstrated." Er komen in dit citaat enkele begrippen voor die met een korte bespreking van bepaalde aspecten uit de Bouvère (1959) verklaard zullen worden. De Bouvère onderzocht o.a.:

∘ Diverse soorten van definieerbaarheid.

∘ De éénmodel-methode.

∘ De relatie tussen definieerbaarheid en onvolledigheid. Dit deed hij aan de hand van onder meer Tarski, Mostowski & Robinson (1953).

Vóór wij met de Bouvère verder gaan eerst de passage uit Beth (1956*b*), pp. 33–34, die de aanleiding tot dit alles is geweest. Beth begon met een theorie, waarin $<$ en $+1$ (opvolger) de constanten zijn (domein: de natuurlijke getallen). Beth vroeg zich af of bij toevoeging van de notie $+m$ een ongedefinieerd dan wel een gedefinieerd begrip gehanteerd werd. Hiertoe kan men de tweemodellen-methode gebruiken. Beth koos nu een andere weg: [140] "Nous appliquons une variante de la méthode de Padoa pour montrer que, tout à contraire, la notion '$+m$' est indépendente." Hiertoe gebruikte Beth de éénmodel-methode. Hij ging daartoe uit van een theorie $T$ waarin $<, +1$ en $+m$ zitten en een theorie $T_{sub} = T \setminus \{A \mid A \in T, +m \in Nls(A)\}$, dus $+m \notin Nls(T_{sub})$. Als $+m$ definieerbaar was, dan kan men de formules waarin $+m$ voorkomt, ongestraft vervangen door een pakket formules waarin $+m$ niet meer in voorkomt. Meer nog, men kan een deeltheorie $T_{sub}$ construeren met eenzelfde zeggingskracht als $T$. Maar dat betekent ook dat een model voor $T_{sub}$ uit te breiden valt tot een model van $T$ d.m.v. een toevoeging van de interpretatie van $+m$. Wij komen nu op het punt dat Beth opmerkt: "Les expressions ainsi obtenues [de uitdrukkingen in $T$ zonder $+m$] seraient des théorèmes de $T_{sub}$, étant donné que cet ensemble constitue une théorie saturée. Nous serions alors dans la situation décrite au paragraph 12, (1).[141] En vertu du théorème (3) de ce même paragraph,[142] chaque modèle $(\mathtt{S}, <')$ [143] de $T_{sub}$ fournirait donc un modèle $(\mathtt{S}, <', +')$ pour $T$, c'est-à-dire que tout modèle de $T_{sub}$ admettrait l'introduction d'une addition satisfaisant aux théorèmes de $T$. Or, il est facile de construire un modèle $(\mathtt{S}, <')$ pour $T_{sub}$, qui n'admet pas l'introduction d'une addition de ce genre." Beth moet nu een model voor $T_{sub}$ construeren dat niet vatbaar is voor zo een uitbreiding: "Soit $\mathtt{S}$ l'union de l'ensemble $\mathtt{N}$ des nombres naturels et de l'ensemble $\mathtt{E}$ des nombres entiers (nous supposons que ces deux ensembles sont disjoints ); $<'$ se confond avec l'ordre usuel dans $\mathtt{N}$ et dans $\mathtt{E}$ séparément; en outre, on a $x <' y$ pour tout $x$ dans $\mathtt{N}$ et tout $y$ dans $\mathtt{E}$." [144]

---

"Ensuite, il [Beth] a indiqué en 1956 une méthode entièrement nouvelle pour prouver l'indépendance d'une notion primitive $a$."

[139]Karel Louis de Bouvère, *1918.

[140](Beth 1956*b*), p. 34. In de citaten worden $K(T_0)$ en $K(T_1)$ vervangen door respectievelijk $T_{sub}$ en $T$.

[141]Beth (1956*b*), p. 20–21, Modèle et interprétation; punt 1.

[142]Beth (1956*b*), p. 21, théorème 3.

[143]$<'$ is de geïnterpreteerde van $<$ etc.

[144]Men kan het Beth navolgend ook met Padoa doen: "La théorie $T$ admet donc deux

Overigens draagt Beth op dezelfde bladzijde nog een geheel ander aspect aan, namelijk het verschil tussen onbeslisbaar en beslisbaar als criterium voor definieerbaar en ondefinieerbaar: is vermenigvuldiging definieerbaar door optelling? Neem wederom twee theorieën $T_1$ en $T_2$. In $T_1$ heeft men $+$ en $\cdot$, in $T_2$ geen $\cdot$, wel $+$. $T_2$ is beslisbaar (Pressburger, 1928), $T_1$ onbeslisbaar (Rosser, 1936).[145] Ook dit aspect zal later door de Bouvère onder de loep genomen worden.

**Soorten van definieerbaarheid.** Door de Bouvère (1959) is dit uitgewerkt en uitgebreid. Eerst komen zijn verschillende soorten definieerbaarheid en ondefinieerbaarheid aan de beurt. Wij gaan uit van een theorie $T$, een begrip $a$, een definitiezin $D$ en niet-logische begrippen $t_1, t_2, \ldots, t_k$; $a$ en $t_i$ lopen over relaties, operaties, functies, etc.[146] Beth (1962*a*) formuleert alles m.b.v. de axioma's van een theorie $T$, waar de Bouvère dit met $t_1, t_2, \ldots, t_k$ doet. Beth is hierdoor gemakkelijker leesbaar. Op de meeste punten zullen wij de gehele rompslomp van de Bouvère niet overnemen; de Bouvère (1959), p. 2, Beth (1962*a*), p. 107:

a. sterk definieerbaar (bewijsbaar definieerbaar): er bestaat een definitiezin $D$ voor $a$, geformuleerd met $t_1, \ldots, t_k$, $D$ is afleidbaar in $T$; $a$ heet dan geldig en expliciet definieerbaar door $t_1, \ldots, t_k$.
b. zwak definieerbaar (compatibel definieerbaar): er bestaat een definitiezin $D$ voor $a$ en $D$ is compatibel met $T$ [$D$ toegevoegd aan $T$ geeft geen tegenspraak]: $a$ heet compatibel en expliciet definieerbaar door $t_1, \ldots, t_k$.
de Bouvère (1959), p. 3, Beth (1962*a*), p. 107: Als $a$ niet geldig en expliciet m.b.v. $t_1, \ldots, t_k$ gedefinieerd kan worden, dan heet $a$ ondefinieerbaar; en als $a$ niet eens compatibel definieerbaar is, dan essentieel ondefinieerbaar. Als $a$ essentieel ondefinieerbaar is, dan is $a$ ondefinieerbaar.

Wij hebben nu volgens de Bouvère (1959), p. 4:
1. Voor $T$ consistent en $T_{sub} = T \setminus \{A \mid A \in T, a \in Nls(A)\}$. Om $a$ definieerbaar in $T$ te laten zijn is het nodig dat elk model $\mathcal{M}_{sub}$ van $T_{sub}$ slechts op één manier uitgebreid kan worden met een **a** als interpretatie voor $a$ tot een model $\mathcal{M}$ van $T$.
2. Laat $a$ definieerbaar en compatibel zijn t.o.v. $T$, dan moet er een uitbreiding $T_{ext}$ van $T$ zijn z.d.d. voor $T_{sub(ext)}$ [de gereduceerde van $T_{ext}$]: $T_{sub(ext)} = T_{ext} \setminus \{A \mid A \in T_{ext}, a \in Nls(A)\}$. Dan kan elk model $\mathcal{M}_{sub(ext)}$ van $T_{sub(ext)}$ op slechts één manier tot een model $\mathcal{M}_{ext}$ van $T_{ext}$ worden uitgebreid met **a** als interpretatie voor $a$ [(de Bouvère 1959), p. 5].

Wij gaan nu over op ondefinieerbaar en essentieel ondefinieerbaar. Als $T$ volledig is, dan vallen (1) geldig en compatibel definieerbaar samen, en evenzo (2) ondefinieerbaar en essentieel ondefinieerbaar [(de Bouvère 1959), p. 15]. Als $a$ essentieel ondefinieerbaar is relatief $T$, dan is $a$ ondefinieerbaar relatief

modèles $(\mathtt{S}', <', +')$ et $(\mathtt{S}'', <'', +'')$ que ne se distinguent que par l'addition, tandis que les domaines $\mathtt{S}'$ et $\mathtt{S}''$ et les relations d'ordre $<'$ et $<''$ sont les mêmes pour les deux modèles. Cette conclusion est d'autant plus curieuse que la notion $<$ est définissable au moyen de $+1$."
[145]Mojzesz Presburger, † 1943(?).
[146]Dit geeft bij de Bouvère (1959) de nodige haken en ogen, wij zullen daar niet op ingaan.

elke volledige en consistente uitbreiding $T_{ext}$ van $T$, mits $Nls(T_{ext}) = Nls(T)$ [(de Bouvère 1959), p. 16]. Op dit punt gaat de Bouvère verbanden leggen met begrippen zoals essentieel onbeslisbaar.[147]

**Eénmodel-methode.** De tweemodellen-methode ging uit van twee modellen voor een ondefinieerbaar begrip $a$ in een theorie $T$. De éénmodel-methode heeft men geen recht toe recht aan bewijs zoals bij tweemodellen, maar vraagt om een omtrekkende beweging. Wij roepen de deeltheorie $T_{sub}$ van $T$ te hulp, waarbij $a \notin Nls(T_{sub})$. We nemen op die deeltheorie $T_{sub}$ een model $\mathcal{M}_{sub}$ en laten zien dat vanuit dat model $\mathcal{M}_{sub}$ er geen uitbreiding met een interpretatie **a** voor $a$ is naar een model $\mathcal{M}$ voor $T$.
Uitgaande van een theorie $T$ en een deeltheorie $T_{sub}$, $a \in Nls(T), a \notin T_{sub}$, $T_{sub} = T \setminus \{A \mid A \in T, a \in Nls(A)\}$, $\mathcal{M}_{sub} \in M(T_{sub})$, kan men voor de éénmodel-methode met diverse situaties te maken hebben:
1. $T$ consistent, in $\mathcal{M}_{sub}$ kan er niet een **a** als interpretatie van $a \in Nls(T)$ toegevoegd worden: dan is $a$ ondefinieerbaar in $T$ [(de Bouvère 1959), p. 17, lemma 1].
2. Als onder 1., maar $T$ nu consistent en volledig: dan is $a$ essentieel ondefinieerbaar in $T$ [(de Bouvère 1959), p. 17, lemma 2].
3. T is consistent, $T_{sub}$ is volledig en aan $\mathcal{M}_{sub}$ kan niet een **a** toegevoegd worden als interpretatie voor $a \in Nls(T)$: dan is $a$ essentieel ondefinieerbaar in $T$ [(de Bouvère 1959), p. 18, Lemma 3].

Wij komen nu toe aan enkele punten, die wij nemen uit de passage, waarin de Bouvère (1959), p. 20–22, de één- en tweemodellen-methode met elkaar vergelijkt. De laatste zin in het citaat geeft de overstap naar het volgende onderwerp: beslisbaarheid en definieerbaarheid.
[de Bouvère (1959), p. 20:] “The one-model method to prove the undefinability of a non-logical constant from others with respect to a theory $T$ is analogous to the method to prove the independence of a sentence from others with respect to a theory $T$ in this sense, that both methods make use of one single model. However, the one-model method for non-logical constants seems not to be supported by a simple pendant of the theorem of Löwenheim – Skolem – Gödel. [de Bouvère (1959), p. 21:] From a theoretical point of view Padoa’s two-models method is wider than the one-model method: whenever a non-logical constant is undefinable explicitly from other non-logical constant with respect to a theory $T$, it is possible to prove this situation with Padoa’s method. [de Bouvère (1959), p. 21:] From a heuristic point of view the construction of one model might have advantages over the construction of two models. [de Bouvère (1959), p. 22:] The one-model method is essentially stronger than Padoa’s method because of lemma 3. By this lemma it can be decided that a non-logical constant $a$ is not only undefinable explicitly [...] with respect to a certain incomplete theory $T$, but even essentially undefinable i.e. not only undefinable explicitly with respect to a theory $T$ itself but also with respect to every consistent

[147] Theorie $T$ is essentieel onbeslisbaar als $T$ consistent is en er geen consistente uitbreiding $T_{ext}$ van $T$ is ($T_{ext}$ moet wel dezelfde constanten als $T$ hebben), die beslisbaar is.

extension of $T$. Thus the method constitutes an analogy between undefinability with respect to a theory and undecidability of a theory."

**Beslisbaarheid en definieerbaarheid.** Beth, en later de Bouvère, waren er in geïnteresseerd om voor definieerbaarheid analoge begrippen te ontwikkelen aan die van beslisbaarheid.[148] Een deel van deze werkzaamheden werd gebaseerd op Tarski. Tarski onderzocht in de jaren veertig beslisbaarheid van theorieën. Dit vond zijn beslag in Tarski (1949*a*), met als toepassing van deze begrippen Tarski (1949*b*), later gevolgd door Tarski et al. (1953). Hierbij gebruikte Tarski gerelateerd aan theorieën begrippen zoals compatibel, consistent interpreteerbaar en essentieel onbeslisbaar. Aan de hand hiervan ontwikkelde Tarski een aantal stellingen, die met hun soms ketenachtige opbouw analoga hebben in de wereld van de definities. Bij de definities krijgt men vergelijkbaar de begrippen bewijsbaar definieerbaar, compatibel definieerbaar, ondefinieerbaar, essentieel ondefinieerbaar. Sommige van die begrippen ontstaan als kruisbestuiving met combinaties uit de lijst van Tarski. Wij zullen dit evenwel niet gaan bespreken. Voor de grote lijn in dit hoofdstuk is dit niet nodig. Eigen onderzoek over deze onderwerpen is door Beth ternauwernood verricht.

Definieerbaarheids (of uitdrukbaarheidsvragen) komen ook voor in Beth (1962*a*).[149] Daar wordt een soort analogon van de deductietheoretische onvolledigheid van de geformaliseerde rekenkunde behandeld. Hier probeert men gaten op te vullen die binnen een theorie kunnen vallen. De uitbreidingen, die men aan zo een theorie geeft, geven dan wel een antwoord op zekere vragen met betrekking tot de uitgangstheorie, maar gaan zelf ook weer mank aan deficiënties die binnen de theorie zelf niet tot oplossing te brengen zijn. Vanuit de door Beth beschreven deductieve systemen kan men als uitbreidingen de niet-elementaire theorie van de reële getallen en de euclidische meetkunde beschouwen. Deze theorieën zijn dan zowel deductietheoretisch alsook definitietheoretisch onvolledig.[150]

### Beths latere bemoeienissen

Echte bemoeienissen met de definitietheorie heeft Beth niet meer gehad, hij heeft wel het bewijsverloop van al besproken stellingen tableaumatig kunnen verbeteren. Die tableaumatige verbeteringen hebben niet zo grote verbreiding gekregen, omdat het onderzoek, waarbij de definitiestelling en aanverwanten

[148] Bij definieerbaarheidsvragen zal men over het algemeen kijken naar een specifiek probleem, de definieerbaarheid van een begrip binnen (of buiten) een bepaalde theorie of taal. Men heeft de nodige consequenties voor consistentie en de beslisbaarheid in acht te nemen. Voorbeelden hiervan zijn het nog door Beth in *ZM 79*, (1959), p. 6. gerecenseerde A. Robinson (1957*b*), het door de Bouvère gebruikte J. Robinson (1949) en Tarski's 'Definability in arbitrary theories' (in (Tarski et al. 1953)) Hierin laat Tarski de verbanden zien, die er bestaan tussen consistentie, (essentieel) onbeslisbaar en de definieerbaarheid van paketten van bepaalde functies.

[149] (Beth 1962*a*), §24, pp. 110–111, Definition-theoretic incompleteness.

[150] De door Tarski bedachte algebraïsering van de meetkunde m.b.v. zijn reëlen is wel elementair-logisch en beslisbaar. Hierdoor ging Beth te hoge verwachtingen koesteren voor het gebruik van de combinatie van elementaire logica met berekenbaarheid.

gebruikt werd, zich grotendeels in de abstracte modeltheorie ging afspelen. Er wordt hier al naar Beths tableaus verwezen omdat Beth, bij de bestudering van de binnen dit hoofdstuk behandelde kwesties, inzichten verwierf die hem van pas zouden komen bij het opzetten van semantische tableaus. De definitietheorie gaf Beth kennis over het verwijderen en de rol van de middenterm, de prenex-vormen, de snede-eliminatie en de aangescherpte snede-eliminatiestellingen en de mogelijkheden van de subformulestelling: [151]

"Meanwhile, I have continued on the lines pointed out in Section 6 and found some more results, in particular a simplified derivation of Gentzen's Extended Hauptsatz and Subformula Theorem (summed up in one Extended Subformula Theorem) and an extension of the Bernays-Kleene consistency theorem. All this derives from the trivial remark that in constructing a model for an expression only the subformulas of this expression have to be taken in account. Another interesting point is, that the consistency theorem can be extended only in a weakened form, and this I expect to lead over to the corresponding problems for intuitionistic logic."

In later tijd was Beth met zijn tableaus in staat zijn definitiestelling en de interpolatiestelling van Craig eleganter te herformuleren: [152]

"Meanwhile, however, I have developed my method of semantic tableaux which in turn provides a very simple and natural proof of Craig's lemma. I think this method has two advantages:

1. it provides an immediate connection between proof-theory and model-theory,
2. it provides an improved version of Gentzen's methods."

En naar later bleek kon de stelling van Lyndon hier ook bij. [153] Moeilijkheden gaf dit volgens Beth niet: [154] "It is very easy to prove Lyndon's lemma on tautologies by means of a semantic tableau. The only exceptional cases which arise are: phi is a contradiction, psi is a tautology." [phi en psi staan voor de formules $A$ en $B$ met $A \rightarrow B$ is een tautologie, dan is er een $C$ waarvoor $A \rightarrow C$ en $C \rightarrow B$ tautologieën zijn.] Het is mij onduidelijk of het volgende citaat slaat op de combinatie met tableaus: [155] "From a point of motivation, I feel that my approach is much more satisfactory than that of Gentzen or Craig." Het valt wel op dat Beth niet ingaat op de consistentiestelling van Robinson.[156]

Blijft over hoe de definitiestelling buiten de klassieke logica (en meer in het bijzonder binnen de intuïtionistische logica) geformuleerd wordt. Beth zelf heeft

---

[151] Brief Beth – A. Tarski, 29 mei 1953.

[152] Brief Beth – R.C. Lyndon, 20 juli 1958.

[153] Beth (1962*a*), hoofdstuk 'The interpolation theorem of Craig and Lyndon', §42, pp. 158–161, met als afsluiting Beths definitiestelling. En in Beth (1959*b*), pp. 288–290.

[154] Brief Beth – R. Vaught, 20 juli 1958, als antwoord op de brief R. Vaught – Beth, 15 juli 1958, (Berkeley).

[155] Brief Beth – R. Vaught, 31 maart, 1958, als antwoord op de brief R. Vaught – Beth, 24 maart 1958, (Seattle).

[156] Over het waarom heeft Beth zich bij mijn weten niet uitgelaten. Hoogstens kan men veronderstellingen hierover maken, zoals de volgende. In Beths tijd waren aan de hand van Robinsons en Craigs oorspronkelijke artikelen de afleidingen van de definitiestelling aanwezig. Robinson lag evenwel verder weg vanwege de modelmatige opzet van zijn bewijs. Craigs en Beths bewijs hadden eenzelfde, syntactische, oorsprong en bovendien had Beth uit die oorsprong ook de tableaus ontwikkeld.

zich hiermee niet meer beziggehouden. Wel was hij benieuwd naar dergelijke resulaten.[157] G. Kreisel meldde hem dienaangaande: [158] "I can prove your 'Padoa-theorem' for the intuitionistic propositional calculus and sections of the predicate calculus. But I cannot prove the interpolation lemma even for the intuitionistic propositional calculus. Please let me know any results you have on this." Beths antwoord was ontkennend: [159] "It was also interesting to hear of your results and difficulties in connection with the Padoa theorem and the interpolation lemma. I have no results or experiences in this direction. The proof given in my Foundations[160] of the Padoa theorem immediately yields the interpolation lemma, but the method does not seem to work in the intuitionistic case." Met Schütte (1962) wordt er een interpolatiestelling voor de intuïtionistische logica gegeven.

Niet alleen op het gebied van de uitbreidingen, maar ook van de toepassingen van de definitiestelling zijn de bezigheden van Beth mager. Tot op zekere hoogte heeft hij er gebruik van gemaakt in Beth & Tarski (1956) gerelateerd aan de minimalisering van het aantal grondbegrippen in de Euclidische meetkunde naar analogie van Pieri (1908).

### 5.4.2 Definitietheorie vervolgd

#### Latere technische resultaten

Lyndon is als eerste genoemd bij het terloops algebraïsch aanpakken van interpolatie- en definitiestelling. Wij zullen hier alleen varianten op de definitiestelling bekijken. Ook als men binnen de elementaire logica bepaalde modellen hanteert, maakt in een of andere vorm Beths definitiestelling daar een geïntegreerd deel van uit.[161] Door aan de modellen of klassen van modellen voorwaarden op te leggen is het mogelijk de relevante formules binnen de beoogde theorieën eveneens allerlei vormen aan te laten nemen. Dit kan aanleiding geven tot extra stellingen zoals in Svenonius (1959), Chang (1964), (Makkai) en Kueker (1970) die verband houden met de definitiestelling (alle min of meer vallend in Beths tijd). Als voorbeeld uit dit rijtje zal Svenonius (1959), als verzwakking van Beths definitiestelling, gekozen worden. Enkele herformuleringen van de definitiestelling zullen daarbij gegeven worden. Als uitgangspunt

[157]Alleen m.b.t. intuïtionistische logica bestaat er schriftelijke getuigenis van.

[158]Brief G. Kreisel – Beth, 26 november 1960, (Paris).

[159]Brief Beth – G. Kreisel 5 december 1960.

[160](Beth 1959*b*). Gezien de bevindingen uit die en later tijd impliceren interpolatie en 'joint concistency' de definitiestelling, en niet omgekeerd. Als het omgekeerde wel kan, dan moeten er meer dan minimale middelen gebruikt zijn om de definitiestelling te bewijzen.

[161]Een moeilijkheid bij Beth was dat hij, ook in later werk, geen gebruik maakte van de diagrammen. Bij het heen en weer gaan tussen syntax en semantiek waren het derhalve alleen de axiomaverzamelingen en de volledige of onvolledige theorie waarover hij beschikte. Diagrammethoden met een uitgangspunt vanuit een model en een daarbij op te roepen theorie waren in die tijd wel aanwezig. Materiaal over dit onderwerp is te vinden in werk van A. Robinson. Dit is indertijd bij Noord-Holland uitgegeven en van de redacteuren was het Beth, die Robinson in portefeuille had. In het aan Beth opgestuurde manuscript [in Beth-archief] van Robinson (1956) werd al gebruik gemaakt van deze diagrammen en ketens van modellen.

wordt hier Kueker (1970) genomen.

Eerst enkele begrippen. Hier zal, afgezien van $a, b, c, \ldots$ i.p.v. $R, P, Q, \ldots$ voor de niet-logische symbolen de stijl van Kueker worden overgenomen. Kueker sluit aan bij de tegenwoordig gebruikte notatie voor dit soort werk. Het is nuttig om Beths stelling op die manier geformuleerd te zien. Als $a$ een predicaatsymbool is dat niet in een taal $L$ zit, dan is $L(a)$ de oude $L$ met daaraan toegevoegd de nieuwe $a$. De modellen voor $L(a)$ worden als $(\mathcal{M}, \mathbf{a})$ genoteerd. Als er $a_0, a_1, \ldots$ nieuwe predicaten toegevoegd worden, dan heeft men $L(a_0, a_1, \ldots)$, en $(\mathcal{M}, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots)$. $M_T(\mathcal{M})$ is de verzameling van alle relaties op het universum van $\mathcal{M}$. $M(\mathcal{M}, \mathbf{a})$ is de verzameling van alle relaties $\mathbf{a}'$, waarvoor $M(\mathcal{M}, \mathbf{a})$ in een isomorfierelatie tot $M(\mathcal{M}, \mathbf{a}')$ staat (er bestaat een automorfisme van $\mathcal{M}$ dat $\mathbf{a}$ op $\mathbf{a}'$ afbeeldt).

$\star$ De definitiestelling bij (Svenonius 1959), p. 174. Voor $T$ een systeem met predicaatsymbolen $a, b, t_1, t_2, \ldots$ en het is niet zo dat een definitie van $a$ in termen van $b$ bewijsbaar is. Dan zijn er twee modellen $\mathcal{M}_1$ en $\mathcal{M}_2$ voor $T$ te vinden met een 1–1-correspondentie $\varphi$ daartussen, die $b$-invariant, maar niet $a$-invariant is.
$\star$ De definitiestelling in de context van Kueker (1970), p. 428 (stelling 1.1). Voor elke theorie $T$ zijn equivalent:
$\circ$ Voor elk model $\mathcal{M}$: $\#(M_T(\mathcal{M})) \leq 1$.
$\circ$ Er is een formule $A(x)$ in de taal $L$ z.d.d. $T \vdash \forall x(a(x) \leftrightarrow A(x))$.
En met de volgende generalisatie van de stelling.[162] Voor elke theorie $T$ en $n \in \omega$ zijn equivalent:
$(a)_n$ Voor elk model $\mathcal{M}$: $\#(M_T(\mathcal{M})) \leq n$.
$(b)_n$ Er bestaan in taal $L$ formules $A(v_1, \ldots, v_k)$, $B_i(x, v_1, \ldots, v_k)$ (met $1 \leq i \leq n$): $T \vdash \exists v_1 \cdots \exists v_k A$ en $T \vdash \forall v_1 \cdots \forall v_k(A \to \bigvee_{1 \leq i \leq n} \forall x(a(x) \leftrightarrow B_i))$.
$\star$ De interpolatiestelling ((Kueker 1970), p. 429): Voor $A(a)$ een formule van $L(a)$, $B(b)$ van $L(b)$; dan zijn equivalent:
$\circ \vdash A(a) \to B(b)$.
$\circ$ Er bestaat een formule $C$ van $L$ met $\vdash A(a) \to C$ en $\vdash C \to B(b)$.

$\star$ De stelling van Svenonius zelf uit 1959: [163] Voor $T$ een elementaire theorie met predicaten $a, b, t_1, t_2, \ldots$ zodat er in $T$ geen disjunctie van expliciete definities van $a$ in termen van $b$ bewijsbaar is. Dan bestaat er een model $\mathcal{M}$ van $T$ met een permutatie $\Phi$ die wel $b$-invariant maar niet $a$-invariant is."
$\star$ Bovengenoemde stelling van Svenonius, zoals door Kueker (1970), p. 430 geformuleerd: Voor elke theorie $T$ zijn equivalent:
$\circ$ Voor elk model $(\mathcal{M}, \mathbf{a})$ van $T$: $\#(M(\mathcal{M}, \mathbf{a})) = 1$.
$\circ$ Er bestaan formules $A_1(x), \ldots, A_n(x)$ in $L$ met $T \vdash \bigvee_{1 \leq i \leq n} \forall x(a(x) \leftrightarrow A_i(x))$.
En nu Kuekers formulering van Svenonius' stelling met de volgende generalisatie (die oploopt met de generalisatie van de definitiestelling) in Kueker (1970), p. 451 (stelling 4.2). Voor alle theorieën $T$ zijn equivalent:
$\circ$ Voor elk model $\mathcal{M}$ geldt dat $\#(M_T(\mathcal{M}) < \omega$.

[162](Kueker 1970), p. 448, stelling 4.1
[163]Svenonius' stelling A uit (Svenonius 1959), p. 173.

∘ Voor elk model $(\mathcal{M}, \mathbf{a})$ van $T$ geldt dat $\#(M(\mathcal{M}, \mathbf{a})) < \omega$.
∘ Voor een $n$ geldt dat clausule $(b)_n$ uit de bovengenoemde generalisatie van de definitiestelling geldt.

Men kan zich afvragen of er voorbij de elementaire logica moeilijkheden zijn. Bij de behandeling van het vroege werk van Tarski is hier al deels op ingegaan. Daar was logica van hogere orde het vertrekpunt. Het zijn vooral beschouwingen over talen tussen de elementaire logica en tweede orde in, waar men het onderwerp tegenkomt. Een logica kan allerlei eigenschappen met zich meedragen. De logica kan voldoen aan de definitiestelling, de stelling van Robinson of aan de interpolatiestelling. Dan heeft deze logica de Beth-, de Robinson- of de interpolatie-eigenschap. Vertrekkende vanuit deze abstractere formuleringen is het mogelijk tal van relaties vast te leggen, indien men deze begrippen afzet tegen andere, de gebruikte taal of verzwakkingen daarvan. In dit verband krijgt men ook te maken met verzwakkingen van voornoemde eigenschappen waaronder de Beth-eigenschap.[164] Al tijdens Beths leven werd een aanvang gemaakt met de bestudering van dergelijke problemen. Ook hieraan had Beth part noch deel.

### Alternatieve noties van definieerbaarheid

Naast de normale uitbreidingen bestaat er een bijzonder soort: de pogingen om de definitiestelling aan te vechten. Het meest in het oog lopend zijn de gevallen, waarbij de discussianten niet voldoende onderkenden dat hun begrip van definieerbaarheid niet gelijk opliep met dat van Beth. Men kan zich in die gevallen wel afvragen of er relaties aanwezig zijn tussen beide begrippen: wellicht in de vorm van generalisaties of verzwakkingen. In Hintikka (1991) wordt daartoe het begrip identificeerbaarheid gehanteerd.

Volgens Hintikka was H.A. Simon een uitgesproken representant van een dergelijke verwarring — en met hem tal van econometristen.[165] Dit was volgens Hintikka ook de grond voor een in allerlei artikelen uitgevochten tweestrijd tussen Simon en P. Suppes. Deze overwegingen zijn evenwel van later tijd, eerder al had Beth zelf met Simon te maken gekregen. In Simon (1959) wordt beweerd dat in navolging van Braithwaite (1955) een afzwakking gegeven kan worden van Tarski's definieerbaarheid. Simon verklaarde hiermee meteen de methode van Padoa voor onbruikbaar. Simon wenste hiermee een al oud probleem tot een oplossing te brengen, namelijk het niet als primitief aannemen van de term 'massa'.[166] Simons artikel bleef echter steken in veronderstellingen zonder bewijs. Ook de hulp inroepen van begrippen zoals 'defines generically' en 'defined almost everywhere' hielp hem niet. Volgens Simon definieert $A(x; b_1, b_2, \ldots)$ 'generically' de niet-logische constante $a$ als $\forall x((x = a \rightarrow A(x; b_1, b_2, \ldots)).$

[164] Zie (Barwise, Feferman 1985). Een overzicht van modeltheoretische (algebraïsche) resultaten m.b.t. definitietheorie en interpolatie is te vinden in Hoogland (2001). Hier wordt expliciete definieerbaarheid met surjecties, inpliciete met epimorfismen gecorreleerd.

[165] Herbert Alexander Simon, *1916.

[166] Overigens werd in Tarski (1935*b*), pp. 96, 97, ook al het probleem van het terugbrengen van dynamische op statische begrippen in de mechanica aangeroerd

Hierbij zijn $b_1, b_2$ andere niet-logische constanten. Alles gebeurt op de wijze van Tarski, maar met vervanging van $\leftrightarrow$ door $\rightarrow$.

Volgens de door Simon aangeschreven Beth was deze formulering met implicatie dan ook equivalent aan $A(a; b_1, b_2, \ldots)$, en is het niet mogelijk de existentie en uniciteit van $a$ voor willekeurige $b_1, b_2, \ldots$ te bewijzen.[167] In navolging van Hermes (1959) kan men volgens Beth om dit te garanderen de formule $\exists a \forall x(x = a \leftrightarrow A(a; b_1, b_2, \ldots))$ toevoegen. Dan is volgens Beth echter Tarski weer bewijsbaar. Beth vond het aanroepen van Tarski in zoverre juist dat volgens hem de axiomatisatie van de mechanica wel met behulp van logica van hogere orde zal moeten geschieden. Beth voegde er tegenover Simon met referentie naar Hermes[168] aan toe dat "from the viewpoint of natural science, the above postulate is not an attractive one. However, one may try to use instead an equivalent statement presenting a clearer physical content."

Ook in de wetenschapsfilosofie komt men diverse discussies tegen over de houdbaarheid van Beths resultaten. Graag zou men Beths mening willen horen over fysicalisme, reductionisme of determinisme. We hebben gezien dat Beth een stringent reductionisme — dat volgens Beth zo sterk samenhing met de Wiener Kreis — afwees. Wat had Beth hierop te zeggen als bedenker dat, zij het onder speciale voorwaarden, impliciet op expliciet reduceerbaar is? Helaas voor ons werd dit soort discussies pas enige tijd na zijn dood gevoerd. Een voorbeeld hiervan zijn de publicaties van van Hellman en Thompson.[169] Zoals zij verband legden tussen expliciet definieerbaar en reductionisme, deed Montague (1962), p. 357 e.v., dit met zijn 'bewijsbaar' determinisme. Door Hellman en Thompson werd voor dit doel gekeken naar de voorwaarden waaronder Beths stelling wel of net niet meer geldig is. De context, waarbinnen dit gebeurde, begon al eind vijfiger, begin zestiger jaren van de twintigste eeuw op te komen en ontplooide zich vooral buiten de elementaire logica. Dit punt wordt dan ook door hen ingebracht. Kort is hier al op een dergelijke context ingegaan; niets in schriftelijke neerslag wijst er op dat Beth hiervan kennis heeft genomen of dit verwerkt heeft.

---

[167]Brief Beth – H.A. Simon, 20 september 1959, in antwoord op de brief H.A. Simon – Beth, 11 september 1959, (Pittsburg, Carnegie Inst. Technology).

[168]Bij Hermes (1959) i.h.b. axioma 6, die Existenz des Massenverhältnisses, en de definitie van massa als niet-primitief begrip op p. 287. Hermes streefde er naar om bij de indeling van (klassieke en algemene) mechanica in kinematische (zuivere bewegings) begrippen en dynamische (natuurkundige, zoals massa van een punt en kracht uitgeoefend op een punt) begrippen de dynamische begrippen op de kinematische te reduceren. Hermes had daarmee er geen enkele behoefte aan om verzwakkingen van Tarski (of wat dan ook) te gaan bewijzen. Die kwestie was volgens Beth dan ook niet relevant voor de bezigheden van Hermes.

[169](Hellman & Thompson 1975), (Hellman & Thompson 1977).

# Hoofdstuk 6

# Semantische tableaus

*"Von hier aus bin ich dann zu einem Aufbau der klassischen Prädikatenlogik geführt worden wie dieser unabhängig und ungefähr gleichzeitig auch von Hintikka, Schütte und Kanger angegeben wurde. Ich werde auf diesen Punkt noch zurückkommen. Erst möchte ich noch erwähnen, dass ich anschliessend auch den Aufbau einer den intuitionistischen Auffassungen adäquaten vollständigen Form der Prädikatenlogik 1. Ordnung versucht habe. Zwar ist zur Zeit die intuitionistische Adäquation noch umstritten, meine Konstruktion erlaubt aber nichtsdestoweniger die topologischen Vollständigkeitssätze von Tarski, Mostowski, Rasiowa und Sikorski wesentlich zu verschärfen."* [1]

## 6.1 Definitie van semantische tableaus

Het bovenstaand citaat geeft de algemene lijn van Beths onderzoek in het midden van de vijftiger jaren, maar zegt niet wat een semantisch tableau is. Beth had soms moeite met een heldere en korte omschrijving van zijn bezigheden. Daarom roepen wij hier de hulp van G. Kreisel in: [2]

"You nowhere state what a semantic tableau is nor even what constitutes closure. Now all this can be stated quite shortly:

It is a double entry record of formulae which must be true (false) in order that a given sequent be refutable; the interesting and *novel discovery* is that a *single obvious principle is sufficient to show non-refutability*, namely that the same formula must be both true and false.

This principle is common to your work, that of Schütte, Gentzen and others when the only sequents which are proved outright are $\Delta, A, \Delta' \Rightarrow A$. Your advance over Gentzen is that you have stripped his treatment of some unnecessary technicalities and by keeping the semantic interpretation in mind you have *motivated* the rules

[1] Uit ms. E.W. Beth, *Deduktive und semantische Tafeln für die rein-implikative Logik*, voordracht aan Math. Institut der Universität Marburg/Lahn, 27 november 1959.

[2] Brief G. Kreisel – Beth, 31 juli 1958, (Reading). Cursief de onderstreping door Kreisel. De brief leverde commentaar op de door Beth te houden lezing voor het Internationaal Wiskundig Congres van 1958 te Edinburgh. Kreisel vond Beths lezing veel te ingewikkeld en de tableaus werden volgens hem door Beth niet helder uiteengezet.

of inference which Gentzen just slapped down. Like Schütte you observe that the principle may be restricted to quantifier-free formulae"

### 6.1.1 Inleiding

Beth ontwikkelde zijn semantische tableaus als een grafische, makkelijk visualiseerbare beslissingsmethode voor (afleidbaarheid van) formules (eventueel onder hypothesen) in de predicaatlogica. Het idee is zeer eenvoudig.[3] Stel men wil de waarheid van formule $A$ onderzoeken. Men probeert daartoe valuaties te vinden, die $A$ onwaar maken door middel van een tableau, een 'boekhoudkundige' tabel met links ware, rechts onware formules, en men plaatst A onder 'onwaar':

| waar | onwaar |
|---|---|
| | $A$ |

Vervolgens gaat men $A$ reduceren. Stel bijvoorbeeld $A = B \vee C$. Dan moet men, om $A$ onwaar te maken, zowel $B$ als $C$ onwaar maken. De volgende fase is dus:

| waar | onwaar |
|---|---|
| | $B \vee C$ |
| | $B, C$ |

Als $A = B \to C$, krijgt men op dezelfde manier:

| waar | onwaar |
|---|---|
| | $B \to C$ |
| $B$ | $C$ |

aangezien men om $B \to C$ onwaar te maken $B$ waar en $C$ onwaar moet maken. Treedt links en rechts dezelfde formule op na reductie, bijvoorbeeld

| waar | onwaar |
|---|---|
| | $A \to A$ |
| $A$ | $A$ |

dan sluit het tableau af, d.w.z. de gezochte valuatie kan niet gevonden worden en de oorspronkelijke formule is dus waar.[4]

Sommige operatoren vragen om een splitsing van het tableau. Om $B \wedge C$ onwaar te maken moet $B$ dan wel $C$ onwaar gemaakt worden. Er komen dan twee mogelijkheden tot voortzetting, en de beide kolommen worden gesplitst.

<table>
<tr><td colspan="2">waar</td><td colspan="2">onwaar</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">$B \wedge C$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$B$</td><td>$C$</td></tr>
</table>

In feite is dit een combinatie van twee tableaus

| waar | onwaar |
|---|---|
| | $B \wedge C$ |
| | $B$ |

| waar | onwaar |
|---|---|
| | $B \wedge C$ |
| | $C$ |

[3] Hintikka (1991), p. 165: "the basic idea of the *tableau* technique is extremely simple". De vraag is dan waarom men er niet al eerder opgekomen was. Een antwoord zou kunnen luiden dat men enerzijds syntax en semantiek nogal sterk als twee gescheiden onderdelen behandelde, anderzijds de combinatie erkende en behandelde, maar nog niet zo ver ging ze als twee uitwisselbare gezichten van eenzelfde zaak te zien.

[4] Grafisch wordt dit hier weergegeven door een (bij Beth een dubbele) horizontale lijn onder het af te sluiten tableau. Dit komt overeen met de syntactische notie van axioma in Gentzens sequentencalculus.

Evenzo

$$\begin{array}{c||c} \text{waar} & \text{onwaar} \\ \hline B \to C & \\ \hline C & B \end{array}$$

In het vervolg zal er een andere notatie gebruikt worden: [5] een verticale lijn scheidt waar (links) van onwaar (rechts), en een splitsing als in het laatste voorbeeld wordt nu

$$\begin{array}{c|c} B \to C & \\ \hline B & C \end{array}$$

en het conjunctieve schema hierboven wordt:

$$\begin{array}{c|c} & B \wedge C \\ \hline B & C \end{array}$$

Het volgende toont een afgesloten tableau in deze notatie, de waarheid aantonende van $((A \to B) \to A) \to A$ [de formule van Peirce].[6]

$$\begin{array}{r|l} & ((A \to B) \to A) \to A \\ (A \to B) \to A & A \\ \hline \begin{array}{r|l} & A \to B \\ A & B \\ & \text{sluit} \end{array} & \begin{array}{l} A \\ \\ \text{sluit} \end{array} \end{array}$$

In de boven geschetste vorm zijn de tableaus te vinden in Beth (1962*a*). Er zijn voorstudies, waarover verderop iets gezegd zal worden.

Een paar notationele afspraken, die in het vervolg gebruikt zullen worden, zijn $\Gamma, \Delta, \ldots$ voor eindige verzamelingen van formules links of rechts langs een tak van een tableau. Zo representeert

$$\Gamma \mid \Delta$$

een tableau met links 'waar' een verzameling formules $\Gamma$, rechts 'onwaar' een verzameling $\Delta$, en

$$\begin{array}{c|c} \Gamma & \Delta \\ \hline \Gamma' \mid \Delta' & \Gamma'' \mid \Delta'' \end{array}$$

een tableau gesplitst in tweeën. Het ene tableau heeft links (waar) $\Gamma, \Gamma'$, rechts (onwaar) $\Delta, \Delta'$, het andere links (waar) $\Gamma, \Gamma''$, en rechts (onwaar) $\Delta, \Delta''$, enz.

Nu de nog resterende reductieregels.

$$\begin{array}{r|l} B \wedge C & \\ B, C & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} B \vee C & \\ \hline B \mid & C \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \neg B & \\ & B \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & \neg B \\ B & \end{array}$$

*De quantoren.* De regels voor het behandelen van de $\forall$-quantor zijn de tableaus

$$\begin{array}{r|l} \Gamma & \Delta \\ \forall x A(x) & \end{array} \quad \text{wordt} \quad \begin{array}{r|l} \Gamma & \Delta \\ \forall x A(x) & \\ A(p) & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \Gamma & \Delta \\ & \forall x A(x) \end{array} \quad \text{wordt} \quad \begin{array}{r|l} \Gamma & \Delta \\ & \forall x A(x) \\ & A(a) \end{array}$$

[5] Deze nieuwe notatiekeuze is in navolging van anderen een keuze van mij. Afgezien van metalogica, gebruikte Beth deze notatie niet.

[6] Voor het gemak van de lezer wordt er soms door mij op het einde van een tak 'sluit' of 'open' toegevoegd. Het is, afgezien van eigenaardige gevallen en hier vanwege de introductie, niet echt nodig dit te doen.

Hierbij is $a$ een nieuwe variabele die niet in $\forall x A(x), \Delta, \Gamma$ vrij voorkomt.[7] En $p$ is een term, waarvoor een vrije variabele uit $\forall x A(x), \Delta, \Gamma$ ingezet kan worden, of een nieuwe, als zo een variabele er niet is.

En versneld de reductieregels voor de $\exists$-quantor:

$$
\begin{array}{r|l}
\Gamma & \Delta \\
\exists x A(x) & \\
A(a) &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
\Gamma & \Delta \\
 & \exists x A(x) \\
 & A(p)
\end{array}
$$

Met betrekking tot $p$ en $a$ geldt hetzelfde als voor de $\forall$-quantor.

**Enkele opmerkingen over de tableaus** ◦ Bij de formule van Peirce verklaart men een tableau voor gesloten, terwijl de daartoe noodzakelijke $A$ op rechts niet op dezelfde hoogte staat als de $A$ op links.[8] Dit hangt samen met de al beschreven bedoeling van de tableaus: eenvoud in de reductie. Herhaling is wel toegestaan. De éénmaal gegeven valuatie aan een formule blijft over het gehele tableau behouden. Hierdoor kan men tot een afsluiting komen met behulp van formules die ergens bovenin het tableau staan: alle formules, waar ze ook voorkomen binnen een tak, tellen mee bij de uiteindelijke beoordeling. Het lijkt dan overzichtelijker alle formules die op een zeker punt geïntroduceerd zijn, ook op te schrijven, maar dit leidt tot zeer veel formulevoorkomens.

◦ Beths tableaus zijn vooral gebaseerd op weglaten van formules. Dit wordt overigens al in de regels vermeld: de reducties zijn hier (klassiek semantisch) de enig toegestane bewerking. De echte noodzaak tot herhalingen komt aan bod bij de semantiek voor intuïtionistische logica.

◦ Bij de afsluiting van de formule van Peirce zijn alle takken gesloten. Regel: voor de afsluiting van een klassiek semantisch tableau geldt dat er geen subtableau open blijft.[9]

◦ Men kan zich afvragen of de in de plaatjes gegoten regels de enig juiste representatie vormen. Waarom niet het volgende alternatief:

$$
\begin{array}{r|cl|l}
\multicolumn{3}{r|}{B \to C} & \\
\cline{3-3}
C & & & B
\end{array}
$$

Op zichzelf is hier niets op tegen. Alleen later, bij de deductieve tableaus kan dit ongelukken opleveren bij het herformuleren als bewijs (in het bijzonder bij de natuurlijke deductie).

◦ Men kan $\Gamma \mid \Delta$ als volgt als één formule uitschrijven. Stel $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$ en $\Delta = B_1, \ldots, B_m$, dan kan men $\Gamma \mid \Delta$ vervangen door $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \mid \bigvee_{i=1}^{m} B_i$ of zelfs $\ldots \mid \bigwedge_{i=1}^{n} A_i \to \bigvee_{i=1}^{m} B_i$. Het waarom volgt later.

### 6.1.2 Het begin bij Beth

De hierboven gegeven tableauregels met behulp waarvan men een tableau kan construeren zagen er in het begin minder gepolijst uit. Beth begon ermee door

[7] Bij Beth ook individuele variabele genoemd.

[8] Dit i.t.t. axioma bij Gentzens sequenten.

[9] Dit komt (naar Gentzen) overeen met de syntactische eis, dat alle takken (in het begin) een axioma hebben.

ze onder woorden te brengen, maar nog zonder tableauschema's. De schema's gebruikte hij aanvankelijk alleen voor de voorbeelden. Dit gebeurde al in de eerste helft van 1954.

Volgens Beth zelf — in nog later te citeren brieven naar Hasenjaeger en Hintikka — kwam hij in november, december 1954 op het uiteindelijke idee van een volledig uitgevoerde tableaumatige opzet. Ook deze werd in voorbeelden gebruikt, pas in Beth (1956*c*), p. 615 krijgt men de bekende tableauschema's voor de reductieregels zelf. Eveneens in het begin van 1954 probeerde Beth om m.b.v. pseudovaluaties een decisiemethode te ontwikkelen voor Tarski's probleem uit 1946. Zoals in het hoofdstuk over semantiek af te lezen valt, liep dit niet goed af. Wel maakte hij om pseudovaluaties te verkrijgen gebruik van een soort tableauconstructie.

Het is moeilijk om uit te maken of Beth eerst de pseudovaluaties bedacht en van daaruit zijn tableaus ontwikkeld heeft, het omgekeerde heeft gedaan, of tegelijk met beide zaken bezig is geweest. Wel valt uit een brief van 11 februari 1955 van Beth aan Tarski af te lezen dat hij een andere weg is ingeslagen:

"[T]he results of Post and Lineal showed me I was on the wrong way, and accordingly I changed the direction of my word. It seems now that this time I have been more successful. Though my conclusions do not answer the somewhat ambitious expectations I previously had, [...] and decided to publish them. [...] a short paper [...] which I hope, Heyting will present at the Academy [KNAW] in their next session.[10] It seems that my conclusions are of some importance for people interested in Gentzen calculi, as they provide an easy proof of the completeness of such calculi."

We bespreken twee soorten prototableaus:

1. Het in 1954 te Parijs gepresenteerde prototableau: een semantisch tableau met twee kolommen, zonder kolomsplitsing en met syntactische componenten.
2. De prototableaus als hulp om pseudovaluaties te construeren, hier verder de 'pseudotableaus' te noemen.

### Semantische tableaus

**De voorlopers** De tableaus werden voor het eerst tijdens een lezingencyclus van Beth in Parijs op 31 maart 1954 door hem gepresenteerd. Helaas voor Beth werd deze lezingencyclus pas twee jaar nadien uitgegeven als Beth (1956*b*). Hierdoor werd Beth (1955*a*) de eerste officiële publicatie. De lezing van 31 maart 1954 leverde het volgende 'prototableau' op.[11]

Er werd door Beth in 1954 (Beth 1956*b*) onderzocht of de formule $\forall x \forall y(a(x) \to b(y)) \to (\exists u\, a(u) \to \forall v\, b(v))$ wel geldig is.

[10] Dit gebeurde en resulteerde in Beth (1955*a*). In deze brief wordt nog gerefereerd naar voetnoot 4 van Beth (1955*a*).

[11] (Beth 1956*b*), hoofdstuk II, Le théorème de Löwenheim – Skolem – Gödel – Tarski. In Beth (1956*b*) is weliswaar een 'note complémentaire' met volwassener tableaus te vinden, maar deze is door Beth later toegevoegd.

| **Vrai** | **Faux** |
|---|---|
| $\forall x \forall y(a(x) \to b(y))$ | $\forall x \forall y(a(x) \to b(y)) \to (\exists u\ a(u) \to \forall v\ b(v)$ |
| $\exists u\ a(u)$ | $\exists u\ a(u) \to \forall v\ b(v)$ |
| $a(1)$ | $\forall v\ b(v)$ |
| $\forall y(a(1) \to b(y))$ | $b(2)$ |
| $a(1) \to b(2)$ | |
| $b(2)$ | |

Hier spelen 1 en 2 de rol van de 'nieuwe variabele' in de schema's voor $\forall$ en $\exists$; $a$ en $b$ vervullen de rol van predicaten. Men heeft hier een tegenmodel met bedeling $v$ met $v(a(1)) = 1$ en $v(b(2)) = 0$. Dit loopt op tegenspraak uit vanwege de later afgedwongen $v(b(2)) = 1$.

In dit voorbeeld van 1954 uit Beth (1956*b*) zette Beth zijn (proto-)tableau op als een goed leesbare neerslag van de valuatie die tot een mislukken van een tegenvoorbeeld leidde. In zijn latere 'note complémentaire' komt er nog steeds geen tableauschema voor de reductieregels voor, wel een omschrijving van de reductie zoals die voor de negatie: "si $\neg X$ apparaît dans une colonne, alors $X$ est insérée dans la colonne conjugée." Wat in bovenstaand 'prototableau' opvalt is dat wat onder 'waar' valt onder één kolom 'Vrai' wordt bijgeschreven, en evenzo met 'onwaar' onder één kolom 'Faux'. In gedachten houdend hoe men $A \to B$ onder Waar moet behandelen valt het op dat er niet in kolommen gesplitst wordt m.b.t. $a(1) \to b(2)$, maar dat er binnen de 'Vrai'-kolom gebruik wordt gemaakt van modus ponens op $a(1)$ en $a(1) \to b(2)$ om $b(2)$ te verkrijgen. Beth maakte dus gebruik van de syntactische regel modus ponens binnen een 'semantisch' bedoelde context. Het zou niet de laatste keer zijn dat Beth zo iets deed. In de zestiger jaren, bij de semantische tableau-behandeling van modale systemen zette hij syntactische axioma's in aan de waar-zijde — want dat zijn zij toch — van zijn tableaus; het blijft natuurlijk een zwaktebod, wanneer men er anders niet uitkomt.

In het volgende voorbeeld, uit Beth (1955*a*), komt voor de eerste keer een splitsing in subtableaus voor. Uit latere citaten uit brieven naar Hasenjaeger en Hintikka blijkt dat Beth dit in november, december 1954 bedacht heeft.[12]

**De vervolmaking.** Het volgende plaatje, uit Beth (1955*a*), is het eerste in druk verschenen tableau.[13] Deze vorm van de tableaus zal door Beth niet meer worden veranderd. Het tableau geeft een antwoord op: 'Is $\forall x \forall y(A(x) \to B(y))$ een logisch gevolg van $\exists x A(x) \to \forall y B(y)$?'

[12] brief Beth – G. Hasenjaeger, 4 februari 1955; brief Beth – Hintikka, 12 juli 1955.

[13] In Beth (1955*b*) zijn er eveneens tableaus, maar er is in dit artikel ook een verwijzing te vinden naar Beth (1955*a*).

| **valid** | | **invalid** | |
|---|---|---|---|
| 1. $\exists x A(x) \rightarrow \forall y B(y)$ | | 2. $\forall x \forall y (A(x) \rightarrow B(y))$ | |
| | | 3. $\forall y (A(a) \rightarrow B(y))$ | |
| | | 4. $A(a) \rightarrow B(b)$ | |
| 5. $A(a)$ | | 6. $B(b)$ | |
| (i) | (ij) | (i) | (ij) |
| | 7. $\forall y B(y)$ | 8. $\exists x A(x)$ | |
| | 9. $B(a)$ | | |
| | 10. $B(b)$ | 11. $A(a)$ | |

Hier opnieuw de constructie van een tegenmodel met een domein van twee elementen ($a$ en $b$ genoemd), de predicaten $A$ en $B$ en een bedeling $v$ met $v(A(a)) = v(B(a)) = 1$ en $v(B(b)) = 0$. Opnieuw tegenspraak vanwege de latere $v(A(a)) = 0$. Beide subtableaus sluiten af.[14]

Beth construeerde vanuit voorgaand tableau de volgende deductieve afleiding (we zullen later preciezer nagaan hoe Beth aan dit soort afleidingen kwam).

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\exists x A(x) \rightarrow \forall y B(y)$ | [premisse] |
| 5. | $A(a)$ | [+ hypothese 1] |
| 8. | $\exists x A(x)$ | |
| 7. | $\forall y B(y)$ | |
| 9. | $B(a)$ | |
| 6. | $B(b)$ | |
| 4. | $A(a) \rightarrow B(b)$ | [– hypothese 1] |
| 3. | $\forall y (A(a) \rightarrow B(y)$ | |
| 2. | $\forall x \forall y (A(x) \rightarrow B(y)$ | [conclusie] |

Beth (1955*a*) geeft het volgende commentaar: "Let us now rearrange the formulas in our tableau in the following manner, omitting the formulas 10 and 11 which already appear under 6 and 5, respectively, and taking the formulas in the right column in the reverse order. The resulting sequence of formulas strongly recalls a formal derivation in some System of Natural Deduction."

Tenslotte heeft men de mogelijkheid om vanuit het tableau een bewijs in de stijl van Gentzen te construeren. De semantische methode van het tegenvoorbeeld levert derhalve een syntactisch bewijs op. Overigens heeft men hier te maken met een eenvoudige geval van monadische predicaten. Zo gauw men daar van af stapt, zullen de gevolgen minder aangenaam zijn.

Beth gebruikte in de beide tableaus nu eens de kolomnamen waar en onwaar, dan weer geldig en ongeldig. W.V.O. Quine vroeg zich daarom af of Beth er een bedoeling mee had. [15] Beths antwoord luidde: [16] "As to the headings 'valid' and 'invalid', I speak of sentences being true or false, but of formulas being valid or invalid. The reason is, that the validity of a formula depends on its interpretation, which is not the case with sentences. This is an issue on which I have elaborated in my contribution to Carnaps volume in Living Philosophy." [17]

[14] Afsluiting van een subtableau wordt door Beth kenbaar gemaakt door een dubbele (hier een enkele) streep onder het subtableau.

[15] Brief W.V.O. Quine – Beth, 22 juni 1955: "I do not see why you use the headings 'valid' and 'invalid'. Why not 'true' and 'false'?"

[16] Brief Beth – W.V.O. Quine, 7 juli 1955.

[17] (Beth 1963*a*).

Het was voor W.V.O. Quine eveneens onduidelijk of Beth met ‘tegenmodel’ een ‘contrair model’ bedoelde: [18] “I am puzzled by your definition of ’counter-example’ on p. 3, and the footnote adjoined to it.[19] These pages read as if you did not intend the term to connote contrariety, as of course it does and should. On the other hand, your use of the term on ensuing pages is quite normal.” Beth beantwoordde dit met: [20] “Indeed I do not intend the term ’counter-example’ to connote contrariety. A counter-example in the usual, stricter, sense is denoted as a ’suitable counter-example’.”

**‘Pseudo’-tableaus.** Er is al gesproken over een een tweede voorloper van de tableaus: de pseudovaluaties. Om deze te verkrijgen maakte Beth gebruik van een hulpmiddel: [21]

“In my proofs, I apply a certain generalisation of the well-known truth-table method, which in itself already offers some of the advantages of Gentzen’s method. Let us consider the formula: $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ [22], and let us try to find a valuation by which it obtains the value False; the results of our attempt may be summed up in the following diagram:

| **True** | **False** |
|---|---|
| | $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ |
| $\neg A$ | $A \rightarrow B$ |
| $A$ | $B$ |

from the diagram, it appears that, in order to make formula $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ false, we must assign to this formula and to its subformulas certain truth values which are not in accordance with the familiar valuation rules.”

Beth zocht hier naar een mogelijkheid om $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ op F te zetten. Als bovenstaande pseudotableau deel was van de constructie van een semantisch tableau, dan zou Beth verder gegaan zijn met $\neg A$ op T als $A$ onder F bij te schrijven. In zijn voordracht aan de Sorbonne, in de periode maart – april 1954, deed Beth dit met zijn al besproken prototableau, maar daar lag het doel nu eenmaal anders. In Beth (1960*a*) werd er wederom gebruik gemaakt van niet-reguliere valuaties, en daarin omschreef Beth de relatie tussen deze valuaties en tableaus als volgt: “In their original shape, semantic tableaux also suggest *non regular valuations* by means of which we can establish the relative independence of Church’s axioms.” [23]

[18] Brief W.V.O. Quine – Beth, 22 juni 1955.

[19] ‘p. 3’, bedoeld wordt p. 3 van (Beth 1955*b*).

[20] Brief Beth – W.V.O. Quine, 7 juli 1955.

[21] Ms. E.W. Beth, *A subformula theorem for the sentential calculus, and a characterisation of axiom systems adequate for it, (dedicated to Robert Feys)*; dateert van voor juli 1954 (zie verder onder hoofdstuk over semantiek).

[22] In de andere versie, *A subformula theorem for the sequential calculus, and a characterisation of its axiom systems*, de formule: $A \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow B))$, hetgeen verder niets uitmaakt.

[23] ‘Church’s axioms’, zie het hoofdstuk over semantiek.

### 6.1.3 Oorsprong van Beths tableaus

#### Gentzen en Kleene

Beths directe inspiratiebronnen waren G. Gentzen en S.C. Kleene.[24] Kleene bouwde voort op het werk van Gentzen. Gentzen had ook voorgangers, met name P. Hertz (sequenten), J. Herbrand (Hoofdstelling) en S. Jaskowski (natuurlijke deductie).[25] Beth zelf maakte al gebruik van Gentzens snede-eliminatie en subformulestelling voordat hij met zijn tableaus begon. Deze kennis ging hij nu opnieuw gebruiken: [26]

"De beschreven werkwijze [de tableaus] is in den grond een variant van die welke ik in mijn artikel over de methode van Padoa heb toegepast, en ik heb mij er reeds van overtuigd dat laatstbedoelde voor de klassieke predicatenlogica alle resultaten levert die met de door Gentzen, Curry, Kleene en Quine beschreven werkwijzen verkregen kunnen worden, en bovendien ook de bijbehorende niet-finitistische resultaten, die bij de genoemde auteurs buiten beschouwing blijven; de nieuwe variant levert al deze resultaten dus ook, maar op nog veel doorzichtiger wijze."

Om stellingen binnen een systeem te krijgen gaat men uit van de axioma's. De operationele en structurele regels verschaffen, uitgaande vanuit één of meer axioma's, een steeds complexer wordend stelsel van formules. Onder bepaalde voorwaarden kunnen formules samengevoegd worden om een volgende formule af te leiden.

De sequentensystemen van Gentzen worden gespecificeerd door axioma's en deductieregels voor sequenten. Een afleiding van een sequent in zo'n systeem is een boom, met helemaal onderaan (de wortel van de boom) de conclusie van de afleiding (de bewezen sequent). Helemaal bovenaan (de bladeren van de boom) staan de axioma's. Een sequent $S$ volgt uit de direct daar bovenstaande sequenten $S_1, \ldots, S_i$ ($i = 1$ of 2 bij Gentzen) volgens één van de regels van het systeem; dit wordt aangegeven met[27]

$$\frac{S_1, \ldots, S_i}{S}$$

Men kan bewijzen construeren van boven af, d.w.z. uitgaande van de axioma's. Men kan ook omgekeerd, uitgaande van een sequent, proberen een bewijs voor deze sequent te construeren met behulp van de beschikbare regels en axioma's, d.w.z men construeert 'van onderen af'.

Bij het construeren van bewijzen van bovenaf is de snederegel een krachtig hulpmiddel. Bij de constructie van onder af geeft de snederegel problemen, omdat men uit de conclusie niet kan zien welke formules als snedeformules in de premissen kunnen optreden. Maar Gentzen kon laten zien dat de snederegel

[24] Voor een nadere omschrijving van de systemen: Gentzen (1935*a*), Gentzen (1935*b*) en Kleene (1952*a*).

[25] (Jaśkowski 1934), (Herz 1929), (Herbrand 1930). Stanisław Jaskowski, 1906 – 1965.

[26] Brief Beth – R. Feys, 12 februari 1955. Voor de rest van de brief, zie onder de sectie interpolatie (Craig, Lyndon) van het hoofdstuk over de definitiestelling. Zie in dit verband ook (Beth 1959*b*), p. 293. Het citaat heeft betrekking op het aan R. Feys opgedragen Beth (1955*a*).

[27] Zie Gentzen (1935*a*), p. 181. De conclusie $S$ van de inferentie de consequent.

gemist kon worden: deducties in zijn sequentensystemen LJ en LK kunnen getransformeerd worden in een deductie met dezelfde conclusie zonder snederegel.[28]

$$\text{Snede}\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Theta, A \qquad A, \Delta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Theta, \Lambda} \qquad \frac{\Delta \Rightarrow \Theta \qquad \Gamma \Rightarrow \Lambda}{\Delta, \Gamma_A \Rightarrow \Theta_A, \Lambda}\quad \text{Mix}$$

De regels van Gentzen vallen uiteen in logische regels, waarbij links of rechts een logische operator geïntroduceerd wordt, en structuurregels (snede, verzwakking, mix, permutatie en contractie). Kleene droeg met zijn systeem G3 de voor Beths doeleinden benodigde vereenvoudiging van Gentzen aan: geen structurele regels, wel formuleherhaling.[29] Over het probleem van de onbekende snedeformule schrijft Kleene: [30]

"Given the conclusion B of an inference by the modus ponens rule [...] of the formal system H, we cannot determine the premises $A$ and $A \rightarrow B$ because the $A$ will be unknown.[31] Similary, given the conclusion $\Delta, \Gamma \Rightarrow \Lambda, \Theta$ of a cut in G1, and the analysis of the conclusion specifying how its antecedent is separated into the $\Delta$ and the $\Gamma$ and its succedent into the $\Lambda$ and the $\Theta$, we cannot determine the premises $\Delta \Rightarrow \Lambda, C$ and $C, \Gamma \Rightarrow \Theta$, because the $C$ will be unknown. However, for each of the rules of the propositional calculus G1 except the cut (or of G2 except the mix), given the conclusion of an inference by the rule and the analysis of the conclusion, the premise(s) for the inference are ascertainable. Using this fact with Gentzen's normal form theorem [...], we shall obtain a decision procedure for the propositional calculus, which unlike the truth-table procedure [...] works also for the intuitionistic system as well as for the classical."

Snedevrije bewijzen hebben de subformule-eigenschap, die zegt dat de in het bewijs gebruikte formules als subformules in de te bewijzen formule (of eindsequent) optreden.[32] Positief blijft positief, negatief blijft negatief (voor alle regels minus snede). Bij Beths tableaus zullen derhalve alle formules, die door de reductiemethode opgeleverd worden, subformules vormen van de op geldigheid te testen formule. Kleene merkt hier het volgende over op: [33]

"The steps in the procedure will consist in listing the choices of the premise(s) for the inference of a given conclusion. In doing this, it is tedious to have to distinguish all the ways of applying the structural rules [...]. Therefore, for use in our version of Gentzen's decision procedure, we shall introduce a new Gentzen-type system G3, in which the structural alterations [...] are not counted as separate inferences. We define G3 for the predicate calculus also, although it is only for the propositional calculus

[28] Met de regel Mix wist Gentzen snede eruit te werken. Extra voorwaarden bij de regel mix: als $A$ een formule en $A \in \Theta \cap \Gamma$ dan $A \notin \Theta_A, \Gamma_A$; ofwel $\Theta_A$ en $\Gamma_A$ zijn het resultaat van het wegdrukken van alle optredens van $A$ in $\Theta$ en $\Gamma$.

[29] Men heeft in Kleene (1952*a*) de systemen G1 (p. 442, 443 e.v.), G2 (p. 450, 451 e.v.), G3 (pp. 480, 481, e.v.), G3a (p. 481 e.v.). G1-klassiek en G1-intuïtionistisch zijn Gentzens LK en LJ. G2 is G1 met snede eruit gewerkt. Logische stellingen bleven toch geldig, algemene stellingen hierover: zie stelling 56, 56a (Kleene (1952*a*), p. 482; en behoud van subformule: lemmata 33a, 33b (Kleene (1952*a*), p. 450.

[30] Kleene (1952*a*), pp. 479–480.

[31] 'formal system H': Heytings intuïtionistische systeem.

[32] (Gentzen 1935*a*), (Gentzen 1935*b*) en (Kleene 1952*a*).

[33] (Kleene 1952*a*), p. 480.

that we shall have a decision procedure."

Evenals Kleene in zijn G3-systemen gebruikt Beth geen structurele inferentieregels meer. Kleene (1952*a*) vervolgt met betrekking tot de plaats en de onderlinge orde en de herhalingen van de formules in de loop van het bewijs:

"In order in G3 to dispense with the TCI rules,[34] we must construe the postulates of G3 to apply irrespective of the order and number of repetitions of formulas in the antecedents, and classically in the succedents.[35] In other words, for G3 any postulate application shall remain an application of the same postulate when any sequent is replaced by a sequent 'cognate' to it in the following sense: Two sequents $\Gamma \Rightarrow \Theta$ and $\Gamma^* \Rightarrow \Theta^*$ are cognate, if exactly the same formulas occur in $\Gamma$ (in $\Theta$) as in $\Gamma^*$ (in $\Theta^*$), provided intuitionistically that $\Theta$ and $\Theta^*$ neither consist of more than one occurrence of a formula and hence are the same."

In de tableaus is herhaling van formules onzichtbaar (net als bij Kleene's formulering); bij Beths, nog te bespreken, tableau- (reductie-) sequenten zijn ze wel zichtbaar.

G. Hasenjaeger[36] vroeg zich af of Beth zijn tableaus formuleerde ten behoeve van een volledigheidsbewijs voor een symmetrische sequentencalculus.[37] Dit was volgens Beth niet het geval: [38]

"Als ich dann in 1952 das Padoa-Problem in Angriff nahm, war es mir schliesslich deutlich, man brauche so etwas wie den Teilformel-Satz, aber in nicht-finiter und semantischer Fassung. Und dann stellte es sich heraus, dass so etwas wie der Teilformel-Satz, semantisch betrachtet, geradezu trivial ist; denn die Bewertung einer Formel hängt nur von den Bewertungen ihrer Teilformeln ab. Ich fand also einen nicht-finiten und semantischen Ersatz für den Teilformel-Satz und konnte dann das Padoa-Problem tatsächlich lösen. Es fragte sich dann, ob ich, umgekehrt, meine Methode in finiter Fassung auch da in Anwendung bringen konnte, wo man sich gewöhnlich von den Gentzen'schen Methoden oder auch von den Epsilon-Theoremen bedient.[39] Sie besitzen darüber wohl noch meinen aus 1953 stammenden ersten Versuch.

Diese Fragen habe ich jedoch ziemlich vollständig erledigt in meinen Pariser Vorlesungen (April 1953) [dit moet April 1954 zijn], welche bald in Druck erscheinen werden. [...] Es blieb noch übrig, zu zeigen, dass letztere Methoden sozusagen von meiner Methode aus entwickelt werden konnten (der Ansatz dazu wurde auch von Ihnen und von Herrn Henkin gefunden). Für die Gentzen'schen Methoden hatte ich zur Zeit der Pariser Vorlesungen schon einen partiellen Ansatz, es fehlte jedoch noch etwas wesentliches, bis ich im Dezember 1954 auf die Zweiteilung der Spalten kam. Jetzt sieht es alles so einfach aus, dass man kaum versteht wozu all diese Mühe nötig war."

Let op 'Zweiteilung der Spalten', d.w.z. het splitsen van een tableau: van kolommen naar hulpkolommen. Dit ontbrak, zoals we gerelateerd aan implicatie

[34] TCI rules: de structurele inferentieregels.
[35] Let hier op in verband met de latere formulering van de deductieve tableaus.
[36] Brief G. Hasenjaeger – Beth, 4 februari 1955, (Münster).
[37] Symmetrische sequentencalculus: zie het werk van K. Schütte.
[38] Brief Beth – G. Hasenjaeger, 8 februari 1955.
[39] Gentzen en epsilon naar Hilbert & Bernays (1934).

onder 'Waar' in zijn voorbeeld uit 1954 hebben gezien, nog aan zijn tableaus (waardoor Beth zijn toevlucht tot syntactische regels moest zoeken).

**Samenvatting.** Al de systemen van Gentzen zijn van belang voor Beth en zijn tableaus. Beth maakte voor zijn reducties gebruik van een omgekeerd sequentensysteem dat alleen van subformules van de te beschouwen formule gebruik maakte (d.w.z. zonder analogon voor Gentzens 'Schnitt').[40] Dit alles vormt een systeem voor tableausequenten. De tableaus vormen een bijbehorend plaatje. De metalogische bewijzen — en in zekere zin de preciese regelgeving — verlopen bij Beth vaak over dat systeem voor tableausequenten. De tableau-plaatjes zijn in het gebruik wel handiger. Beth formuleerde een bewerking op zijn tableaus (semantisch) om ze in natuurlijke deductie (syntactisch) om te zetten. Bovendien liet hij zien hoe een sequentenbewijs uit zijn tableaus verkregen kon worden. Tenslotte maakte hij een overstap naar de axiomatische bewijsmethode. Als volgt formuleerde Beth de onderlinge samenhang: [41]

"Denn diese Hilfsmittel leisten (im Allgemeinen sogar in etwas ansprechenderer Weise) alles was mit den Methoden Gentzens geleistet werden kann, und zwar entspricht: [42]

1. Gentzens System LJ: die abgeschlossene deduktive Tafel,
2. Gentzens System LK: die abgeschlossene semantische Tafel,
3. Gentzens System NJ: die aus der Transformation einer abgeschlossenen deduktiven Tafel sich ergebende formale Ableitung,
4. Gentzens System NK: die aus der Transformation einer abgeschlossenen semantischen Tafel auf Grund ihrer Angleichung an eine deduktive Tafel sich ergebende formale Ableitung. Ich erwähne kurz, daß auch die modale Logik mit ähnlichen Mitteln behandelt werden kann." [43]

De punten 1, 3 en 4 zullen in de volgende hoofdstukken worden behandeld.

**Bezwaren van Tarski.** Niet iedereen was een liefhebber van op syntax gebaseerde semantiek en zeker Tarski niet.[44] Hiermee hing een door Beth geconstateerde aversie van Tarski tegen Gentzens methoden samen: "However, I do not quite understand your aversion to Gentzen methods, semantic tableaux, and the like. One of my motives of setting up semantic tableaux was the wish to give an elegant solution for Exercise 11 in Chapter VI of your (Tarski 1946)." Wel moet

---

[40]Vanwege zijn toepassingen op predicaatlogica zullen ook de resultaten van quantoreliminatie tot de subformules gerekend moeten worden, d.w.z. $A(t)$ voor een willekeurige individuele term $t$ is een subformule van $\forall x A(x)$ en $\exists x A(x)$.

[41](Beth 1962*d*).

[42]LJ de intuïtionistische en LK de klassieke sequenten; NJ de intuïtionistische, NK de klassieke deductie. Tafel = tableau.

[43]Beth geeft nog in een noot een opsomming van werk van S. Kanger, M. Guillaume en Saul A. Kripke, (*1941).

[44]Brief Beth – A. Tarski, 5 september 1957. Op de door Beth verwoorde tegenzin van Tarski is geen schriftelijk antwoord van Tarski aangetroffen. Gezien de verdere inhoud van de brief is deze in aansluiting op de tweede Amerika-tocht van Beth geschreven. Tijdens de logica-bijeenkomst op de Cornell Universiteit heeft Beth met Tarski over dit onderwerp gesproken.

worden opgemerkt, dat Beth, voor hij de tableaus introduceerde, zelf niet overtuigd is geweest van het nut van de Gentzen-methodes: [45] “Ich habe mich in der Vergangenheit niemals mit den Gentzen’schen Methoden befreunden können. Es war ja immer so, dass man schliesslich doch zu den herkömmlichen Methoden zurückkehren mußte.” In voornoemde brief aan Tarski probeerde Beth de gelijkwaardigheid van zijn systeem aan te tonen met systemen, waarin geen beroep wordt gedaan op semantische tableaus en de daarmee samenhangende systemen van Gentzen:

“In fact, I have constructed three formalizations for the Hilbert-Ackermann system[46] of elementary logic, one of the normal axiomatic kind, one analogous to Gentzen’s NK, and one analogous to Gentzen’s LK. The connections between these three systems are extremely simple, and they can be established either by means of semantic tableaux or by more familiar methods as applied, for instance, in Kleene’s book.[47] Thus, the application of semantic tableaux or Gentzen methods can, in principle, always avoided if instead reference is made to a certain axiomatic formalization. Gentzen’s Hauptsatz, Extended Hauptsatz, and Subformula Theorem, for instance, can be restated for this formalization.”

Waarschijnlijk ging Beths reactie aan de diepere grond van Tarski’s bezwaren voorbij; denkelijk zag Tarski Beths methode als het omdopen van bewijstheorie tot semantiek — al weten we niet, wat Tarski precies gezegd heeft.[48]

## 6.2 Achtergronden

### 6.2.1 Tableausequenten

Met tableaus $\Delta \mid \Gamma$ in de zin van Beth (waarbij $\Delta, \Gamma$ eindige, eventueel lege, verzamelingen van formules zijn) kan men ook sequenten associëren, d.w.z. uitdrukkingen $\Delta' \Rightarrow \Gamma'$. Ter vergelijking: bij Gentzen zijn de $\Delta$ (hier antecedent), $\Gamma$ (hier succedent) (in zijn sequenten $\Delta \Rightarrow \Gamma$) rijtjes (mogelijk leeg). Zowel bij Beth als bij Gentzen kan men de betekenis van $\Delta \Rightarrow \Gamma$ vastleggen door $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \rightarrow \bigvee_{i=1}^{m} B_i$.[49] Met een rijtje $\Delta$ kan men een eindige verzameling Set($\Delta$) associëren, met als elementen de formules van $\Delta$; het is duidelijk dat $\Delta \Rightarrow \Gamma$ geldt d.e.s.d. als Set($\Delta$) $\Rightarrow$ Set($\Gamma$). Bij Gentzen wordt dit bereikt door de zgn. contractie- en permutatieregels.

Over de keuze van de regels bij de tableaus zegt Beth meer: [50]

“[I]t is not correct to say that the method of constructing semantic tableaux consists in or presupposes an enumeration of possible counterexamples. *The essential point*

[45] Brief Beth – G. Hasenjaeger, 8 februari 1955.

[46] (Hilbert & Ackermann 1928). Wilhelm Ackermann, 1896 – 1962.

[47] (Kleene 1952*a*).

[48] In het hoofdstuk over de definitietheorie is al ingegaan op de pogingen van Tarski om anderen op zijn wijze semantiek te laten bedrijven. Overigens stond Beth met zijn bezigheden niet volledig buiten de lijn van onderzoek. De bekendste volledigheidsbewijzen construeren modellen langs syntactische weg (Gödel, Henkin).

[49] (Gentzen 1935*a*), p. 180

[50] Citaat uit brief Beth – H.L. Gelernter, 19 januari 1958. Cursivering door mij.

*is that, if a proof is possible, then the semantic tableau itself is a proof in a certain formal system F.* In certain special cases, and especially in the case of sentential logic, we can say more. If a proof is possible and if we are not satisfied with a proof in F but require, for instance, a proof in PM[51], then we can, without even constructing the semantic tableau, by simply expecting the formula $X$ to be proved, give an exhaustive enumeration of those formulas which could be used as substituends for an application of the axioms of PM. Of course, some substituends will be unreasonable. The number of substituends can be substantially reduced if the axiom system of PM is replaced by a more suitable one, and still more if we add to the axioms a few formulas which are provable (you also do not require your axioms to be independent)."

De regels voor tableaureductie geven, geformuleerd als regels voor tableausequenten, een systeem dat veel lijkt op Kleene's G3-systeem, met als voorname eigenschap: alle regels zijn *inverteerbaar*, d.w.z. een conclusie geldt d.e.s.d. als elk van de premissen geldt onder een interpretatie. Tableausequenten zijn handig voor de metatheorie, maar omslachtig in de praktijk wegens herhaling van formules. Een voorbeeld is voor dit geval handiger dan een moeizame formulering. Neem wederom het zich sluitende tableau voor de formule van Peirce.

$$\begin{array}{rl|l|ll}
 & & & ((A \to B) \to A) \to A & \text{stap 1}\\
 & & (A \to B) \to A & A & \text{stap 2}\\ \cline{2-4}
 & \multicolumn{1}{|l}{A \to B} & \multicolumn{1}{r|}{A} & & \text{stap 3}\\
A & \multicolumn{1}{|l}{B} & & & \text{stap 4}
\end{array}$$

Nu gaat men laag voor laag in het tableau van boven naar beneden, en schrijft men per stap alle formules op; | wordt vervangen door $\Rightarrow$, dus $\Delta \mid \Gamma$ wordt tot $\Delta \Rightarrow \Gamma$. Vanwege later gebruik nu een nieuw voorschrift: [52] expansie vanuit het midden (|, respectievelijk $\Rightarrow$).

Notatie: $F := ((A \to B) \to A) \to A$ en $G := (A \to B) \to A$; in vet: de nieuw ontstane formules. De formules in vet corresponderen precies met de getoonde formules in het bovenstaande tableau.

$$\begin{array}{ccccccc|l}
 & & & \Rightarrow & ((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \mathbf{A}) \to \mathbf{A} & & & \text{stap 1}\\
 & & (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \mathbf{A} & \Rightarrow & \mathbf{A}, F & & & \text{stap 2}\\ \cline{1-7}
G & \Rightarrow & \mathbf{A} \to \mathbf{B}, A, F & & G, \mathbf{A} & \Rightarrow & A, F & \text{stap 3}\\ \cline{1-3}
G, \mathbf{A} & \Rightarrow & \mathbf{B}, A \to B, A, F & & & & & \text{stap 4}
\end{array}$$

Dit laat bovendien zien dat de hier gebruikte manier om tableaus voor te stellen beter aansluit bij de ontwikkeling van een sequentenbewijs dan Beths kolommatige voorstelling.

## 6.2.2 Beths eisen

Nu de tableaus en de sequenten de revue gepasseerd zijn is het mogelijk om op 'structurele' eigenschappen en andere regels in te gaan. Met behulp van de tableausequenten kan men nu overgaan op de drie eisen waaraan volgens Beth zijn semantische tableaus moeten voldoen.[53]

---

[51] PM: Russells 'Principia Mathematica'.

[52] Dit wordt niet door Beth voorgeschreven, maar door mij.

[53] Ms. Beth, *Logic as based on common sense* = (Beth 1960*a*).

1. De afsluiting van een semantisch tableau mag niet afhangen van de relatieve orde waaraan de formules tijdens hun reductie worden onderworpen. Dit correpondeert volgens Beth met resultaten van Curry en Kleene met betrekking tot de permutatieerbaarheid van de regels voor Gentzens systemen LK en LJ.
2. Men moet laten zien dat als de tableaus voor de sequent $\Delta^* \Rightarrow \Gamma^*, A$ en $\Delta^{**}, A \Rightarrow \Gamma^{**}$ gesloten zijn, dit ook het geval is voor het tableau voor $\Delta^*, \Delta^{**} \Rightarrow \Gamma^*, \Gamma^{**}$. Dit correspondeert met Gentzens Hauptsatz voor LK en LJ.
3. Men moet bewijzen dat als $A$ een logische identiteit is, het tableau voor de sequent $\emptyset \Rightarrow A$ gesloten is (dit is volledigheid in de gebruikelijke zin). Een verzwakking van punt 3 is de stelling van Herbrand.

Volgens Beth zijn bij

- het laten vallen van de eis van eindig bewijs de eisen 1, 2 en 3 gemakkelijk te verkrijgen.
- evenzo bij de eis van eindig bewijs: 1, 2 en daarbij eis 3 in verzwakte vorm (Herbrand).

De genomen reductiestappen tijdens het afwikkelen van een tableau mogen geen invloed uitoefenen op het al dan niet sluiten van een tableau, hoe ingewikkeld men het tableau ook maakt. Anders zou volgens Beth het machinale aspect verloren gaan. Per stap moet men een vrije keuze hebben. Hiertoe week Beth af van Kleene's G3, in het bijzonder met betrekking tot de behandeling van de disjunctie-operator $\vee$.[54] En in Beth (1962*a*)[55] heette het: "From the very nature of valuation problems it follows that for the final result it does not matter in what *relative order* the various formulas [...] are singled out to be '*treated*' under the reduction schemata. Secondly, [...] all reduction steps are *reversible*."

Blijft zo langzamerhand over het geven van een volledigheidsbewijs. Dit zal de lezer hier onthouden worden. In een later stadium zal daar bij de bespreking van de Beth-modellen, die toch ook op semantische tableaus berusten, op worden ingegaan.

### 6.2.3 Resultaten

#### Tableaus bij eenvoudige bewijzen

In het begin van dit hoofdstuk is al de eenvoud van de tableaus genoemd. Ook kunnen bewijzen van stellingen vereenvoudigd worden. Dit zijn niet alleen voordelen bij de technische ontwikkeling, Beth had ook een ideële motivatie.

[54] Brief Beth – P. Lorenzen, 1 februari 1960, brief P. Lorenzen – Beth, 5 februari 1960, (Kiel). Paul Peter Wilhelm Lorenzen, 1915 – 1994

[55] (Beth 1962*a*) p. 15 (.4), cursief door Beth.

Beth hechtte er groot belang aan om de voordelen van de logica maatschappelijk zo breed mogelijk te spreiden. Dit hing niet alleen samen met het verstrekken van onderwijs, maar ook met het totale maatschappelijke verkeer.[56] Dit is gezien zijn ervaringen in de Tweede Wereldoorlog niet vreemd. Verbreiding van logisch inzicht bood wellicht een werktuig om onzindelijke, gevaarlijke of gedegenereerde denkbeelden te ontmaskeren. Beth is voorzover ons bekend de enige Nederlandse logicus die op dit terrein minstens één resultaat geboekt heeft, namelijk het corrigeren met enkele van zijn, Beths, logische geschriften van de vroegere denkbeelden van een aanvankelijk in Scheveningen en later in Breda gevangen gezette Duitse oud-SSer.[57]

Beth meende in de systemen van Gentzen de meest natuurlijke vorm van redeneren te herkennen. Zijn vereenvoudiging van Gentzen en zijn beslissingsmethode konden derhalve goede diensten bewijzen bij het verdere onderzoek naar het redeneren en het 'denken'. Ook binnen de filosofische context was het mogelijk deze inzichtelijke methode te gebruiken om filosofen zindelijk te maken. Volgens Beth zijn tal van filosofische problemen met behulp van deze betrekkelijk eenvoudige methode aan te vatten. Zelf bracht hij dit met verschillende studies in de praktijk.[58]

Beth propageerde de tableaus met de claim dat zij bijdragen aan de versnelling en vereenvoudiging van een aantal bewijzen van stellingen (en dit ook gerelateerd aan die van Gentzen). Wij noemen hier in het bijzonder zijn inspanningen ten aanzien van Gentzens 'Hauptsatz', de definitiestelling en de interpolatiestelling.

Er is nog een ander onderscheid met Gentzen. Bij Gentzen gaat men niet zoals bij Beth van willekeurige formules uit. Men moet de formules eerst terugbrengen tot equivalenten in normaalvorm. Beth was daarmee niet de eerste, Herbrand ging hem voor.

In 1954 vond P. Bernays nog dat de Stelling van Herbrand als de centrale stelling van de elementaire logica gezien kon worden.[59] Moeilijkheden bij Herbrand werden al door Gentzen geconstateerd, maar door hem niet alleen. Bernays merkte in verband met Beth (1950) al op: [60]

"Dass Sie den Herbrandschen Satz so eingehend besprechen, ist sehr begrüssenswert.

---

[56]Brief Beth – P. Bernays, 3 mei 1955: "Die grössten Vorteile liegen m.M.n. auf philosophischem und didaktischem Gebiet. Man braucht nicht anfangs formal vorzugehen und erst nachträglich eine Rechtfertigung geben, man kann inhaltlich anfangen und dann mehr oder weniger experimentierend den formalen Gesichtspunkt einführen." Zie ook de door Beth samengestelde wervende tekst op de omslag van zijn vertaling (Tarski 1953) van Tarski's *Introduction to logic.* (die losse omslag zal wel niet door iedereen bewaard zijn, maar is nog wel te vinden in het Beth-archief.)

[57]In de eerste instantie vanwege lezing door A. Ullmann van Beth (1951*a*). Ullmann schreef in een correspondentie met Beth zijn verdomming en goedgelovigheid in de propaganda vooral toe aan het indertijd door hem bezochte onkritisch type school: het klassieke gymnasium.

[58]Als voorbeeld hiervan vindt men in het hoofdstuk over deductieve tableaus Beths bewerking van het probleem Locke – Berkeley.; George Berkeley, 1685 –1753.

[59](Bernays 1954).

[60]Brief P. Bernays – Beth, 2 september 1950, (Zürich). B. Dreben en J. Denton hebben in 1966 en later Herbrands Recherches uit 1930 aangevuld en verbeterd.

Nur haben Sie gar nicht erwähnt, dass für diesen Satz ausser dem ursprünglichen Herbrandschen Beweis — von dem ich zweifle, ob ihn irgend jemand bis zum Ende hat genau verfolgen können[61] — neuere Beweise gegeben worden sind: der eine aus dem allgemeinere *Gentzenschen* Teilformelsatz, der ja an sich ein wichtiges Theorem der theoretischen Logik ist — der Beweis für diesen ist übrigens kürzlich durch Herrn Schütte vereinfacht worden —, der andere mit Hilfe des 'ersten $\varepsilon$-Theorems' (in seiner erweiterten Fassung), welcher in den Grundlagen der Mathematik II ausgeführt ist." [62]

Een belangrijk punt voor Beth was zijn vereenvoudiging van het bewijs van Gentzens Hoofdstelling ('Hauptsatz'). Dit werd door hem als volgt aan Kleene gemeld: [63]

"I have more fully established the connections between semantic tableaux and derivations in Gentzen systems. Actually, closed semantic tableaux can be read (or rewritten) both as derivations in one specific L (sequenten) system (substantially, your system G3, though permitting any number of formulas in the succedent in the intuitionistic case) and as derivations in one specific N (natuurlijke deductie) system. These derivations automatically have any such convenient properties as described in 'Hauptsatz', 'Teilformelnsatz', and 'erweiterter Hauptsatz'. The 'erweiterter Hauptsatz' is obtained in a form which also applies in the intuitionistic case. It seems to me that the method of semantic tableaux entails a far-reaching simplification of metamathematics. For instance, the 'Hauptsatz' is treated as follows.

*Definition.* A closed formula $C$ is said to be eliminable whenever, for any $A_1, \ldots, A_j, A_{j+1}, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_k, B_{k+1}, \ldots, B_n$, the closure of the tableaux for $A_1, \ldots, A_j \Rightarrow C, B_1, \ldots, B_k$ and for $C, A_{j+1}, \ldots, A_m \Rightarrow B_{k+1}, \ldots, B_n$ entails the closure of the tableau for $A_1, \ldots, A_m \Rightarrow B_1, \ldots, B_n$.

*Theorem.* Every closed formula $C$ is eliminable. The *proof* is by a straightforward recursion on the construction of $X$. It is, substantially, the proof given by Gentzen, but it no longer requires any inventiveness."

Parafraserend, en met behulp van Beth (1962*a*) kan men dit als volgt samenvatten. Aangenomen, voor elke sequent $\Delta \Rightarrow A$ bestaat er een semantisch tableau.[64] Stel dat men voor de tableausequenten $\Delta \Rightarrow A$ en $\Delta, A \Rightarrow A \rightarrow B$ gesloten tableaus kan construeren, dan bestaat er ook een gesloten semantisch tableau voor de tableausequent $\Delta \Rightarrow B$.[65]

En nu de definitiestelling. Als men de interpolatiestelling voor de elementaire logica heeft, dan heeft men ook de definitiestelling en de 'joint consistency'. Hier zal alleen op de interpolatiestelling worden ingegaan d.m.v. een 'abstract' van Beths voordracht *A proof of Craig's lemma by means of semantic tableaux*.[66]

---

[61] Ook Beth had daar moeite mee, zie de brief Beth – G. Kreisel, 1 augustus 1958: "As to Herbrand, I never succeeded in understanding more than a part of his writings."

[62] Grundlagen der Mathematik II: (Hilbert & Bernays 1934), tweede deel uitgekomen in 1939.

[63] Brief Beth – S.C. Kleene, 15 april 1956.

[64] (Beth 1962*a*), p. 123, stelling 1a.

[65] (Beth 1962*a*), p. 53, p. 129–131, i.h.b. stelling 20.

[66] Citaat uit ms. E.W. Beth, *A proof of Craig's Lemma by means of semantic tableaux*, wordt vermeld (short communication, p. xvii) als abstract in Proc. of the Int. Congress of Mathematicians, (14–21 augustus 1958, Edinburgh), ed. J.A. Todd, Cambridge (U.P.), 1960, maar volgens p. vii (preface) afgedrukt in een aparte uitgave van abstracts die onder de deel-

"Let us suppose the semantic tableau $\mathcal{T}$ for the sequent $\Delta', A, \Delta'' \Rightarrow \Gamma$ (where $A$ is a closed formula and $\Delta', \Delta'', \Gamma$ are sequences of closed formulas) to be closed.

Then we construct a formula $A^*$ which represents the *strength of the formula A* in the tableau $\mathcal{T}$ as follows. We first consider a subtableau $\mathcal{T}'$ of $\mathcal{T}$ which does not split up and whose closure must thus be due to the appearance of equiform formulas $X$ both left and right.

- If both formulas $X$ arise from $A$, then the strength of $A$ in $\mathcal{T}'$ is *contradiction*;
- if only the left formula $X$ arises from $A$, then its strength in $\mathcal{T}'$ is $X$;
- if only the right formula $X$ arises from $A$, then its strength in $\mathcal{T}'$ is $\neg X$;
- and if none of the formulas $X$ arises from $A$, then it strength is *tautology*. And so on.

It is easy to show that the tableaux for the sequents $\Delta', A^*, \Delta'' \Rightarrow \Gamma$ and $A \Rightarrow A^*$ are closed."

### Voor- en nadelen

Bij de methode van het tegenvoorbeeld begint men met een formule (zeg $A$) als onwaar aan te nemen. Men zoekt dan een bedeling voor de atomen die $A$ onwaar maakt. Stel $A$ is van de vorm $cA$ of $cA_1A_2$ ($c$ een unaire of binaire logische operatie, hier in prefix-notatie), dan wordt de vraag naar de bedeling voor de atomen van $A$ herleid tot de corresponderende vraag (vragen) voor $A_1$ ($A_1$ en $A_2$. Zo gaat men door tot men bij de atomen uitkomt. Deze reductie-methode probeert a.h.w. *minimale condities* op de gezochte bedeling op te sporen; men hoeft niet alle mogelijke bedelingen de revue te laten passeren.

Een voorbeeld van een tijdrovender onderzoekingsmethode bestaat uit het gebruik van de waarheidstafels. Bij de methode van de waarheidstafels gaat men alle mogelijke bedelingen af tot men op een bedeling stuit die de formule onwaar maakt. Voor geldige formules houdt dit in dat men alle bedelingen moet aflopen voor men een oordeel 'waar' kan vellen. Dit vergt in vele gevallen meer werk. (Er bestaat echter een versnelde waarheidstafel-methode, die dichter bij de tableaumethode staat.) Tableaus worden steeds onoverzichtelijker (ook wanneer men de kortst mogelijke constructie voor een geldigheidsprobleem gebruikt) naarmate het probleem ingewikkelder wordt. Dit hebben tableaus gemeen met waarheidtafels.

Een snelle afhandeling van een tableau gaat vooral op, indien men bij de samenstelling van het tegenvoorbeeld op de meest slimme wijze te werk gaat. Indien niet, dan kan men met een enorme sleep aan subtableaus blijven zitten, of vanwege onjuiste constantenkeuzen een enorme toename aan formules. Beth geeft slechts leidraden voor het op een zo eenvoudig mogelijke manier doorworstelen van een tableauconstructie. Er zijn geen voorschriften hiertoe. Dit laat hij na om daarmee niet het machinale aspect te doorkruisen.

---

nemers verspreid is. Ms. E.W. Beth, *Semantische Tafeln und ihre Anwendung im klassischen Prädikatenkalkül*, Kolloquiumsvortrag, Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung, Universität Münster (Westfalen), Freitag 24. Januar 1958, 16.30 – 18.00, pp. 2–5, en voorbeeld (pagina niet benummerd). Beth (1962*a*), pp. 158–161. De methode betreffende Craigs lemma is vergelijkbaar met die in Beth (1959*b*), p. 289–290.

Er zijn vereenvoudigingsmiddelen. Men kan bijvoorbeeld aangeboden formules handzamer maken door hanteerbaardere equivalenten van die formules in te zetten. Men denke aan het brengen van formules in een normaalvorm, Skolem-vorm of het toepassen van Herbrand-domeinen. Wel moet worden opgemerkt dat in het nog later te citeren Beth (1960*a*), p. 284 onder punt 2 de effectiviteit van een methode juist afgewogen wordt tegen het gebruik van dergelijke hulpjes. Beth ging er prat op een algemene theorie te hanteren en niet, zoals Gentzen bij zijn aangescherpte hoofdstelling, zich te beperken tot formules in een normaalvorm. Bovendien had dit zijn voordelen volgens Beth in 1955: [67] Die Vermeidung des Übergangs nach gewissen Normalformen hat den grossen Vorteil, dass das Verfahren sich in dieser Form auch für die intuitionistische Logik verwenden lässt. Obgleich mir dies noch nicht ganz klar ist, glaube ich doch, dass irgendwelche Möglichkeit existiert, aus den semantischen Tafeln auch die intuitionistische Zulässigkeit gewisser Schlüsse in einleuchtender Weise abzulesen." Beth ging niet vooraf vereenvoudigingen toepassen, maar deed dit tijdens het doorlopen van het tableau: [68] "In der klassischen Logik möchte ich die 'règle de passage' erst aus der Tafel ablesen und sie erst dann zur Vereinfachung des Verfahrens anwenden. Dasselbe gilt sogar für den modus ponens und für andere derartige Umformungen."

Door het voorgaande wordt men als vanzelf op de kwestie van het kortste tableau gebracht. Per te testen formule bestaat er een groep tableaus die alle deze test uitvoeren. Deze tableaus hoeven niet van eenzelfde ingewikkeldheid te zijn. Stel dat men uit zo een groep een tableau heeft. Kan men dan vanuit dit tableau met een mechanisch procedure een kortere vinden en na op deze wijze lang genoeg doorwerken, de allerkortste?[69]

### Formuleringen geïnspireerd door tableaus

De grondvorm van Beths tableaus is een boom. Een boom is een niet-cyclische graaf: men kan een al een keer doorlopen punt niet voor een tweede keer doorlopen. Dit wil niet zeggen, dat men bij tableaus geen cyclische herhalingen kent; een al voorgekomen situatie kan zich vele malen, jazelfs zonder ophouden, lineair geordend herhalen.

Een boom heet *eindig vertakkend* als onder elke knoop er een eindig aantal directe vertakkingen te vinden zijn (hier beperkt men zich tot duale vertakkingen). Een boom of een tak heet eindig, als hij een eindig aantal knopen heeft. *König's lemma*: Een eindig vertakkende boom, die toch oneindig is, moet een oneindige tak hebben. Men kan al oneindige bomen hebben door een potentieel oneindige tak vanwege quantorafbraak met inzet van steeds nieuwe constanten.

In sommige metastellingen, en onder zekere beperkingen in zijn intuïtionistische modellen, gebruikte Beth al de grondvorm van de boom. De formules werden, per knoop één, aan de takken gehangen. Men kan er bovendien topologieën mee construeren Twee voorbeelden: met de verzameling van alle takken

[67] Brief Beth – P. Bernays, 3 mei 1955.
[68] Brief Beth – P. Bernays, 3 mei 1955.
[69] Beth onthoudt ons het antwoord en snijdt dit probleem zelfs niet aan.

van een boom als punten van de ruimte kan men een boomtopologie vormen. Een andere benaderingswijze is door middel van de Baire-ruimten als verzamelingen van (al dan niet) oneindige rijtjes natuurlijke getallen, waartoe de takken van een gekozen valuatie in aanmerking komen.[70] Beide voorbeelden komen in de loop van dit werk aan bod.[71] Ook voor de stap van het gebruik van semantische tableaus voor klassieke logica naar dat voor intuïtionistische logica was een modellering van de bomen van belang. Voor het klassieke geval bleef men de moeilijkheid van het een beroep op oneindigheid moeten doen houden. Dit had zijn weerslag op de volledigheidsbewijzen. Hierop werd al ingegaan in Beth (1955*a*): "in those cases, in which the (tentative) construction of a semantic tableau involves infinitely many steps, there is always a suitable counter-example" en "In this connection a difficulty arises, as an infinite tableau may present infinitely many splittings and infinitely many closures; however the required proof results from a familiar *compactness argument*."

Het ware wellicht handiger geweest als Beth zelf al systematischer gebruik had gemaakt van voorstellingen in de vorm van bomen bij het opzetten van zijn tableaus. Hij deed dit echter niet, sommigen van zijn opvolgers wel. In Lis (1960) werden in navolging van Beth bomen geïntroduceerd met daarin knopen, waaraan per knoop één formule werd opgehangen. Lis voorzag de formules van een kenmerk + (formules van Beths linkerzijde) of − (formules van Beths rechterzijde).[72] Bowen (1979) gebruikte een andere voorstelling: de tableaus werden tot op zekere hoogte als bomen getekend, maar wel met ruimtelijke opdeling in links en rechts voor de karakterisatie voor waar of onwaar. De methode van Bowen is in dit geschrift gebruikt: iets gemakkelijker leesbaar dan bij Beth, maar toch niet al te zeer daarvan afstand nemend. Alle methoden geven formeel even goed de tableaus weer, alleen het praktische gebruik bepaalt de keuze.

---

[70] Baire-ruimten: de Cartesiaanse product-ruimte $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, ofwel de verzameling van oneindige rijtjes natuurlijke getallen. De topologie is gebaseerd op de Tychonoff-topologie. Zie verder (Engelking 1989).

[71] In ms. Beth, *Logic as based on common sense*, p. 7 (ofwel (Beth 1960*a*), pp. 285–286): Beth vond dat de topologische volledigheidsresultaten voor intuïtionistische propositionele logica door Tarski en voor de intuïtionistische elementaire logica door Mostowski en Rasiowa verbeterd kunnen worden in zoverre dat alle te benutten topologische ruimten gesloten deelverzamelingen van het Cantor-discontinuum zijn.

[72] Lis had veel later 'navolgers', waaronder Smullyan (1968) en Fitting (1969). In plaats van + en − gebruikten zij T en F — soms wordt ook in onderliggend geschrift hiervan gebruik gemaakt om kort de waar- of onwaar-plaatsing van een formule te omschrijven. Volgens Fitting (1996), p. ix, was Lis (1960) voor lange tijd niet bekend (in de eerste druk van Fitting (1996) uit 1990 komt Lis nog niet voor). Misschien niet voor Fitting, maar wel voor Beth: in Beth (1961*c*) werd op p. 19 Lis (1960) al vermeld. Hieraan werd door Beth verder geen aandacht besteed: het bleef gesleutel in de marge wat Fitting c.s. ook mogen beweren (dit i.t.t. Lis, die zijn manier van noteren niet als een ontdekking van de tableaus presenteerde, maar als een handige manier om vanuit Beths methode aan deducties te komen).

## 6.3 Prioriteitskwesties

### 6.3.1 Verwante systemen

De op de methoden van Gentzen geënte tableaus kennen een aantal varianten die tot op zekere hoogte op elkaar lijken. Ook hier gaat de wetenschapsfilosofische en wetenschapssociologische Wet van de Welriekende Viooltjes op.[73] De prioriteitenstrijd gaat in deze vooral tussen K.J.J. Hintikka en Beth: [74]

"La méthode de déduction sera la méthode des tableaux sémantiques; cette méthode, qui constitue une nouvelle version des systèmes NK et LK de Gentzen, fut décrite indépendamment par E.W. Beth (1955), K.J.J. Hintikka (1955), Kanger (1957) et Schütte (1956)."

Door de schrijver zal worden voorbijgegaan aan claims die gelegd worden om C.L. Dodgson (Lewis Carroll) met zijn waarheid zoekende bomen ergens in dit verband, en wel aan kop van de rij belanghebbenden, te plaatsen.[75] Er wordt in Beth (1960*a*), p. 284, opgemerkt:

"The [...] method of semantic tableaux is one among several devices which have been offered as substitutes for the more conventional axiomatic treatment of elementary logic. The origin of these devices is found in Herbrand's ideas, and we may point to Gentzen's systems NK and LK and to the Hilbert-Bernays theory of the $\epsilon$ -symbol as early representatives. More recent contributions are those by Craig, Guillaume, Hintikka, Kanger, Kripke, Quine and Schütte." [76]

Beth (1960*a*), p. 284, gaf een aantal regels om deze systemen met elkaar te vergelijken:

"An evaluation of the efficiency of these various systems can be based on the following considerations.

- Simplifications in the proofs of more profound metamathematical results.
- The avoidance of reduction to prenex and other normal forms.
- The degree to which Gentzen's subformula principle is brought into effect.
- The possibility of an adaptation to the requirements of modal logic, intuitionistic logic, and many-valued logic."

Volgens Beth boekt zijn semantische tableaumethode resultaat op alle bovenstaande punten — en de methode van hemzelf vond hij dan ook de allerbeste.

### 6.3.2 Beth versus Hintikka

De eerste semantische tableaus uit 1954 van Beth werden pas vrij laat in 1956 uitgegeven, heel vervelend voor de prioriteitenstrijd. Zijn directe concurrentie

[73] Ook wel Maartsche Viooltjes of Blauwe Wilde Violen (België) genoemd. Als er één is, dan zijn er meer.

[74] E.W. Beth, *Observations sur un projet de recherche* [Euratom-contract]: dit ms. is gezien de in de tekst vermelde data niet vóór 1961 samengesteld.

[75] Zie de inleiding van Bartley (1977) voor de te leggen relatie tussen Dodgsons logica en de latere methoden waaronder die van Beth. C.L. Dodgson, 1832 – 1898.

[76] Quine (1955). In zijn voorstudie — tot Beth (1960*a*) — 'Logic as based on common sense', ms. p. 4, vermeldde Beth nog verder: Copi, Fitch, Popper, Stanley en Symonds met Chisholm.

bestond uit Hintikka (1955). Wel begon Beth eveneens in 1955 zijn tableaus te presenteren waaronder Beth (1955*a*) en in Beth (1955*b*). Mede door het rondzenden van het manuscript voor Beth (1955*b*) kreeg Beth het volgende antwoord van W.V.O. Quine: [77]

"I have read 'Semantic entailment and formal derivability' with interest, and am forwarding it to Alfred [Tarski] with a copy of this letter. An evident virtue of your method is that it cuts both ways, producing proofs of validity and non-validity. In this respect your method is like some recent work of K.J.J. Hintikka, particulary 'Form and Context in Quantification Theory', which appeared as part of a publication entitled 'Two papers on Symbolic Logic' and constituting Fascicule VIII, 1955, of Acta Philosophica Fennica. Much of Hintikka's theory appeared earlier in a less elegant form in his 'Distributive Normal forms in the calculus of predicates', Acta Philosphica Fennica, 1953. He seems to have anticipated your ideas very considerably, even your trees; see page 47 of the work last mentioned."

Volgens Beth in een brief aan Hintikka kon als volgt de loop van zijn bezigheden beschreven worden: [78]

"It [Beth (1955*b*)] is a sequel to a series of papers published in 1951 and subsequent years. In my lectures at the Sorbonne (Spring 1954),[79] I summed up what was available at that moment. However I felt that something was lacking which, eventually, would simplify the whole construction to a considerable extent. Only after the ms. has been sent to the publisher, I found out (last November or December) how to fill the gap[80] by constructing a semantic tableau and transforming it into a formal derivation. So I decided to add a brief postscript to my ms. [...] and to discuss the semantic tableaux more thoroughly in a separate memoir."

Hintikka bracht er het volgende tegen in: [81]

"Perhaps I am allowed to tell you that I was aware of the main features of the approach subsequently carried out in *Form and Content* as long back as 1952. In particular, I was aware of the fact that an unsuccessful model set construction may be converted into a formal disproof (This is witnessed by the remarks at the end of the paper on sentential logic). At the time, however, I was unable to write a longer paper on the subject. [...] Thus it was not until late 1954 that I could start working out my ideas in more detail." [82]

Bovenstaande laat zien dat Beth niet veel eerder dan Hintikka met een soortgelijke vereenvoudigings- en beslissingsmethode kwam. Beiden waren in dezelfde tijd op het idee gekomen, beiden publiceerden op hetzelfde moment en

[77]Brief W.V.O. Quine – Beth, 2 juni 1955. In dit verband zijn nog van belang Beths antwoord in de brief Beth – W.V.O. Quine, 7 juli 1955 en de brief Beth – K.J.J. Hintikka, 7 juli 1955.

[78]Brief Beth – K.J.J. Hintikka, 12 juli 1955.

[79](Beth 1956*b*).

[80]'gap': zie het al geciteerde deel uit een brief van Beth aan Hasenjaeger van 8 februari 1955 over het splitsen van kolommen.

[81]Brief K.J.J. Hintikka – Beth, 20 juli 1955, (Korso).

[82]Nadat Beth op deze wijze van het werk van Hintikka op de hoogte was gesteld voegde hij aan het op uitgeven staande Beth (1955*b*) nog een postscript, pp. 340–341, gewijd aan Hintikka toe.

onafhankelijk van elkaar. Dit feit werd ook door Beth in een al eerder gegeven citaat geboekstaafd.

### 6.3.3 Hintikka's modelverzamelingen

Bij generalisaties van semantische tableaus die op verzamelingen steunen, verkrijgt men formuleringen die in grote mate overeenkomen met de 'model set'-methode in Hintikka (1955). Hintikka keek niet alleen naar elementaire logica, maar trachtte daarnaast een logica met typen aan te vatten en deze laatste door middel van een geschikte vertaling onder te brengen bij een tweede orde logica.[83]

Hintikka construeerde een model, zeg $\mathcal{M}$. $\mathcal{M}$ wordt bepaald door een universum, een afbeelding van de individuele constanten en van de predicaten. Nu is het mogelijk om 'waar' in het model te definiëren voor een formule.[84] Men heeft een verzameling formules $\mathtt{M}$, de *modelverzameling*, die alle in een gegeven model $\mathcal{M}$ ware formules omvat — en omgekeerd, elke modelverzameling heeft een model waarop de formules van die verzameling waar zijn (een vorm van de volledigheidsstelling).

Hintikka hanteerde twee soorten modelverzamelingen: de modelverzamelingen en de sterke modelverzamelingen. Hiertoe diende de volgende overweging: Een model kan oneindig zijn, een formuleverzameling eveneens. Kennis heeft men slechts over de eindige fragmenten. Daarom ging Hintikka de voorwaarden C van zijn definitie van sterke modelverzameling in twee groepen splitsen: groep Ca en groep Cb. Hintikka's omschrijving van het begrip 'modelverzameling' wordt beperkt tot de halve definitie, namelijk de groep Ca. Als volgt beschreef hij dit aan Beth: [85]

"The very novelty [...] of the notion of a model set lies in the fact that a model set need not be complete (maximal). A consistent and complete set of formulae is characterized by the conditions C of *Form and Content* [...]; [86] but a model set need only satisfy one-half of these conditions, viz. the conditions Ca. It is only due to this fact that one can adhere to the subformula principle when constructing a model set."

De voorwaarden voor C, Ca (= Ca0 — Ca4) en Cb (= Cb0 — Cb4) behelsden de volgende punten. De Ca-condities gaan van complex naar eenvoudig, de Cb-condities van eenvoudig (vgl. Gentzen's eliminatieregels) naar complex (Gentzen's introductieregels).

[83] Aan Hintikka's logica met typen zal hier worden voorbijgegaan.

[84] Zie (Hintikka 1955), T0–T4, pp. 22–23.

[85] Brief K.J.J. Hintikka – Beth, 20 juli1955, (Korso). Met deze brief reageerde Hintikka op de in het postscript van Beth (1955*b*) aan Hintikka toegeschreven werkwijze, waarbij een consistente formuleverzameling uitgebreid wordt naar een volledige en consistente 'normale' verzameling. De techniek hiertoe was volgens Beth al ontwikkeld door G. Hasenjaeger en L. Henkin en volgens hem al beschreven in Beth (1951*b*). Die volledige (maximale) en consistente verzameling was volgens Hintikka nu net niet de bedoeling. In zijn brief (Beth – K.J.J. Hintikka, 22 juli 1955) gaf Beth hierin Hintikka gelijk.

[86] C: de sterke modelverzameling die voldoet aan C0a — C4a en aan C0b — C4b.

Ca0 (consistentie) Als $A \in \mathtt{M}$, dan $\neg A \notin \mathtt{M}$. Met als correspondent in de andere afdeling Cb0: Als $A \notin \mathtt{M}$, dan $\neg A \in \mathtt{M}$.

Ca1 Als $A \wedge B \in \mathtt{M}$, dan $A \in \mathtt{M}$ en $B \in \mathtt{M}$. Met corresponderend Cb1: Als $A, B \in \mathtt{M}$, dan $A \wedge B \in \mathtt{M}$.

Ca2 Als $A \vee B \in \mathtt{M}$, dan $A \in \mathtt{M}$ of $B \in \mathtt{M}$ (of $A, B \in \mathtt{M}$). En Cb2: Als $A \in \mathtt{M}$ of $B \in \mathtt{M}$ (of $A, B \in \mathtt{M}$), dan $A \vee B \in \mathtt{M}$, vooropgesteld dat alle individuele constanten van $A \vee B$ in de formules van $\mathtt{M}$ optreden.

Ca3 Als $\exists x A \in \mathtt{M}$, dan $A(a/x) \in \mathtt{M}$ voor een $a$. En Cb3: Als $A(a/x) \in \mathtt{M}$ voor een $a$, dan $\exists x A \in \mathtt{M}$.

Ca4 $\forall x A \in \mathtt{M}$ dan $A(a/x) \in \mathtt{M}$ voor elke $a$ optredende in de formules van $\mathtt{M}$.[87] En Cb4: $A(a/x) \in \mathtt{M}$ voor elke $a$ optredende in de formules van $\mathtt{M}$ dan $\forall x A \in \mathtt{M}$.

Onder Ca-regels treft men in tegenstelling tot de Cb-regels geen afsluiting onder de operatoren aan. Men vormt C0 — C4 door 'als ... dan ...' te vervangen door '... d.e.s.d. als ...'

Een moeilijkheid (als men effectiviteitseisen stelt, zoals hier gebeurt) bij deze definitie vormt het vaak niet eindige karakter. Voor 'Als $A \notin \mathtt{M}$, dan $\neg A \in \mathtt{M}$' (d.w.z. regel Cb0) heeft men toch een beslissing te nemen met behulp van een overzienbaar eindig deel $\mathtt{M}^*$ van $\mathtt{M}$. Soms levert dit, er van uitgaande dat dit soort systemen niet meer informatie oplevert dan er in is gestopt, ook moeilijkheden op. Eenzelfde geval treft men bij C4b aan.

Elke modelverzameling kan uitgebreid worden tot een *sterke modelverzameling*: de volledige C. Volgens Hintikka is dit een niet-constructieve inbedding. Door alleen aan de groep Ca0 — Ca4 te voldoen heeft men volgens Hintikka te maken met constructieve aspecten. Door Hintikka wordt vervolgens 'constructieve aspecten' doorgetrokken tot 'intuïtionistisch aanvaardbare aspecten'. Bij het tegelijk voldoen aan Ca0 — Ca4 én aan Cb0 — Cb4 verdwijnt dit.

Stel dat men een formuleverzameling $\mathtt{M}$ heeft. Men wil nu een model bij $\mathtt{M}$ hebben. Men kan een modelverzameling — waarvoor dus een model bestaat — construeren ten opzichte waarvan $\mathtt{M}$ een deelverzameling is. Dit gaat natuurlijk alleen op, wanneer $\mathtt{M}$ consistent is. Voor de constructie van de $\mathtt{M}$ omvattende modelverzameling heeft men $\mathtt{M}$ zodanig aan te vullen dat er nu wel aan de afsluitingsregels Ca1,..., Ca4 voldaan wordt. Dat houdt dan in dat er nieuwe formules moeten worden toegevoegd. Men krijgt daarmee de regels E1.1 — E4. Een voorbeeld: Stel dat er iets mankeert aan het vervullen van Ca1. Dan heeft men de situatie E1.1 met $A \wedge B \in \mathtt{M}$, $B \in \mathtt{M}$ en $A \notin \mathtt{M}$. In dit geval heeft men $A$ aan $\mathtt{M}$ toe te voegen.

Men heeft bij de E-regels ook een met de Cb-regels corresponderende groep regels En1.1 — En4. Bijvoorbeeld:

En1.1 $\neg(A \wedge B) \in \mathtt{M}, \neg A \notin \mathtt{M}, \neg B \in \mathtt{M}$, dus moet $\neg A$ worden toegevoegd.

[87] Hintikka's $A(a/x)$: $a$ uniform voor $x$ gesubstitueerd in $A$.

En3 $\neg\exists xA \in \mathtt{M}$, $a$ treedt op in een formule van $\mathtt{M}$, maar $\neg A(a/x) \notin \mathtt{M}$, dus $\neg A(a/x)$ moet worden toegevoegd. Als men $\neg\forall xA \in \mathtt{M}, \neg A(b/x) \in \mathtt{M}$ voor geen enkele individuele constante $b$ heeft, dan moet $\neg A(a/x)$ voor een individuele constante $a$ die niet in de formules van $\mathtt{M}$ optreedt, worden toegevoegd.

Volgens Hintikka[88] zijn deze E-regels voor de constructie van modelverzamelingen in essentie hetzelfde als de regels voor de constructie van de semantische tableaus. In het kort komt al het bovenstaande hierop neer:

- "Another requisite for our success is the fact that we interpreted all proofs of logical truth in a seemingly negative way, viz., as proofs of impossibility of counter examples. This happened when we defined a set of formulae to be provable if and only if the set formed by the negations of the members of the original set is inconsistent." [89]
- "In our approach, one starts from the formula to be proved (or disproved). If our rules of model construction are read backwards, they correspond to the transformation rules of the axiomatic approach." [90]
- "the 'calculus of natural reasoning' of Gentzen [...] which is in this respect similar to our approach rather than to the axiomatic method." [91]

Deze citaten hadden van Beth kunnen zijn met betrekking tot zijn tableaus. Een combinatie van Hintikka's modelverzamelingen en Beths tableaus treft men voor het eerst in Smullyan (1968) aan.

### 6.3.4 Intuïtionisme

Hintikka's claims voor zijn methode komen tot uitdrukking in het volgende citaat: [92]

"One of the results of our investigation will be the fact that all the ordinary intuitive laws of logic, properly interpreted, are reconcilable with the strictest constructivistic and finitistic point of view, including the disavowal of infinite domains of individuals as closed finished totalities."

Niet deze passage op zichzelf geeft aanleiding tot kritiek, maar wel de daar achter liggende gedachte. Let bij het het citaat uit Hintikka (1955), p. 49, op 'impossibility of counterexamples'. Dit gaat wel op voor klassieke logica, maar Hintikka wilde dit blijkbaar ook op die manier gaan gebruiken bij constructieve, intuïtionistische logica. Bovendien meende Hintikka dat zelfs bij Beth een hang te bespeuren was naar de regel 'elk indirect bewijs kan omgezet worden in een direct bewijs'. Volgens Hintikka was dit overigens al door C.S. Peirce

[88] Brief K.J.J. Hintikka – Beth, 10 juli 1955, (Korso).
[89] (Hintikka 1955), p. 49.
[90] (Hintikka 1955), p. 47.
[91] (Hintikka 1955), p. 47.
[92] Hintikka (1955), pp. 16, 17)

geformuleerd.[93] Beth zelf protesteerde er tegen als zou hij deze mening op alle terreinen zijn toegedaan.[94] Zeker was dit niet het geval op het terrein van de wiskunde en de intuïtionistische vorm daarvan. Volgens Beth kan men niet zomaar begrippen als 'counterexamples' over gaan hevelen.[95]

Twee punten behoeven nadere aandacht, indien men het één en ander als een intuïtionistisch aanvaardbare beschouwingswijze wil voorstellen. In de eerste plaats de constructie van de modelverzamelingen en in de tweede plaats de status van het tegenvoorbeeld.

In het begin werden door Hintikka de modelverzamelingen (de Ca-afdeling van de C-voorwaarden) benadrukt. Het bijbehorende model hoefde niet maximaal te zijn. Consistentie en volledigheid werd door de volledige C-voorwaarden afgedwongen. De constructie van de modelverzameling of de semantische tableaus geeft voor een zekere formule aanleiding tot formuleringen als 'er is geen model', 'er is geen tegenvoorbeeld' of 'er is geen model dat niet een model van een andere gegeven formule is'. Dit zijn volgens Hintikka toch wel intuïtionistisch aanvaardbare 'negatieve' bewijzen, alhoewel volgens hem intuïtionisten in het algemeen om 'positieve' bewijzen vragen.[96]

Hintikka's voorwaarde C4b was volgens Beth intuïtionistisch zeker niet houdbaar. Intuïtionistisch neemt men volgens Beth een model niet als een 'gesloten' en 'affe' totaliteit aan.[97] Als men nu een verzameling verkrijgt door een stap na stap constructie, dan is het onmogelijk, zelfs al heeft men alle formules $A(a/x)$ aan de verzameling toegevoegd, om gedurende dat proces ook nog $\forall xAx$ toe te voegen. Men kan derhalve niet van elkaar scheiden de formuleverzamelingen, die wel, en de formuleverzamelingen, die niet aan voorwaarde C4b voldoen. Bovendien moet men als men dit accepteert ook beide soorten modellen toelaten. Volgens Beth heeft men derhalve een syntactisch bewijs van $A \Rightarrow B$ te interpreteren als ofwel 'er is geen tegenmodel voor deze sequent' ofwel 'elk model van $A$ is een model van $B$'.

Voor $A \Rightarrow \neg B$ houdt dit volgens Beth intuïtionistisch in dat 'geen model van $A$ vervult $B$' [ofwel: er is niet een model $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models A$ en $\mathcal{M} \models B$], d.w.z. 'elk model van $A$ met $B$ vervult $\perp$'. Voor $A, \neg B \Rightarrow B$ houdt dit in, dat 'geen model vervult $A$ tezamen met $\neg B$, derhalve $A, \neg B \Rightarrow \perp$ '.

Volgens Hintikka kan men stellen dat als van te voren vereenvoudigingen geaccepteerd worden zoals bij hemzelf, dat dan de Cb-regels overbodig zijn en men met alleen de Ca-regels uit de voeten kan. De vraag blijft dan of de intuïtionist de vereenvoudigingen accepteert.

Het verschil tussen Beth en Hintikka was volgens Beth dat Hintikka de Cb-regels tracht te vermijden door zekere vereenvoudigingen van tevoren aan te

[93]Peirce: Brief K.J.J. Hintikka – Beth, 10 juli 1955, (Korso). Peirce, *Collected papers* 2.612., d.w.z. Ch, Peirce, Collected Papers, 6 Vol. (ed.Ch. Hartshorne, P. Weiss), Cambridge (1931 – 1935), Vol.II (Elements of logic).

[94]Brief Beth – K.J.J. Hintikka, 12 juli 1955.

[95]Brief Beth – K.J.J. Hintikka, 5 november 1955 (?).

[96]Model niet maximaal, positieve/negatieve bewijzen: brief K.J.J. Hintikka – Beth, 20 juli 1955, (Korso).

[97]Affe totaliteit: Brief Beth – Hintikka, 22 juli 1955.

nemen. [98] Dit werd door Beth evenwel niet verder gespecificeerd. Hintikka werkte met voorwaarden zoals op de grootte van de domeinen, etc. Beth daarentegen hield er geen enkele vereenvoudiging of voorwaarde vooraf op na,[99] maar gebruikte de Cb-regels (Gentzen's introductieregels) als de F(alse)-regels om de desbetreffende F(alse)-afdeling binnen zijn tableaus te construeren.

Men kan zich afvragen in hoeverre de door Beth en Hintikka opgestelde systemen en semantiek zich met extra voorwaarden lenen tot het weergeven van een intuïtionistisch aanvaardbare logica. Deze gedachte wordt nog eens extra in de hand gewerkt doordat de hier bekeken systemen en semantiek opgesteld zijn vanuit de door Gentzen en Kleene ontwikkelde intuïtionistische systemen.

Zeker Hintikka was van mening, dat zijn systeem voor het intuïtionisme bruikbaar was. In verband daarmee trachtte hij indertijd een vertaling van Beths tableaus naar het systeem van hemzelf te vinden. Beth was het niet met Hintikka's claim ten opzichte van intuïtionistische logica eens. Een belangrijke rol in deze discussie werd vervuld door Hintikka's regel C4b, of ook het gehele Cb-pakket. Maar er was nog iets anders, een volgens Beth veel belangrijker obstakel: [100] "The real difficulty is not, however, in this point of my paper as, after all, one can simply copy the rules of Kleene's calculus G3. *The real difficulty is connected with the definition of the notion of an intuitionistic counter example.*"
Stel dat men $A \Rightarrow B$ heeft. Men heeft voor alle modellen $\mathcal{M}$, als $\mathcal{M} \models A$, dan ook $\mathcal{M} \models B$, ofwel semantisch (klassiek) dat er niet een model $\mathcal{M}$ gevonden kan worden met $\mathcal{M} \models A$ en $\mathcal{M} \not\models B$. Volgens Beth gaat dit intuïtionistisch niet op.[101] In later tijd, in de Beth-modellen, wordt er, zij het in een andere vorm, wel van semantische tableaus met tegenvoorbeeld uitgegaan.

[98] Vereenvoudigingen, Cb-regels als false-regels: Brief Beth – K.J.J. Hintikka, 4 september 1955.

[99] Afgezien van de gebruikelijke zoals beperkingen op de inzet van constanten bij de eliminatie van quantoren.

[100] Beth – K.J.J. Hintikka, 5 november 1955 (?). Cursivering door mij.

[101] Brief Beth – K.J.J. Hintikka, 12 juli 1955.

# Hoofdstuk 7

# De logische machine

*"Wetenschap zoekt naar redeneermachine, droom die werkelijkheid kan worden, titanenwerk dat altijd vruchten afwerpt."* [1]

## 7.1 Tableaus en bewijsmachines

### 7.1.1 Beths kennismaking met mechanisch bewijzen

#### Een eerste aanloop

Het onderzoek naar de relaties tussen logica en bewijsmachines bestond al lang voor Beths bemoeienissen met dit onderwerp. Beth had evenwel het voordeel dat in zijn tijd Post en Turing ideële machines ontwikkeld hadden en er bovendien echte machines geconstrueerd werden, waarop men programma's kon draaien. Al in 1955 kon Beth in de krant lezen dat men niet alleen in de Verenigde Staten met dergelijke projecten bezig was, maar ook in het Nederlandse Delft: [2]

"Tot de superwerken behoort voorts de constructie van een logica-machine, een automatisch werkende machine, die problemen uit de oordeelslogica oplost. De machine kan problemen oplossen waarin vijf oordelen en zeven logische operaties voorkomen. Alle mogelijke oplossingen van een bepaald probleem worden achtereenvolgens geprobeerd. De oplossingen die voldoen worden op de geautomatiseerde telmachine uitgetypt. Er is thans een dergelijke machine met een capaciteit van 15 oordelen en 24

[1] Kop van een stukje door Beth in *De Volkskrant*, van 25 maart 1961. Dit stukje behelsde de mogelijkheden van Beths komende Euratom-contract. Het is niet met zekerheid te zeggen of Beth zelf de kop bedacht heeft of dat dit door een redacteur gebeurd is. De afsluiting van de werkgroep werd opnieuw door een artikel in de Volkskrant (van 30 oktober 1964) gesierd; dit was van de hand van K.L. de Bouvère, en had als kop 'Denkmachine, een dom kind' met als inhoud automatisering en het belang van de Amsterdamse Euratom-groep (uit het kwartaalrapport van A. Heyting over de periode van 1 oktober 1964 tot 31 december 1964).

[2] Jaarverslag van Delfts Hogeschoolfonds, *Het Handelsblad*, 25 oktober 1955. De constructeur Verhagen stelde voor in Amsterdam een demonstratie te komen geven (Brief Beth – Delfts Hogeschoolfonds, 25 oktober 1955. Brief C.J.D.M. Verhagen – Beth, 21 maart 1956. Brief Beth – C.J.D.M. Verhagen, 12 oktober 1956.).

logische operaties in bewerking."

Een volgende stap bestaat er uit om niet alleen naar een combinatie tussen 'automatisch werkende machines' en logica te zoeken, maar ook om aan praktische toepassingen te werken: automatische gegevens-bewerking, vertaalarbeid, en, om in de terminologie van Beth te blijven, de 'denkmachines'. En ook hiervoor had Beth belangstelling. Dit uitte zich in deelname aan het Euratom-project. Er waren wel kapers op de kust. Zo was daar de ontwikkeling van de denkende smulpan met pootjes: [3] "De denkende smulpan is in de winkels verschenen. En de naam zegt het al: het is een electrische pan, waar men lekker in kan koken en die pan denkt voor u. Het is een plat model van Engels fabricaat (Morphy-Richards) op pootjes." Deze prioriteitenbedreiging ontlokte aan Beth — in de marge van het krantenknipsel — het benauwde commentaar: "Zijn ze ons toch een slag vóór?" Voor alle duidelijkheid zij er hier vermeld dat Beth niet echt tot doel had om practische industrieële toepassingen te leveren. Over zijn Euratom-project meldde Beth: [4] "De bepalingen terzake van octrooien, licenties e.d. zijn weliswaar tamelijk onereus, maar dit weegt voor mij niet zwaar, want de bijzondere aard van mijn onderzoek doet op korte termijn geen economisch of industrieëel exploiteerbare uitkomsten verwachten."

Beth bracht twee zaken bij elkaar: zijn tableaus en beslisbare elementair-logische theorieën. Hasenjaeger had al de mogelijkheid geopperd van een machine-programma voor een bewijsmachine die gekoppeld is aan de tableau-methode.[5] Beth had hier ook al aan gedacht: [6] "Der Gedanke einer 'Beweismachine' ist mir natürlich auch nicht fremd. Eigentlich haben wir jetzt schon eine solche Machine, wenn sie auch mit Handkraft arbeitet." Afgezien van dit grapje merkte hij al in Beth (1955*b*) op: "As these formal derivations have been constructed, so to speak, in a purely mechanical manner (we have indeed come alarmingly near the realisation of the 'ideal' of a 'calculus ratiocinator', a 'logical machine')."

Toch zag Beth wel de beperkingen op, ja zelfs de onmogelijkheid van, een algemene logische machine in. Hierop was hij volgens een brief aan Hasenjaeger gestoten bij het hanteren van zijn tableaumethode. Beths argument verliep door middel van bomen met knopen, die een representatie van tableaus kunnen vormen. Volgens Beth waren er derhalve de nodige bedenkingen: [7]

"Ich bin da auf eine sehr einfache Überlegung zur Begründung der Unmöglichkeit einer logischen Maschine gestossen. Wenn das Tableau sich ins Unendliche verliert, ist natürlich ein Kompaktizitätsschluss nötig. Den liefere ich in der Weise, dass ich

[3] Denkende smulpan, in 'Nieuws over nieuwigheden', in de krant?? [in Beth-archief].

[4] Brief Beth – E.A.C. Meijlink (Ministerie van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen.), 8 oktober 1960. De contracten gaven in het begin moeilijkheden daar er tot Beth slechts drie directe contracten door Euratom met Nederlandse instellingen waren afgesloten. Voor de andere contracten, zie brief E.A.C. Meijlink – Beth, 27 september 1960, ('s Gravenhage): TNO voor medisch-biologisch onderzoek, KEMA voor de constructie van een suspensie-reactor, TH Eindhoven voor onderzoek naar warmte-overdracht.

[5] Brief G. Hasenjaeger – Beth, 4 februari 1955, (Münster).

[6] Brief Beth – G. Hasenjaeger, 8 februari 1955.

[7] Brief Beth – G. Hasenjaeger, 12 april 1955.

erst das Tableau durch einen binären Baum ersetze, und dann beweise, dass jeder solcher Baum, wenn er unendlich viele Punkte enthält, auch einen unendlichen Zweig enthält. Wenn man einen binären Baum punktweise konstruiert (wie es eine logische Maschine tun würde), so kommt niemals ein Moment, wo man weiss, der Baum enthält unendlich viele Punkte. Denn wenn $k$ eine natürliche Zahl ist, und $\mathcal{B}$ ein Baum mit unendlich vielen Punkten, so gibt es auch ein Baum $\mathcal{B}^*$ der genau aus den $k$ ersten Punkten von $\mathcal{B}$ besteht."

Voor dit laatste ontwikkelde Beth als gedachtenexperiment een 'redeneermachine' met lichtjes: [8] oranje, rood en groen. Men stelt de machine in op premissen $A_1, A_2, \ldots, A_k$ en de gewenste conclusie $B$. De machine gaat nu werken (om wellicht $A_1, A_2, \ldots, A_k$ met $B$ te verbinden):
1. Op een gegeven moment zijn de verdere toepassingen van de reductieregels voor semantische tableaus niet meer mogelijk zonder dat er een afsluiting is opgetreden: een eindig tegenvoorbeeld, $B$ is niet logisch afleidbaar uit $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Er gaat een oranje lichtje branden.
2. Een geval van afsluiting, geen tegenvoorbeeld mogelijk, een rood lichtje: $B$ afleidbaar uit $A_1, A_2, \ldots, A_k$.
3. De machine belandt in een regressus ad infinitum, er gaat een groen lichtje branden.

Naast het uiterlijk is er ook een innerlijk: voor rood en oranje verwacht men de constructie van tableau en boom. Het laatste geval (groen) levert dan moeilijkheden op: een puntsgewijze constructie van zo een boom is niet mogelijk, zoals Beth al tegen Hasenjaeger opmerkte.[9]

Naar analogie van Church (1935), Church (1936*b*) is de constructie van bovenstaande logische (rood-oranje-groen) machine niet mogelijk. Een beperkte (rood-oranje) machine gaat volgens Beth wel.

### Beths medeonderzoekers

Er waren in de vijftiger jaren ook anderen die zich bezig hielden met snel en automatisch bewijzen: H. Wang, A. Robinson, de Zweedse groep rond S. Kanger met leerlingen D. Prawitz en N. Voghera, Beths leerling P.C. Gilmore, K. Schütte en H.L. Gelernter.[10] Door een deel van deze onderzoekers werd

[8] Ms. E.W. Beth, *De formele logica en het oneindigheidsbegrip* (ongepubl.), maar ook (Beth 1955*b*).

[9] Hoe Beth met deze denkbeelden al die jaren ontsnapt is aan het aanstormende Amsterdamse blik blijft opmerkelijk.

[10] Een algemene indruk over het onderzoek wordt gegeven in Beths *Observation sur un projet de recherche* (een in de tekst vermelde datum geeft 1961 aan). Met dit manuscript kan men een verdere aanvullingen geven: M. Davis en H. Putnam (in 1959), B. Dunham, R. Fridshal, G.L. Sward (in 1959), N. Rochester (in 1958), T. More (in 1956), A. Newell, H.A. Simon en J.C. Shaw. Aan de afdeling recursie en abstracte automaten zal gezien de dan onafzienbare lijst maar niet begonnen worden. Een aantal van deze mensen kon men beluisteren tijdens een IBM-colloquium 'Nonnumerical data processing symposium' in het IBM World Trade European Education Centre te Blaricum (24–28 april 1961) waaraan ook door Beth met zijn Euratom-groep werd deelgenomen. Ook waren aanwezig M.P. Schützenberger en N. Chomsky met hun algebraïsch-taalkundig onderzoek. Het werk van Chomsky werd door een deel van de Euratom-groep bestudeerd. (Avram Noam Chomsky, *1928). Uitgegeven bundel

gebruik gemaakt van Skolem-functies met aansluitend Herbrand-universa en andere comprimerings- of vereenvoudigingsmiddelen. Ook de methoden van Gentzen werden in dit kader gebruikt. S. Kanger gebruikte al resolutiemethoden en middelen om een zoekpad niet verder (tevergeefs of zonder einde) af te hoeven lopen. H.A. Simon legde de prioriteit van het gebruik van op tableaus gebaseerde bewijsmachines niet bij Beth, maar bij T. More: [11] "Incidentally, I think the first person to suggest using something like your tableaus in a theorem-proving machine was Trenchard More, who had this idea in 1956, and wrote a Master's thesis on it under Shannon at M.I.T. His work on this was simultaneous with, and independent of our [Newell en Simon[12]] first machine program."

Beth zelf was al enige tijd bezig na te denken over een mechanisering van het bewijzen. Volgens hem waren bepaalde bewijsmethoden die lijken op semantische tableaus en afleidingen, al te vinden bij Aristoteles (384–322), Lullus (1232–1316), Descartes (1596–1650), Locke (1632–1704), Berkeley (1685–1753), Hume (1711–1776) en Kant (1724–1804).[13] Al in een drietal artikelen van Beth[14] kwam een 'logische machine' ter sprake, zonder dat hij al werkelijk — "I am not primarily interested in technological matters" [15] — aan een realisatie hiervan dacht. Het bezoek aan het 'Summer Institute for Symbolic Logic', Cornell University 1957 was in dit opzicht stimulerend voor Beth. Hier hoorde hij Gelernter met *Theorem proving by machine*, maar ook A. Robinson met *Proving a theorem (as done by man, logician, or machine)* (Robinson 1957*a*). Hier vernam Beth, en daarmee al voor het bericht van Simon, van het bestaan van T. More met zijn 'bewijsmachine'.[16] Dit alles droeg bij tot het schrijven van *On machines which prove theorems* (Beth 1958*b*).[17]

### 7.1.2 Tableaus en Gentzens methoden

#### Heuristiek: voors en tegens

Bij mechanisatie van bewijzen kan men met of zonder heuristiek te werk gaan. H.A. Simon maakte volgens de aloude traditie een onderscheid tussen heuristisch en niet-heuristisch. Hij hield zich vooral bezig met de bestudering van het menselijke denken en niet zozeer met het ontwerpen van bewijsmachines;

---

i.v.m. IBM-dagen in Blaricum: *Computer programming and formal systems* (ed. P. Braffort, D. Hirschberg), Amsterdam (North Holland), 1963, waarin ook Beth (1961*e*). P. Braffort was het hoofd van het Euratom-rekencentrum te Ispra, D. Hirschberg was werkzaam bij IBM-Brussel.

[11] Brief H.A. Simon – Beth, 11 september 1959, (Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh).

[12] A. Newell en H.A. Simon hebben samen en afzonderlijk diverse artikelen geschreven over mechanisatie, ook m.b.t. logica, o.a. Newell & Simon (1956).

[13] Zie Beth (1963*b*) voor een historisch overzicht. De Catatlaanse dichter en wijsgeer Raymond Lull [=Raimundus Lullus, Lully], zie ook Dumitriu (1977), Vol. II.

[14] (Beth 1955*b*), (Beth 1956*e*) (meetkundig bewijs), (Beth 1957*c*).

[15] Brief Beth – H.A. Simon, 20 september 1959

[16] Trenchard More, *Deductive logic for automata*, 1958 (in Beth Archief). Zie ook brief Beth – H.A. Simon, 20 september 1959.

[17] Brief Beth – H.A. Simon, 20 september 1959.

Simon: [18]

"I would just say two things about heuristic versus nonheuristic techniques for finding proofs. First, a great deal of the motivation of our work stems from an interest in understanding human thinking, rather than in designing machines to prove theorems efficiently. Second, insofar as we are interested in the latter, it is in areas where there are no decision procedures or where the available algorithms are hopelessly inefficient (e.g., chess or Euclidean geometry)."

Beth was daarentegen van mening dat men niet zo een sterk onderscheid kan maken tussen heuristische en niet-heuristische methoden: [19] "The method of semantic tableaux rather suggests a striking analogy between 'natural thought' and certain methods of formal derivation, an analogy which based on the fact that both procedures are motivated by an underlying semantics." En meer nog, tegen Gelernter: [20]

"Logic itself can be considered as a system of heuristics. It has both the advantages and the disadvantages of being a *complete* system of heuristics. But Gentzen's *subformula principle* implies that even in this respect it is not as bad as it seems. In my opinion, the best way to obtain a practical system of heuristics would be to start from a suitable version of logic and then to give the machine certain additional instructions, to be used if its capacity is exhausted."

H.L. Gelernter was bezig heuristiek te onderzoeken door het beschouwen van meetkundige intuïtie en met de tractaten van Polya. Beth liet zich niet onverdeeld gunstig over deze basis van Gelernter uit en vond dat de uiteindelijke grondslag geleverd zou kunnen worden door het werk van Gentzen: [21]

"[T]hat the procedures obtained from these sources usually suggest theorems rather than proofs of theorems. If they help us in finding proofs it is in many cases because they suggest theorems which can be used as lemmas. [...] We know at present thousands of mathematical theorems and for each theorem one or more proofs. Presumably each theorem and each proof has been suggested by some heuristic procedure. In some cases, these heuristic procedures are known, in most cases they are not. Those heuristic procedures which I have come across seem to have a very restricted range of application. It follows apparently that the number of heuristic procedures, known or unknown, but actually applied in at least one case, must be extremely large. If we try to reduce these numerous procedures to relatively few underlying principles, these principles will be either so vague or so abstract that their heuristic value will be rather slight. If we continue the reduction of heuristic principles, rejecting those which are too vague to be used, then I have a very strong suspicion that very soon nothing will be left except something like the rules of inference of Gentzen's system NK."

De laatste uitspraak van Beth in het oog houdend is het niet vreemd te zien dat, naast de al opgesomde vereenvoudigingsmethoden, het vooral de methoden van Gentzen met hun varianten zullen zijn, die een hoofdrol gaan spelen bij de diverse pogingen tot bewijsmechanisatie. Dit was ook zo voor de Zweedse groep,

[18] Brief H.A. Simon – Beth, 11 september 1959, (Pittsburgh). Zie verder ook ().
[19] Brief. Beth – H.A. Simon, 20 september 1959.
[20] Brief Beth – H.L. Gelernter, 19 januari 1958. Cursief: Beths onderstreping.
[21] Brief Beth – H.L. Gelernter, 19 januari 1958. Georg Polya, *1887.

bestaande uit S. Kanger, D. Prawitz, H. Prawitz en N. Voghera. Kanger was al langer bezig met het werken aan bewijstheorie. Zijn methode geleek sterk op die van Beth: [22] "There is indeed a striking similarity between your work on Provability and mine on Semantic Entailment." [23] De groep om Kanger heen hield zich in die periode bezig met het ontwikkelen van een machine-programma voor deductie binnen predicaatlogica: [24] "Two of my [Kangers] pupils there (I wish to mention mr Dag Prawitz in particular) have recently completed a machine program for deduction in the predicate logic. It is based primarily on your Semantic entailment ... and my Provability in logic." Als volgt omschreef Kanger deze werkzaamheden: [25]

"The program proved successful, although it requires too much time for being of any practical use. Now simpler methods are in progress: right now for instance, I am issueing a mimeographed memorandum (in Swedish) suggesting a proof method for the predicate logic with identity and functional symbols. The method is built up of partial procedures. One of these covers identity (so to speak). The other one covers truth functions and a fragment of quantifier theory. It contains a separate procedure for excluding unfruitful substitutions for the quantified variables. The final procedure yields an iteration of the second one in order to complete the method. The method seems promising, in particular it has some virtues as a partial decision method: we may rather easily discover various kinds of regularities in the iteration process which might yield a negative decision of provability. But it remains to see to what extent the method fits for machine computation."

Hier kon Beth op dat moment nog niet tegen op: [26] "I am pleased to see that your students have actually gone into the practical realisation of proof procedures by means of electronic computers. This would hardly possible for me, but I hope to find some people here who are able and willing to work on this problem." Beths hoop zou eerder in vervulling gaan dan hij op dat moment besefte.

In deze beginperiode zag alles er nog niet zo florissant uit: [27]

"D'autre part, dans les recherches de D. Prawitz, H. Prawitz & N. Voghera, la capacité du computeur utilisé (le Facit EDB des AB Atvidabergs Industrier, Stockholm), s'est avérée relativement faible. En effet, voici la déduction de la thèse: $\forall x \forall y \forall z((A(x,y) \wedge A(y,z)) \rightarrow A(x,z)) \rightarrow (\forall x \neg A(x,x) \rightarrow \forall x \forall y(A(x,y) \rightarrow \neg A(y,x))$. [...][28] Pour cette déduction simple, la machine demanda déjà 12 secondes. Bien que, en soi, ce résultat est déjà remarquable, il est évident que, pour arriver à des déductions inédites il faut

[22] Brief Beth – S. Kanger, 17 januari 1959.
[23] Provability: (Kanger 1957). Entailment: (Beth 1955*b*).
[24] Brief S. Kanger – Beth, 16 oktober 1958, (Uppsala).
[25] Brief S. Kanger – Beth, 16 oktober 1958, (Uppsala).
[26] Brief Beth – S. Kanger, 17 januari 1959
[27] Citaat uit Beth, *Observations sur un projet de recherche.* Voor 'hardware'-opsomming, zie ook het latere Beth (1962*a*), p. 120. Beth putte uit Prawitz, Prawitz & Voghera (1960); dit had hij toegezonden gekregen, zoals blijkt uit de begeleidende brief D. Prawitz – Beth, 9 juni 1959, (Stockholm). N. Voghera verzorgde de programmering, zoals beschreven in Prawitz et al. (1960). Wie geinteresseerd is naar de hardware van de Facit etc., zie dit artikel op p. 119; men ziet daar de geheugentrommels aan het werk.
[28] Op deze plaats geeft Beth een zich sluitend semantisch tableau.

que nous disposions d'une capacité beaucoup plus considérable."

Naast het omvangrijke Prawitz et al. (1960), waarin men de details voor de programmering kan vinden, was er ook een soort 'abstract' dat door D. Prawitz naar Beth gestuurd was: [29]

"In its present form, this language includes a (rather liberal) maximum limit on the length of the individual formulas. Further there are some methodological restrictions posed by the present program: the number of different individual constants available for substitution of variables is limited to 15, and the number of branching points on any single full deduction branch is limited to 40. For any problem expressible within the required language the machine will continue the construction and the writing out of the full proof (provided there is a proof) until it is completed or stopped by reaching any of the methodological limits mentioned above or the limits of available memory space."

In Kanger (1963) komt men naast de uitleg van zijn 'dummy'-methode op p. 90 ook kritiek op Prawitz et al. (1960) tegen:

"The main difficulty is this: Suppose we have reached a sequent at a certain level in a branch of the tree. Then it frequently happens that we may continue the branch in more than one way. And it may happen that some of these ways are more favorable than others from the viewpoint of simplicity. Thus our routine ought to involve some devices for choosing the favorable ways of continuing the branches. Without good devices of this sort the proof method will be much time-consuming. The lack of such devices was the source of trouble with the Prawitz-Voghera program."

Tot op zekere hoogte lopen de methoden van Beth en Kanger gelijk op. Bij de mechanische equivalent van 'heuristiek' — voorzover men daar van iets dergelijks kan spreken — houdt dit op. Er zijn goede en slechte methoden om te pogen een bewijs te leveren, ook moet de bewijsmachine de mogelijkheid hebben om bij een doodlopend (eindeloos) lopend pad op zijn schreden te kunnen terugkeren. Ook bij een niet eindeloos pad kan men door onjuiste keuzen er soms lang over doen, zoals de British Museum-methode leert.[30]

Beth wenste zich hiertoe van de uitkomsten van statistische methoden te bedienen en deze als een heuristiek te gebruiken. Kanger (1957) hield zich aan mechanische procedures waarbij hij bij quantorafbraak gebruik maakte van het inzetten van 'dummies'.[31] Met dummies worden vrije variabelen bedoeld die voor willekeurige constanten staan. Waar precies de twee methoden uit elkaar gaan lopen valt te zien aan de hand van Prawitz (1960). Prawitz gaat daarbij in paragraaf twee, p. 109 e.v., uit van het in Beth (1958*b*), p. 56, gehanteerde

[29] Citaat uit abstract D. Prawitz, H. Prawitz, N. Voghera, *Electronic computer realization of an effective proof procedure for the predicate calculus of first order*, 3 pp., dagtekening Stockholm, October 1958; zie ook de begeleidende brief D. Prawitz – Beth, oktober 1958, (Stockholm). Bedoeld voor JSL volgens brief Beth – D. Prawitz, 17 januari 1959.

[30] Als men maar over genoeg schrijfmachines, tijd en Zweden beschikt, dan zal men uiteindelijk over alle boeken van het British Museum kunnen beschikken. Prawitz werkte overigens liever met apen dan met Zweden, zie hiertoe Prawitz (1960), p. 102, noot 3. De andere versie is dat men voor de oplossing van een probleem alle mogelijkheden afloopt en geen enkel hoekje overslaat: een onvoordelig algorithme.

[31] Zie ook Kanger (1963).

voorbeeld 'is $\forall x \forall y(A(x) \vee B(y)) \rightarrow (\forall x A(x) \vee \forall y B(y))$ een stelling?' En overschakelend op Beth, door onjuiste keuzen bij de invoer van nieuwe individuele symbolen komt men te staan voor de volgende moeilijkheid: [32] "Nevertheless, a mechanical application of the method of semantic tableaux will naturally lead to the introduction of individuals which do not contribute to the closure of the tableau, and thus to a premature exhaustion of the capacity of the machine."

Al met al heeft men drie problemen op te lossen:
— 1. Controle of de loop van een gegeven bewijs wel aanvaardbaar is.
— 2. Laten zien of een formule $A$ wel een stelling is.
— 3. Produceren van stellingen.
Probleem 2 kwelt het meest: [33]

"[W]e have hardly any sound basis for an estimate of $n(A)$ and, if we simply make a guess as to its value, we still have to select those operations which are most likely to be successful;[34] in other words, we have to provide the machine with certain — heuristic — devices. In this connection, I should like to offer the following suggestion. There are a number of solvable cases of the decision problem; this means, essentially, that for certain classes of formulas $A$ a number $n(A)$ can be effectively computed. Now run a large number of formulas $A$ through the machine, and make a statistical analysis of those operations which prove successful and those which are not. Then provide the machine with such instructions as to give preference to the more successful operations. This might considerably enhance the efficiency of the machine."

Bij probleem 3 zal men, als probleem 2 statistisch opgelost is, natuurlijk moeten oppassen voor eindeloze hoeveelheden te verkrijgen trivialiteiten.[35] Later kreeg van Westrhenen in het kader van het Euratom-project van Beth de opdracht om op dit spoor verder te gaan: controle of formules stellingen zijn en het genereren van stellingen.
Een volgende door Beth gestelde vraag is of men een apparaat kan construeren dat hiermee een leerproces ondergaat en er preferenties op na kan gaan houden. De volgende kwestie is of een machine tot een optimaal uitvoeren van een bewijs gebracht kan worden.

Men kan zich bij dit alles ironisch met G. Kreisel afvragen: [36] "One general reaction to the development of mathematical logic is to regard Man as a calculating machine with a built-in random element. Is this what you mean by the 'dignity of man as a rational being'?" Bewijzen ten voor- of ten nadele had Beth niet in handen. Wetenschappelijk had het derhalve weinig zin hier een antwoord op te geven. Maar dit bedoelde Beth ook niet, het was een onderdeel van een ouder en dieper zeer: [37]

---

[32] Beth (1958*b*), p. 57.
[33] (Beth 1958*b*), p. 58.
[34] $n(A)$= het aantal individuen dat ingevoerd moet worden om een afleiding van een formule $A$ te verkrijgen; het is een soort maat voor de ingewikkeldheid van het bewijs.
[35] (Beth 1958*b*), p. 58.
[36] Brief G. Kreisel – Beth, 25 februari 1958, (Reading); deze brief n.a.v. Beth (1957*c*), p. 4
[37] Brief Beth – G. Kreisel, 27 februari 1958. Beth had al langer een hekel aan filosofen die over dit onderwerp speculeerden. Beth zag daarin een gevaar voor mens en maatschappij in. Hij werd niet moe — hij kende zijn verantwoordelijkheid — dit in boeken, artikelen en

"As to the conception of Man as a calculating machine with a built in random element, I certainly do not believe that it lends a strong support to the 'dignity of Man as a rational Being', but I do not think this is a valid objection to my exposition. My objection to irrationalism is, that many quite essential activities of men are left out of consideration, thus creating a one-sided picture of man, and weakening his inclination to look at things rationally."

## Quantor-eliminatie

De moeilijkheden met tableaus worden groter bij het verlaten van de propositionele logica. Beth gaf daar voorbeelden van, waarvan hier twee zullen worden gegeven.

Als eerste een tableau dat na zekere tijd afsluit, maar door 'onjuiste' constructies halverwege veel rekentijd zou kunnen gaan vergen. Het gaat hier om de formule die Prawitz ook gebruikte.[38]

| | true | false | |
|---|---|---|---|
| | | $\forall x \forall y(A(x) \vee B(y)) \rightarrow (\forall x A(x) \vee \forall y B(y))$ | 1. |
| 2. | $\forall x \forall y(A(x) \vee B(y))$ | $\forall x A(x) \vee \forall y B(y)$ | 3. |
| 8. | $\forall y(A(a) \vee B(y))$ | $\forall x A(x)$ | 4. |
| 9. | $A(a) \vee B(a)$ | $\forall y B(y)$ | 5. |
| 10. | $A(a) \vee B(b)$ | $A(a)$ | 6. |
| 11. | $\forall y(A(b) \vee B(y))$ | $B(b)$ | 7. |
| 12. | $A(b) \vee B(a)$ | | |
| 13. | $A(b) \vee B(b)$ | | |

Nu is dit tableau in één keer af te sluiten door de formule onder 10. naar voren te halen en daarmee te splitsen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10. | $A(a) \vee B(b)$ | $A(a)$ | | 6. |
| | | $B(b)$ | | 7. |
| $A(a)$ | [$A(a)$ uit 6.] | $B(b)$ | [$B(b)$ uit 7.] | |
| | sluit | | sluit | |

Met een andere keuze dan onder 10 loopt het tableau op veel splitsingen uit voor men tot een afsluiting van het tableau kan komen. De moeilijkheid is dat men op de juiste plaats de juiste keuze niet machinaal kan bepalen, alleen de handigheid van een Beth kan dit.[39] Nu een tweede voorbeeld.[40] Men vertrekt vanuit de sequent $\Delta, \forall x \exists y \forall z A(x, y, z) \Rightarrow C$. Het gaat hier om de formule $\forall x \exists y \forall z A(x, y, z)$. Men heeft te maken met het tableau

voordrachten naar voren te brengen.

[38]Voorbeeld uit Beth (1958*b*), pp. 56–57.

[39]Beth had in de eerste instantie zijn reductiesysteem zo opgezet dat er geen voorkeurskeuze mogelijk was.

[40]Uit Beth (1961*e*), p. 116.

| | w | o | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\Delta$ | $C$ | 3. |
| 2. | $\forall x \exists y \forall z A(x,y,z)$ | | |
| 4. | $\exists y \forall z A(a,y,z)$ | | |
| 5. | $\forall z A(a,b,z)$ | | |
| 6. | $A(a,b,a)$ | | |
| 7. | $A(a,b,b)$ | | |
| 8. | $\exists y \forall z A(b,y,z)$ | | |
| 9. | $\forall z A(b,c,z)$ | | |
| 10. | $A(a,b,c)$ | | |
| 11. | $A(b,c,a)$ | | |
| 12. | $A(b,c,b)$ | | |
| 13. | $A(b,c,c)$ | | |
| 14. | $\exists y \forall z A(c,y,z)$ | | |
| 15. | $\forall z A(c,d,z)$ | | |

Op het eerste gezicht weet men niet hoe dit tableau af te sluiten, men kan zelfs oneindige regressie krijgen.

Zijn er oplossingen voor deze problemen te vinden? Misschien voor problemen van het eerste soort, de toekomstperspectieven voor het tweede voorbeeld zien er heel wat zorgelijker uit.

**Mogelijke oplossingen.** Een eerste gedachte zou zijn om de wijze waarop Beth zijn constanten inzet te verbeteren. Volgens P.C. Gilmore heeft men bij Beth te maken met de 'multi-name' methode.[41] De interpretaties kunnen gebruik maken van verschillende namen voor hetzelfde individu. Gilmore stelde een 'single-name' methode voor met de mogelijkheid een 'multi-name' in een 'single-name' om te zetten: voor $T(\exists x P(x))$ [42] voegt men toe $T(P(a_1) \vee \cdots \vee P(a_k) \vee P(b))$, en voor $F(\exists x P(x))$ geeft men $F(P(a_1) \wedge \cdots \wedge P(a_k) \wedge P(b))$ waarbij $a_1, \ldots, a_k$ al eerder zijn ingevoerd en $b$ nieuw is.

Het gevolg dient zich al meteen aan in een toename van de subtableaus. Beth parafraserend moet hier in de eerste plaats aan worden toegevoegd $T(b \neq a_1 \wedge \cdots \wedge d \neq a_k \wedge d \neq b)$ om zeker te stellen dat $b$ nieuw is.[43] Hierdoor verkrijgt men een afsluiten van een aantal van de geforceerde subtableaus. Bovendien is al binnen Beths systeem hetzelfde resultaat verkrijgbaar door de toevoeging $T(b = a_1 \vee \cdots \vee b = a_k \vee (b \neq a_1 \wedge \cdots \wedge b \neq a_k))$. Als men ergens $T(b = a_i)$ heeft, vervang dan alle $b$-optredens door $a_i$ (schrap $b$).

Volgens Beth levert Gilmore geen verbetering op. Men kan in dit verband ook de dummy-methode van Kanger, die ook gebruik maakte van tableaus, aanvoeren. In later tijd zijn tal van methoden aangaande deze problemen verschenen. Helaas zijn deze van na Beths overlijden en vallen daarmee buiten ons bestek.

[41] Brief P.C. Gilmore – Beth, 19 januari 1959, (Yorktown Heights, New York); n.a.v. Beth (1955*b*). Zie ook Gilmore (1960).

[42] $T(A)$: $A$ staat op waar, aan de linkerzijde in een tableau.

[43] Brief Beth – P.C. Gilmore, 24 januari 1959.

## 7.2 Euratom-project

### 7.2.1 Bestuurlijke achtergronden

**Samenhang van de projecten.**

Op 14 april 1960 kreeg Beth bezoek van A. Gazzano van Euratom.[44] Deze deelde Beth mee dat men bij Euratom van plan was diverse soorten onderzoek, en dit verdeeld over verschillende landen, te gaan financieren. Voor Nederland had men daartoe de logica, en in het bijzonder Beth, op het oog. Dit stond Beth wel aan en per 14 april 1960 zond hij al een brief met onderzoeksvoorstellen naar Gazzano. Gazzano ging daarmee accoord en voegde met instemming van Beth hier nog het een en ander aan toe.[45]

Beth was binnen Euratom niet als een eenling bezig, maar als een onderdeel van een veel groter project. De overkoepelende organen zaten in Brussel. Beth had echter ook te maken met de wetenschappelijke staf van het reactor-centrum te Ispra. Niet alleen viel hij hieronder, maar meer nog: daar was rekenapparatuur waar men gebruik van kon maken. In toenemende mate van onderhorigheid had men:

Euratom — Directie Onderzoek — CCR — Ispra — CETIS (Centre du Traitement d'Informaton Scientifique) — Service Linguistique — GRISA — Groupe de Mathématique et Logique — Beth.[46]

Dat men bij Beth terecht kwam met een plan om onderzoek te doen naar onder andere beslissingsprocedures was, gezien een deel van het door Euratom uitbestede werk, zo vreemd nog niet.

Het was een tijd waarin de bruikbaarheid van rekenapparatuur, gekoppeld aan natuurkundig werk, steeds groter werd. De ontwikkeling van goede programmatuur en programmeertalen zette steeds meer door. Beths bezigheden waren wel meer theoretisch van aard, maar sloten goed aan bij andere door Euratom onderhouden groepen die zich bezighielden met de relatie tussen natuurlijke talen en wiskunde.[47] Aldaar werd de ontwikkeling van vertaalmachines in navolging van diverse projecten in de Verenigde Staten ter hand genomen.

Voor een wetenschappelijk gezelschap, dat in meerdere talen het woord tot

[44]A. Gazzano: Directie Onderzoek Euratom. Bezoek Gazzano: uit de brief Beth – Praesidium van de UvA, 28 mei 1960.

[45]Gazzano accoord: brief A. Gazzano (CETIS, Euratom) – Beth, 25 mei 1960, (Bruxelles). Onderzoekscontract tussen de Europese gemeenschap voor atoomenergie (Euratom) en de Universiteit van Amsterdam, dd. 14 december 1960 (Contractno. 010–60–12 DOH). De looptijd was twee jaar, te rekenen vanaf 15 december 1960. De UvA werd vertegenwoordigd door de directeur van het Instituut voor Grondslagenonderzoek (Beth) krachtens een hem door de rector magnifcus van de UvA (J. Kok) op 15 juli 1960 verleende machtiging.

[46]Hiërarchie Euratom: zie overzicht Braffort tijdens de contract-besprekingen van 17 – 18 oktober 1960 (Archief Beth).

[47]Zie voor vertaal-projecten Hutchins (1986), waarin de Euratom-vertaalmachine (Cap. 5.6, Research in Belgium (1961 — 1964), pp. 130–131), en Georgetown (Cap. 4.3, Georgetown University (1952 — 1963), pp. 70–77). Voor het vervolg hiervan, zie eveneens Hutchins (1986), hfdst. 11 Other indirect systems, 1967 — 1975, subhoofdst. 11.1 Euratom, European Scientific Data Processing Centre (CETIS), Ispra (Italy) (1967 — 75), pp. 201–202.

elkaar richt, is het automatisch in elkaars talen kunnen overzetten van documenten erg prettig. Maar niet alleen in het Europese wetenschappelijke centrum Ispra kon men daar profijt van hebben, ook het ambtelijke apparaat in Brussel zou er mee gediend zijn.

Het lichtende voorbeeld was het Georgetown-project, dat later vooral bekend is geworden door de manier waarop men de diverse overheidsdiensten in Washington geld afhandig wist te maken. Dit gebeurde in de eerste plaats door middel van het wekken van de suggestie niet ver af te zijn van het omzetten van de taal van de de vrije wereld bedreigende en spoetniks lancerende bolsjewistische vijand naar het Engels. Zoals men in Georgetown — zij het op een volstrekt onbeholpen wijze, het woord oplichterij is wellicht net iets te sterk — een vertaalprocedure van het Russisch naar het Engels probeerde op te zetten, trachtte men in Brussel dit, zij het met andere middelen, vanuit het Russisch naar het Frans te doen. Ook deze poging zou stuk lopen.

Vanuit Brussel probeerde men Beth te interesseren voor samenwerking met deze door L. Hirschberg geleide groep aan de Vrije Universiteit te Brussel. Ook het onderzoeksproject van Beth zou later een linguïstisch georiënteerde deelgroep omvatten. Deze hield zich vooral met het Chomskiaanse erfgoed bezig en niet zozeer met een statistische analyse zoals Hirschberg voorstond.[48]

Daarnaast had men binnen Euratom vanwege het enorme papieraanbod ook belangstelling voor het automatiseren van opslag en verwerking van documenten.[49] Ook dit zou voor het Brusselse administratieve apparaat van belang kunnen zijn. Verder had men werkzaamheden op het gebied van toepassingen van de wiskunde, numerieke wiskunde en op rekentuig toegesneden wiskunde. Deze onderdelen hadden niets van doen met Beths onderzoek, maar zouden in een later stadium het geld van Euratom opeisen.

Op 16 en 17 oktober 1960 werd in Amsterdam een vergadering voor een contract belegd. Van de kant van Euratom gaven P. Braffort, A. Gazzano, F. van Scheepen, D. Hirschberg en J. Larisse op deze 'réunion de travail' acte de présence.[50] Volgens Braffort waren de documentatiemachine en de vertaalmachine de wenkende toekomst-perspectieven.

[48] L. Hirschberg heeft hierover een lezing in Amsterdam gehouden. Opvallend zijn de grote verwachtingen die men had van de statistische taalanalyse. Zie hiertoe ook de brieven L. Hirschberg – Beth, 15 februari 1963, (Bruxelles); brief Beth – L. Hirschberg, 11 maart 1963.

[49] De Bouvère kwam er tijdens het laatste contract toe om te kijken in hoeverre toepassingen van de logica van belang konden zijn bij automatische documentatie. Dit onderzoek is indertijd niet doorgezet. Bij Euratom-CETIS zelf waren vrij veel mensen werkzaam met onderzoek naar documentatie-systemen.

[50] Vaak zaten de mensen waar Beth organisatorisch mee te maken had, zelf in onderzoeksprojecten: K.H. Meyer-Uhlenried bij het machinaal verwerken van documentatie, J. Larisse bij toepassingen van de wiskunde, P. Braffort bij mathematische linguïstiek. Ook A. Gazzano zat in deze hoek. Y. Lecerf was tenslotte (mede)opsteller van talrijke rapporten over mathematische linguïstiek.

**Contracten**

De moeilijkheden met de contracten waren legio. Elk jaar was er weer een nieuwe contractverlenging. Telkens weer had Beth voor zijn geld te vechten. Zelfs in het begin verliep het niet prettig. Voor alles werden beslissingen in Brussel vereist. Die werden altijd veel te laat genomen. De continuering van de aanstellingen werd hierdoor bemoeilijkt. Beth bracht er bij de voornoemde bespreking van 16 en 17 oktober 1960 dan ook verontwaardigd uit: [51] "Dit is geen kwestie van vertrouwen [van Beth in Euratom]; het heeft niets met het kontrakt te maken. Als het tegen het einde van de week niet geregeld is, dan komt er helemaal geen kontrakt." Beth dacht hiermee de zaak te bespoedigen. Niets was minder waar, de Brusselse en Isprische bureaucraten zouden in de loop der tijden hard terugslaan. Maar zelfs zij hadden niet alles in de hand, er was een nog andere groep die voor een nog grotere ellende kan zorgen, namelijk die der politici. Dit alles zal de bewerker de lezer hier besparen om hem niet van het geloof in de onschuld van de wereld af te trekken. Een bespreking van de doelen van de contracten zal echter niet verwaarloosd worden. Het is leerzaam te zien wat men, en meer in het bijzonder Beth, in die tijd haalbaar achtte.

Met betrekking tot de onderzoeksdoelen waren er telkens weer verschuivingen. Deze waren niet groot, maar soms noodzakelijk vanwege het klaarkomen van onderzoek of het kappen van doodlopend onderzoek. De eerste voorstellen van Beth hielden in — met als belangrijkste punt 1: [52]

1. "La base théorique de la construction d'une 'machine à raisonner', y compris l'étude des conditions spéciales à un computeur électronique capable de réaliser les opérations nécessaires d'une manière efficiente"
2. De door von Neumann in 1929 [?][53] geïntroduceerde quantum-logica.
3. Definitietheorie voor klassieke en intuïtionistische logica.
4. Onderzoek naar de intuïtionistische logica en daarnaast onderzoek naar recursieve functies.
5. Beslisbaarheidsproblemen voor adequate axiomatisaties.

Men had in Brussel belangstelling voor de punten 1, 3 en 5. Daarnaast had men dit ook voor probabilistische eigenschappen van logische systemen en mathematische linguïstiek. Men zag graag het werk van A.A. Markov en zijn school erbij betrokken. De taakstelling in het uiteindelijke eerste contract omvatte: [54]

a. De methoden van Herbrand en Gentzen in relatie tot de semantische tableaus.

[51] Notulenboek Euratom (Beth-archief).

[52] Brief Beth – A. Gazzano (Directie Onderzoek, Euratom), 14 april 1960. Reactie Gazzano: brief A. Gazzano – Beth, 25 mei 1960, (Bruxelles).

[53] Misschien dacht Beth aan diens Operatorenmechanik uit 1932.

[54] *Programma van wetenschappelijk onderzoek*, bijlage I uit het Onderzoekscontract tussen de Europese gemeenschap voor Atoomenergie (Euratom) en de Universiteit van Amsterdam, dd. 14 december 1960(Beth-archief).

b. De semantische tableaus en pseudovaluaties.[55]
c. Ontwikkelen van een mathematische heuristiek, mathematische generalisatie en de denkmachine zoals bij Beth en Kanger.
d. Het verder ontwikkelen van modale logica.

In het tweede contract werd taalkundig onderzoek toegevoegd.[56] Op de eerste plaats uitbreiding en verbetering van de klassificaties van Chomsky en een uitbreiding van een semantisch woordenboek voor de logica in verband met het roemruchte Georgetown-vertaalproject. Verder een onderzoek naar de definitietheorie in logica van hogere orde, de pseudodefinieerbaarheid en compatibiliteit. Voorzover mogelijk wenste men de intuïtionistische varianten erbij te betrekken. Een aantal van deze zaken werd als volgt in het tweede contract opgenomen: [57]

a. Opnieuw de semantische tableaumethode, maar nu met statistische en waarschijnlijkheidstheoretische toepassingen voor de schatting van tableaulengten.
b. Heuristische methoden voor het oplossen van combinatorische problemen (bewijsvoering, spelen).
c. Definitietheorie, ook in verband met automatisch formeren van theorieën.
d. Relaties, bijvoorbeeld de reductie van hogere-orde relaties tot binaire.
e. Toepasingen van de logica in de mathematische linguïstiek (Chomsky).
f. Het begrip van model, de axiomatiek van getaltheorie en van verzamelingenleer, en de modale logica.

Het derde contract was zoals het tweede, maar met enkele aanvullingen. Dit was het laatste contract en bedoeld om het werk af te ronden: [58]

ad b. Vergroting van het vermogen tot interne aanpassing (adaptabiliteit) van rekenautomaten aan de aard van de met die apparaten te behandelen problemen.
ad c. Definitietheorie gerelateerd aan synonymie, interpreteerbaarheid, vertaalbaarheid, dubbelzinnigheid en analogie. Dit had betrekking op de automatisering van redeneer- en vertaalmethode.

---

[55] Hiermee hoopte men een rechtstreeks verband te leggen tussen bewijstheorie en modeltheorie. Dit vormde een aanvulling op de methoden van Gentzen en Herbrand. Onder dit punt vielen ook de ontwikkeling van semantische tableaus voor de intensionele logica, denkbeelden van G. Kreisel (in het contract Keisler geheten), en de uitwerking van de op definitietheorie betrekking hebbende noties van primitief begrip en essentiële definitie.

[56] F. van Scheepen (CETIS-werkgroep voor logica), *Memorandum aangaande besprekingen met prof.dr. E.W. Beth*, dd. 19 juni 1962. Beth, *Concept programma van onderzoek.* K.L. de Bouvère, *Suggesties t.a.v. het nieuwe contract.*

[57] Bijlage I van de Overeenkomst tussen de Europese Gemeenschap voor Atoomenergie en de Universiteit van Amsterdam, dd. 15 mei 1963, te Brussel.

[58] Brief Beth – Cie. v.d. Europese gemeenschap voor Atoomenergie, programmaleiding, Directoraat Onderzoek, 15 september 1963, Onderzoeksvoorstel bijlage I, 1. *Onderzoek betreffende toepassingen van de mathematische logica.* Brief K.L. de Bouvère – Beth, 30 september 1963, programma-aanvullingen.

ad e. Afsluiting van het onderzoek naar woordvolgorde in het Nederlands en uitbreiding daarvan naar andere Euratom-talen en het Russisch. Ontwikkeling van een generatieve en relationele grammatica voor het Nederlands en andere talen als grondslag voor het vertaalprobleem.

### 7.2.2 Loop van het onderzoek

#### Geld en verantwoording

Hoe is al dit beoogde onderzoek verlopen? Dit is ook interessant vanwege de totale uitgave door Euratom van f. 390.791,82, waarvan f. 357.390,83 louter peroneelskosten.[59] Voor die tijd was dit een heel bedrag.

Men kan constateren dat er teveel hooi op de vork was genomen. Gezien de verwachtingen die spreken uit de onderzoeksvoorstellen en contracten, valt het resultaat nogal mager uit: geen logische machine, geen denkmachine, geen vertaalautomaat. Dit voor wat betreft de grote lijnen, maar met het detailwerk was het niet anders gesteld. Een aantal onderzoeksdoelen werd niet of tenauwernood aangeroerd. De meeste echter wel, zij het dat er niet veel is afgerond. Vele zijn in een rudimentair stadium blijven steken. In dit werk is er derhalve voor gekozen vooral Beth aan het woord te laten, de rest doet er binnen deze context minder toe. Wel is er vanuit het onderzoek een zekere inspiratie uitgegaan. Er kwamen mensen uit den vreemde die kruisverbanden legden met verwant onderzoek. Een voorbeeld hiervan is R.M. Montague. In het laatste kwartaal van 1962 was hij gast van de werkgroep.[60]

Men had geld en de organisatie om mensen vanuit Amsterdam op pad te sturen. Vanwege de samenwerking met de rekenafdeling te Ispra werd door deze of gene of groepsgewijs (1962) een bezoek aan die stad gebracht. Maar ook het feit dat de directe directie aldaar zetelde gaf aanleiding tot dergelijke reisjes. Daarnaast boden congressen en symposia gelegenheid om mensen daar naar toe te sturen. Buiten het al gememoreerde IBM-symposium was een deel van de groep met Beth in mei 1962 aanwezig bij het symposium Mens en Robot, dat georganiseerd werd door het Studiecentrum voor Administratieve Automatisering en de Internationale School voor Wijsbegeerte te Amersfoort. Beth gaf hier de lezing *Over de zogenaamde 'denkmachine'*. Buiten Beth waren ook als sprekers P.C. Gilmore en P. Braffort aanwezig. Voor de werkgroep ging Beth in september 1961 voor een lezing naar Namen voor het Internationale Congres voor Cybernetica.[61]

Een bijkomend voordeel was dat jongelieden zoals J.A.W. Kamp, D.H.J. de Jongh en de geshanghaaide A.S. Troelstra de kansen kregen zich wetenschap-

[59]Zie de 'lange noten' op het einde van dit hoofdstuk.

[60]Montague leverde naast lezingen over *Gödels second theorem*, *A paradox regained* en *Interpretability of models* in dit kader het volgende rapport af: Interpretability in terms of models, *Indagationes Mathematicae 27*, (1965), pp. 467–476. Dat rapport werd naast Euratom ten dele betaald door de US National Science Foundation. Verslag van door Montague verrichte arbeid: brief Beth – Presidium UvA, 6 december 1962 (uitbetaling Montague).

[61](Beth & Bok 1961), (Beth 1965*a*).

pelijk te profileren.[62]

Het geven van een eindoordeel wordt bemoeilijkt door het ontbreken van de contractueel verplichte eindrapporten. Beth volstond over de hele periode met niet meer dan kwartaalrapporten.[63] De hem als projectleider opgevolgde Heyting heeft alleen over 1963 een eindrapport gegeven. Een afsluitend eindrapport over het gehele project is nooit opgesteld.[64] Heyting maakte in 1964 als volgt de balans op: [65]

"Het onderzoek gedurende deze periode stond onder leiding van wijlen prof.dr. E.W. Beth, die als enige het werk geheel overzag. Zijn ziekte en overlijden onmiddellijk na de verslagperiode hebben een leemte veroorzaakt, die wellicht ook in dit overzicht merkbaar is. Het is mogelijk, dat op sommige punten de toelichting ontbreekt, die alleen hij had kunnen geven."

### Denkmachine

**Meetkunde.** Het project 'De denkmachine' bestond uit diverse onderdelen, zoals probleemoplossing, leren en bewijsverloop. Een aantal onderdelen valt bijeen te brengen onder het hoofd van de meetkunde. Hieronder valt in dit geval automatisering van bewijzen, patroonherkenning en het vinden van heuristieken te brengen. Belangstelling voor het laatstgenoemde hing bij Beth nauw samen met zijn belangstelling voor menselijk leren en probleem-oplossen. Hiertoe bezocht hij af en toe de door J. Piaget in Genève georganiseerde colloquia.[66] Men kan in dit kader verwijzen naar eerdere artikelen van Beth over het wiskundeonderwijs en zijn deelname aan werkgroepen hierover.

Beth werd in zijn enthousiasme voor automatisering met behulp van elementaire logica gesterkt door Tarski (1948*a*), met de beslisbaarheid van de elementaire algebra en, als gevolg daarvan, de elementaire meetkunde.[67] Beth zag daarbij wel moeilijkheden over het hoofd met betrekking tot de practische beslisbaarheid ofwel berekenbaarheid van theorieën geformuleerd in elementaire logica. De tegenvallers op dit gebied kwamen vooral na zijn tijd (de ontwikkeling van de complexiteitstheorie).[68] Beth meende: [69]

[62] Tot Troelstra's verbazing werd een door hem vervaardigd artikel-in-spe plotseling als een onder Euratom vallend artikel uitgegeven, terwijl hij niet eens lid van de werkgroep was. Troelstra was niet de eerste aan wie zo iets overkwam. Om zijn logica-serie bij Noord-Holland vanaf het begin aanzien te geven had Beth eerder al prestigieuze 'medewerkers' zonder hun medeweten op een lijst gezet en aan onderwerpen gekoppeld. Bovendien was hij zo onverstandig hier ruchtbaarheid aan te geven. A. Church stelde dit niet op prijs.

[63] Deze geven voldoende informatie over het verloop van het project.

[64] van Scheepen (1968) levert een kort overzicht.

[65] Brief Heyting – Carpentier, 16 september 1964. Ontwerp eindrapportage. Ook in het Heyting-archief (Bibliotheek Mathematisch Instituut, UvA.) is geen verdere rapportage te bekennen. In totaal heeft de werkgroep ongeveer vijftig onderzoeksrapporten opgeleverd: brief A. Heyting – J.C. Eeckhout (Euratom), 24 mei 1965.

[66] De denkbeelden van Piaget heeft hij getracht een plaats in zijn onderzoek te geven, zij het niet direct in dat van hemzelf. Resultaten zijn daar niet uit voortgekomen.

[67] (Tarski 1948*a*), (Tarski 1959).

[68] In Papadimitriou (1994), p. 15, worden voor een eerste begin M.O. Rabin in 1960, A. Cobham in 1964 en J. Edmonds in 1965 naar voren geschoven.

[69] Uit ms. E.W. Beth, *Opmerkingen over een meetkundige 'redeneermachine'.*, bijlage (?)

"Op grond van de door Tarski gegeven oplossing van het decisie-probleem voor de elementaire meetkunde staat de mogelijkheid van een meetkundige 'redeneermachine' die een gefundeerd antwoord geeft op elke in aanmerking komende vraag vast. Tevens is de grondslag gegeven voor een discussie over de mogelijke constructie van een practisch bruikbare machine."

Er is bij het vervolg van het citaat een tweede belangrijk punt: [70] "Op grond van de door Tarski gegeven decisie-procedure moet het mogelijk zijn voor elke in aanmerking komende uitspraak de 'bewijslengte' vrij exact te schatten. Op grond van deze schatting zal het mogelijk zijn, iets te zeggen over de constructie van een machine die geen gebruik maakt van heuristiek."

Later onderzoek viel minder positief uit dan Beth op dat moment dacht. De theorie van Tarski bleek vanwege het elementair-logische karakter een te harde noot om in zijn geheel te kraken. Elf jaar na het overlijden van Beth werd in Collins (1975) voor het eerst de volgende afschatting gegeven voor de bovengrens $b(A)$ van een formule $A$ uit Tarski's theorie:

$$b(A) = 2n^{2^{2r+8}} \cdot m^{2^{r+6}} \cdot d^3 \cdot a$$

Hierbij is $r$ het aantal variabelen in $A$, $m$ het aantal polynomen in $A$, $n$ de maximale graad van elk polynoom in elke variabele, $d$ de maximale lengte van de coëfficiënten (gehelen) van elk polynoom, en $a$ het aantal atomaire formules in $A$.[71] De afschatting is alleen afhankelijk van de syntactische opbouw van de formule.

Beth zag in zijn tijd wel in dat het niet mogelijk is om in één slag een ingewikkelde meetkundige theorie aan te pakken. Het moest in brokjes gebeuren. Hij voorzag echter niet dat de hanteerbaarheid van de brokjes niet afhangt van de gebruikte groepen van axioma's, maar wel van de syntactische vorm die de formules kunnen aannemen.

"Construktie van een machine die, gebruik makend van een zekere heuristiek, problemen behandelt die betrekking hebben op een driehoek. In deze machine zou een vaste 'willekeurige' driehoek ingebouwd kunnen zijn, met de bijbehorende 'merkwaardige' punten, rechten en cirkels. Bovendien zou de machine in staat moeten zijn, bepaalde 'nieuwe' punten, rechten en cirkels in te voeren. Tenslotte zou de machine in staat moeten zijn tot bepaalde 'constateringen', bijvoorbeeld van het samenvallen van een nieuw punt met een eerder geconstrueerd punt, van het liggen van een (nieuw) punt op een (nieuwe) rechte of op een (nieuwe) cirkel, e.d." [72]

Hiermee was Beth niet de eerste. Al in Hilbert (1899) [73] komt men een procedure tegen bij het formuleren van de lineaal- en ijklat-meetkunde. Hoe kan men met werktuigen in geformaliseerde vorm in een zo gering mogelijk

bij de brief Beth – Th. Bruyn, 17 augustus 1961. Het ms. was ook een bijlage bij Beth voorstel voor een werkplan.

[70] Uit ms. E.W. Beth, *Opmerkingen over een meetkundige 'redeneermachine'.*

[71] Zie de Lange noten op het einde van dit hoofdstuk.

[72] Uit ms. E.W. Beth, *Opmerkingen over een meetkundige 'redeneermachine'.*

[73] $1956^8$: pp. 115–124.

aantal stappen bij een einddoel (stelling) belanden? In de tijd direct na Beth zou men kunnen vragen naar de hoeveelheid stappen die noodzakelijk is om het gestelde doel te bereiken.[74] Beth zelf nam ook Hilbert als voorbeeld, en wel de procedure in Hilbert (1899) [75] die betrekking heeft op de snijpuntstelling voor rechten.

De voor dit onderzoek aangestelde Th. Bruyn ging uit van Carton (1960). Carton formuleerde een projectieve meetkunde met punt, lijn en snijpunt als basisbegrippen. Carton meende vanuit zijn axiomastelsel, waaronder de stelling van Pappos, de stelling van Desargues te kunnen bewijzen.[76] In het onderzoek van de Bruyn kwam ook een meer technisch deel voor, de belangstelling voor de perceptron.[77] Voor het aflezen en verwerken van meetkundige constellaties zou er door Bruyn in 1961 ook contact worden gezocht met de TH Eindhoven.[78] Daar was men, evenals in Parijs, al bezig met een perceptron-onderzoek.[79]

Helemaal zonder zicht op de moeilijkheden met betrekking tot berekenbaarheid was Beth niet. In Beth (1961*e*) wordt er in secties 2 en 3 ingegaan op de moeilijkheden die kunnen ontstaan bij rekenwerk dat voortkomt uit de beschouwing van in een theorie geformuleerde functies. In dit geval een theorie met optelling, vermenigvuldiging en exponent, met als domein de natuurlijke getallen. Beths voorbeeld betreft de functie $f(1) = 1$, $f(m+1) = (m+1) \cdot f(m)$ [dus $f(m) = m!$]. Beth laat zien dat $\forall m \forall n (f(m) = n \leftrightarrow \exists N A(N, m, n)$ [ofwel $\exists N A(N, m, n)$ definieert de functie $f(m) = n$]. N is een natuurlijk getal, als volgt. Te beginnen met $m = 1, m = 2, \ldots$ heeft men de uitkomsten $b_1, b_2, \ldots$ In Beths voorbeeld wordt dit $b_1 = 1, \ldots, b_{i+1} = (i+1) \cdot b_i, \ldots$. Voor eindige $m$ heeft men te maken met een eindig rijtje natuurlijke getallen $b_1, \ldots, b_m$. Laat de codering voor de $b_i$ achtereenvolgens $3.5^{b_1}, 3^2.5^{b_2}, \ldots, 3^m.5^{b_m}$ zijn. Zij vormen een eindige verzameling natuurlijke getallen $\mathtt{M} = \{b_1, \ldots, b_m\}$. Laat $N = 2^{b_1} + \cdots 2^{b_m}$, dus $N = 2^{3.5^{b_1}} + \cdots + 2^{3^m.5^{b_m}}$, de karakterisering van $\mathtt{M}$ zijn.

Nu over naar $\exists N A(N, m, n)$. Dit geeft binnen een gehanteerde theorie de precieze formulering van de functie $f$, in dit geval van $f(m) = m!$. Beth formuleerde dit in zijn algemene vorm als volgt: $\exists N (\forall u \forall v \forall w \forall k ((N = 2^u \cdot (2 \cdot v + 1) + w \wedge w < 2^u \wedge u = 3 \cdot 5^k) \rightarrow k = a_1) \wedge \ldots \rightarrow k = a_2 \wedge \ldots)$. En voor ons bijzondere geval van $f(m) = m!$: $\exists N (\forall u \forall v \forall w \forall k ((N = 2^u \cdot (2 \cdot v + 1) + w \wedge w < 2^u \wedge u = 3 \cdot 5^k) \rightarrow k = 1) \wedge (\forall u \forall v \forall w \forall k ((N = 2^u \cdot (2 \cdot v + 1) + w \wedge w < 2^u \wedge u = 3^2 \cdot 5^k) \rightarrow k = 2) \wedge (\forall u \forall v \forall w \forall k ((N = 2^u \cdot (2 \cdot v + 1) + w \wedge w < 2^u \wedge u = 3^3 \cdot 5^k) \rightarrow k = 6) \wedge \ldots \wedge (\forall u \forall v \forall w \forall k ((N = 2^u \cdot (2 \cdot v + 1) + w \wedge w < 2^u \wedge u = 3^{\mathbf{m}} \cdot 5^k) \rightarrow k = \mathbf{n})$

[74] Dit is een vraag naar de ondergrens naar tijd, niet naar ruimte. Zie Preparata & Shamos (1985), p. 3.

[75] $1956^8$: pp. 111–114.

[76] Stelling van Desargues, Stelling van Pappos; zie Heyting (1963), i.h.b. p. 64 voor de stelling van Hessenberg: Desargues is uit Pappos afleidbaar.

[77] Een perceptron is te beschouwen als een parallelle computer. Deze heeft een aantal koppen die simultaan en onafhankelijk van elkaar een bepaald gebied (geometrische patronen) kunnen aflezen om vervolgens de gegevens te verwerken en uitspraken over het patroon te kunnen doen.

[78] Brief Beth – J.F. Schouten (TH Eindhoven), 31 mei 1961.

[79] Parijse perceptron-onderzoek: *Notulenboek* [van het Euratom-project) 1961 — 1963 op 2 mei 1961 (Beth-archief).

[en in ons voorbeeld $\mathbf{n} = \mathbf{m}!$].

N.a.v. bovengenoemd geval kwam Beth er toe enkele gedachten over haalbaarheid te poneren. Bij de gekozen zeer eenvoudige formule heeft men binnen de formele theorie al een ingewikkeld patroon, zelfs bij een kleine getalwaarde. Beth gebruikt daartoe $m = 6$ in $f(m) = m!$ dus $n = 720$. Voor $N$ komt hij tot de afschatting $10^{3 \cdot 10^{498}}$. Beth zei hier over: "I wonder how many micro-seconds one of the more powerful computers would need to provide us with a precise value of $N$. At any rate, one should remember that we have taken a fairly small argument value." En met betrekking tot recursietheorie (waarmee hier alles geformuleerd wordt) voegde Beth er nog aan toe: "and in particular the theory of recursive functions, are not primarily concerned with the construction of practical methods of computation, but rather with the problem of characterizing those function which are, or are not, effectively computable in principle. [. . . ] With respect to the functions which he [the programmer] has to handle the question of their computability in principle will hardly ever arise. In most cases he will be exclusively concerned with the problem of programming their computation in the most efficient manner." Voor Beth stonden twee wegen open naar wat hij noemde: 'theorem-proving heuristics', en 'theorem-finding heuristics'. Deze begrippen bespreekt hij gewoonte getrouw aan de hand van het al uitgesponnen voorbeeld. Hij gaat daarbij uit van $\forall m \forall n(f(m) = n \leftrightarrow \exists N A(N, m, n))$ in de theorie. Welke strategie moet men kiezen om bijvoorbeeld $f(6) = 720$ in die theorie te bewijzen.

— a. Om een automaat te construeren dat in staat is om stellingen te bewijzen op basis van een formeel systeem komt Beth tot 'theorem-proving heuristics'. Dit komt volgens hem te pas bij de keuze tussen de numerieke waarde van $N$ (in bovenvermeld voorbeeld) uit te rekenen (en dat levert computationele moeilijkheden op) of $N$ te karakteriseren als $2^{3.5} + 2^{3^2.5^2} + 2^{3^3.5^6} + \ldots + 2^{3^6.5^{720}}$, en naar de 'syntactische' eigenschappen daarvoor te kijken. 'Theorem-proving heuristics' levert de instructies voor het doenlijke.

— b. Men kan zich ook een andere vraag stellen, namelijk $f(m) =??$, en vind nu de passende getalwaarde. Dit is de weg voor 'theorem-finding heuristics'. In ons geval uitgevoerd door in successie $f(1), f(2), \ldots f(m-1)$ uit te rekenen: $f(m) = n$ is de te bewijzen formule, en $f(1) = 1, f(2) = 2, \ldots, f(m-1) = (m-1)!$ fungeren als lemma's.

**Bewijsverkorting en bewijslengte.** Bij de mechanische constructie van bewijzen en bewijsherkenning is het gezien de rekentijd van belang of men een bewijs kan vereenvoudigen of minimaliseren. Ook hier komen diverse lijnen van onderzoek binnen Beths Euratom-project samen. A. Ghose kreeg de opdracht voor de bewijsverkorting aansluiting te zoeken bij het werk van Gödel en Mostowski aangaande het beschouwen van bewijslengte vanuit een hoger standpunt. Hoe kan men bewijslengte beperken met een beroep op een logica van hogere orde? Het gelukte Ghose de door Gödel indertijd niet bewezen veronderstellingen van Gödel (1936) hierover van een bewijs te voorzien. Hiermee was hij overigens niet de enige.[80]

Voor een directe aanpak van het probleem werd S.C. van Westrhenen aangesteld.[81] Van hem werd verwacht dat hij met behulp van een numeriek onderzoek de verdeling van bewijslengte binnen beslisbare klassen van elementair-logische formules zou bekijken. Daarnaast had hij afleidingen binnen de logica te programmeren. Hieronder viel ook de lengte van de tableaus. Wat zijn de minste rekentijd vergende tableaus voor een zeker probleem. Kan men tableaus ook mechanisch reduceren? Dit is overigens een vraag die al eerder door Beth opgeroepen was. Het gebruik van Markov-ketens werd, gezien het statistische onderzoek van van Westrhenen, eveneens bij hem ondergeschoven. In de tweede contract-periode deed men voor dit programma een steeds groter beroep op divers Europees rekentuig. Voor het programmeren had men H. Fangmeyer aangesteld. Men kon nu in de IBM-7090 propositionele formules stoppen en daar bewijzen voor terugkrijgen. Verder werd er door van Westrhenen een programma voor deze machine ontworpen dat diende als 'random generator' van propositionele formules.[82] Op het eind van het Euratom-project probeerde Van Westrhenen zijn statistische en waarschijnlijkheidstheoretische methoden ook nog op de leer van de definities toe te passen.[83]

### Modale logica, intuïtionisme en modeltheorie

Het onderzoek in deze richting vormde een cluster. Men kan hier modelmatig werk, intuitionisme, axiomatieken en modale logica onderbrengen.[84] Beth vond de modale logica van belang voor het onderzoek van natuurlijke talen, dus ook voor de vertaalmachine.

Tijdens de opstart-periode verschenen er rapporten van G. Kreisel over absoluut vrije keuzerijen en semantiek van de intuïtionistische logica, volledigheidsstellingen en interpolatie. Interpolatie was van belang voor het beschouwen van de plaats van de definitiestelling. Op het punt van de absoluut vrije keuzerijen werd A. Ghose ingezet. De absoluut vrije keuzerijen speelden een belangrijke rol bij de verbeteringen van Beths semantiek door Kreisel (later meer hierover).

Door Beth werd in deze periode het onderzoek van de pseudo- en I(mplicatieve)-valuaties voortgezet. Hieraan nam ook D.H.J. de Jongh deel. In dit verband heeft in een later stadium A.S. Troelstra nog een bijdrage aan intermediaire logica's geleverd.[85] Beth en J.J.F. Nieland bestudeerden de modale

[80] (Ghose 1961). Amitabha Ghose, *1933.

[81] Sophius Christiaan van Westrhenen, *1928.

[82] In de laatste periode kwam de Zweedse 'concurrent' S. Kanger uit Uppsala naar Amsterdam om 6 oktober 1964 de lezing *Equivalence of theories* te geven. Brief A. Heyting – Groenewoud (UvA, financin), 6 oktober 1964. Volgens het [Euratom] *Notulenboek 1963 — 1964* (Archief Beth), op de dagtekening van 6 oktober 1964 was het echter een lezing met de titel *Logical analysis of the notion of 'a right'*.

[83] Van Westrhenen zette later zijn resultaten uit het Euratom-project om in zijn dissertatie van Westrhenen (1969).

[84] Met de axiomatieken is het niets geworden. Men maakte gebruik van de expertise van B. Germansky.

[85] (Troelstra 1965).

systemen S4 en S5 met behulp van tableaumethoden en Kripke's wereldensemantiek.[86] Zij betrokken hierbij de intuïtionistische logica en de afgrenzing daarvan. Beth verwachtte van de algebraïsch-topologische methode (direct als vertaling toegepast op de modale begrippen in de vorm van in- en uitwendige) minder dan van de semantische (modelmatige) aanpak.[87] Andere modale systemen en hun samenhang stonden op het programma van P.H. Krijgsman.

Het onderzoek naar afzwakkingen van de theorie van de natuurlijke getallen (zoals het werken met alleen '+' of '·') had met modale logica te maken. Interessant is in zo een geval bij het balanceren op het randje van onbeslisbaarheid de vraag naar de notie 'bewijsbaar' en de mogelijke vertalingen van dit begrip in een geschikt modaal systeem. Dit was naast het behandelen van relatieve consistentie een project voor W.A. van der Moore.

De Bouvère was verantwoordelijk voor de modeltheoretische aspecten. Zijn onderzoek moest zich in het definitoirische verband ook bezighouden met ambiguïteit en synonymie. Dit kon van belang zijn bij het ontwikkelen van programmeertalen, het beschouwen van natuurlijke talen en vertaalprocedures.[88]

### Taalonderzoek

Beth zelf was al langer in de toepassingen van logica op taalkunde geïnteresseerd. Zijn belangstelling werd gevoed door twee exponenten in de logica.

- Het formele redeneren, zoals beoefend in de wiskunde, met als afgeleide daarvan het informele redeneren, zoals in de omgangstaal en binnen een sociale context. Zijn vroegere belangstelling voor significa en het redeneren binnen ethiek en rechtssystemen zijn hier voorbeelden van.
- De constructie van een formeel systeem met als afgeleide de constructie van een grammatica.

Dit blijkt niet alleen uit publicaties en briefwisselingen. Ook in de serie 'Studies in Logic' wenste Beth taalkundig materiaal, in casu Chomsky, uit te gaan geven. Beth interpreteerde het werkterrein van deze serie nogal breed: niet alleen logica sec, maar ook toepassingen. Hij was er van overtuigd dat dergelijke toepassingen ook de logica verder zouden kunnnen helpen. Dit had evenwel niet de instemming van een andere redacteur, L.E.J. Brouwer: [89] de serie had geen

[86] S.A. Kripke sprak als gast op 20 augustus 1963 over intuïtionistische logica. Zie *Notulenboek Euratom 1961/63*, op de dag 20 augustus 1963. En de brief Beth – Presidium UvA, 23 augustus 1963. Kripke zat eerst al in Oxford voor het Logic Colloquium (zie Notulenboek, 30 juli 1963). Johannes Jacobus Fransiscus Nieland, *1927.

[87] Brief Beth – P.H. Krijgsman, 11 januari 1962.

[88] Het laatste resultaat tijdens het derde contract van de Bouvère was dat als theorieën synoniem zijn, hun corresponderende Lindenbaum-algebra's isomorf zijn. Twee bezoekjes van D. Scott (UC. Berkeley) kan men bij het semantische onderzoek onderbrengen. In 1962 gaf hij een lezing over *Well-ordering and definability*, (zie *Notulen stafcolloquia 1961 — 1963*, dag 5 september 1962.), en in het vroege voorjaar 1964 de lezing *On the logic of tenses*, (zie *Notulenboek Euratom 1963/64*, en brief A. Heyting – D. Groenwoud (UvA), 24 maart 1964.).

[89] Chomsky en het 'Esperanto van de kosmos' (H. Freudenthal): brief L.E.J. Brouwer – Beth, 2 juni 1959, (Blaricum).

algemene taalwetenschap te zijn, maar logica en grondslagenonderzoek. Beth bracht hiertegen in: [90]

"[D]e constructie en het onderzoek van talen met behulp van mathematische (anders dan statistische) methodes, deels wel degelijk onder de mathematische logica valt, deels als een directe toepassing dan wel als een aangrenzend gebied moet worden beschouwd. Werk als dat van Chomsky en Freudenthal zou zonder de mathematische logica eenvoudig ondenkbaar zijn. Gezien deze nauwe betrekkingen (die teruggaan op Leibniz, Couturat, Peano, Bloomfield)[91] is er geen enkele reden voor ons om af te zien van de opneming van de bovenbedoelde werken, en daarmee van de aan opneming verbonden voordelen. Deze voordelen zijn volstrekt niet alleen van zakelijke aard; meer contact tussen logica en algemene (abstracte of zg. structurele) taalwetenschap is m.i. ook een groot wetenschappelijk belang. Ik ben derhalve zeer geporteerd voor opneming van deze mss." [92]

Binnen het werk van Chomsky had men een combinatie van woordalgebra's en abstracte automaten. Men had formele systemen voor productie en herkenning (geldigheid).[93] De stelling dat dit tenslotte zou kunnen dienen om natuurlijke talen — en in het begin delen van natuurlijke talen — te beschrijven lag voor de hand. Beth dacht er wel zo over, maar helaas was dit niet besteed aan alle taalkundigen.[94] Op de kritiek van A. Reichling, een algemeen taalkundige aan de Universiteit van Amsterdam, antwoordde Beth: [95]

"Meen nu echter niet dat naar mijn mening het werk van Chomsky nu reeds een definitieve beantwoording van allerlei linguïstische problemen heeft opgeleverd. Zover ik kan zien is deze pretentie ook bij Chomsky zelf niet aanwezig. Wel meen ik dat hij richtlijnen geeft voor een vruchtbare synthese van denkbeelden ontleend aan de linguïstiek, aan de mathematische logika en aan de informatie- (en communicatie) theorie. Deze synthese is juist daarom veelbelovend, omdat ze niet leidt tot een dogmatisch geponeerd systeem, maar de mogelijkheid opent van zeer gevarieerde experimenten met allerlei modellen."

Beth had voor de leiding van het taalkundige onderzoek zijn collega J.F. Staal als adviseur aangesteld. Deze leidde tijdens het derde contract het colloquium *De logische structuur der grammatica*. Ook de Bouvère kreeg bemoeienis met de taalkundige afdeling.[96] Men ging zich toeleggen op de woordvolgorde in het Nederlands. Het onderzoek naar woordvolgorde valt uit te breiden naar volgorde van zinsdelen. Dit werd gedaan met het oog op automatisch vertalen. Door

[90] Brief Beth – L.E.J. Brouwer, 5 juli 1959.

[91] Voor Peano, zie de lange noten op het einde van dit hoofdstuk. Louis Couturat, 1868 – 1914.

[92] (Freudenthal 1960) is uiteindelijk wel in de Studies in Logic opgenomen, Chomsky niet.

[93] In Beth (1963*c*) werd er ingegaan op deze aspecten uit het werk van Chomsky.

[94] Beth keek vooral naar het syntactische aspect en niet naar de door Chomsky verwaarloosde semantische component. Overigens had de vijandigheid van de Amsterdamse taalkundigen jegens Chomsky tot gevolg dat Beth van hen een promotie moest overnemen: Balk - Smit Duyzentkunst (1963).

[95] Brief Beth – A. Reichling, 15 januari 1963.

[96] De Bouvère heeft zelfs tijdens een studiereis in augustus 1963 naar Californië ook een bezoek aan Georgetown gebracht. Zie de kwartaalrapporten 1963 (drie van Beth en één van Heyting).

budgettaire beperkingen werd echter het eerst in deze groep gesneden en kon het onderzoek naar de vertaalmachine niet voltooid worden. De uitgedunde taalgroep — P. Seuren was al vertrokken — beëindigde zijn werkzaamheden met rapporten over een eerste proeve van een analytische grammatica voor een gedeelte van de Nederlandse taal (J. Smits) en de zogeheten talen van Chomsky (R.P.G. de Rijk).[97]

### Het einde van Beth en van het project

Het overlijden van Beth op 12 april 1964 heeft zijn weerslag gehad op de werkzaamheden. Ter herdenking werd aan de Faculteit der Natuurwetenschappen van de Universiteit van Parijs een colloquium gehouden, waar (oud)leden van de werkgroep (Heyting, de Bouvère en Nieland) voordrachten hielden.[98]

Tijdens Beths ziekte en na zijn overlijden traden K.L. de Bouvère als tijdelijk plaatsvervanger en A. Heyting als Beth opvolgend directeur op. Het was niet alleen het overlijden van Beth of de inzet van Heyting waardoor het verloop van de werkgroep bepaald werd. Het zwaarst woog de onderzoekspolitiek van Euratom: [99] "Unfortunately, circumstances have not permitted this effort to be continued, and budgetary and other restrictions have compelled the CETIS team at Ispra to confine its activities strictly to the field of applied mathematics, while at the same time outside contracts have been considerably reduced."

Op 23 maart 1965 viel het doek: [100]

"Aan het slot sprak dr. de Bouvère woorden van dank aan prof. Heyting voor alles wat hij voor de groep gedaan heeft sinds het overlijden van prof. Beth, en bood hem sigaren als afscheidscadeautje aan. Prof. Heyting bedankte hiervoor en bedankte tevens de medewerkers, waarmee de werkgroep ontbonden is verklaard."

## 7.3 Lange noten

**Kostenposten.** Zie voor de kostenposten de kwartaal-afrekeningen door Beth en de controle door het hoofd van de Afdeling Financiële zaken van de UvA, D. Groenewoud. Naar later bleek maakte de financiële dienst van de UvA ook wel eens fouten. Derhalve zijn de berekeningen van Beth aangehouden, de verschillen zijn miniem. De kwartalen hierna — vierde kwartaal 1963 tot en met het eerste kwartaal 1965 — werden door Heyting becijferd. Een post van f. 49.283,27 leverde moeilijkheden op. Deze som is niet bij de hoofdsom in de tekst opgeteld.[101] Het aantal wetenschappelijke onderzoekers valt het gemakkelijkst uit de kostenposten af te lezen. Voor de meeste

[97] Naast L. Hirschberg uit Brussel werd de taalkundige afdeling nog bezocht door E. Engeler (Minnesota en IBM Zürich). Deze hield op 10 maart 1964 de lezing *On formal languages associated with mathematical structures*. Brief E. Engeler – Beth, 9 november 1963, E. Engeler – Heldring (secr. Grondslagen), 2 maart 1964.

[98] (Beth 1967).

[99] Braffort & van Scheepen (1968).

[100] *Notulenboek voor Euratom-colloquia* (Beth-archief).

[101] Brief Heyting – R. Wiessing (Euratom), 23 december 1964.

deelnemers was het Euratom-project een bijbaantje. Met uitschieters naar beneden en naar boven schommelde het aantal deelnemers rond de elf man.

**Tarski's elementaire algebra.** Collins (1975) ging uit van Tarski's quantoreliminatie. Hij gebruikte een decompositie met daaraan gekoppeld een aantal (deel) algorithmen om deze te verkrijgen. Zoals al aan de parameters van zijn afschatting te zien valt betreft het hier in ieder geval de variabelen door middel van quantoreliminatie — en met behulp van cylindrische algebraïsche decompositie. Collins theorie is uitgebreider dan die van Tarski: er worden polynomen in meer dan één variabele toegestaan.

Uitgaande van een polynoom $p(x_1, \ldots, x_r)$ $[= \sum_{i=0}^{n} p_i(x_1, \ldots, x_{r-1}) \cdot x_r^i]$ als element van $R[x_1, \ldots, x_r]$ beschouwt hij deze als element van $R[x_1, \ldots, x_{r-1}][x_r]$, d.w.z. als een polynoom in de variabele $x_r$ met coëfficiënten in de polynomiale ring $R[x_1, \ldots, x_{r-1}]$. De 'Tarskiaanse' operaties zoals graad en reductum worden dan gerelateerd aan de hoofdvariabele $x_r$. Collins latere reducties van $b(A)$ zijn gezien de geringe verlaging met betrekking tot dit probleem irrelevant. Collins omschreef de quantoreliminatie, Solovay en Monk (in 1974) deden dit niet.

**Beth en Peano.** Peano heeft zich gedurende zijn gehele leven bezig gehouden met het ontwikkelen van kunsttalen om daarmee een betere onderlinge verstandhouding der (wiskundig onderlegde) mensen te kunnen bewerkstelligen. Hij heeft heeft o.a. een rol gespeeld bij de Academia pro Interlingua.[102]

Beth verkeerde lange tijd in de waan, dat deze academie tezamen met het orgaan 'Schola et Vita' allang ter ziele was. Door een publicatie van Gliozzi en U. Cassina verkreeg hij hoop op beter. Beth zou graag meewerken aan een instelling waarvan de beginselen hem zo sympatiek waren. Helaas voor hem en Cassina was het zo ver nog niet.[103]

Volgens W.A. Verloren van Themaat zag Beth wel wat in het door Peano ontwikkelde Latino sine flexione (hetgeen wat anders is dan Peano's Latino minimo) als wereld-hulptaal.[104] Verloren van Themaat waardeerde voor het gestelde doel de 'naturalistische' kunsttaal (d.w.z. een gebruikte natuurlijke taal met vereenvoudigingen) Latino sine flexione minder dan Beth.

[102] Interlingua was een kunsttaal. Zie (Kennedy 1980).

[103] Brief Beth – U. Cassina, 14 november 1954. Brief U. Cassina – Beth, 24 november 1954, (Milano).

[104] Brief W.A. Verloren van Themaat – Beth, 4 augustus 1961, (Londen). Manuscript van W.A. Verloren van Themaat, *Esperanto en andere kunsttalen, in het bijzonder Latino sine flexione, Voor prof.dr. E.W. Beth* [Beth-archief].

# Hoofdstuk 8

# Deductieve tableaus

*"Alle diese Untersuchungen waren semantisch oder modell-theoretisch fundiert. Aus diesem Umstand ergab sich die Frage, inwieweit man in dieser Beziehung auch rein deduktionstheoretisch oder formal vorgehen könnte. Es soll diese Frage nicht missverstanden werden. Natürlich kann jedes Kalkül, wenn man es einmal hat, rein formal beschrieben und untersucht werden. Es handelt sich hier aber vielmehr darum, den Aufbau des Kalküls deduktionstheoretisch zu motivieren. Es besteht hier ein grosser Unterschied im Vergleich mit der semantischen Begründung. Wenn die semantische Grundlage vorgegeben ist, so ist die entsprechende Deduktionstheorie eindeutig bestimmt. Die deduktionstheoretische Motivierung hat nur einen heuristischen Wert, trägt m.M.n. zur Einsicht doch etwas bei."* [1]

## 8.1 Definities

### 8.1.1 Overwegingen vooraf

#### Beths afbakeningen van het deductiebegrip

De semantische tableaus werden gebruikt om formules snel te testen op geldigheid. De techniek en de constructie van dergelijke tableaus werden door Beth gehaald uit een bewijstheoretisch apparaat. Men kan de tableaus op hun beurt voor de constructie van een bewijs gebruiken (dit kan gelezen worden als een uitdrukking van volledigheid).

Deze problematiek was al vanaf het allereerste begin bij Beth opgekomen. Beths doel was een equivalent, niet van Gentzens sequenten, maar van diens natuurlijke deductie. Louter bewijstechnisch had hij het syntactische onderzoek al eerder kunnen afkappen. De natuurlijke deductie werd door Beth na de nodige bewerkingen aangeboden in een lineaire variant. Ver liggen de sequenten en

[1] Uit ms. voordracht E.W. Beth, *Deduktive und semantische Tafeln für die rein-implikative Logik*, Math. Institut, Universität Marburg/Lahn, 27 november 1959.

natuurlijke deductie niet uit elkaar. Reeds Gentzen bewees de equivalentie van de door hem gehanteerde systemen.[2]

Beths motief voor het verdere uitdiepen naar natuurlijke deductie was ideologisch van aard. Beth vond in de 'natuurlijke deductie' het best het 'natuurlijke verloop' van een redenering weerspiegeld. Dit was een punt waar hij in vele geschriften telkens weer op terugkwam: [3]

"Het begrip van inferentie [deductie] en van inferentieel [deductief] tableau enerzijds en het begrip van logisch gevolg en van semantisch tableau anderzijds karakteriseren twee zeer verschillende opvattingen van de implicatie, [...]. Het is evident, dat de inferentiële logica beter beantwoord aan ons begrip van de logica als een wetenschappelijke studie van de inferentie en het is dus niet verwonderlijk dat menig logicus een zekere voorliefde betoond heeft voor de inferentieële opvatting der implicatie.

Anderzijds is het de tweewaardige implicatie die voorkomt in de klassieke wiskunde, zodat de zuiver inferentiële logica der implicatie niet adequaat is aan de analyse van het wiskundig denken. Het zou dus wenselijk zijn — door een duwtje — de tweewaardige logica nader bij de inferentiële logica te brengen om een logisch systeem tot stand te brengen dat de voordelen bezit van de inferentiële logica en tegelijkertijd beantwoord aan de tweewaardige opvatting der implicatie.

Het komt uiteindelijk neer op het assimileren van het semantisch tableau met het inferentieel tableau, zodat enerzijds de eventuele verdringing[4] van sommige formules gerespecteerd wordt [...] zonder dat anderzijds de mogelijkheden om het tableau af te sluiten aangetast worden."

Bovenstaande lijkt duidelijk en zal ook de procedure vormen die in dit hoofdstuk uitgebreid aan de orde komt. Maar ook in 1960 beweerde Beth: [5]

"In general, a closed semantic tableau cannot be immediately converted into a formal deduction. This conversion seems possible only if the semantic tableau is at the same time a deductive tableau in which case an intuitionistic deduction results. This I can, however, only state as an empirical rule because so far I have studied the situation only with a view to classical logic."

Het laat zien dat Beth soms deductieve tableaus gelijk stelt aan intuïtionistisch aanvaardbaar, dan weer ook klassieke logica de deductieve tableaus niet onthouden wil. Het geeft een ambivalentie die nooit goed bij hem verdwenen is; hier zal in de loop van dit hoofdstuk op worden teruggekomen. Beths motieven zijn niet altijd even duidelijk. Soms probeerde Beth met een, wellicht verwarring wekkende, naamgeving bepaalde bijgedachten de pas af te snijden: [6] "Dans notre Rapport 1 (du 1 mai 1961) [7], la logique inférentielle fut appelée '*logique intuitioniste*'; nous avons choisi un terme plutôt neutre pour éviter toute discussion philosophique." In dit geval wordt 'inferentieel' gelijkgesteld aan intuïtionistisch, zoals ook blijkt uit Beth (1967), p. 39: [8] "De klassieke

---

[2]Zie Gentzen (1935*b*).
[3](Beth 1960*c*).
[4]Verdringing: een technisch punt bij de deductieve tableaus; komt nog aan de orde.
[5]Brief Beth – Kreisel, 5 december 1960.
[6](Beth 1961*a*).
[7](Beth 1961*c*).
[8]Hfdst. 3, 'Het bewijs uit het ongerijmde', volgens de bewerkers 'grotendeels speciaal voor

logica is sterker dan de inferentiële logica [...] Iedere inferentieel mogelijke deductie is ook klassiek mogelijk." Maar volgens Beth zijn $((A \to B) \to A) \to A$ (wet van Peirce) en $\exists x(\exists y A(y) \to A(x))$ (wet van Plato) niet inferentieel, maar wel klassiek geldig.

Later zal op Beths naamgeving en bedoeling verder worden ingegaan. Vooreerst zal er bekeken worden hoe Beth de deductieve tableaus, tezamen met lineaire deducties, technisch formuleerde zonder bij voorbaat iets uit te sluiten.

### Deductiebewijzen uit tableaus

Men kan het gestelde doel bereiken vanuit de semantische tableaus, maar ook vanuit een 'nieuw' tableausysteem. Als men begint met een semantisch tableau, dan heeft dit enkele bewerkingen te ondergaan. Men kan ook direct met het nieuwe systeem beginnen: geldigheid en bewijs in één. Kenmerken zijn formuleherhalingen, inschrijven van hypothesen en de namen van toegepaste regels; hiermee slibt een tableau al aardig dicht en zeker wordt het adagium van het semantische tableau, een minimale inzet van formules en hulpmiddelen, er door geschonden. Dit leidt dus niet tot een snelle geldigheidstest. Het heeft enige tijd geduurd voordat Beth een uitgewerkt systeem tot zijn beschikking had. In 1955 begon hij er mee, rond 1962 was hij klaar. Wat betreft de formulering van de regels zal worden uitgegaan van een niet uitgegeven typoscript dat niet lang voor zijn heengaan klaar gekomen is en het meest volledig verslag doet van zijn pogingen:[9] "Pour arriver à une méthode de déduction adéquate il faudrait donc développer une variante du tableau sémantique qui partage en même temps des adventages du tableau déductif. Un tel tableau respecterait la supplantion de certaines formules sans que pour cette raison la clôture des sous-tableaux intéressés soit affectée. Or ce problème admet plusieurs solutions."

Beth ging bij al zijn pogingen uit van de volgende constante: een pakket premissen, en deze premissen leiden tot *één* conclusie. Binnen de redenering (afwikkeling van het tableau) kan men gebruik maken van hypothesen, die ergens worden ingevoerd (zij worden in het door Beth ontwikkelde mechanische systeem door de regels veroorzaakt) en later ingetrokken moeten worden. Soms zijn er geen premissen en begint men met hypothesen: regel FE toegepast op de conclusie ofwel conditionalisering. Dit zal de leidraad vormen voor dit en een deel van het volgende hoofdstuk. Soms gebruikte Beth een inzet aan de T- of premissenzijde, die niet in de oorspronkelijke vraagstelling voorkwam: axioma's of andere, waar bevonden formules die bijdragen tot de oplossing van waar Beth anders niet uitkwam: het afsluiten van het tableau. Dit gebeurde

dit boek geschreven'.

[9] E.W. Beth, *Les tableaux sémantiques et la déduction naturelle.* Vanwege de referenties naar artikelen in het typoscript zal het wel rond 1962 geschreven zijn. Een aantekening in het typoscript bevat de woorden 'La Pléiade'. Wellicht was het bedoeld als een bijdrage aan *Encyclopédie de la Pléiade, (Logique et connaissance)*, Paris, 1967. Dit deel werd uitgegeven onder supervisie van zijn Geneefse kennis J. Piaget. In dit ms. zijn geen nieuwe gedachten, methoden of een uitbreiding van het al bestaande materiaal aanwezig, wel verbeteringen en verduidelijkingen. Het een prettig leesbare expositie: alles staat bij elkaar en er wordt niet een teveel aan uitleg gegeven, waarmee Beth soms de lezer plaagt.

vooral in Beths laatste jaren. In zo een geval heeft men de mogelijkheid van hypothesen, premissen en axioma's.

Beth hanteerde voor de reducties de volgende opzet: links de premissenzijde, rechts de conclusiezijde (inplaats van waar en onwaar). Voorwaarde: $\#\Delta \geq 0$ en $\#\Gamma \leq 1$

| premissen | conclusie |
|---|---|
| $\Delta$ | $\Gamma$ |

Beth beschreef zijn systeem als tableaus met speciale deductieregels; parallel daaraan kan een natuurlijke deductie geconstrueerd worden die eventueel ook het tableau zelf 'ingeschoven' kan worden. In de sectie 'Van reductie naar deductie' wordt daartoe behandeld:

1. Voorschriften tot tableaureducties met een waar-onwaar indeling. De onwaar-kant draagt de extra voorwaarde van niet meer dan één formule per reductiestap met zich mee.
2. De bij geval 1 horende lineaire deductie.
3. Het onder geval 1 genoemde tableau, als men daar de lineaire deductie zoals onder geval 2 inschuift (hier varianten genoemd en van een ster voorzien): hier heeft men een premissen-conclusie indeling

Door het geven van deze regels heeft men 'direct' de sleutel tot de omzetting van semantische tot deductieve tableaus in handen.

Er zijn diverse methoden om, met de tableaus als uitgangspunt, aan een lineaire (natuurlijke) deductie te komen.[10] De diverse methoden geven hetzelfde eindresultaat. Van belang is wat men doet met de deductieve component. Beth is niet zo duidelijk in het aangeven van zijn bedoelingen. Hoe dan ook, hij voert het nergens precies uit.

Men kan vanuit Beths uitgangspunt twee kanten op: a. een in de tableaus ingeschreven methode zoals deze voorkomt in Beth (1962*a*) en b. een m.b.v. semantische waar- onwaar-tableaus buiten de tableaus opgestelde natuurlijke deductie, zoals in het niet gepubliceerde manuscript *Les tableaux sémantiques* uit (niet veel) later tijd.

In het geval (a) gaat er men er van uit, dat alle informatie m.b.t. de lineaire natuurlijke deductie in het tableau gestopt wordt; toch bestaat dit vaak uit een combinatie van in tableaus ingeschreven en daarnaast te ontwikkelen materiaal — zuiver op de graat is Beth nergens. Men heeft hier te maken met het vermelde premissen-conclusie-tableau met één formule ter rechterzijde. In dit geval moet men de opgevouwen lineaire deductie nog letterlijk recht zien breien. Vooral in Beth (1962*a*) treft men omschrijvingen aan hoe men te werk moet gaan, maar het duidelijkst zijn meestal de gegeven voorbeelden. In ons geval van een vereenvoudigde weergave van de tableaus draait men eenvoudig om de figuur van een afgesloten tableau heen.

Beth placht bij de de reducties in de tableaus nummers te noteren, die naar de reductieregels (en tevens deductieregels) verwijzen. Hij deed dit door een

[10] Men kan met Beth, maar ook met Gentzen, bomen construeren, die men kan omzetten in lineaire vormen. Voor rechttrekken van bomen, zie (Curry 1965).

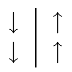
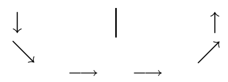
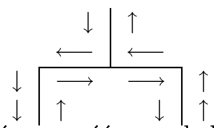
horizontale lijn onder de formule, waarop een regel werkt, te trekken en deze horizontaal door het gehele tableau te laten lopen. Bij die lijn schreef hij in de marge het nummer van de toe te passen regel. Op deze wijze gaf hij soms ook (bijvoorbeeld met een stippellijn over de volle breedte van het tableau) een hypothese aan; zo heeft men het invoeren op waar en intrekken op onwaar van een hypothese aangegeven. Als men bij het in volgorde omzetten van een tableau in een lineaire deductie dit meeneemt, heeft men meteen de gegevens voor het toepassen van regels en hypthesen genoteerd.

In het geval (b) treft men twee componenten: 1. een semantisch waar-onwaar-tableau met één formule op rechts. 2. de met behulp van geval 1 opgezette lineaire natuurlijke deductie: [11] “Schémas de déduction. Nous voulons maintenant étudier les rapports qui existent en général entre la nouvelle version d'un tableau sémantique clôturé et la déduction correspondante. A une application du schéma de réduction [de tableaus] il correspondra dans la déduction un fragment ayant la structure suivante.”

Men kan er over redetwisten wat de gemakkelijkste of meest geavanceeerde methode is. Beide methoden hebben hun voors en tegens.

a. Als men de deductieve component in het afgesloten tableau heeft ingebouwd, dan wordt, gerelateerd aan onze manier om de tableaus voor te stellen, voor linearisering de volgende bewerking voorgeschreven.

1. Men draait komende vanuit het begin van de linkerkolom over het algemeen tegen de de klok in tot men bij het begin van de rechterkolom is aangekomen: fig. 1.
2. Bij een afsluiting draait men om de tak heen van links naar rechts tegen de klok in. Men gaat over van T naar F: fig. 2.
3. Bij splitsing draait men m.b.t. die splitsing met de klok mee: fig. 3.

1.  2.  3. 

In alle gevallen schrijft men de formules al draaiende één voor één op, de lineaire deductie wikkelt zich af. Het resultaat hiervan is een netjes lineair opgeschreven natuurlijke deductie. Gentzens eliminatieregels van operatoren komt men tegen als men naar beneden gaat, de introductieregels als men naar boven gaat. Als men Beths methode om tableaus voor te stellen hanteert, dan heeft men een ingewikkelde manier nodig om door de kolommen heen te draaien (zie hiertoe Beth (1962*a*). Beide methoden komen wel op hetzelfde neer.

b. Er bestaat, gebaseerd op een combinatie van tableaus met deductieregels, een minder omslachtige en meer mechanische methode (naar A.S. Troelstra).[12] Deze omvat het stap voor stap aflopen van de horizontale lagen van een tableau, en daarbij de deductieve component de dan ontstane geordende rijtjes in te schuiven. De toepassing van de regels, die per stap over de gehele figuur lopen

[11] Typoscript E.W. Beth, *Les tableaux sémantique et la déduction naturelle*, p. 1.

[12] Naar een ms. met opmerkingen door Troelstra uit 1997.

(net zoals bij Gentzen), komen in dit geval iets fraaier tot hun recht. Het uiteindelijke resultaat is hetzelfde als onder geval a. Beth zelf gebruikte, zoals al vermeld, in zijn deductieve tableaus eveneens horizontale lagen; hij maakte tot op zekere hoogte gebruik van beide methoden. Met de explicatie van de tweede methode zal gewacht worden tot na de behandeling van enkele reductie- en deductieregels.[13] Beths behandeling in 'Les sémantiques logiques' sluit hier het beste op aan.

Beth hanteerde naast zijn deductievoorschriften nog een andere manier van het weergeven van zijn deducties: de *deductieschema's*. Deze zijn in latere werk zoals Beth (1962*a*), p. 144 terug te vinden en hadden volgens Beth tot doel om vergelijkingsmateriaal te leveren met de systemen van Gentzen en Jaskowski.[14] Beths deductieschema's zijn gestroomlijnde deducties zoals bij Gentzen;[15] ze zijn te vergelijken met die uit het werk van Prawitz (1965). Er zullen in de loop van de volgende sectie enkele voorbeelden gegeven worden, die vooral uit 'Les sémantiques logiques' gehaald zijn; daarnaast worden zijn niet gestroomlijnde deducties vermeld.

### 8.1.2 Van reductie naar deductie

Opmerkingen:

- In de tableaus en de deducties worden '$\lceil$' en '$\lfloor$' gebruikt voor het invoeren, '$\rceil$' en '$\rfloor$' voor het intrekken van hypothesen. Beth gebruikte hiertoe horizontale stippellijnen in de tableaus, deducties en deductieschema's.
- Gewoonlijk schrijft men de deductie, een geordend rijtje, verticaal op; hier zullen de deductierijtjes vaak horizontaal worden opgeschreven om ruimte te besparen.
- In de hier gegeven weergave worden de door Beth in zijn tableaus (de reducties) geplaatste formuleverzamelingen, $\Delta$'s en $\Gamma$'s, weggelaten (uitgezonderd bij de quantoren). Dit gebeurt niet bij de toegevoegde deductieve schema's.

#### Propositionele operatoren

1. *Sluiting.*
Reductie en deductieschema:

[13] Voor een automatisering van deductieve bewijzen van alleen het intuïtionistische propositionele deel, zie Hendriks (1996).

[14] Ook in (Beth 1962*e*), p. 53; (Beth 1960*c*), p. 18; (Beth 1961*c*), p. 10; (Beth 1967), pp. 40, 53 (p. 40 is uit een door Beth nieuw geschreven hfdst.; p. 53 uit een lezing uit 1956, de auteur van dit geschrift lijkt het toe dat in de 1956-voordracht nog geen deductieschema's te vinden waren en ze pas later zijn toegevoegd). Ook in Beth (1959*b*), p. 283, 284 komt men een stadium hiervan tegen.

[15] Beth had gezien zijn tableaus Gentzens N-systemen op het oog (der Kalkül des natürlichen Schließens). Deze berusten op operatorinvoer of -eliminatie (dus geen sequenten). Men hanteert een aanname waarop de regels werken. Het uiteindelijke resultaat wordt tenslotte van de aanname onafhankelijk gemaakt. Een axiomaschema wordt hier derhalve niet gebruikt ((Gentzen 1935*a*), p.186 e.v.).

| waar | onwaar |
|---|---|
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $C$ | $C$ |
| | sluit |

1. $$\begin{array}{c} \Delta \\ C \\ \hline C \end{array}$$

Deductie:

$\ll C, \ldots, C \gg$, triviale deductie, herhaling.

2. *Implicatie.*

Reductie en deductieschema's:

2a.

| waar | onwaar |
|---|---|
| $A \to B$ | |
| $\lceil A$ | $B \rceil$ |

$$\begin{array}{c} \Delta \\ A \to B \\ \vdots \\ A \\ B \\ \vdots \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Delta \\ A \to B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

Deductie 2a: $\ll A \to B, A, \ldots, B \gg$, modus ponens [Gentzens FB].[16] In deze reductie en de bijbehorende deductie — uit 'Les tableaux sémantiques', p. 11 — gebruikt Beth niet veelvuldig een conclusie $C$. Dit deed hij wel in het volgende geval: het tableau 2a* met tweemaal een conclusie $C$. Uitdrukkelijk koppelde hij het gebruik hiervan aan zijn benadering van implicatie vanuit Gentzens sequenten — zoals in 'Les tableaux sémantiques', p. 2; voor het waarom de bespreking van deductieve tableausequenten, zie verderop in dit hoofdstuk. In onderstaand tableau is de naam van de hier toe te passen deductieregel, Gentzens FB ofwel mp, net zoals bij Beths nummerverwijzing op de juiste plaats gezet. Dit zal hier verder niet zo precies meer gebeuren vanwege teveel opgeëiste plaats in de tableaus. Men kan [FB, mp] ook achter de $B$ plakken als verantwoording van het resultaat van de toepassing van [FB, mp]. Vanwege het dichtslibben van de tableaus zal dit bijschrijven van de namen van de regels tot enkele voorbeelden beperkt blijven.

2a*

| prem. | concl. |
|---|---|
| | $C$ |
| $A \to B$ | |
| [FB, mp] | |
| $\lceil A$ $\quad B \rceil$ | $C$ |

deductie 2a*: $\ll A \to B, A, \ldots B, \ldots, C, \ldots C \gg$.

2b.

| waar | onwaar |
|---|---|
| | $A \to B$ [FE] |
| $\lceil A$ | $B \rceil$ |

$$\begin{array}{cc} \Delta & \\ \cdots & \\ A & [+\text{ hyp}] \\ \vdots & \\ B & \\ \cdots & \\ A \to B & [-\text{ hyp}] \\ \vdots & \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Delta \\ \cdots \\ A \\ \hline B \\ \cdots \\ \hline A \to B \end{array}$$

[16] Voor alle afkortingen uit Gentzens deductieve systeem, zie Gentzen (1935*a*), pp. 186, 187 e.v. Men leze ...B als ...Beseitigung, evenzo ...E voor ...Einführung, F ...voor Folgt ...(FB: Folgt-Beseitigung, ofwel modus ponens) E ...voor Es gibt ..., etc.

Ad reductie 2b: hier is de toegepaste regel [bij Beth het cijfer 2b, meteen op naam FE] ingeschreven alsook het invoeren en intrekken van de hypothese. $A \to B$ als resultaat van FE.
Deductie 2b. $\ll \lfloor A$ [+ hyp], $\ldots,\ B\rfloor, A \to B$ [– hyp] $\gg$, conditionalisering [Gentzens FE].

**Deductie volgens Troelstra's methode.** We gaan uit van het volgende zich sluitende tableau:

| waar | onwaar | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $(A \to (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ | | | stap 0 |
| $A \to (B \to C$ | $(A \to B) \to (A \to C)$ | | | stap 1 |
| $A \to B$ | $A \to C$ | | | stap 2 |
| $A$ | $C$ | | | stap 3 |
| $A$ | $B$ | | | stap 4 |
| | $A$ | $B \to C$ | | stap 5 |
| | | $B$ | $C$ | stap 6 |

Als men een tableau van boven naar beneden construeert, dan construeert men per stap een deductie met nog in te vullen stukken. Deze stukken zijn, zolang men nog niet tot de onderste laag van het tableau gekomen is, eigenlijk onbekenden. Men kan ze ook met nog in te vullen formuleverzamelingen $\Xi, \Xi', \ldots$ etc. aangeven. Men vult ze al naar beneden gaand aan per tak en per laag. Men krijgt dan zeer in het algemeen de voorstelling: $\ll \Delta, \Xi, \Gamma \gg$. Met de volgende stap wordt dit tot $\ll \Delta, \Delta', \Xi', \Gamma', \Gamma \gg$. Er kunnen formuleverzamelingen leeg zijn, bovendien kunnen er meer 'onbekende' formuleverzamelingen $\Xi', \Xi'', \ldots$ in een *geordend rijtje*, dat één laag beschrijft, opduiken. Dit wordt veroorzaakt door splitsingen waar bijvoorbeeld een invoer en een intrekking van hypothesen plaats vindt.

Men kan nu de deductieregels 2a en 2b gaan herschrijven zodat ze in bovenstaand straatje passen:
2a. de uitgangsdeductie is van de vorm $\ll \Delta, A \to B, \Delta' \gg$ na de regel $\ll \Delta, A \to B, A, B, \Delta' \gg$.
2b. $\ll \Delta, A$ [+ hyp], $\Xi, B, A \to B$ [– hyp], $\Delta' \gg$
Bij elk tableau $\mathcal{T}$, dat na toepassing van regel R tot $\mathcal{T}'$ wordt, heeft men de bijbehorende deductie $\mathcal{D}_s$ om te vormen tot $\mathcal{D}_{s'}$.

Notatie: $G := A \to (B \to C)$, $H := (A \to B) \to (A \to C)$, $F := G \to H$. In dit voorbeeld wordt nog gewerkt met 'onbekende' formule-verzamelingen. In een later voorbeeld zal het met stippeltjes worden volstaan (om daarmee een doorzichtiger voorstelling te geven).

stap 0 $\ll \Xi, F \gg$, $F$ conclusie.

stap 1 $\ll G$ [+ hyp 1], $\Xi'$, $H$, $F$ [– hyp 1]$\gg$

stap 2 $\ll G$ [+ hyp 1], $A \to B$ [+ hyp 2], $\Xi''$, $A \to C$, $H$ [– hyp 2], $F$ [– hyp 1]$\gg$

stap 3 $\ll G$ [+ hyp 1], $A \to B$ [+ hyp 2], $A$ [+ hyp 3], $\Xi'''$, $C$, $A \to C$ [– hyp 3], $H$ [– hyp 2], $F$ [– hyp 1]$\gg$

stap 4 $\ll G$ [+ hyp 1], $A \to B$ [+ hyp 2], $A$ [+ hyp 3], [$A$,] $B$, $\Xi''''$, $C$, $A \to C$ [– hyp 3], $H$ [– hyp 2], $F$ [– hyp 1]$\gg$

stap 5 $\ll G$ [+ hyp 1], $A \to B$ [+ hyp 2], $A$ [+ hyp 3], $[A,]\ B$, $[A,]\ \ B \to C$, $\Xi'''''$, $C$, $A \to C$ [− hyp 3], $H$ [− hyp 2], $F$ [− hyp 1]$\gg$

stap 6 $\ll G$ [+ hyp 1], $A \to B$ [+ hyp 2], $A$ [+ hyp 3], $[A,]\ B$, $[A,]\ \ B \to C$, $[B,]\ C$, $C$, $A \to C$ [− hyp 3], $H$ [− hyp 2], $F$ [− hyp 1]$\gg$

In het laatste, geordende rijtje, onder stap 6, is de onbekende weggewerkt, het is de gevraagde deductie. Desgewenst kan men dit laatste rijtje verticaal schrijven, en heeft men de gebruikelijke notatie van een deductie.

**Reductie- en deductieregels, vervolg**

3. *Negatie.*
Reducties en deductieschema's:

$$3a.\quad \begin{array}{c|c} \text{wa.} & \text{onw.} \\ \hline \neg A & \\ & A \end{array} \qquad 3a^*\quad \begin{array}{c|c} \text{p} & \text{c} \\ \hline \neg A & C \\ & A \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Delta \\ \neg A \\ A \\ \hline C \end{array} \qquad 3b.\quad \begin{array}{c|c} \text{p} & \text{c} \\ \hline & \neg A \\ \lceil A & \neg A \rceil \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Delta \\ \cdots \\ \neg A \\ \hline \neg A \\ \cdots \\ \hline \neg A \end{array}$$

Deductie 3a: $\ll \neg A,\ \ldots,\ A, C,\ \ldots \gg$, 'ex falso sequitur quod libet' [Gentzens NB]. (3a*: variant)
Deductie 3b: $\ll \lfloor A$ [+ hyp], $\ldots,\ \neg A\rfloor, \neg A$ [− hyp], $\gg$, 'reductio ad absurdum' [Gentzens NE].

4. *Disjunctie.*
Reductie en deductieschema:

$$4a.\quad \begin{array}{c|c} A \vee B & \\ \hline A \ \lfloor & B \ \rfloor \end{array} \qquad 4a^*\quad \begin{array}{c|c} A \vee B & \text{C} \\ \text{[et]} & \\ \hline \lceil A \ \lceil C\rceil & \lceil B \ \lceil C\rceil \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Delta \\ A \vee B \\ \cdots \\ A \\ \hline C \\ \cdots \\ B \\ \hline C \\ \cdots \\ \hline C \end{array}$$

Deductie 4a*: $\ll A \vee B, \lfloor A$ [+ hyp], $\ldots, C\rfloor, \lfloor B$ [+ hyp], $\ldots, C\rfloor, C$ [− hyp] $\gg$. Hier treft men Gentzens $\vee$-eliminatie, onderscheiding van gevallen, constructieve dilemma of zoals in Gentzens systeem N met OB benoemd, aan. $C$ is een aan $A \vee B$ gerelateerde ('relatieve') conclusie. Ofwel: 'als men $A \vee B$ heeft en als men $C$ uit $A$ kan afleiden, en als men $C$ uit $B$ kan afleiden, dan kan men $C$ concluderen.'

$$4b.\quad \begin{array}{|c} A \vee B \\ A, B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Delta \\ A \\ \hline A \vee B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Delta \\ B \\ \hline A \vee B \end{array} \qquad 4b^*\quad \begin{array}{c|c} & A \vee B \\ \text{[vel]} & \\ \hline \lfloor A & \rfloor \ B \end{array}$$

Deductie 4b: $\ll\ A, A \vee B\ \gg$, $\ll\ B, A \vee B\ \gg$, 'disjunctieve verzwakking' [Gentzens OE]. De reductie van $\vee$ op de rechterkolom blijft een speciaal geval waarover later meer. Men kan deze reductie nemen als een voortzetting over twee gevallen (Beth, Kleene), met keuze naar het geval dat wat opbrengt (een bewijs); men kan ook trachten binnen één tableau disjunctief te splitsen (diagram 4b*) zoals Beth in intuïtionistische logica — later in dit hoofdstuk hierover meer.

5. *Conjunctie.*
Reductie:

$$\text{5a.}\quad \begin{array}{r|l} A\wedge B & \\ A,B & \end{array} \qquad \text{5b.}\quad \begin{array}{r|ll} & \multicolumn{2}{l}{A\wedge B} \\ \hline & A & \mid B \end{array}$$

5a. $\ll A\wedge B, A \gg$, $\ll A\wedge B, B \gg$, specificatie van termen [Gentzens UB]. Vergelijk de natuurlijke deductieregel 5a met 4b, en vergelijk deze ook met de desbetreffende regels van Kleene.
5b. $\ll \ldots, A, \ldots, B, A\wedge B \gg$, conjunctieve opsomming [Gentzens UE].

**Troelstra ten tweede male.** Een tweede voorbeeld m.b.v. Troelstra's methode met wat meer operatoren; het tableau sluit op alle takken:

$$\begin{array}{r|l|l}
 & ((A\vee B)\to C)\to((A\to C)\wedge(B\to C)) & \text{stap 0}\\
(A\vee B)\to C & (A\to C)\wedge(B\to C) & \text{stap 1}\\
\hline
\begin{array}{r|l} & A\to C \\ A & C \\ \hline A\vee B & C \mid \\ A,B & \end{array} & \begin{array}{r|l} & B\to C \\ B & C \\ \hline A\vee B & C \mid \\ A,B & \end{array} & \begin{array}{l}\text{stap 2}\\ \text{stap 3}\\ \text{stap 4}\\ \text{stap 5}\end{array}
\end{array}$$

Er zal deze keer gewerkt worden met stippeltjes i.p.v. formuleverzamelingen. Bovendien wordt aangenomen: $H := (A\vee B)\to C$, $G := (A\to C)\wedge(B\to C)$ en $F := H\to G$

stap 0 $\ll \ldots, F \gg$, $F$ conclusie.
stap 1 $\ll H$ [+ hyp 1], $\ldots$, $G$, $H\to G$ [– hyp 1]$\gg$
stap 2 $\ll H$ [+ hyp 1], $\ldots$, $A\to C$, $B\to C$, $G$ [$\wedge I$], $H\to G$ [– hyp 1]$\gg$
stap 3 $\ll H$ [+ hyp 1], $A$ [+ hyp 2], $\ldots$, $C$, $A\to C$ [– hyp 2], $B$ [+ hyp 3], $\ldots$, $C$, $B\to C$ [– hyp 3], $G$ [$\wedge I$], $H\to G$ [– hyp 1]$\gg$
stap 4 $\ll H$ [+ hyp 1], $A$ [+ hyp 2], $\ldots$, $A\vee B$, $C$, $A\to C$ [– hyp 2], $B$ [+ hyp 3], $\ldots$, $A\vee B$, $C$, $B\to C$ [– hyp 3], $G$, $H\to G$ [– hyp 1]$\gg$
stap 5 $\ll H$ [+ hyp 1], $A$ [+ hyp 2], $A\vee B$ [$\vee I$], $C$, $A\to C$ [– hyp 2], $B$ [+ hyp 3], $A\vee B$ [$\vee I$], $C$, $B\to C$ [– hyp 3], $G$, $H\to G$ [– hyp 1]$\gg$

Wederom geeft de laatste stap de volledige deductie.

**De predicaten.**

6. *Universele quantor.*
Reductie:

$$\text{6a.}\quad \begin{array}{r|l} \forall x A(x) & \\ A(p) & \end{array} \qquad \text{6a*}\quad \begin{array}{r|l} \forall x A(x) & C \\ A(p)\ [\text{AB}] & C \end{array} \qquad \text{6b.}\quad \begin{array}{r|l} \Delta & \Gamma \\ & \forall x A(x) \\ & A(a) \end{array}$$

Deductie 6a: $\ll \forall x Ax, A(p) \gg$, universele instantiatie [Gentzens AB]. In 6a mag $p$ willekeurig gekozen worden. (6a*: variant)
Deductie 6b: $\ll \Delta, [A(a)], \forall x Ax, \Gamma \gg$, universele generalisatie [Gentzens AE]. In 6b mag $a$ niet optreden in voorgaande formules (dus niet in $\Delta, \forall x A(x)$, of $\Gamma$).

7. *Existentiële quantor.*

Reductie en deductieschema:

$$
7a.\quad \begin{array}{r|l} \Delta & \Gamma \\ \exists x Ax & \\ \mathrm{A(a)} & \end{array}
\qquad 7a^*\quad \begin{array}{r|l} \Delta & \Gamma \\ \exists x A(x) & C \\ \lceil A(a)\ [\mathrm{EB}] & C\rceil \end{array}
\qquad \begin{array}{c} \Delta \\ \exists x A(x) \\ \cdots \\ \underline{A(a)} \\ C \\ \cdots \\ \hline C \end{array}
\qquad 7b.\quad \begin{array}{|l} \exists x A(x) \\ A(p) \end{array}
$$

Deductie 7a: $\ll \Delta, \exists x Ax, \lfloor A(a)$ [+ hyp], $\ldots, C\rfloor, C$ [– hyp], $\Gamma \gg$, existentiële instantiatie [Gentzens EB]. In 7a mag $a$ niet voorkomen in voorgaande formules (dus niet in $\Delta, \exists x A(x)$, of $\Gamma$ [of in $C$]), en ook niet in formules die men tussen $\exists x A(x)$ en $A(a)$ ontwikkeld heeft. (7a*: variant).

Deductie 7b: $\ll A(p), \exists x Ax \gg$, existentiële generalisatie [Gentzens EE]. In 7b mag $p$ willekeurig gekozen worden.

In verband met de inzet van de $C$ zullen wij in dit geval een voorbeeld voor 7a [EB] uit de regels voor natuurlijke deductie uit Gentzen (1935*a*), p. 187 laten zien. De redenering verliep als volgt. Stel dat men een eigenschap $P$ heeft, neem $Pa$ voor een $a$ aan en stel dat met behulp van $Pa$ men $C$ heeft bewezen, en $a$ niet meer in $C$ voorkomt of $C$ van een dergelijke $a$ niet afhankelijk is; dan heeft men $C$ onafhankelijk van de aanname $Pa$ bewezen (en kan men $Pa$ als aanname intrekken, een gebruik van existentiële instantiatie (expositie) bij natuurlijke deductie). Deze regel is hierin met $\vee E$ [OB] (onderscheiding van gevallen, constructieve dilemma) vergelijkbaar (hier onder regel 4a*).

$$
\wedge\text{-I [UE]} \qquad \frac{\exists x Px \quad \frac{[Pa]}{C}}{C} \qquad \frac{A \vee B \quad \frac{[A]}{C} \quad \frac{[B]}{C}}{C} \qquad \vee\text{-E [OB]}
$$

**Een filosofisch probleem.** Als voorbeeld van een door Beth opgezet tableau en samenhangende deductie is zijn logische aanpak van het probleem Locke – Berkeley. Dit probleem is door Beth met de nodige variaties in een reeks van artikelen steeds opnieuw besproken.[17]

Het probleem komt er op neer dat men in de meetkunde — of liever, vaak in de wiskunde — voor een algemeen geldig bewijs een speciaal geval construeert. Men voert het bewijs uit voor het speciale geval en hiermee trekt men uit dat speciale geval een algemeen geldige conclusie. Men kan hierin een discrepantie zien. Met dit probleem hebben Locke, Berkeley en Kant zich bezig gehouden. Volgens Beth heeft men hier te maken met een voorbeeld van de expositiemethode van Aristoteles; parafraserend naar een vertaling door Beth: Als $A$ aan geen enkele $B$ toekomt, dan ook $B$ aan geen enkele $A$. Want stel dat $B$ aan een $A$ toekomt, en laat dat individu $c$ zijn. Dan kan het niet waar zijn dat $A$ aan geen enkele $B$ toekomt, want $A$ komt aan $c$ toe, en $c$ is een $B$.

In de variant Beth (1967) — eigenlijk 1956 — werd dit als volgt omgezet: $A$ komt aan geen enkele $B$ toe: $\forall x(B(x) \to \neg A(x))$; en $B$ komt aan geen enkele $A$ toe: $\forall y(A(y) \to \neg B(y))$. En gaf het afgesloten tableau:

[17] (Beth 1956*e*); (Beth 1961/1962*c*); (Beth 1967), hfdst. 4 (vlgs. de bezorgers een voordracht uit 1956).

| waar | onwaar |
|---:|:---|
| 1. $\forall(B(x) \to \neg A(x))$ | $\forall y(A(y) \to \neg B(y))$ 2. |
| | $A(c) \to \neg B(c)$ 3. |
| 4. $A(c)$ | $\neg B(c)$ 5. |
| 6. $B(c)$ | |
| 7. $B(c) \to \neg A(c)$ | |
| $\lceil$ $B(c)$ 8. | 9. $\neg A(c)$ $\rceil$ $A(c)$ 10. |

En dit levert met Beth de volgende deductie: $\ll$ 1. $\forall(B(x) \to \neg A(x))$ [premisse], 4. $\lceil$ $A(c)$ [+ hyp. 1], 6. $\lceil\lceil$ $B(c)$ [+ hyp. 2], 7. $B(c) \to \neg A(c)$ [uit 1 ], 8. $B(c)$ [uit 6], 9. $\neg A(c)$ [uit 7, 8 ], 10. $A(c)$ [uit 4] $\rfloor\rfloor$, 5. $\neg B(c)$ [– hyp. 2] $\rfloor$, 3. $A(c) \to \neg B(c)$ [– hyp. 1], 2. $\forall y(A(y) \to \neg B(y)$ [uit 3] $\gg$

## 8.2 Deductieve tableaus en logische systemen

### 8.2.1 Klassieke deductieve tableaus

Er werden regels gegeven voor een klassiek deductief tableausysteem. Men verkrijgt er echter geen klassieke logica mee. De moeilijkheid wordt veroorzaakt door de eis van niet meer dan één formule onder de conclusiekolom. Als een stap een nieuwe formule op rechts opleverde, dan werd een al aanwezige verwijderd: de *verdringing* van een oude door een nieuwe formule. In Kleene's G3 werd dit mechanisme gebruikt om het klassieke van het intuïtionistische systeem te scheiden. Door Beth is om aan dit euvel tegemoet te komen een 'introductie'-regel *onder hypothese* ingevoerd.[18] Door de *negatie-invoer* is het mogelijk om formules van rechts naar links te verplaatsen. Op links zijn er geen restricties, men kan de formule bewaren, over de takken spreiden, en later waar het nodig is door middel van de negatie-*reductie*-regel delen van het tableau af laten sluiten.[19]

$$
\text{regel 3c.} \qquad
\begin{array}{r|l}
 & \vdots \\
 & A \\
\lceil \neg A & A\rceil \\
\text{sluit} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\Delta \\
\cdots \\
\neg A \\ \hline
A \\
\cdots \\ \hline
A
\end{array}
$$

Deductie 3c: $\ll \lfloor \neg A$ [+ hyp], $\ldots, A\rfloor, A$ [– hyp], $\gg$, de klassieke (maar niet intuïtionistische) reductio ad absurdum.

Als voorbeeld zal de klassiek geldige formule van Peirce dienst doen.

$$
\begin{array}{r|l}
 & ((A \to B) \to A) \to A \\
\lceil (A \to B) \to A & A\rceil \\ \hline
\multicolumn{2}{|l|}{A \to B \qquad\qquad A} \\
\lceil\lceil A & B\rceil\rceil
\end{array}
$$

[18]Bij de klassieke semantische tableaus is er alleen reductie, geen introductie aanwezig (en is daar ook niet nodig).

[19]Moeilijkheden in de vorm van overvloedige verdubbelingen verkrijgt men bij het inzetten van constanten ter rechterzijde. Ook deze heeft men, indien men ze voor later gebruik bewaren wil, onder hypothese en met negatie naar de ander kant over te hevelen.

Dit tableau sluit wel op de rechter-, maar niet op de linkertak. Met negatie onder hypothese (in te zetten op de laatste plaats op de linkertak op links om vervolgens zonder negatie naar rechts te halen) sluit Peirce wel:

$$\begin{array}{r|l}
 & ((A \to B) \to A) \to A \\
\lceil (A \to B) \to A & A\rceil \\
\lceil\lceil \neg A & A\rceil\rceil \\
\hline
\begin{array}{r|l} & A \to B \\ \lceil\lceil\lceil A & B\rceil\rceil\rceil \end{array} & \mathrm{A}
\end{array}$$

De procedure verliest zijn kracht bij fragmenten waarin geen plaats voor negatie is. Daar heeft men andere regels nodig om die fragmenten klassiek geldig te laten zijn. Eén hiervan, het klassieke implicatief-deductieve fragment, zal later besproken worden.

### 8.2.2 Intuïtionistische deductieve tableaus

#### Disjunctieve splitsing

Indien men alles onverlet laat heeft men nog niet direct een intuïtionistisch systeem. Er zijn extra eisen nodig. Deze kan men halen uit een disjunctief gebruik bij tableausplitsingen voor zowel een extra splitsing van $\vee$ op rechts (en $\wedge$ op links). De splitsingen voor $\vee$ op links (en $\wedge$ op rechts) blijven conjunctief.[20] Dit geschiedt op punten waar anders geen splitsing aanwezig is (maar wel een verdubbeling van de tableaus). Overigens werd dit ook al in Kleene (1952*a*) in systeem G3-intuïtionistisch gehanteerd. Door Beth zijn er geen onderzoekingen naar deze kwestie binnen de deductieve tableaus meer uitgevoerd, wel voor de later nog te behandelen Beth-modellen en I-valuaties met hun hulptableaus. Volgens Beth was het belangrijkste verschilpunt tussen de semantische tableaus en de intuïtionistische modellen gelegen in de behandeling van $\vee$ op de rechterkolom: [21]

"[A]nd I am trying to adapt them to intuitionistic demands. The main difficulty is, of course, the treatment of $X \vee Y$ in the right column. So far I found two devices (the second one follows from the first one):

1. If $A$ is a decidable predicate, then replace $X \vee Y$ by $\exists x((A(x) \to X) \wedge (\neg A(x) \to Y))$;
2. introduce a second way of splitting tableaus, such that the original tableau is closed if one of its subtableaus is closed.

But unfortunately I have not found time to go more thoroughly into these matters."

Beths tweede opmerking drukt de disjunctieve splitsing uit. Hiertoe kan men ook gebruik maken van parallelle tableaus waarvan er slechts één hoeft te sluiten (ook Beths navolger P. Lorenzen zou daar gebruik van maken). In een lezing in 1955 heeft Beth hierover al gesproken — uitgegeven als Beth (1958*a*), met op p. 79 de disjunctieve splitsing in een semantisch tableau.

[20]Conjunctieve splitsing: beide takken moeten afsluiten; disjunctieve splitsing: minstens één van de takken moet afsluiten.

[21]Brief Beth – S.C. Kleene, 11 juni 1955.

### Leer van de kortste variant, beslisbaarheid

Beth heeft in het beginstadium van zijn onderzoekingen een poging gewaagd om met tableaus en de begrippen 'het kritische getal' (van een afleiding), het 'kortste tableau' en de 'kortste afleiding' een goedkope en snelle sprong naar de intuïtionistische logica te ondernemen.

Beth vroeg zich af of de geconstrueerde afleiding, wanneer de te bekijken formule ook intuïtionistisch acceptabel is, al dan niet binnen de door intuïtionisten gehanteerde systemen past. Meestal is het intuïtionistische bewijs langer dan het corresponderende 'kortste' bewijs binnen klassieke systemen. Beth meende dat dit niet altijd opgaat, en kwam tot de veronderstelling dat een klassiek geaccepteerde formule ook intuïtionistisch acceptabel is alleen dan wanneer het kortst mogelijke klassieke bewijs van die formule ook intuïtionistisch een bewijs is (een niet altijd te beantwoorden vraag blijft of men wel het kortst mogelijke bewijs in handen heeft; Beth geeft daar overigens geen antwoord op).

Beth gebruikte in zijn hierna te geven algemene formulering als volgt het begrip 'kritisch getal': Het *kritische getal* (van een afleiding) is het aantal der individuen die geïntroduceerd moeten worden voordat het tableau gesloten kan worden.[22] Stel dat men bezig is met het opstellen van een tableau. Men heeft ergens onderweg in de bewijsgangeen formule $A(p)$ waarbij $p$ over individuele constanten loopt. Het kan zijn dat men een aantal constanten, zeg $a_1, a_2, \dots$ moet aflopen voordat men tot $\forall x A(x)$ kan komen. Men kan het aantal $a_i$ gaan bijhouden.

Algemener formuleerde Beth m.b.v. kritisch getal zijn gedachte als volgt. Neem een systeem F aan. Stel dat onder enkele beperkingen op F men F* verkrijgt, en laat F* de intuïtionistische tegenhanger van F zijn. Stel dat men een afleiding $\mathcal{B}(A)$ in F heeft met een kritisch getal $n$. De vraag of men al dan niet in F* een analoge[23] afleiding $\mathcal{B}(A)^*$ heeft — mogelijk met een andere weg, maar wel met eenzelfde kritische getal (zelfs een groter kritisch getal kan volgens Beth) — kan gereduceerd worden tot een vraag betreffende afleidbaarheid binnen het intuïtionistische systeem. Beths speculeerde er op dat die laatste vraag, en hiermee verwijzend naar Gentzen, effectief beslist kan worden. Niet alleen vermeldde Beth dit onbewezen vermoeden in zijn artikel, maar schreef hierover ook A. Tarski en S.C. Kleene aan.[24]

Tegenover Kleene formuleerde Beth het probleem beperkter. Men vertrekt vanuit een tegenvoorbeeld:[25] leid de formule $C$ af uit de formules $A$ en $B$; men construere hiertoe een semantisch tableau waarbij door middel van het tegenvoorbeeld moet blijken dat $C$ niet uit $A$ en $B$ volgt.

Beth gebruikte als voorbeelden enkele op p. 487 van Kleene (1952*a*) voorkomende formules: de intuïtionistisch ongeldige, maar klassiek wel geldige, formule $\forall x(A \vee Bx) \rightarrow (A \vee \forall x Bx)$ (stelling 58-b(i)); en de intuïtionistisch geldig formule $\neg\neg(\forall x(A \vee Bx) \rightarrow (A \vee \forall x Bx)$ (stelling 58-b(ii)). Met semantische tableaus kan

[22] Zie (Beth 1955*a*) en de brief Beth – S.C. Kleene, 29 april 1955.
[23] Analoog: d.w.z. met dezelfde premissen en conclusie.
[24] Brief Beth – A. Tarski, 29 maart 1955. En Brief Beth – S.C. Kleene, 29 april 1955.
[25] Brief Beth – S.C. Kleene, 29 april 1955.

men de klassieke geldigheid van beide formules (58-b(i) en 58-b(ii)) aantonen. Door het 'klassiek' sluiten van het tableau $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}(\forall x(A \vee Bx) \rightarrow (A \vee \forall xBx))$ legt men vast dat er geen tegenvoorbeeld bestaat. Beths voorbeeld $\mathcal{T}_1$ heeft een model waarvan $\#(Domein) = 1$. Bovendien heeft het tableau $\mathcal{T}_1$ alle informatie in zich opgeslagen waarom er geen tegenvoorbeeld mogelijk is. Deze informatie wordt doorgespeeld naar de samenhangende deductieve afleiding. Evenzo een redenering voor tableau $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}(\neg\neg(\forall x(A \vee Bx) \rightarrow (A \vee \forall xBx)))$ en de daarmee samenhangende deductie. Maar nu heeft men toevallig meteen een intuïtionistische beslissingsprocedure en deductieve afleiding gegeven.

Volgens Beth kan men hieruit een beslissingsprocedure afleiden voor het volgende probleem: Is, als $A$ klassiek geldig is, $A$ dan ook intuïtionistisch geldig (of juist niet)? Mogelijke tegenwerpingen in de vorm van $\exists x(Ax \wedge \neg Ax) \vee \neg\exists x(Ax \wedge \neg Ax)$ werden door Beth al meteen terzijde geschoven door te eisen dat een variabele niet tweemaal onder eenzelfde quantor mag optreden.

Het antwoord van Kleene met betrekking tot bewijzen die afhankelijk zijn van de gebruikte aantallen variabelen, kwam op het volgende neer: [26] "There can be no decision procedure for the problem 'let A be a formula which holds classically; does $A$ also hold intuitionistically?'." De redenering van Kleene verliep als volgt aan de hand van enkele probleemgevallen.

- Laat $A$ een elementair-logische formule zijn die klassiek wel, maar intuïtionistisch niet geldig is. Nu is de volgende stelling nodig:

  Voor elk vast primitief (of algemeen) recursief predicaat $R(x, y)$ is er een effectieve procedure waardoor bij een gegeven willekeurig getal $x$ een predicaat-letter formule $K_x$ gevonden kan worden z.d.d. $\exists yR(x, y) \leftrightarrow K_x$ bewijsbaar is in de predicaat-calculus — neem $R(x, y) \leftrightarrow T_1(x, x, y)$.[27] Dan voor elke $x$ is $A \vee K_x$ klassiek bewijsbaar.

  Een recursieve procedure om te beslissen of het intuïtionistisch ook bewijsbaar is, bestaat daarentegen niet.
- Een ander voorbeeld. Neem een formule van de vorm $A \rightarrow \exists xG(x)$. Hierbij drukt $A$ een elementair axiomasysteem uit. $A \rightarrow \exists xG(x)$ kan klassiek bewijsbaar zijn voor een waarde van $x$ (gerelateerd aan het domein van $A$) en tegelijk niet intuïtionistisch bewijsbaar voor die $x$.

  Het hebben van een klassiek bewijs helpt derhalve niet om te beslissen of er een andere $x$ bestaat waarvoor $G(x)$ geldt onder de aanname van $A$.

Kleene's algemene conclusie was dan ook: [28] "At any rate I do not see how to rule out such possibilities; and so it does not seem implausible that increasing the number of individuals taken into consideration might give room for a

[26] Brief S.C. Kleene – Beth, 7 juni 1955, (Madison).

[27] $T_1(z, x, y)$: $y$ is de uitkomst van de berekening van de waarde van de functie met een geassocieerd getal z voor de invoerwaarde x. Voor n: $T_n(z, x_1, \ldots, x_n, y)$ idem de vorige, maar dan voor de invoerwaarden $x_1, \ldots, x_n$; $T_n$, dus ook voor $T_1$, is primitief recursief (althans zoals in Kleene (1952*a*), p. 281). $T_1(z, x, y)$ zal later in dit werk een rol spelen m.b.t. de uitdrukkingen $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ en $\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$.

[28] Brief S.C. Kleene – Beth, 7 juni 1957, (Madison).

correct proof intuitionistically in place of one correct classically but incorrect intuitionistically."

In het naschrift van Beth (1955*b*) werd nogmaals op deze kwestie ingegaan, en als volgt Kleene gelijk gegeven. Neem een willekeurige formule $A$. Laat $B$ klassiek wel geldig, maar intuïtionistisch niet geldig zijn. Dan is $A \vee B$ klassiek geldig. Laat nu de veronderstelde beslissingsprocedure $\mathcal{BP}$ er op werken.

- Stel dat door middel van $\mathcal{BP}$ de formule $A \vee B$ intuïtionistisch ongeldig is. Maar dan moet $A$ ook intuïtionistisch ongeldig zijn.
- Stel dat $A \vee B$ intuïtionistisch geldig is. Dan moet $A$ wel intuïtionistisch geldig zijn, want $A \vee B$ kan niet intuïtionistisch geldig zijn als $A$ of $B$ niet intuïtionistisch geldig is.

Beth eindigde door er op te wijzen dat, ook al zou men denken hiermee een beslissingsprocedure voor intuïtionistische geldigheid te hebben, deze gedachtengang onjuist is omdat een dergelijke beslissingsprocedure niet kan bestaan (volgens Church).

### 8.2.3 Achtergronden

#### Beths bedoelingen

Een *precies* antwoord op de vraag naar Beths bedoelingen met de deductieve tableaus kan helaas niet gegeven worden. In het begin van dit hoofdstuk treft men al een wirwar van waar vs. onwaar en premisse vs. conclusie aan. Hoe moet men dit plaatsen? Vanaf het begin in 1955 waren Beths ideeën daarover niet gefixeerd, wellicht ook nooit geheel geëxpliciteerd. Telde klassieke 'deductieve' logica mee, was het alleen intuïtionistische logica? Hierdoor is er nogal eens van naam gewisseld. Ook de inrichting van de regels ontkwam hier niet aan. Genoemd is de door de tijd heen wisselende hoeveelheid ingeschreven conclusie-$C$'s. Beth (1962*a*), p. 143: "It will be clear that starting from a closed semantic tableau and intercalating suitable applications of schemata 5c and 5a [behandeling van negatie], we can always obtain a formal deduction of a type which, besides being based on the principles of classical logic, reflects our 'intuitive' conceptions regarding deductive reasoning."

Een ander voorbeeld voor de omschrijving en vergelijking van beide soorten tableaus vindt men in Beth (1962*a*), p. 28:

"As compared to the method of deductive tableaux, semantic tableaux provide us with a stronger method of deduction. That is, any deduction permitted by the first [deductive] method can also carried out by the second [semantic], whereas the second method makes allowance for certain deductions which the first method does not permit. We shall show, however, that nevertheless each deduction by the second method can be transformed into a certain deduction by the first method if only the set $\Delta$ of the premisses is suitably enlarged."

Wat bedoelt Beth hier met deductief en semantisch? Op dezelfde bladzijde leest men: "$\Delta$ entails $C$ from a deduction-theoretic point of view, if $C$ can be obtained from $\Delta$ by some adequate method of formal deduction as characterized by the requirements [...] As a concrete example of an adequate method of deduction we introduced the method of deduction by closed deductive tableaux. The construction of a deductive tableau for the sequent $\Delta \Rightarrow C$ was based on the closure and reduction schemata". En: "$\Delta$ entails a $C$ from a semantic point of view if, whenever all premisses $A$ in $\Delta$ are true under a valuation $v$, $C$ must also be true under that valuation $v$. In this case we found it convenient to consider more general problems of entailment, characterized by sequents $\Delta \Rightarrow \Lambda$, $\Delta$ and $\Lambda$ being arbitrary finite sets of formulas $A$ and $B$."

Tenslotte het verschil tussen semantische en deductieve tableaus in Beth (1961*c*): aldaar wordt er onderscheid gemaakt tussen

a. Klassieke logica met 1. semantische tableaus (waar-onwaar); 2. axiomatiek; 3. natuurlijke deductie.
b. Intuïtionistische implicatieve logica met 1. deductieve tableaus (premissen-conclusie); 2. axiomatiek; 3. natuurlijke deductie.

Het onderscheid tussen semantische tableaus, en deductieve tableaus is hier teruggebracht tot het onderscheid in klassieke logica, en intuïtionistische implicatieve logica. Dit kan met het oog op wat komen gaat nog verder verduidelijkt worden tot het onderscheid tussen

a. klassieke logica met al dan niet een voorschrift van hoogstens één formule ter rechterzijde, tezamen met intuïtionistische logica, en
b. intuïtionistische propositionele implicatieve logica met hoogstens één formule op rechts.

In Beth (1967), pp. 38, 39, vindt men de volgende twee groepen:

1 1a. het afgesloten deductief tableau; 1b. de natuurlijke redenering verkregen door omzetting van en afgesloten deductief tableau.
2 2a. afgesloten semantisch tableau; 2b. het 'deductief' aangevulde semantische tableau; 2c. de natuurlijke redenering verkregen door aanvulling en omzetting van een afgesloten semantisch tableau.

Beth vond 1a gelijkwaardig aan 1b, en vond eveneens 2a, 2b en 2c onderling gelijkwaardig. Groep 1 noemde hij intuïtionistisch, groep 2 klassiek.

In het begin van zijn combinatie van deductie en tableaus was Beth vrij duidelijk, pas later is dit verminderd; op het eind hervond hij in 'Les tableaus sémantiques' de duidelijkheid uit het begin: met alle systemen kan men deductieve tableaus combineren, alleen de kronkels van de in zijn tableaus opgeslagen deducties heeft men recht te trekken. Dit is misschien het gevolg van het uit elkaar trekken van het tableaumatige deel zoals weerspiegeld door de reductieregels en een deductief deel. Het in elkaar schuiven van reductie en deductie zoals hier wordt uitgevoerd, vertroebelt dit dan weer. Een andere vereenvoudiging is het om alles in principe semantische tableaus te noemen. Men kan dan voorwaarden op de reductieregels opleggen of structurele eisen gaan stellen. Men heeft dan:

1. semantische tableaus in de meest algemene vorm.
2. als onder 1, maar dan met extra regels, zoals niet meer dan één formule op de F-zijde.
3. verdere optuiging met toeters en bellen van het semantische tableau zoals deductieregels of intuïtionistische opschik.

Ondanks dit blijft het grootste bezwaar bestaan: het ontbreekt bij Beth aan een simpel, mechanisch uitvoerbaar voorschrift voor de transformaties vanuit een gegeven afgesloten semantisch tableau naar een deductie. Wel is er voor elke formule die een gesloten semantisch tableau oplevert, een gesloten deductief tableau. Met Beths latere werk (tableaus en deductie gescheiden) is dit, afgezien van verdringing, welhaast volledig mechanisch uit te voeren. Maar met de doorschuiving onder negatie op links kan men elke verdringing omzeilen en met de inzetbaarheid op de punten die er toe doen elke formule die semantisch afsluit zonder één formule op rechts, ook met deze voorwaarde klassiek deductief afsluiten.

### Sequenten en axiomatiek

**Deductieve tableausequenten** Ook gerelateerd aan de deductieve tableaus heeft Beth tableausequenten geconstrueerd De methode is zoals bij de semantische tableaus, maar met extra voorwaarden: niet meer dan één formule op de succedentplaats, tezamen met het verdringingsmechanisme.

Uit de discussie over de naamgeving bleek dat de implicatieve systemen door Beth bij uitstek gezien worden als dragers van het begrip 'deductief tableau'. Het betreft de omschrijving van deductieve tableaus als plaatjes bij de ontleding van wat door Beth omschreven wordt als een 'deductief probleem'.[29] Dit houdt in om met sequenten stap voor stap de status van een formule te bepalen.

Een voorbeeld. Men heeft formuleverzamelingen $\Gamma$ en $\Delta$. Men vraagt of de ene verzameling uit de andere afleidbaar is, dus of ze een premisse-conclusierelatie hebben. Men heeft dan in de woorden van Beth het deductieve probleem $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Men werkt vanuit implicatie, derhalve valt dit probleem te reduceren tot vragen van het volgende soort. Is $\Gamma, A \to B \Rightarrow \Delta$, of $\Gamma \Rightarrow A \to B$ wel juist? Men krijgt dan een splitsing van problemen. Het probleem $\Gamma, A \to B \Rightarrow \Delta$ in het probleem $\Gamma, A \to B \Rightarrow A$, én het probleem $\Gamma, A \to B, B \Rightarrow \Delta$. Het probleem $\Gamma \Rightarrow A \to B$ in het probleem $\Gamma, A \Rightarrow B$.

$$\frac{\Gamma, A \to B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \to B \Rightarrow A \text{ [et] } \Gamma A \to B, B \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \to B}{\Gamma, A \Rightarrow B}$$

Bovenstaande opzet lijkt zeer sterk op die van Kleene en Gentzen. Daar wordt niet gesproken over een deductief probleem, maar over een (syntactische) beslissingsmethode. Er werden door hen echter geen predicaten onder het mes genomen. Beiden slepen per stap niet alle afgehandelde formules mee zoals in

[29]Dit zijn punten waarin Beth overeenkomsten vertoont met redeneerwijzen zoals in Kleene (1952*a*) en in Gentzen (1935*b*), p. 407–408. Overigens vindt men al in Kolmogoroff (1932) de zienswijze van interpretatie van beweringen binnne de intu"ıtionistische logica als problemen, en het oplossen van complexe beweringen als het oplossen van problemen die gevormd worden door de componenten.

Beths tableausequenten wel gebeurt. Ze werken zonder snede, en Kleene zelfs zonder structurele regels. De meest eenvoudige vorm biedt Kleene's systeem G3a. Als voorbeeld wordt hier al parafraserend Kleene (1952*a*), p. 483, gevolgd met de vraag: Is $A \vee \neg A$ geldig in de intuïtionistische G3? Dit geeft bij Kleene de aanleiding tot de volgende redenering.

Men had in de intuïtionistische G3 een bewijs voor $\Rightarrow A \vee \neg A$ moeten hebben. Maar $\Rightarrow A \vee \neg A$ is geen axioma. De vraag wordt geplitst naar de status van $\Rightarrow A$ óf die van $\Rightarrow \neg A$ (intuïtionistische G3 $\vee$ op rechts). Maar $\Rightarrow A$ noch $\Rightarrow \neg A$ komen in aanmerking voor de status van axioma. Bovendien kan $\Rightarrow A$ niet het resultaat van een of andere gevolgtrekking binnen de intuïtionistische G3 zijn. Blijft over de vraag naar de status van $\Rightarrow \neg A$. Hieraan komt men door een inferentie door middel van de succedentaire negatie uit vanuit de premisse $A \Rightarrow$. Echter $A \Rightarrow$ is geen axioma en niet het resultaat van een gevolgtrekking Al met al is het niet mogelijk om bij een axioma te komen, en is binnen de intuïtionistische G3 de formule $A \vee \neg A$ niet afleidbaar.[30] Als volgt wordt deze procedure door Kleene van onder naar boven beschreven:

$$\begin{array}{lll} \uparrow & 3. & \qquad\qquad\qquad\quad A \Rightarrow \\ \uparrow & 2. & A \qquad [\text{vel}] \quad \overline{\ \Rightarrow \neg A\ } \\ \uparrow & 1. & \overline{\qquad\ \Rightarrow A \vee \neg A \qquad} \end{array}$$

**Andere systemen en axiomatiek.** Volgens Beth verkrijgt men met zijn systeem Gentzens systeem NK.[31] Door het verwijderen van de regels 2c (implicatie) en 3c (negatie), de beide invoerregels (onder hypothese) onder de reducties, verkrijgt men Gentzens intuïtionistische systeem NJ. [32] Men verkrijgt volgens Beth een analoog voor Gentzens LK door als axiomaschema aan te nemen: [33]

1. $\Delta, A \Rightarrow \Gamma, A$

En daarnaast de volgende deductieregels: [34]

$$\text{2a.}\quad \frac{\Delta^*, A \to B \Rightarrow \Gamma, A \quad \Delta^*, A \to B, B \Rightarrow \Gamma}{\Delta, A \to B \Rightarrow \Gamma^*} \qquad \frac{\Delta, A \Rightarrow \Gamma, A \to B, B}{\Delta \Rightarrow \Gamma, A \to B}\quad \text{2b.}$$

etc. voor de overige operatoren.

Voor de omzetting naar de axiomatiek gaat Beth uit van Hilbert & Ackermann (1928) dat een voortzetting is van het door Gentzen gebruikte Hilbert (1928). Bij Gentzen kon men al omzettingen aflezen van sequenten in Gentzens natuurlijke inductie in Hilberts axiomatiek.[35] De vraag is of men de axiomatiek

[30]Vergelijk dezelfde redenering voor een beslissingsprocedure in Gentzen voor hetzelfde probleem: Gentzen (1935*b*), p. 407–408 onder §1.3.

[31]Ms. E.W. Beth, *Les tableaux sémantiques et la déduction naturelle*, p. 18a.

[32]Regel 2c komt in het hoofdstuk over implicatieve systemen ter sprake; 2c is net als 3c een regel om verdringing te omzeilen.

[33]Ms. E.W. Beth,*Les tableaux sémantiques* etc., p. 18a, 19.

[34]Bij regel 2a was door Beth in de conclusiesequent de verschrijving $\Delta \Rightarrow \Gamma^*, A \to B$ genomen i.p.v. $\Delta, A \to B \Rightarrow \Gamma^*$.

[35]Voor de equivalenties tussen LHK [=LHJ met $A \vee \neg A$], LK en NK (Hilberts axiomatiek en Gentzens sequenten en natuurlijke deductie voor klassieke logica), zie Gentzen (1935*b*), p. 429 e.v.; voor de equivalenties tussen LJ, LHJ en NJ (nu voor intuïtionistische logica), zie Gentzen (1935*b*), pp. 420, 422 en 424. Volgens Gentzen was LHJ vergelijkbaar met Heyting (1930*a*), Heyting (1930*b*) en Heyting (1930*c*).

door middel van een omweg over de lineaire natuurlijke deductie moet verkrijgen of dat men een axiomatisch afleiding (wellicht na de nodige transformaties) direct uit een tableau kan aflezen.

## 8.3 Dialoogtableaus

### 8.3.1 Overeenkomsten en verschillen

De dialoogtableaus van Lorenzen vormen een combinatie van Kleene's intuïtionistische G3 (hoogstens één formule op rechts met verdringing, conjunctieve en disjunctieve splitsing) en Beths tableaus.[36] Lorenzen had evenwel niet het opstellen van (lineaire) natuurlijke deducties tot doel. Lorenzen noemde zijn tableaus een dialoogspel, waarmee hij een effectieve of operationele logica kon simuleren. Lorenzen sloeg hiermee in de eerste plaats een brug naar een formele argumentatieleer, en in de tweede plaats naar een volgens hem intuïtionistische, maar eigenlijk beter nog (volgens Beth) een Hilbertse (strikte) operatieve logica.

Tegenwoordig worden de dialooglogica's nogal eens als een op zichzelf staande ontdekking opgevoerd. Wellicht is dit waar met betrekking tot de toepassingen, echter niet als men alles vanuit een zuiver formeel gezichtspunt beschouwt. Zeer duidelijk was Lorenzen op dit punt in een brief naar Beth: [37] "Definiert man die Verwendungsweise der logischen Partikeln in naheliegender Weise, und schreibt man dann die Dialoge auf, so entstehen (mit unwesentlichen Umstellungen) genau Ihre Tableaus." Indien men niet formeel te werk gaat zijn er volgens Lorenzen wel verschillen: [38] "Es scheint mir bemerkenswert, wie genau die 'dialogische' Konstruktion der tableaus mit der 'semantischen' übereinstimmt. Philosophisch *scheint* der größte Unterschied zu bestehen (ontologisch vs operativ, realistisch vs. nominalistisch) — und doch wieder *scheint* es dasselbe zu sein."

Beth was zeer geïnteresseerd in dergelijke toepassingen: [39] "Ich hatte zwar meinerseits eine Anspielung in dieser Richtung gemacht in meinem Vortrag *Remarks on intuitionistic logic*, habe diesen Ansatz aber niemals weiter ausgeführt.[40] Ihre Deutung ist freilich wieder anders." Beth had met zijn tableaus een andere intentie: [41]

[36] Wellicht door H. Scholz werd Beth vooreerst opmerkzaam gemaakt op P. Lorenzen, zie hiertoe de brieven H. Scholz – Beth, 15 juli 1946 en 13 augustus 1949, (Münster).

[37] Brief P. Lorenzen – Beth, 17 augustus 1959, (Kiel). Voor de diverse dialoogsystemen en stellingen, zie (Krabbe 1985).

[38] Brief P. Lorenzen – Beth, 18 november(?) 1959, (Kiel)

[39] Brief Beth – P. Lorenzen 23 augustus 1959.

[40] 'Remarks on ... ' zie (Beth 1959*c*). Beth (1959*c*) werd voorgedragen op het door A. Heyting te Amsterdam (26–31 augustus 1957) georganiseerde colloquium *Constructivity in mathematics.* Ook P. Lorenzen was op het colloquium aanwezig en heeft daar de lezing (Lorenzen 1959) ten gehore gebracht. Merk op dat Beth met Beth (1959*c*) in aanwezigheid van Lorenzen in 1957, dus twee jaar eerder dan de eerste nagelaten sporen van Lorenzen, al bezig was 'tableaus' voor spelen te gebruiken.

[41] Brief Beth – P. Lorenzen, 23 augustus 1959. Mordechaj Wajsberg, 1902 – (?).

"Selber habe ich in meiner Arbeit eine andere Richtung verfolgt, indem ich 1. die Konstruktion der Tableaux auch rein formal zu motivieren versuche, und 2. auch (wie Wajsberg und Schröter) die funktional unvollständigen Kalküle, anfangend mit dem rein-implikativen Kalkül, herangezogen habe. Hier ist natürlich wenig neues zu erwarten, es gestalten sich die Sachen aber sehr einfach und elegant. Z.B. wird die Rolle von Peirce's Law hier sehr einleuchtend."

Met de dialooglogica van Lorenzen kwam Beth in aanraking vlak vóór het congres over infinitistische methoden, dat van 2 tot 9 september in 1959 te Warschau gehouden zou worden.[42] P. Lorenzen was van plan daar de lezing *Ein dialogisches Konstruktivitätskriterium* (Lorenzen 1961) te geven. Voordat beiden naar Warschau zouden afreizen had Lorenzen op 17 augustus 1959 per briefmet Beth contact gezocht om diens aandacht te vestigen op de lezing en hem te wijzen op de overeenkomsten tussen zijn dialooglogica en Beths tableaus.

### 8.3.2 Bedoeling van de dialoogtableaus

De dialoogtableaus kan men zien als een soort formeel spel. Er zijn twee partijen: de opponent en de proponent. De proponent zet een formule in. De opponent heeft als taak om met alle toegestane middelen te voorkomen dat de proponent de geldigheid van een formule kan aantonen. Als volgt was Lorenzen op de dialogische logica gekomen: [43]

"Bei dem Versuch, den in meiner 'Einführung in die operative Logik und Mathematik' gebrauchten Terminus 'definiert' zu definieren, bin ich darauf gekommen, näher zu untersuchen, wie die logischen Partikeln verwendet werden, wenn sie in einem Dialog (zwischen einem Proponenten P und einem Opponenten O) auftreten."

Evenals bij Beths tableaus (waar vs. onwaar, premissen vs. conclusie) heeft men ook hier een tweedeling. De p(roponent) staat op de rechterkolom, de o(pponent) op de linkerkolom: [44] "d.h., er [de proponent] ist verpflichtet die Konklusion zu behaupten, wenn sein Opponent die Prämissen behauptet." De proponent zal trachten het tableau af te laten sluiten (het winnen van de proponent), de opponent zal trachten het tableau open te houden (het verliezen van de proponent): [45] "Man kann nun definieren, daß eine Formel 'logisch gültig' ist, wenn es für Sie in diesem Dialogspiel eine Gewinnstrategie gibt. (für die Primaussagen wird vereinbart, daß O alle Primaussagen behaupten darf, P nur diejenigen die O schon behauptet hat)." Remise is niet mogelijk: [46] "Mit nicht-finiten Mitteln wird man — so vermute ich — im Anschluß an Ihren Vollständigkeitsbeweis beweisen können, daß für jede Formel entweder eine Gewinnstrategie für P oder eine Gewinnstrategie für O (d.h. ein Gegenmodell)

[42] Beths bijdrage was nihil. Hij is wel naar Polen toegegaan, maar had de organisatoren al meegedeeld op dat moment meer aardse onderwerpen te bestuderen; zie de brieven Beth – H. Rasiowa, 2 december 1958, Beth – A. Mostowski, 25 juli 1959.

[43] Brief P. Lorenzen – Beth, 17 augustus 1959, (Kiel).

[44] Brief P. Lorenzen – Beth, 17 augustus 1959, (Kiel).

[45] Brief P. Lorenzen - Beth, 17 augustus 1959, (Kiel).

[46] Brief P. Lorenzen – Beth, 27 september 1959, (Kiel).

existiert." [47]

### Regels

De regels van het dialoogspel vallen uiteen in reductie- en spelregels (soort van structurele regels).

Er zijn al enkele algemene richtlijnen gegeven. Eén punt kan iets verduidelijkt worden, namelijk de formuleverzamelingen aan de antecedentaire en de succedentaire kant. De succedentaire kant kan niet uitgroeien, de antecedentaire kant wel. Dit is niet tot het genoegen van de opponent, want de proponent kan zich voortdurend op de daar aanwezige formules beroepen. Door het herhaald kunnen oproepen van formules heeft men repetitie en kan men intuïtionistisch geldige formules zoals $\neg\neg(A\vee\neg A)$ ook hier geldig krijgen. In navolging van Beth (1965*b*), p. 133, valt derhalve deze wassende formulebuidel van de opponent niet als diens groter wordende rijkdom, maar als diens toenemende handicap te omschrijven.

Bij Lorenzen betekent het uiten van een complexe bewering dat men een bewijs voor een complexe bewering heeft. De reductie geeft aan hoe men een bewijs uit de samenstellende delen heeft op te bouwen. Bij de reductie heeft men te maken met enkele afwijkende tekens: $?A$ (de bewering A wordt betwijfeld), $\not{?}A$ (de uitdaging $?A$ wordt ingetrokken, de tegenpartij wint op een tak), $[A]$ (de éénmalige inzet van A kan tot later bewaard worden). Men kan de dialoogtableaus evenals Beths tableaus omzetten in dialoog-tableausequenten.[48] Deze kan men omzetten in een lineaire afleiding.[49] De hulpsymbolen $?$, $\not{?}$ en $[\,]$ worden door Lorenzen bij het formuleren van de sequenten weggelaten; zij spelen formeel geen enkele rol evenals de daarbij horende formules $?A$, $\not{?}A$, $[A]$: hierdoor kunnen dus ook geen formules verdrongen worden.

Twee voorbeelden van reductie: [50]

| opponent | proponent |
|---:|:---|
| | $A \to B$ |
| $A$ | $[B]$ |

$$\begin{array}{r|l}
\text{opponent} & \text{proponent} \\
\hline
 & A \vee B \\
?(A \vee B) & \\
\text{[vel]} & \\
\hline
A & \qquad\qquad B
\end{array}$$

$P(A \vee B)$ geeft een disjunctieve splitsing. Het is aan P om op de uitdaging door O in te gaan. P kan kiezen om op één van beide takken voort te gaan, als één van beide takken afsluit, dan wordt er ook op de splitsing afgesloten. Door Lorenzen wordt slechts verder doorgegaan op de winnende tak, alleen

[47] In het op Beth-modellen gebaseerde spel in Beth (1959*c*) is wel remise mogelijk; Beth (1959*c*), p. 18: "but if A and B stick to this tactics, then the game will remain undecided." De 'tactics' in de zich ontwikkelende boom bestaat voor beide partijen uit het kiezen van bepaalde takken in een boom (voor elke partij een andere). De eerste, die afwijkt, verliest; bij het volharden in de gunstige keuze door beide partijen blijft het spel onbeslist.

[48] (Lorenzen 1962), p. 30. Beth had vooral met het werk van Lorenzen uit de beginperiode van de dialooglogica te maken. Later zijn er tal van verbeteringen ingebracht, maar die zijn hier niet direct ter zake doende.

[49] (Lorenzen 1962), p. 32.

[50] Zie voor deze en alle andere regels: (Lorenzen 1962), pp. 26–28.

deze wordt genoteerd. Men heeft hier derhalve te maken met een onvoldragen model. De reductie voor $\vee$ aan de opponent-zijde verloopt zoals bij Beth met een conjunctieve splitsing.

De quantoren hebben bij Lorenzen op het ideologische vlak een eigen behandeling. Vooral bij de existentiële quantor komt dit naar voren. Bij een $\exists x A(x)$ bewering heeft de tegenpartij niet kennis over welk element $n$ de bewerende partij beschikt. In tegenstelling tot bij een universele bewering, waar bij de tegenpartij naar een zo listig mogelijk gekozen element $n$ — $?(n)$ — kan vragen, moet deze nu naar de volledige formule vragen: $?(\exists x A(x))$. Volgens Lorenzen is dit als volgt te omschrijven:[51] $\exists x A(x)$ is een 'bewijsdefiniete' (op een bewijs stoelende) bewering. Het geven van de ware bewering $A(n)$ moet dan als 'bewijs' gelden. Deze interpretatie van de existentiële quantor heet bij Lorenzen een 'effectieve' interpretatie, Er moet hier een 'x' effectief aangetoond worden.

Er zal aan de hand van een door Lorenzen beantwoorde vraag van Beth een voorbeeld worden gegeven: [52]

"Die Fassung Ihrer dialogischen Interpretation hat mich sehr interessiert, sie leuchtet aber nicht ganz ein. Es soll doch wohl sein dass Proponent und Opponent abwechselnd je einen Schritt vornehmen dürfen. Dann ergibt sich aber die Frage, was als Schritt gelten soll. Ich befürchte nun dass, wenn Sie dies fixieren, entweder bei $(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$ oder bei $((A \vee B) \vee C) \rightarrow (A \vee (B \vee C))$ Schwierigkeiten entstehen. Selber habe ich ja meine Regel (4b) abweichend von Kleene's G3 wählen müssen, damit der Abschluss des Tableaus unabhängig wird von der Anordnung der Reduktionsschritte; damit bleiben nun aber den Diskutanten keine Möglichkeiten einer freien Wahl mehr."

Lorenzen beantwoordde dit als volgt: [53]

"Auf welche Schwierigkeit Sie bei der dialogischen Interpretation von $(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$ und $((A \vee B) \vee C) \rightarrow A \vee (B \vee C))$ hinweisen wollen, konnte ich Ihrer brieflichen Andeutung leider nicht entnehmen. Zu jeder Zeile wird je ein Zug (Schritt) von O und P gemacht. Die Strategien für die obigen Formeln sind also:

| | |
|---|---|
| | $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{B} \vee \mathbf{A})$ |
| $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ | $[B \vee A]$ |
| | $\mathbf{?}(A \vee B)$ |
| [et] | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{A}$ | $\mathbf{B} \vee \mathbf{A}$ | $\mathbf{B}$ | $\mathbf{B} \vee \mathbf{A}$ |
| $\mathbf{?}\ (B \vee A)$ | | $\mathbf{?}\ (B \vee A)$ | |
| | $\mathbf{A}$ | | $\mathbf{B}$ |
| $?A$ | | $?B$ | |
| $[[\not?]]$ | $\not?A$ | $[[\not?]]$ | $\not?B$ |

Vet gedrukt: het tableau zoals door Lorenzen opgesteld (alleen de afsluitende takken zijn aangegeven). Door Lorenzen werd $\not?$ aan de opponentzijde als afsluiting gebruikt, maar hier vervangen door P($\not?A$) en P($\not?B$) — tezamen met Lorenzens oude O($\not?$), hier tussen [[ ]]. Verder is hier voor instructief gebruik met wat meer omslag tewerk gegaan en het geheel wat meer aangepast aan

[51] Vergelijk typoscript P. Lorenzen, *Der Begriff der logischen Wahrheit*, p. 4, (Beth-archief).
[52] Brief Beth – P. Lorenzen, 1 februari 1960.
[53] Brief P. Lorenzen – Beth, 5 februari 1960, (Kiel).

de regels in Lorenzen (1962).[54] De tweede vraag van Beth werd eveneens door Lorenzen met een goed lopend dialoogtableau beantwoord, maar dat is hier niet instructief meer. De drie tableau-afsluitingen bij Lorenzen worden gekenmerkt door P($\not?A$), O($\perp$) en P($\top$). Men is dan wel evenals bij Beth op atomair niveau bezig.

Bij het aanroeren van het begrip van atomaire beweringen komt men aan op het punt van wat daar onder valt — gezien Lorenzens gebruik van *operatieve* wiskunde is dit niet een triviale vraag. Moet een atomaire bewering bewezen kunnen worden om waar te zijn? Volgens Beth kan men het volgende inbrengen: [55] "Wenn P das Gedicht richtig aufsagt, wird seine Behauptung als wahr bewertet, sagt er es gar nicht oder teilweise oder unrichtig auf, als unwahr. Dies, sowie die Wendung: 'bei ihnen ist der Wert unabhängig von der zweiten Handlung' [die Beweisversuche], suggeriert doch dass z.B. die Aussage 'einige ungerade Zahlen sind vollkommen' als unwahr gilt falls es dem Proponenten nicht gelingt die Aussage zu beweisen."
Het antwoord hierop van Lorenzen luidde: [56]

"Die Bewertung von beweisdefiniten Behauptungen mit 'wahr' und 'falsch' führt in der Tat zu Mißverständnissen. Wären Sie damit einverstanden, wenn man in diesem Fall zunächst nur die Beweisversuche (die *zweite Handlung*) bewertet, und zwar mit den Prädikaten 'beweisend' und 'nicht beweisend'. Liegt ein 'beweisender' Beweisversuch vor, so wird man die erste Behauptung 'bewiesen' nennen — und dann auch 'wahr', aber auf 'wahr' und 'falsch' kann man hier und ganz verzichten."

**Intuïtionisme.** Lorenzen stelde dat zijn systeem intuïtionistisch was. Zijn systeem sloot via Gentzen bij Heytings formalisatie aan.[57] Maar evenzo, gelijk Beth met zijn deductieve tableaus, sloot Lorenzen direct aan op het door Kleene geformuleerde intuïtionistische systeem, ook m.b.t. het gebruik van disjunctieve splitsing: [58] "eine Fassung der 'dialogischen Interpretation' beilegen, aus der unmittelbar die Aequivalenz mit dem Gentzenschen intuitionistischen G3 (nach Kleene) hervorgeht."

Inderdaad zijn $A \vee \neg A$ en $\neg(A \vee \neg A)$ niet afleidbaar, $\neg\neg(A \vee \neg A)$ wel. Voor een bewijs van de claim op intuïtionisme is echter meer nodig. Dat dit nog niet zo eenvoudig was blijkt hieruit dat na pogingen door Lorenzen en zijn navolgers pas in Krabbe (1982), in Krabbe (1985) en in Felscher (1985) een volledigheidsbewijs geleverd is.

Vanuit de door Lorenzen gegeven intuïtionistische dialoogtableaus kan men overstappen naar een klassiek syteem: [59] "Die Existenz einer Gewinnstrategie

[54] Bovendien wordt vanwege een uniforme presentatie, gelet Beths tableaus, afgeweken van Lorenzens notatie.
[55] Brief Beth – P. Lorenzen, 1 februari 1960. Het eigenaardige voorbeeld waar Beth mee aankomt, vloeit voort uit een explicatie door Lorenzen in het typoscript P. Lorenzen, *Der Begriff der logischen Wahrheit* (Beth-archief).
[56] Brief P. Lorenzen – Beth, 5 februari 1960, (Kiel).
[57] (Lorenzen 1962), p. 31.
[58] Brief P. Lorenzen – Beth, 18 november(?) 1959, (Kiel).
[59] Brief P. Lorenzen – Beth, 17 augustus 1959, (Kiel).

ist äquivalent mit der Existenz eines geschlossenen Tableaus — und damit mit der Ableitbarkeit in einem geeigneten Logikkalkül (und zwar *hier im intuitionistischen Kalkül*, für den klassischen Kalkül muß man die Dialogregeln etwas modifizieren, z.B. daß man stets $A \vee \neg A$ hinzunehmen darf."

### Beths mening over Lorenzen

Over blijft Beths oordeel over de ideologie achter Lorenzens formalismen. Volgens Beth valt Lorenzen, met zijn operationalisme, te beschouwen als een opvolger van de *formalisten*. Bij formaliseringen heeft men de mogelijkheid de betekenis van symbolen binnen zekere grenzen te stipuleren. Men kan derhalve semantisch dan wel operatief bezig zijn. Hoewel Beth op de ideeën van Lorenzen voor het technische deel geen aanmerkingen had, lag dit anders met betrekking tot de ideële context: [60]

"Lorenzen gaat dogmatisch, of althans normatief, en soms haast moraliserend te werk. Om een bekend gezegde van Marx te variëren: hij is er niet mee tevreden, de logica te interpreteren, hij stelt zich in de eerste plaats tot taak de logica te veranderen. [...] Maar het past de wijsgeer allerminst, de noodzaak van verandering dogmatisch te decreteren en op grond van normatieve gezichtspunten de vernietiging van het bestaande aan te bevelen."

Beth was ook hier zeer ruimdenkend als het er om ging anderen aan het woord te laten. Graag had Beth Lorenzens *Operative Logik und Mathematik* in de 'Studies in Logic' gezien. Van verschillende zijden werd er echter tegen dit werk gefulmineerd: [61] "Te München ontstond over zijn denkbeelden ook weer een heftige discussie, waarbij Bernays met de vuist op de lessenaar sloeg. Dit feit pleit in zekere zin vóór de uitgave van een vertaling, maar deze moet dan wel aan de hoogste eisen voldoen." [62] Beths welwillendheid stond in scherpe tegenstelling tot de houding van G.H. Müller, de toenmalige assistent van Bernays: hij probeerde achter Beths rug om te verhinderen dat de Noord–Hollandsche Uitg. Mij. Lorenzen zou uitgeven; Beth maakte hij hier zeer kwaad mee.[63]

Volgens H. Hermes was het werk van Lorenzen in wezen wel aanvaardbaar en berustte veel kritiek op een niet voldoende begrijpen van diens werk: [64]

"Der Grundgedanke von Lorenzen ist es, grob gesagt, die Logik und die Mathematik als eine Wissenschaft von den (durch Axiome und Regeln gegebenen und intuitiv zugänglichen) Kalkülen aufzufassen, und über diese Kalküle nur solche Aussagen zu

[60] (Beth 1961/1962*c*). Karl Marx, 1818 – 1883.

[61] Brief Beth – M.D. Frank (Noord-Hollandse Uitg.Mij.), 26 november 1960.

[62] Vertaling van Lorenzens boek uit het Duits naar het Engels en voor Noord-Holland.

[63] Voor de niet door Beth gewaardeerde bemoeienissen van G.H. Müller, zie de correspondentie m.b.t. Studies in Logic (N-H). Ook in later tijd bleken er, al dan niet terecht, ressentimenten tegen Lorenzen te bestaan. Zie de brief H. Freudenthal – A.S. Troelstra, 17 oktober 1980 (Amsterdam) [Troelstra-archief, G1.1-1980 (Genootschappen, Beth Foundation)]; daarin wordt tegen Lorenzen en een door hem te houden lezingencyclus, onder auspiciën van de Beth-stichting, gefulmineerd.

[64] Uit afschrift rapport van H. Hermes aan L.E.J. Brouwer aangaande de misverstanden ten opzichte van het werk van Lorenzen (opgestuurd door L.E.J. Brouwer aan Beth op 29 april 1957).

machen, welche einsichtig sind. Was dabei unter 'Einsicht' zu verstehen ist, kann man wohl kaum exakt definieren; man kann jedoch durch eine längere Beschäftigung mit der Materie ein ziemlich sicheres Gefühl dafür bekommen".

# Hoofdstuk 9

# Implicatieve systemen

*"Es kam nun ein anderes Bestreben hinzu. Dieses Bestreben ist darauf gerichtet, beim Aufbau der Logik zunächst so ökonomisch wie nur möglich vorzugehen. In diesem Sinne lässt man ja auch fast immer die Aussagenlogik der vollen Prädikatenlogik vorausgehen. Wir gehen in dieser Beziehung noch einen Schritt weiter, indem wir der vollen Aussagenlogik die rein-implikative Logik vorausgehen lassen, und schliessen uns damit einer Betrachtungsweise an welche auf Tarski zurückzugehen scheint und nachher von Wajsberg, Henkin und Schröter erfolgreich übernommen worden ist. Dies erschwert die Untersuchung einigermassen, da sogar im klassischen Fall die rein-implikative Logik funktional unvollständig ist; die etwas grössere Schwerfälligkeit des Verfahrens wird jedoch vom Gewinn an Einsicht reichlich aufgewogen."* [1]

## 9.1 Implicatieve systemen en aanverwanten

Wij hebben in deze studie bovenstand citaat niet ter harte genomen: pas nu komen helemaal op het eind de implicatieve systemen aan bod. Historisch is deze volgorde wel beter. Het betreft vooral materiaal uit het laatste deel van Beths leven en van zijn wetenschappelijke ontwikkeling..

Volgens Beth kwamen de 'echte' natuurlijk-deductieve tableaus het best tot hun recht in bepaalde implicatieve systemen die binnen dit hoofdstuk bekeken zullen worden. Dit hoofdstuk hangt ook samen met Beths zoektocht naar systemen, of fragmenten daarvan, die intuïtionistisch aanvaardbaar zijn: [2]

"These last two years I have been mainly concerned with more elementary matters, namely, the construction of logic starting from purely implicational logic in connection with the properties of semantic and deductive tableaux (cf. Considérations heuristiques).[3] In general, a closed semantic tableau cannot inmediately be converted into a formal deduction. This conversion seems possible only if the semantic tableau is at

[1] Uit ms. E.W. Beth, *Deduktive und semantische Tafeln für die rein-implikative Logik*, voordracht aan Math. Institut der Universität Marburg/Lahn, 27 november 1959.

[2] Brief Beth – G. Kreisel, 5 december 1960; ten dele ten tweede male hetzelfde citaat.

[3] (Beth 1959*a*).

the same time a deductive tableau in which case an intuitionistic deduction results. This I can, however, only state as an empirical rule because so far I have studied the situation only with a view to classical logic."

Het onderzoek naar alleen implicatie geeft een eerste indicatie hoe een systeem zich gedraagt. Bovendien kan het soms verbreed worden zonder inzet van andere operatoren. Dit kan zelfs formeel als men het principe van 'semantische' equivalentie naar voren schuift zoals in Beth (1962*a*), p. 41.[4] Het hangt er natuurlijk ook van af in welk systeem men werkt: zo kan wat bij klassieke logica mogelijk is bij intuïtionistische logica geblokkeerd worden.

De hier te bespreken fragmenten vallen te verdelen in klassiek en intuïtionistisch. In alle gevallen zal de formule van Peirce een belangrijke rol spelen als toetssteen voor deze fragmenten. Geldigheid van Peirce duidt op het niet-intuïtionistische karakter van de logica.[5] Beth vroeg zich tegenover A.S. Troelstra al af of het gerelateerd aan de implicatieve fragmenten ook met minder dan de formule van Peirce kon.[6] Er zijn verzwakkingen van Peirce mogelijk waarmee men de intuïtionistische logica verlaat, maar nog geen klassiek implicatief fragment heeft. In Troelstra (1965) wordt aangetoond dat men toenemende verzwakkingen heeft van Peirce; dat deze verzwakkingen aanleidingen geven tot evenzo vele onderscheidbare systemen en dat er oneindig veel van dergelijke systemen zijn tussen implicatieve intuïtionistische en implicatieve klassieke logica. Het bewijs hiertoe loopt over tralies, tableaus worden daarbij niet gebruikt.

### 9.1.1 Zuiver implicatief: intuïtionistisch en klassiek fragment

Axioma's: [7]

1. $A \to (B \to A)$,
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$,
3. $((A \to B) \to A) \to A$ [Peirce].

Regel: Modus Ponens

Klassiek implicatief omvat de axioma's onder 1, 2 en 3. [8] Intuïtionistisch implicatief bestaat uit de axioma's onder 1 en 2. [9] De later nog ter sprake komende derivatieve logica heeft dezelfde axioma's 1 en 2 als het implicatieve intuïtionistische fragment.[10]

---

[4]Bij duale operatoren kan men dit als volgt uitvoeren. Operator $\oplus$ is om te zetten in operator $\ominus$ als onder eenzelfde valuatie dezelfde waarden worden opgeleverd. Zo kan men $A \vee B$ omzetten in $(A \to B) \to B$, want onder $v_1(A) = 0, v_1(B) = 0$ heeft men $v_1(A \vee B) = v_1((A \to B) \to B) = 0$; $v_2(A) = 1, v_2(B) = 0$ levert $v_2(A \vee B) = v_2((A \to B) \to B) = 1$, etc.

[5]Bij Beth, en anderen, zal men tevergeefs zoeken naar een niet-technische bespreking van deze formule. Gezien de diverse systemen verschijnt de formule van Peirce bij Beth in diverse varianten.

[6]Mondelinge mededeling van A.S. Troelstra.

[7](Beth 1961*f*), (Beth 1965*c*).

[8](Beth 1961*f*), (Beth 1965*c*).

[9](**?**), (Beth 1965*c*).

[10](Beth 1961*a*), (Beth 1965*c*).

Ook bij dit fragment heeft men verdringing en de onmogelijkheid bepaalde klassiek geldige formules tableaumatig af te sluiten (bijvoorbeeld axioma 3: Peirce). De oplossing van negatie-introductie is hier niet meer bruikbaar. Beth had, zij het niet als eerste,[11] er de volgende oplossing voor: [12]

"Wenn auf der rechten Seite neben $A$ eine neue Formel $B$ auftritt, so tragen wir zugleich auf der linken Seite $A \to B$ ein und betrachten $A$ als 'verdrängt'. Wenn aber später einmal die Formel $A$ statt der Formel $B$ benötigt wird, so wenden wir mit Rücksicht auf $A \to B$ Reduktionsschema ($2^{aD}$) an."

$$\text{van} \quad \begin{array}{|l} A \\ \vdots \\ B \end{array} \quad \text{in} \quad \begin{array}{r|l} & A \\ & \vdots \\ A \to B & B \end{array}$$

Beth (1962*e*), p. 52, vervolgt: "Semantisch ist dieses Vorgehen ganz begründet. Denn wenn $A \to B$ wahr ist und $B$ falsch, so muß nach der einschlägigen Bewertungsregel $A$ falsch sein." Teneinde het effect van deze semantisch gemotiveerde regel bij de deductieve tableaus te krijgen voegt Beth *onder hypothese* nog een tableauregel toe: Introductieregel 2c — in het tableau zijn er door mij voor alle duidelijkheid hypothese-haken bijgeschreven, bij Beth staan deze er natuurlijk niet in.

$$2\text{c}^* \quad \begin{array}{r|l} \lceil A \to B & A \rceil \\ & B \end{array} \qquad 2\text{c} \quad \begin{array}{cl} \Delta & \\ \dots & \\ A \to B & [+\ \text{hyp}] \\ \vdots & \\ A & \\ \dots & \\ A & [-\ \text{hyp}] \\ \vdots & \end{array} \qquad 2\text{c} \quad \begin{array}{c} \Delta \\ \dots \\ A \to B \\ \hline A \\ \dots \\ \hline A \end{array} \qquad 3\text{c} \quad \begin{array}{c} \Delta \\ \dots \\ \neg A \\ \hline A \\ \dots \\ \hline A \end{array}$$

In Beth (1962*a*), p. 145, wordt er niet zo veel deductieve omslag gemaakt; wel wordt vermeld dat men deze regel ook nemen kan als in regel 3c, maar dan $A \to B$ — voor een willekeurige $B$ — gesubstitueerd voor de onder hypothese ingevoerde $\neg A$ op links.

Voor het intuïtionistische implicatieve fragment mag deze de verdringing omzeilende regel 2c niet aangenomen worden. Peirce (toegevoegde klassieke axioma 3) wordt hiermee geblokkeerd. De tableaus van het intuïtionistische implicatieve fragment vormden voor Beth de deductieve tableaus bij uitstek.

Nu over naar Peirce om daarmee de werking van regel 2c te demonstreren; de raad van Beth om op de plaats van $\neg A$ een implicatie in te zetten wordt hier met $A \to B$ opgevolgd.

[11](Curry 1950) was aan Beth voorafgegaan. H.B. Curry werkte systematischer dan Beth, zo ook met zijn behandeling van dit probleem (separatie). Zie Troelstra & Schwichtenberg (1996), en wel in de 2e druk uit 2000, 3e hoofdstuk.

[12](Beth 1962*e*), p. 52.

| | |
|---|---|
| | $((A \to B) \to A) \to A$ |
| $(A \to B) \to A$ | $A$ |
| $\lceil\lceil A \to B$ i.p.v. $\neg A$ | $A\rceil\rceil$ |

| | | |
|---|---|---|
| | $A \to B$ | $A$ |
| $A$ | $B$ | sluit |

| | |
|---|---|
| $A$ | $B$ |
| sluit | sluit |

Dit verloopt als in typoscript E.W. Beth, 'Les tableaux sémantiques', pp. 10, 11, en geeft de volgende natuurlijke deductie. Er zijn hier geen premissen, maar er is wel een conclusieformule.[13]

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\lceil(A \to B) \to A$ | [+ hyp. 1] |
| 2. | $\lceil\lceil A \to B$ | [+ hyp. 2] |
| 3. | $\lceil\lceil\lceil A$ | [+ hyp. 3] |
| 4. | $A$ | uit 3 |
| 5. | $B$ | uit 2, 4 |
| 6. | $B\rfloor\rfloor\rfloor$ | uit 5 |
| 7. | $A \to B$ | [– hyp. 3] |
| 8. | $A$ | uit 1, 7 |
| 9. | $A\rfloor\rfloor$ | uit 8 |
| 10. | $A\rfloor$ | [– hyp. 2] |
| 11. | $((A \to B) \to A) \to A$ | [–hyp. 1] |

Al eerder is er vermeld dat Beth ook andere methoden gebruikte: inzet van axioma's of andere formules als extra hulpjes naast de premissen aan de T-zijde.[14]

### 9.1.2 Toevoeging van andere operatoren

**Minimaalcalculus, negatie**

Wij zijn er nu aan toe om Beths raad aan het begin van dit hoofdstuk op te volgen: ga uit van de implicatieve fragmenten en voeg daar operatoren aan toe. De aandacht gaat hier naar de uitbreiding van het intuïtionistische implicatieve systeem. De bedoeling is dat de uitbreiding een intuïtionistisch aanvaardbaar systeem blijft. Als eerste is implicatie met negatie aan de beurt. Beth onderzocht dit fragment met behulp van de minimaalcalculus van I. Johansson.

Johansson (1937) ging uit van Heytings artikelenreeks uit 1930. Hierin ging hij schrappen en vervangen en kwam zodoende tot een systeem dat iets zwakker dan het systeem van Heyting was. Alleen het propositionele gedeelte is hier van belang. Johansson besprak de volgende twee intuïtionistische principes van Heyting:

2.14 $B \to (A \to B)$ en 4.1 $\neg A \to (A \to B)$.[15]

Over axioma 2.14 merkte Johansson op: "kann man sich recht leicht versöhnen.";

[13] Regel 2c had ook met $A \to X$ geformuleerd kunnen worden; met naar believen een letter voor X in te zetten, in dit geval een $B$. Beth kiest ook voor de tableau-afsluiting gunstige letters.

[14] (Beth 1962*a*), p. 130.

[15] Zie Heyting (1930*a*), p. 46 en 49.

met axioma 4.1 echter niet.[16] In Glivenko (1929) worden bovenstaande axioma's van Heyting (onder de naam van C en D op p. 184) als volgt verdedigd op p. 185: "les expressions C — D ne sont que des conséquences immédiates du principe $(\neg A \vee B) \to (A \to B)$ dont l'admissibilité est bien évidente, car la conséquence formelle $A \to B$ n'a d'autre sens que 'lorsqu'on accepte la vérité de $A$, on doit accepter celle de $B$'." Maar vervolgt hij: "On peut même dire que ce principe-ci est tout à fait opposé à celui du tiers exclu, car ce dernier s'exprimerait comme il suit: $(A \to B) \to (\neg A \vee B)$." Hiermee is intuïtionistisch wel de eerste acceptabel, maar $(A \to B) \to (\neg A \vee B)$ uitgesloten. Lewis & Langford (1932)[17] accepteerden binnen hun systeem van strikte implicatie (met disjunctie en negatie) niet $(\neg A \vee B) \to (A \to B)$ (p. 142 boven), maar wel $(A \to B) \to (\neg A \vee B)$ (p. 141 onder). Klassiek gelden beide en Johansson accepteerde geen van de twee.

Johansson stelde, als het enig negatie bevattend axioma, het principe 4.11 $(A \to B) \wedge (A \to \neg B)) \to \neg A$ voor Heytings axioma 4.1 in de plaats. Dit had enkele gevolgen, onder andere een verzwakte vorm $A \to (\neg A \to \neg B)$ van 'ex falso sequitur quodlibet'.[18] Bij Johansson treft men $\neg A$ als equivalent aan van $A \to\bot$.[19] Bij Johansson wordt in de succedent geen gebruik gemaakt van een lege plaats, maar van het symbool $\bot$.

Johansson heeft verder, naar analogie van Gentzens intuïtionistische natuurlijke deductie NJ het systeem NM, en naar analogie van Gentzens intuïtionistische sequentencalculus LJ het systeem LM gegeven. Het was uiteraard niet zijn bedoeling op dezelfde formules uit te komen.[20] Johansson geeft net de voorbeelden met de vervangingen die wij nodig hebben. Ze worden hier aangegeven met de daarbij behorende door mij opgezette tableaus ($\bot$ in $[\bot]$ is een moeilijk geval):

$$\begin{array}{c} \Gamma \Rightarrow A \text{ [et] } \bot\Rightarrow\bot \\ \hline A \to\bot, \Gamma \Rightarrow\bot \\ \hline \neg A, \Gamma \Rightarrow\bot \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \neg A, \Gamma & \bot \\ A \to\bot, \Gamma & [\bot] \\ \hline \Gamma \; A & \bot \;\; [\bot] \end{array} \qquad \begin{array}{c} A, \Gamma \Rightarrow\bot \\ \hline \Gamma \Rightarrow A \to\bot \\ \hline \Gamma \Rightarrow \neg A \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & \neg A \\ & A \to\bot \\ A & \bot \end{array}$$

(N.B.: Hier wordt niet $\neg A$ gedefinieerd als $A \to\bot$, maar twee implicaties $\neg A \to (A \to\bot)$ en $(A \to\bot) \to \neg A$.)

Beth (1962*a*), p. 128, geeft een negatie-implicatief fragment van de minimaalcalculus. Beth nam daar als axiomatiek de al geformuleerde intuïtionistische (derivatieve) axioma's 1, 2 en het axioma: $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

In Beth (1962*a*), p. 128, treft men de volgend reductieregels voor zijn versie van het fragment uit de minimale logica aan. In de eerste plaats de al bekende regels voor implicatie en afsluiting. Wederom alles met hoogstens één formule

[16]Kolmogoroff (1932), p. 62: "Was insbesondere die Aufgabe 4.1. betrifft, so ist, sobald $\neg A$ gelöst ist, die Lösung von $A$ unmöglich und die Aufgabe $A \to B$ inhaltlos." Kolmogoroff hanteerde een 'aufgabentheoretische Deutung' voor de intuïtionistische logica.

[17]Herdruk 1951 pp. 141 onder, 142 boven. Clarence Irving Lewis, 1883 – 1964.

[18]Volgens Beth (1962*a*), p. 128.

[19]Johansson is hierin niet de eerste: al in Russells Principia komt men dit tegen, zij het niet in een intuïtionistische context.

[20]Bij de natuurlijke deductie heeft men niet Gentzens schema 'als $\bot$, dan $C$', voor een willekeurige $C$. Bij de sequentencalculus heeft men de schema's NES en NEA, zie Gentzen (1935*a*), p. 193.

op rechts. In de tweede plaats de negatie. Bij Beth wordt gebruik gemaakt van $\emptyset$; misschien vatte Beth $\emptyset$ als een equivalent van $\perp$ op.

$$\begin{array}{r|l} \text{p} & \text{c} \\ \hline \Delta^* & \emptyset \\ \neg A & \\ & A \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \text{p} & \text{c} \\ \hline \Delta & \neg A \\ A & \emptyset \end{array}$$

Dit lijkt rechtstreeks uit Kleene's G3 afkomstig.[21] Het omzeilen van verdringing werd door Beth hier niet toegelaten: Peirce wordt geblokkeerd. Echter Heytings axioma's 2.14 $B \to (A \to B)$ en 4.1 $\neg A \to (A \to B)$ zijn met Beths schema allebei geldig. Voor axioma 2.14 is dit niet erg, ook Johansson accepteerde dit.

$$\begin{array}{r|l} & B \to (A \to B) \\ B & A \to B \\ A & B \\ & \text{sluit} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & \neg A \to (A \to B) \\ \neg A & A \to B \\ A & B \\ & A \\ & \text{sluit} \end{array}$$

Met andere woorden, Beths systeem van regels beschrijft intuïtionistische $\{\to, \neg\}$-logica, echter geen minimale $\{\to, \neg\}$-logica. Met het inzetten van Johanssons interpretatie van $A \to \perp$ voor $\neg A$ valt door de 'verborgen' implicatie[22] onder de negatie Heytings axioma 4.1 af te stoppen:

$$\begin{array}{r|l} & \neg A \to (A \to B) \\ \neg A [= A \to \perp] & A \to B \\ A & B \end{array}$$
$$\begin{array}{ll} A & \perp \;\; [*] \\ \text{sluit} & \text{open} \end{array}$$

Het draait er nu om wat er op plaats [*] gebeurt. In klassieke en intuïtionistische logica kan men naar believen $\perp$ inzetten: dit sluit de tak af. Gaat dit voor minimaal-logica op?

Men kan $\perp$ als een vaste niet nader gespecificeerde onbewijsbare propositie nemen en dan kan deze niet naar willekeur ter rechterzijde worden ingezet; dit i.t.t. $\top$ dat wel aan de linkerkant als neutraal naar willekeur kan worden ingezet (en hiermee overeenkomt met intuïtionistische en klassieke logica). Een moeilijkheid is Johanssons denkbeeld om $\perp$ in te zetten voor een lege plaats bij de succedent. Bovendien levert de vervanging van NES en NEA, en omgezet in tableaus, ook niet de precieze informatie die men voor dit geval nodig heeft. Op p. 131 van Johansson (1937) is hij ook niet echt duidelijk. Anderzijds vermeldt hij: "Die Auffassung von $\perp$ als einer undefinierten Grundaussage ist mit der von Kolmogoroff [Kolmogoroff (1932), p. 58] angegebenen 'aufgabentheoretischen' Deutung der intuitionistischen Logik verwandt." En verder: "Obwohl wir im Minimalkalkül die Aussage $\perp$ nur wie eine Aussagenvariabele behandeln, so kann man sich bei der Anwendung dieser Logik zur Formalisierung einer mathematischen Disziplin sehr wohl denken, daß sie eine ganz bestimmte von vornherein als falsch betrachtete Aussage ist."

[21] Zie Kleene (1952*a*), pp. 480, 481.

[22] Johansson (1937), p. 133: "Gleichzeitig betrachten wir $\neg A$ als Abkürzung für $A \to \perp$. (Die Möglichkeit hiervon hat übrigens auch Gentzen selbst erkannt.) Die Schemata NE und NB sind dann bloß Spezialfälle von FE und FB."

### Intuïtionistische propositionele fragmenten

De overgangsverschijnselen van omzettingen van intuïtionistisch naar klassiek waren al bekend in het geval van het vervangen van de zwakke negatie-eliminatie $A, \neg A \vdash B$ [R5] door een sterkere $\neg\neg A \vdash A$ [R5*].[23] Met Beth & Leblanc (1960) werd de implicatie aangepakt binnen een fragment met negatie en implicatie. Zij vervingen de zwakke implicatie-eliminatie $A, A \to B \vdash B$ [R7] door een sterkere $A \to B, (A \to C) \to A \vdash B$ [R7*].

Beth werd als volgt bij dit onderzoek betrokken. Hij had met Leblanc kennis gemaakt tijdens zijn gasthoogleraarschap aan Johns Hopkins. Johns Hopkins vormde gedurende enige tijd een basis van waaruit het echtpaar Beth de wijde omgeving onveilig maakte met bezoek, lezingen en gezang.[25] Ook Leblanc ontkwam daar niet aan. Naar aanleiding van Beths semantische tableaus schreef Leblanc: [26]

"I wonder whether you could apply it [i.d. your method of semantic tableaux] to the following tautology, for illustration's sake: $[L =]\ (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \to B) \to B) \to C))$, and obtain a Gentzen derivation of the said tautology which would use only the introduction and elimination rules for $\to$, plus possibly the Reflexivity, Expansion, and Permutation conventions listed in my Introduction to Deductive Logic, page 156.[27] I can obtain a derivation of the formula with the aid of the above plus the introduction and elimination rules for $\neg$, but would like to obtain one without using the latter rules, if possible."

Leblanc hield zich ondermeer bezig met afleidingen in de stijl van Gentzen. Hijzelf kon dit met de volgende regels: invoer- en eliminatieregels voor implicatie, reflexiviteit, expansie, en permutatie. Bovendien had hij de invoer- en eliminatieregels voor negatie van node. Die laatste wilde hij kwijt.

Beth voorzag Leblanc pas drie jaar later van een antwoord.[28] Hiertoe gebruikte hij het verschil tussen de semantische en deductieve tableaus. Leblancs 'tautologie' kan wel met semantische, maar niet met deductieve tableaus worden afgeleid. Volgens Beth had Leblanc weinig aan een semantische tableau-afleiding daar deze wel niet omgezet zou kunnen worden in een formele (intuïtionistische) deductie in Gentzen-stijl: [29] "If the tableau for your formula, to be called (L), were closed, then a derivation as required would be possible and, moreover, the

[23] Nummering overgenomen uit (Beth & Leblanc 1960).[24] De bedoeling ligt in het zoeken naar minimale toevoegingen waaronder men van intuïtionistisch naar klassiek kan gaan.

[25] Gezang: zie (Quine 1985). De beïnvloeding tussen Beth en Leblanc was wederkerig, daarvan getuigt Beths opmerking in de brief Beth – H. Leblanc, 27 februari 1962, (Amsterdam): "In a near future you wil receive a copy of my book on *Formal methods* that has just appeared. You will see that my present treatment of the subject has been influenced by the questions you asked at the meeting of the Fullerton Club in 1957 [een uitstapje met lezing gedurende Beths gasthoogleraarschap aan Johns Hopkins]. The above-mentioned valuation theory [de nog nader te bespreken I-valuaties], although not discussed in the book, is a further development in the same direction."

[26] Brief H. Leblanc – Beth, 21 mei 1957, (Bryn Mawr, PA).

[27] (Leblanc 1955).

[28] Brief Beth – H. Leblanc, 6 maart 1960.

[29] Brief Beth – H. Leblanc, 6 maart 1960.

formula (L) would be valid intuitionistically, which it is not."

Beth ging bij zijn constructie als volgt te werk: [30]

| p | c |
|---|---|
| | $((A \to C) \to ((B \to C) \to$ |
| | $\to ((A \to B) \to B) \to C))$. |
| $A \to C$ | $(B \to C) \to$ |
| | $\to ((A \to B) \to B) \to C))$. |
| $B \to C$ | $((A \to B) \to B) \to C$ |
| $(A \to B) \to B$ | $C$ 1. |
| 2. $[\neg C$ uit 1.$]$ | |

$B$ | $C$

$A \to B$ | $B$ — sluit

4. $A$ | $B$ — sluit

$A$ | $C$

sluit — $[\neg C$ uit 2.$]$

[sluit]

Het tableau sluit semantisch, maar blijft deductief open, indien men niet de omzetting van F(C) op plaats 1 naar T($\neg C$) op plaats 2 gebruikt. Bij uitschrijving als lineaire deductie van bovenstaande afsluiting had Beth nog een opmerking: [31] "The above example is typical. It shows that, for classical logic, proof by reductio is 'natural', even if neither premisses nor conclusion involve negation."

Als een kort terzijde: men had, regel 2c indachtig, ook $C \to B$ i.p.v. $\neg C$ kunnen inzetten. Dit leidt eveneens tot sluiting:

4. $A$ | $B$

$A$ | $C$

sluit — $[C \to B]$

$C$ | $B$

sluit — sluit

Bij een verbod op het gebruik van deze twee mogelijkheden verkrijgt men geen sluiting. In verband hiermee (en enkele andere mogelijkheden tot afsluiting) merkte Beth dan ook op: [32] "Of course, all these devices are intuitionistically not admissable. Each of them will work in all cases where a deductive tableau is not closed although the corresponding semantic tableau is closed."

Dit is evenzo het geval met de afwikkeling van de uiteindelijk door Leblanc gebruikte $A \to B, (A \to C) \to A \vdash B$ [sterke eliminatie-regel voor $\to$]. Het is het probleem $A \to B, (A \to C) \to A \Rightarrow B$, ofwel het tableau:

$A \to B, (A \to C) \to A$ | $B$

$A$ | $B$ — sluit

∗

$A \to C$ | $A$

$A$ | $C$ — sluit

open

Indien men op plaats ∗ één van bovenstaande regels ($\neg A$ of $A \to C$) zou mogen

[30] Brief Beth – H. Leblanc, 6 maart 1960.

[31] Brief Beth – H. Leblanc, 6 maart 1960.

[32] Brief Beth – H. Leblanc, 6 maart 1960.

inzetten, dan sluit het tableau, evenals een semantisch tableau zonder extra inzet, anders blijft het open. Dit is volgens Beth in zijn belering van Leblanc dan net het verschil tussen intuïtionistisch en klassiek.

In Beth & Leblanc (1960) wordt uitgegaan van het volgende systeem en regels:
R1 reflexiviteit, R2 verzwakking, R3 permutatie, R4 snede, R5 zwakke negatie-eliminatie, R6 negatie-introductie, R7 zwakke implicatie-eliminatie, R8 implicatie-introductie. Hieraan worden toegevoegd: R5* sterke negatie-eliminatie en R7* sterke implicatie-eliminatie. Door middel van de groep R1 — R6, R7* en R8 laat Leblanc de afleiding van R7 en R5* zien. R5* is afkomstig uit een bewijs door Beth.[33] Het commentaar van Beth bij deze afleiding luidde: [34]
"As all classically valid formulas in $\rightarrow$ can be obtained, we have also $((A \rightarrow \neg A) \rightarrow A) \rightarrow A$ and hence $\neg\neg A$. This formula is sufficient to obtain all classically valid formulas. It has been assumed that previously the application of the weak elimination rule R7 has been justified.[35]

Remark: By construction the semantic tableau for the formula $\neg\neg A \rightarrow A$ I found that the deductive tableau for the sequent under (14) [= $((A \rightarrow \neg A) \rightarrow A) \rightarrow A$ yields $\neg\neg A$] must be closed. Thus it was sufficient to rewrite this tableau in accordance with the rules of your system."

Leblanc & Belnap (1962) laten zien dat ook door regels voor $\leftrightarrow$ te verzwakken men klassieke logica uit intuïtionistische kan afleiden: [36]
"Suppose $\wedge$, $\vee$, and $\leftrightarrow$ are adopted as primitive connectives of the propositional calculus. Rules R1 — R8 in the paper I wrote with you plus the following rules: [...] [R9 — R14, d.w.z. $\wedge$-, $\vee$-, $\leftrightarrow$-eliminatie en -introductie]."

Men kan nu $\leftrightarrow$ toevoegen aan dit rijtje van operatoren ten opzichte waarvan men de regelgeving versterkt of verzwakt om vanuit de de intuïtionistische propositielogica tot klassieke te geraken. Dit gebeurde in Leblanc & Belnap (1962) als volgt: [37] "It is clear that R1 — R14 yield all wffs of PC which are intuitionistically valid, Belnap and I found that if R13 [= (a). $A, A \leftrightarrow B \vdash B$ en (b). $A, B \leftrightarrow A \vdash B$] is strengthened to read: R14′: (a) $A, (C \leftrightarrow A) \leftrightarrow (C \leftrightarrow B) \vdash B$; (b) $A, (C \leftrightarrow B) \leftrightarrow (C \leftrightarrow A) \vdash B$, then all wffs of PC which are classically valid are provable, and hence that one may pass from intuitionistic logic to classical logic by strengthening the rules for $\leftrightarrow$ rather than the rules for $\neg$ or those for $\rightarrow$." Ook $\vee$ en $\wedge$ vonden hun plaats.[38]

De vraag is of wij nu alles gehad hebben, maar voor we hier nader op in kunnen gaan zal er een nieuw fenomeen moeten worden aangevoerd: de hulpvaluaties.

[33] Het bewijs in het artikel loopt min of meer parallel met het bewijs afkomstig uit het manuscript van Beth. Het is derhalve niet interessant hier verder op in te gaan.
[34] Bijgevoegd bij de brief Beth – H. Leblanc, 6 maart 1960.
[35] R7 hier = Beths h.
[36] Brief H. Leblanc – Beth, 2 januari 1962, (Bryn Mawr).
[37] Brief H. Leblanc – Beth, 2 januari 1962, (Bryn Mawr).
[38] In Vesley (1963) werd — gerelateerd aan de beide invoerregels van $\vee$ en de omzetting van intuïtionistisch naar klassiek in Leblanc & Belnap (1962) — gesteld dat er voor die invoerregels extra voorwaarden nodig waren. In Belnap, Leblanc & Thomason (1963) en Leblanc (1963) werd dit bestreden. Ook in de Jongh (1961) werden er voor $\vee$ geen nadere eisen gesteld.

Maar eerst nog een brokje faculteitsgeschiedenis.

De vrij grote rij aan artikelen is natuurlijk niet vreemd aan het feit dat de intuïtionistische operatoren $\vee$, $\wedge$, $\neg$ en $\rightarrow$ niet interdefinieerbaar zijn. Volgens een historische noot in Fitting (1983), p. 449, waren deze op onafhankelijkheid betrekking hebbende resultaten al te danken aan Wajsberg (in 1938) en McKinsey (in 1939). Onderwerpen betreffende deze operatoren hadden natuurlijk de belangstelling van Beth en Heyting. In 1959 was aan de UvA de Faculteit Wis- en Natuurkunde aan de beurt om een prijsvraag uit te schrijven. Deze keer mocht de Eerste Afdeling, de wiskunde, een voorstel doen. Dit werd aan Beth en Heyting gedelegeerd. Beth kwam met een viertal mogelijke vragen, waaronder die naar een soort van grootste gemene deler, dus m.b.t. de hiervoor besproken isolering van operatoren nu de andere kant op: [39]

" Voor de klassieke logica der volzinnen (zonder quantoren) is het mogelijk alle operaties (met name: negatie, implicatie, disjunctie en conjunctie) in termen van de zogenaamde operatie van Sheffer te definiëren. Gevraagd wordt een onderzoek naar de mogelijkheid, ook voor de intuïtionistische logica der volzinnen (zonder quantoren) een operatie te vinden, in termen waarvan alle genoemde operaties (negatie, implicatie, disjunctie en conjunctie) gedefinieerd kunnen zijn."

Uiteindelijk gingen Heyting en Beth er toe over om als uitverkoren vraag een studie naar het empirische onderzoek, zoals gepleegd door A. Naess, naar het gebruik van logische en metalogische termen uit de omgangstaal in te zenden. Tegen deze vraag had D. van Dantzig, ondanks zijn waardering voor het vroegere werk van Naess, bezwaren en vroeg hij om herziening.[40] Beter ware het volgens hem de inductieve logica — in de trant van Ramsey, Carnap en Jeffreys — als onderwerp te nemen. Hierop trokken Beth en Heyting hun voorstel in.[41]

Men kan nog heel wat meer variaties op de aangeroerde thema's bedenken. Een laatste stap bij de bestudering van dit soort onderwerpen zou kunnen zijn naar implicatieve systemen, die een veel strengere behandeling vergen van de logica. Voorbeelden hiervan zijn de artikelenreeksen van G.F.C. Griss en D. van Dantzig over de negatieloze logica. Beth heeft zich hier slechts zijdelings mee bezig gehouden ondanks de onder zijn promotorschap voltooide dissertatie Gilmore (1953).

## 9.2 Kripke's hulpvaluaties

Een volgende stap bij het bestuderen van implicatieve systemen is de introductie van hulptableaus (en hulpvaluaties). Hiermee heeft men een extra hulpmiddel in handen. Beth stond in de ontwikkeling hiervan niet alleen en was ook niet de eerste. Gezien de bezigheden van S.A. Kripke op dit terrein kan men zich

[39]Sheffer stroke voor het intuïtionisme, zie: Brief J. de Boer (voorzitter Eerste Afdeling) – Beth, e.a., 29 juni 1959, 9 juni 1959. De vraag naar de intuïtionistische Shefferstroke heeft een volgende simpele oplossing (A.S. Troelstra): neem de operator $\Phi$ die met acht variabelen werkt z.d.d. $\Phi(A_1, \ldots, A_8) = (\neg A_1 \vee A_2) \rightarrow ((A_3 \vee A_4) \wedge \neg A_5) \vee ((A_6 \wedge A_7) \wedge \neg A_8)))$.

[40]Brief D. van Dantzig – J. de Boer, 19 juni 1959. Arne Naess, *1912.

[41]Brief Beth – ? (?J. de Boer?), 22 mei ?? juni 1959.

afvragen vanaf welk tijdstip hij de eerdere door Beth ontwikkelde tableaus en Beth-modellen onder ogen heeft gekregen. Dit valt na te gaan in een correspondentie tussen de aan Johns Hopkins University (Baltimore) als gasthoogleraar optredende Beth en H.B. Curry: [42]

"I have recently been in communication with a young man in Omaha, Nebraska, named Saul Kripke. His address is 119 North Happy Hollow Boulevard. This young man is a mere boy of 16 years; yet he has read and mastered my Notre Dame Lectures, and writes me letters which would do credit to many a professional logician. I have suggested to him that he write you for reprints of your papers which I have already mentioned. These of course, will be very difficult for him, but he appears to be a person of extraordinary brilliance, and I have no doubt something will come of it. If you can possibly send the reprints or have them sent to him, I suggest that you do it."

Beth zond hierop Beth (1955*b*) en Beth (1956*d*) naar Kripke.[43] Kripke maakte direct gebruik van Beth; in Kripke (1959*a*), noot 4 op p. 12, valt te lezen: "In earlier work I carried this alternative proof out in detail, before acquintance with Beth's paper led me generalize the truth tables to semantic tableaux and a completeness theorem." Het valt op dat S5 door Kripke als eerste behandeld werd, later gevolgd door S4 en tenslotte door intuïtionistische logica.

In Kripke (1959*a*) treden clusters van tableaus op met relaties binnen dergelijke clusters. Hierbij roepen onder bepaalde voorwaarden modale operatoren hulptableaus op in verband met het onderzoek naar de valuatiebedeling voor S5. De tableaus kan men relateren aan elementen binnen een verzameling waartussen relaties bestaan. Beth werkte nadien met vergelijkbare systemen. Kripke heeft de prioriteit wat hulptableaus betreft.[44] Met de al eerder door hem geformuleerde Beth-modellen had ook Beth zich al bezig gehouden met het nodige plak- en scheurwerk. In Beth (1960*a*)[45] heeft men al een verwijzing naar 'Kripke, S., Unpublished paper on the completeness of modal logic.' en in Beth (1960*d*): "Presumably the construction is similar to one previously anounced by S.A. Kripke." [46] Nieland & Beth (1961*b*) was een poging een eigen inbreng

[42] Brief H.B. Curry – Beth, 24 januari 1957, (Pennsylvania (Pennsylvania State Univ.)).

[43] Brief Beth – H.B. Curry, 23 februari 1957, (Baltimore); brief Beth – S.A. Kripke, 8 februari 1957, (Baltimore); brief S.A. Kripke – Beth, 1 februari 1957, (Omaha). Deze brieven zijn niet technisch van aard. In Beth & Nieland (1965) wordt door Beth nog gewezen op een 'private communication' met Hintikka over modale logica (datering op de maand mei 1959; geen brief hierover is mij bekend, missschien mondeling).

[44] Louter algebraïsch waren begin jaren vijftig Tarski en B. Jónsson hem al vóór geweest met de beschrijving van relaties tussen ultrafilters met relaties: Jónnson & Tarski (1951). Het is — juist vanwege Tarski's vroegere bezigheden m.b.t. algebraïsch getinte modellen voor modale logica — opmerkelijk dat daarna een getrapt valuatiesysteem vanuit de logica zelf ontwikkkeld werd, zonder dat het één met het ander gecombineerd werd. In Beth (1959*b*) wordt er wel verwezen naar Jónnson & Tarski (1951) als een met logica corresponderende theorie, maar wordt er verder niet op ingegaan. In Kripke (1963*a*) wordt in noot 2 op p. 69 melding gemaakt van het algebraïsche analogon van zijn theorie in Jónnson & Tarski (1951). Zie voor een historisch overzicht Bull & Segerberg (1984), p. 10 e.v.

[45] Een uitgave van een lezing uit 1958 naar aanleiding van pseudovaluaties.

[46] In Beth (1961*a*) wordt hieraan nog toegevoegd: 'S.A. Kripke, Semantic analysis of modal

met betrekking tot modaliteiten naar voren te brengen:

"Récemment, S.A. Kripke [(Kripke 1959*a*)] a donné une analyse du système S5 présenté jadis par C.I. Lewis [(Lewis & Langford 1932)]. Bien que Kripke applique la méthode des tableaux sémantiques de E.W. Beth [(Beth 1955*b*)], il n'en épuise pas les possibilités. Le problème se pose donc d'appliquer cette méthode d'une manière plus conséquente et plus approfondie; en même temps, il serait désirable de ne tenir compte, pour commencer, que de l'implication et de la nécessité puisque l'introduction des autres opérations logiques (disjonction, conjonction, généralisation, particularisation) ne présente ensuite aucune difficulté [(Beth 1962*a*)] [...] Notons que récemment Kripke [(Kripke 1959*b*)] a annoncé de nouveaux résultats dans cette même direction." [47]

Beth combineerde hulptableaus (en hulpvaluaties) met zijn vroegere pseudovaluaties. Pseudovaluaties waren tweewaardige valuaties met singulariteiten. Valuaties met hulptableaus kan men ook als iets dergelijks opvatten. Als men de formules recht toe recht aan met normale tweewaardige valuaties zou aanvatten, dan zouden de resultaten anders zijn dan bedoeld (nml. meer formules, een klassiek fragment). Derhalve nu tweewaardige valuaties die op de juiste ogenblikken gaan afwijken. Dit wordt bewerkstelligd door bij bepaalde constellaties hulptableaus (valuaties) voor te schrijven zodat de aanvankelijk normale tweewaardige valuaties vervormd gaan worden. Dit proces is ingewikkelder dan bij de al eerder ten tonele gevoerde pseudovaluaties. In dit hoofdstuk moeten ze hele groepen van formules op 0 zetten, vroeger was dit slechts nodig voor één axoma. Nu hebben alle valuaties onder een verandering te lijden, vroeger slechts een deel.

Wij bespreken hieronder enkele daarvan afgeleide gevallen: I(mplicatieve) valuaties en diverse modale valuaties (implicatieve fragmenten van S4 en S5). Extra moeilijkheden worden veroorzaakt, indien men uit dergelijke tableaus een lineaire natuurlijke deductie wenst te verkrijgen. Hier zal de aandacht alleen uitgaan naar de diverse valuaties en de constructies daarvan door middel van tableaus. Extra's zoals volledigheidsbewijzen laten we buiten beschouwing.[48]

### 9.2.1 Beths hulptableaus

Beths methode liep parallel aan die van Kripke. Aangezien Beth met betrekking tot de modale zijde alleen gebruik maakte van implicatieve fragmenten

---

logic (abstract), JSL 24 (1959)' Dit abstract is pas in 1961 als no. 4 van vol. 24 uitgekomen. Zie ook de Jongh & van Ulsen (1999). In dit artikel wordt op de prioriteiten ingegaan; volgens dit artikel is er sprake van een min of meer tezelfdertijd onafhankelijk van elkaar ontwikkelen van gelijksoortige systemen, behoudens dan dat Kripke's systemen verder reiken en beter ontwikkeld zijn.

[47] Kripke kondigde aan met zijn methode ook intuïtionistische semantiek aan te gaan vatten. Pas met Kripke (1963*a*) kwam S4, en met Kripke (1965) intuïtionistische logica aan bod. In Kripke (1962) werd de monadische modale logica, en met Kripke (1963*b*) de predicatieve modale logica beschreven. Beth is de propositionele modale logica nooit ontstegen.

[48] Met als uitzondering een (orde-)topologisch volledigheidsbewijs. De behandeling daarvan vindt plaats in het hoofdstuk over Beth-modellen.

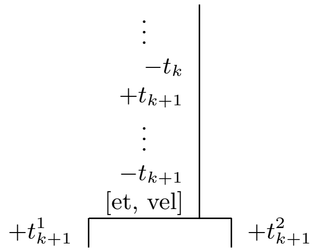
(desnoods met een kleine uitbreiding naar negatie) van S4 en S5, had hij genoeg aan een partiële ordening tussen de tableaus binnen een cluster. Vanuit een (relatief) hoofdtableau worden de hulptableaus opgeroepen door het gebruik van modale operatoren. Niet-modale operatoren worden binnen een hulptableau afgehandeld op de normale (klassiek semantische) wijze. Bij de I-valuaties voor intuïtionistische implicatie geven 'gewone' operatoren de aanzet tot het oproepen van hulptableaus.[49] Kortom, hulptableaus worden gebruikt bij modale logica's en bij intuïtionistische logica.

Zoals men binnen tableaus tableaukolommen kan splitsen, zo kan men ook in hulptableaus splitsen vanuit een (relatief) hoofdtableau. Normaal gesproken gebeurt dit met een conjunctieve splitsing. Beth introduceerde net zoals bij intuïtionistisch gebruik binnen tableaus een disjunctieve splitsing in hulptableaus. Deze splitsing wordt op dezelfde wijze als binnen tableaus afgehandeld. Bij een disjunctieve splitsing in hulptableaus moet minstens één van beide hulptableaus gesloten zijn, wil het daarbovenliggende tableau gesloten kunnen worden.

**Grafische weergave** Kripke's grafische weergave is hanteerbaarder dan Beths versie. Door de verticale aanéénschakeling vanuit een hoofdtableau zoals bij Beth wordt het moeilijk om formules tussen tableaus heen en weer te schuiven. Dit speelt een rol bij het in een later stadium van een valuatie-onderzoek heropenen van een valuatie-onderzoek binnen een al gepasseerd, zij het niet volledig afgehandeld, stadium in de constructie van een tableau zoals in het systeem S5.

Enkele hier te gebruiken conventies:

a— Het tableau als hulpmiddel voor het construeren van een valuatie.




- $-t_k$: het tableau $t_k$ houdt op, maar zet zich voort in het hulptableau $t_{k+1}$ [het begin daarvan aangegeven met $+t_{k+1}$].
- $+t^1_{k+1}, +t^2_{k+1}$: begin van de hulptableaus $t^1_{k+1}, t^2_{k+1}$ van $t_{k+1}$ met een duale splitsing. Deze splitsing kan conjunctief of disjunctief zijn.[50]

b— De valuatie.

Als volgt werden valuaties door Beth in beeld gebracht (hier met een pseudo onzin-valuatie):

[49] Modale operatoren komen hier niet voor.

[50] Bovendien wordt hier (maar niet in Beth) het volgende aangenomen: $t_k = Tt_k \cup Ft_k$, d.w.z. als men in $t_k$ een $FA$ aantreft men dit als $A \in Ft_k$ kan schrijven, en als men een verzameling $F(\Delta)$ in $t_k$ heeft, dit als $\Delta \subseteq Ft_k$ kan schrijven.

| | $A$ | $B$ | $\nabla A$ | $\nabla A \wp B$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_0 \quad v_0$ : | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $p_1\ p_2 \quad v_1\ v_2$ : | 1 , 0 | 0 , 0 | 0 , 0 | 0 , 1 |

Men heeft bij Beth een verzameling punten $\mathtt{P} = \{p_0, p_1, \ldots\}$, een ordening $R$ op $\mathtt{P}$, een verzameling valuaties $V = \{v_0, v_1, \ldots\}$ en een combinatie van punten met hun ordening $R$ en de valuaties $\{< p_0, v_0 >, < p_1, v_1 >, \ldots\}$. Daarnaast beschikt men over een vertrekpunt, een uitverkoren element binnen de combinatie. Veelal noteert Beth eenvoudigheidshalve $< p_i, v_i >$ als $v_i$. Als $< p, v > \neq < p^*, v^* >$ dan moet $p \neq p^*$, maar hoeft niet $v \neq v^*$. Wel is voor elke $v \in V$ voorgeschreven dat $v \leq v_0$.

### 9.2.2 Derivatieve implicatieve logica

De axiomatiek van de derivatieve implicatieve logica is gelijk aan de twee axioma's van het al besproken intuïtionistische implicatieve fragment.[51] Alleen wordt hier de semantische kant van de zaak anders geformuleerd.

De nu volgende I(mplicatieve) valuaties vormen een ondersoort van de 'uitgebreide pseudovaluaties', die op hun beurt een extensie vormen van de pseudovaluaties.[52] Een I(mplicatieve)-valuatie wordt door Beth gevormd door het drietal $< V, R, < p_0, v_0 >>$. Hierbij veronderstelt $< p_i, v_i > \neq < p_j, v_j >$ wel $p_i \neq p_j$, maar niet altijd $v_i \neq v_j$. [53]

Voor de tableaus heeft men wederom te maken met de sequentencalculus. Stel dat men een sequent $\Delta \Rightarrow \Gamma$ heeft. Dan heeft men te maken met het probleem om een implicatieve valuatie $< V, \leq, < p_0, v_0 >>$ te vinden waarvoor geldt, dat voor elke $A \in \Delta$ men $v_0(A) = 1$ heeft en dat voor elke $B \in \Gamma$ men $v_0(B) = 0$ heeft.
Door Beth zijn twee typen tableaus met implicatieve valuatie opgesteld:

- Een implicatieve valuatie (met hulptableaus) gerelateerd aan semantische tableaus.[54]
- Een implicatieve valuatie (met hulptableaus) gerelateerd aan 'deductieve' tableaus.[55]

Beths intuïtionistische implicatieve valuaties met hulptableaus hebben een overeenkomst met Kripke's semantiek voor de intuïtionistische logica uit later tijd waar niet gebruik wordt gemaakt van andere operatoren dan bij Beth — dus geen modale operatoren: [56] "It should be mentioned that, for the pure implicational intuitionistic propositional logic, Beth [(Beth 1960*d*)] has announced the rediscovery of essentially the present modelling; also that, for all of intuitionistic propositional logic, a modelling equivalent to ours can be extracted from the

[51] (Beth 1961*a*), (Beth 1965*c*).
[52] Vergelijk het hoofdstuk over semantiek.
[53] Deze is hier samengesteld met behulp van Beth (1961*a*), Beth (1960*d*), Beth (1965*c*).
[54] (Beth 1965*c*).
[55] (Beth 1961*a*).
[56] (Kripke 1965).

results of Lemmon and Dummett [(Dummett & Lemmon 1958)]." [57] Hiermee worden derhalve niet de Beth-modellen bedoeld.

**Valuaties met semantische tableaus**

Men heeft hier de volgende regels: [58]

- $\rightarrow$*DL–valuatieregel S1* : $A$ is atomair (maar ook voor willekeurige formule $A$), $v^* \leq v$ en $v(A) = 1$, dan $v^*(A) = 1$.[59]
- $\rightarrow$*DL–valuatieregel S3* : $A$ atomair (maar ook voor willekeurige formule $A$) en er is minstens één $v^* < v$ en voor $\forall v^* < v$ geldt $v^*(A) = 1$, dan $v(A) = 1$.[60]

De regel S1 vindt men zowel bij Kripke- als Beth-modellen. Maar S3 maakt de I-valuaties tot een simpel geval van de, later uitvoerig te bespreken, Beth-modellen.[61]

- $\rightarrow$*DL–valuatieregel S2* : $v(A \rightarrow B) = 1$, als $\forall v^* \leq v$: $v^*(A) = 0$, of $v^*(B) = 1$. [62]
- $\rightarrow$*DL–reductie 2aD* : men heeft hier te maken met een probleem $\Delta^*, A \rightarrow B \Rightarrow \Gamma$ dat uiteenvalt in probleem $\Delta^*, A \rightarrow B \Rightarrow A, \Gamma$ en probleem $\Delta^*, A \rightarrow B, B \Rightarrow \Gamma$. Hier krijgt men de normale semantische tableau-afwikkeling voorgeschreven met conjunctieve formulesplitsing binnen het zelfde tableau.[63]
- $\rightarrow$*DL–valuatieregel S2* : $v(A \rightarrow B) = 0$, als $\exists v^* \leq v : v^*(A) = 1$ en $v^*(B) = 0$ [introductie van een hulptableau].[64]
- $\rightarrow$*DL–reductie 2bD* : men heeft hier te maken met het probleem $\Delta \Rightarrow A \rightarrow B, \Gamma^*$. Laat $\Gamma = \Gamma^* \cup A \rightarrow B$. Voor deze sequent heeft men een implicatieve valuatie $v$ nodig waarbij $v(C) = 1$ voor alle $C \in \Delta$ en $v(C) = 0$ voor alle $C \in \Gamma$, dus ook $v(A \rightarrow B) = 0$. Uit de valuatieregels viel al

[57] Toegevoegd door Kripke: "The results of this paper [(Kripke 1965)], though devoted to intuitionistic logic, are proved only classically, except as mentioned below. Intuitionistically, the situation is essentially the same as that for Beth's completeness theorem [(Beth 1956*d*)], as analysed by Dyson and Kreisel in Dyson & Kreisel (1961).

[58] Voor de formulering wordt er vooral van de latere en tegelijk ook meest uitgekristalliseerde vorm, zoals neergelegd in Beth (1965*c*), uitgegaan. Op de precieze ontwikkeling van dit soort tableaus en valuaties tussen 1960 en 1965 wordt hier niet ingegaan; zie daartoe de Jongh & van Ulsen (1999).

[59] (Beth 1965*c*), algemene geval p. 25 stelling 1.

[60] (Beth 1965*c*), algemene geval p. 25 stelling 2.

[61] In Kripke (1965), p. 94 (voorzover hier van belang: atoom en implicatie binnen het propositionele deel): structuur van de vorm $(G, \mathtt{K}, R)$, waarbij $\mathtt{K}$ een verzameling, $G \in \mathtt{K}$, en $R$ een reflexieve en transitieve relatie op $\mathtt{K}$. Een intuïtionistisch model op structuur $(G, \mathtt{K}, R)$ is een binaire functie $v(P, H)$ waarbij $P$ loopt over propositie-letters en $H$ over elementen van $\mathtt{K}$ met als waardebereik $\{0, 1\}$. Extra conditie: als $v(P, H) = 1$ en $HRH^*$ $[H, H^* \in \mathtt{K}]$, dan $v(P, H^*) = 1$. En nu voor implicatie: $v(A \rightarrow B, H) = 1$ d.e.s.d. als voor alle $H^* \in \mathtt{K}$, met $HRH^*, v(A, H^*) = 0$ of $v(B, H^*) = 1$; $v(A \rightarrow B, H) = 0$ anders.

[62] (Beth 1965*c*).

[63] (Beth 1965*c*).

[64] (Beth 1965*c*).

af te lezen dat in dit geval er een $v^*$ bestaat met $v^* \leq v, v^*(A) = 1$ en $v^*(B) = 0$. Men heeft dan het volgende tableaucluster:

$$
\begin{array}{r|l}
\text{w} & \text{o} \\
\hline
+t_0 & \\
\Delta & A \to B, \Gamma \\
-t_0 & \\
\text{[vel]} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|lcr|l}
+t_1 & & & & +t_2 \\
A & B & & & \Gamma, A \to B
\end{array}
$$

Men heeft hier volgens Beth (1965$c$) een disjunctieve splitsing met betrekking tot de hulpvaluaties.

1. Alles onder $\Delta$ kan worden doorgeschoven naar de T-zijde van de volgende tableau $t_1$ volgens regel S1. Dit geeft de normale herhalingsregel voor deductieve tableaus.

2. Bij disjunctieve tableausplitsing gaat de F-$\Gamma$ naar de F-zijde van één van de beide direct opvolgende hulptableaus, en wel naar het hulptableau waarin niet de gereduceerde componenten aanwezig zijn: hier hulptableau $t_2$. De mogelijke keten hulptableaus op rechts onder $t_2$ kan (en dat doet het hier) oneindige regressie opleveren en draagt hier niet bij aan de sluiting van de totale constellatie. Vanwege de disjunctieve splitsing heeft men al genoeg aan de andere tak. De oneindige regressie kan bij tableausplitsing op de ander tak natuurlijk evenzo optreden. Hiermee — gecombineerd met permutatie — krijgt men bij de Beth-modellen veelvuldig te maken.

Als men alles wat niet tot de afsluiting van het tableaus bijdraagt, terzijde laat en dit ook doet met de hulptableaus-aanduidingen, dan heeft men de deductieve tableaus weer terug. Een ander verhaal vormen de tableauconstellaties voor de niet afsluitbare formules, maar daar heeft men niet afleidingen van te achterhalen.

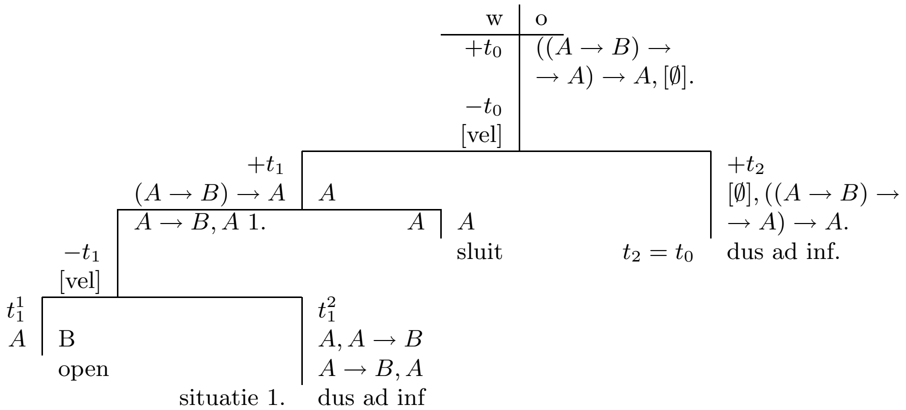
De valuaties in bovenstaand geval vertonen het volgende patroon (*: niet nader gespecificeerde waarde 0 of 1).

$$
\begin{array}{ccc|c|c|c}
 & & & A & B & A \to B \\
\hline
< p_0, v_0 > & v_0 & : & * & * & 0 \\
\swarrow \searrow & \swarrow \searrow & & & & \\
< p_1, v_1 > < p_2, v_2 > & v_1 \; v_2 & : & 1\ ,\ * & 0\ ,\ * & *\ ,\ 0
\end{array}
$$

- $\to$*DL–afsluitingsregel* : probleem $\Delta^*, A, \Delta^{**} \Rightarrow \Gamma^*, A, \Gamma^{**}$; tableau op de normale semantische manier.
- $\to$*DL-permutatieregel*: probleem $\Delta \Rightarrow A, \Gamma^*$ [$A$ is atomair] is equivalent aan het probleem $\Delta \Rightarrow \Gamma^*, A$. Als $A$ niet atomair, dan heeft men automatisch weer met het geval van de reductieregel (2bD) van doen. Bij de verwisseling hoort het tableau (1D):

$$
\begin{array}{r|l}
\text{w} & \text{o} \\
\hline
\Delta & A, \Gamma^* \text{ [A atomair]} \\
 & \Gamma^*, A
\end{array}
$$

*Peirce.* Nu de vraag naar de geldigheid van $((A \to B) \to A) \to A$: [65]




Hulptableau $t_2$ levert niets op vanwege $t_2 = t_1$. Dit is niet erg vanwege de disjunctieve splitsing in $t_1$ en $t_2$. Het moet derhalve van $t_1$ komen. Het verdere onderzoek gaat dan ook over $t_1$. In $t_1$ heeft men een conjunctieve formulesplitsing. Eén kant levert een sluiting op, maar ook de andere kant moet een sluiting opleveren. Deze zijde wordt onderzocht. Vanwege de implicatie krijgt men wederom twee hulptableaus met disjunctieve splitsing. Minstens één van beide moet sluiting opleveren. Dit loopt niet goed af. Het hulptableau $t_1^1$ sluit niet en hulptableau $t_1^2$ roept infinitaire regressie op.
Men heeft met $\mathtt{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_1^1, p_1^2\}$, $\mathtt{V} = \{v_0, v_1, v_1^1, v_1^2\}$, en $p_1^2 \leq p_1, p_1^1 \leq p_1, p_2 \leq p_0, p_1 \leq p_0$ de volgende valuatietabel: [66]

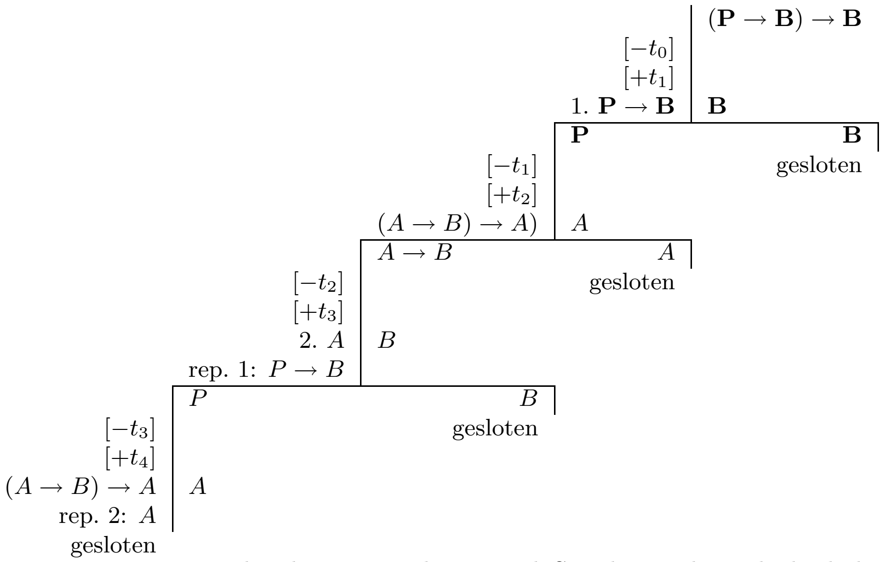
| | | | $A$ | $B$ | $A \to B$ | $(A \to B) \to A$ | $((A \to B) \to A) \to A$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_0$ | $v_0$ | : | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | | | | | | |
| $p_1$ $[p_2]$ | $v_1$ $[v_2]$ | : | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $\swarrow\searrow$ | $\swarrow\searrow$ | | | | | | |
| $p_1^1$ $p_1^2$ | $v_1^1$ $v_1^2$ | : | 1 , 0 | 0 , 0 | 0 , 0 | 1 , 1 | 1 , 0 |

$[p_2]$, $[v_2]$: deze kant is voor het resultaat verder niet meer interessant en wordt in de valuatie niet ingevuld.

Met de derivatieve implicatieve valuaties is het wellicht mogelijk om onvolkomenheden weg te werken die onstaan bij het toepassen van implicatieve valuaties met één formule op rechts. Bernays vroeg zich bij de intuïtionistisch geldige formule $((((A \to B) \to A) \to A) \to B) \to B$ [ofwel $(P(\text{eirce}) \to B) \to B$] af hoe dit met een deductief tableau valt op te lossen.[67] De moeilijkheid van Bernays laat zich echter zowel in deductieve alsook in derivatieve implicatieve logica oplossen. In beide gevallen zijn herhalingen essentiëel. In dit geval is het deductieve intuïtionistische implicatieve tableau gelijk aan het derivatieve tableau, maar dan zonder de aanduiding van de hulptableaus. De disjunctieve

[65] (Beth 1965*c*), p. 27. Zelf zou ik enkele waarden van een $*$, ongedefinieerd, willen voorzien, mar volg toch maar Beth.
[66] (Beth 1965*c*), p. 27
[67] Brief P. Bernays – Beth, 20 maart 1963, (Zürich).

hulptableau-splitsingen, die niet bijdragen tot de sluiting, zijn hier niet ingetekend (het tableau zou dan ook te omvangrijk worden m.b.t. de hier toegemeten plaats).[68] In het onderstaande tableau worden beide tableaus in één figuur weergegeven; tot zover Bernays gekomen was wordt in vet gezet, de rest normaal. De aanduidingen van de hulptableaus worden tussen vierkante haakjes gezet. Deze waren er bij Bernays natuurlijk niet bij, en als men ze wegdenkt, heeft men het normale intuïtionistische deductieve tableau. Notatie: $P = P(A, B) = ((A \to B) \to A) \to A$.




rep. 1, resp. rep. 2 vinden hun oorzaak in regel S1, d.w.z. de oude herhalingsregel. De extra formules op F worden weggeschreven d.m.v. de disjunctieve (hulp)tableau-splitsing.

### Valuaties met 'deductieve' tableaus

"Pour que la séquence $\Delta \Rightarrow C$ soit valable il faut et il suffit que le tableau déductif pour cette séquence, construit avec les schémas de réduction et de clôture (1), (2aI) et (2b) (cf. Rapport No. 1, section B. I)[69], soit clos." [70]

De tableaus gehoorzamen daarmee aan 'deductieve' regels: niet meer dan één formule op rechts en verdringing. Hier vervalt ook de disjunctieve hulptableau-splitsing van reductieregel (2bD). De splitsing naar $t_1$, met $A \in T(t_1)$, en $B \in F(t_1)$, blijft bestaan, de splitsing naar $t_2$ komt te vervallen. Door dergelijke voorschriften gaan niet de valuatieregels, maar wel de reductieregels van Beth (1965*c*) en Beth (1961*a*) uit elkaar. De valuatieregels voor implicatie (S2 uit

[68] Brief Beth – P. Bernays, 25 maart 1963. Het verschijnsel van oneindig voortlopende takken wordt overigens al in het vorige tableau (Peirce) gedemonstreerd. Vergelijk dit met de door permutatie opgeroepen oneindige takken in de later te bespreken Beth-modellen.

[69] (Beth 1961*c*), p. 10.

[70] (Beth 1961*a*), p. 80

Beth (1965$c$)= S1 uit Beth (1961$a$) en een atoom (S1 uit Beth (1965$c$)= S2 uit Beth (1961$a$) blijven gehandhaafd.

*Peirce.* Binnen de deductieve implicatieve valuaties wordt met een tableau, voorzien van één hulptableau, het pleit ten nadele van Peirce beslecht.[71]

$$
\begin{array}{r|l}
\text{‘p’} & \text{‘c’} \\ \hline
+t_0 & \\
 & ((A \to B) \to A) \to A \\
(A \to B) \to A) & A\ 1.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|ll|l}
 & A \to B\ 2. & A & \\
-t_0 & & & \text{sluit} \\
+t_1 & & & \\
A & B\ 3. & & \\
 & \text{open} & &
\end{array}
$$

Op plaats 3 is het niet mogelijk de $A$ van plaats 1 in te zetten. Deze is verdrongen door $A \to B$ van plaats 2. Merk op dat het hier niet nodig is om met disjunctieve splitsingen te werken, niet binnen één tableau noch binnen een cluster van tableaus. Als volgt hebben wij de hulpvaluaties: [72]

| | | $A$ | $B$ | $A \to B$ | $(A \to B) \to A$ | $((A \to B) \to A) \to A)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_0$ | : | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $\downarrow$ | | | | | | |
| $v_1$ | : | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

De formule $((A \to B) \to B) \to ((B \to A) \to A)$ ondergaat hetzelfde lot, alleen neemt het plaatje meer ruimte in.

### Intuïtionistische fragmenten

In de eerste helft van dit hoofdstuk hebben we bekeken welke toevoegingen aan de intuïtionistische fragmenten resulteren in klassieke fragmenten. Het waren fragmenten geformuleerd met $\to$ en $\neg$, en $\leftrightarrow$.

Er bleven toen nog vragen over. Wat kan men nog doen met $\vee$ en $\wedge$, hoe zien de regels er uit, wat is de rol van de syntactische regels, wat voor fragmenten of volle propositionele calculus heeft men te hanteren? Leblanc & Belnap (1962) meenden, hier in de woorden van Leblanc weergegeven, de volgende hypothese op te kunnen stellen: [73]

"We conjecture in the paper that any structural rule which is classically valid is intuitionistically valid, and also that any rule of elimination or introduction for $\wedge$ and $\vee$ which is classically valid is intuitionistically valid, hence that one can pass from Gentzen rules for intuitionistic logic to Gentzen rules for classical logic only by strengthening the elimination or the introduction rules for $\neg$, $\to$, or $\leftrightarrow$. Do you think the conjecture is sound, and, if so, do you have any suggestion towards proving it ?"

Deze fragmenten zijn te vormen door ingrepen in de axioma's, de gebruikte operatoren en de regels. Leblanc meldde aan Beth dat zij meenden dat klassieke

[71](Beth 1961$a$), p. 81.

[72](Beth 1961$a$), p. 81. Zelf zou ik liever enkele waarden van de hulpvaluaties van een $*$, ofwel ongedefinieerd, willen voorzien.

[73]Brief H. Leblanc – Beth, 2 januari 1962, (Bryn Mawr, PA).

structurele regels ook intuïtionistisch geldig zijn, en dat dit eveneens opging voor de introductie- en de eliminatieregels voor $\vee$ en $\wedge$. Hierdoor kan men dan van Gentzen-regels voor intuïtionistische logica overgaan op die voor klassieke logica door alleen de eliminatie- en introductieregels voor $\neg, \rightarrow$ en $\leftrightarrow$ te versterken. Leblanc in juni 1962, op het einde van de rit: [74]

"I conjectured in a talk at Yale University, November 1961, and established here that if $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$ is valid, then $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$ is provable by means of (a) – (c) and the introduction and elimination [intelim] rules for such of the five connectives $\rightarrow, \neg, \wedge,$ and $\leftrightarrow$ as occur in $A_1, A_2, \ldots, A_n$, and $B$. The result in question does not hold true, by the way, when the elimination rules for $\rightarrow$ and $\leftrightarrow$ are phrased in the more traditional fashion: a point to which I shall return at the close of my paper.

One immediate consequence of my conjecture is worth noting. (a) — (c), (h) — (i) and (j) — (k) are all intuitionistically sound.[75] Hence whenever $A_1, A_2, \ldots, A_n$, and $B$ exhibit no connective at all or no connective other than $\wedge$ and $\vee$, $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$ cannot be classically valid without being also intuitionistically valid. Hence such standard rules of inference for PCI, the intuitionist propositional calculus, as (a) —(c) can be strengthened to suit PC at only three junctures, the intelim rules for $\rightarrow$, those for $\neg$, and those for $\leftrightarrow$."

Al voor dit citaat hadden Beth en de Jongh, een medewerker in zijn Euratom-project, het probleem met I-valuaties aangepakt. In februari 1962 deelde Beth aan Leblanc mee dat aan deze problemen ook in Amsterdam werd gewerkt: [76] "It occurred to me that presumably it could be solved by means of the valuation theory for inferential logic which we have been developing here these last times, and therefore I have passed on the matter to my student, Mr D.H.J. de Jongh, who is working with me on this subject. He has just submitted a proof of your and Belnap's conjecture as well a few related results." In mei betrad ook Belnap het strijdtoneel: [77]

"Leblanc has informed me that he has learned from you that de Jongh has proved a conjecture relating to the connections between $\wedge - \vee$ (and-or) fragments of intuitionism and of classical two-valued logic in the Gentzen form. I, too, would like to see these results. A student of mine, R. Thomason, and myself, have recently proved the following theorem, which is perhaps the same as de Jongh's."

Het betrof hier het op stapel staande Belnap & Thomason (1963) dat een bewijs leverde voor hetgeen in het citaat van Leblanc gesteld is. Uitgangspunt was: [78] "From an intuitive standpoint it would seem that the connectives of

[74] Manuscript H. Leblanc, *Note on a set of Gentzen rules for PC*; hierbij de aantekening van Beth: "bijlage bij brief 26 juni 1962?". Brief H. Leblanc – Beth, 26 juni 1962, (Bryn Mawr): "I am enclosing a rough copy of a paper I have just submitted for publication in *Notre Dame Journal of Formal Logic*. [...] it also has proof of the conjecture on the three ways of passing from intuitionistic logic, which de Jongh has recently proved." De 'copy' zou later in sterk verbeterde versie gepublicerd worden als Leblanc (1963).

[75] Bedoeld met deze opsommingen: 'A version of the propositional calculus in which $\rightarrow, \neg, \wedge, \vee$ and $\leftrightarrow$ figure as primitive connectives.' Het betreft introductie- en conjunctieregels. De weggelaten regels moeten dan net het verschil tussen intuïtionistisch en klassiek uitmaken.

[76] Brief Beth – H. Leblanc, 27 februari 1962, (Amsterdam).

[77] Brief N.D. Belnap Jr – Beth, 3 mei 1962, (New Haven, Conn.).

[78] (Belnap & Thomason 1963), p. 39.

conjunction and disjunction assume in intuitionistic logic the same role as in classical logic. We may lend precision to these intuitive ideas by considering Gentzen's formulation of intuitionistic logic, which separates the deductive roles of the various logical connectives, defining each connective by a pair of rules [de introductie- en de eliminatie-regels] added to a structural system." [79]
Beth berichtte Belnap dat de Jongh bij zijn bewijs Beths I-valuatie gebruikte: [80] "The proof uses the notion of an I-valuation described in my abstract,[81], where $v(U \wedge V)$ and $v(U \vee V)$ are taken classically. The report contains various other results as well."

In de Jongh (1961) wordt een overzicht van de werking van de I-valuaties gegeven; vervolgens gaat de Jongh over op de veronderstelling van Leblanc en Belnap m.b.t. de regels. Hiertoe introduceert hij de algemene vorm van metalogische regels met een specificatie a. naar invoer- en eliminatieregels en b. naar structurele regels. Deze zijn samengesteld m.b.v. sequenten die geldig zijn. De geldigheid wordt hier verbonden met de I-valuatie zoals besproken in dit hooofdstuk, en de Jongh parafraserend: Een sequent $A_1, \ldots, A_m \Rightarrow B$ is klassiek (of inferentieel) geldig als voor elke valuatie $v^0$ (voor elke I-valuatie $< V, \leq, < p^0, v^0 >>$), met $v^0(A_1) = \ldots = v^0(A_m) = 1$, eveneens $v^0(B) = 1$ het geval is.

Stelling 10 van de Jongh vertelt dat elke metalogische regel die in inferentiële logica afleidbaar is, dit ook in klassieke logica is. Stelling 11 toont aan dat elke structurele regel en elke introductie- en eliminatieregel voor $\vee$ en $\wedge$ die afleidbaar zijn voor klassieke logica, dit ook zijn voor inferentiële logica. Stelling 12 laat zien dat elk stelsel van metalogische regels die inferentiële logica in termen van $\rightarrow, \vee\wedge, \neg, \leftrightarrow$, karakteriseren, met bepaalde versterkingen dit ook voor klassieke logica doen. Dit zijn nu juist de versterkingen die al in de loop van dit hoofdstuk besproken zijn.[82]

**I-valuaties en pseudo-Boolese algebra's.** De I-valuaties kunnen ook in andere richting ontwikkeld worden. Hiertoe is in verband met de nu volgende onderdelen van belang over een uitbreiding van de I-valuaties voor de volledige intuïtionistische propositie-calculus te beschikken. Dit is gedaan door de Jongh (1961). Daarin werden $\vee$ en $\wedge$ klassiek gewaardeerd en $\neg A$ gedefinieerd als $A \rightarrow \perp$ waarbij $v(\perp) = 0$ (vergelijk de negatie in de minimale logica).[83]

---

[79] Voor een overzicht, zie Leblanc (1963).

[80] Brief Beth – N.D Belnap Jr., 8 mei 1962.

[81] 'my abstract': (Beth 1960*d*), (ontvangen in 1962, maar door JSL in verlate 1960-aflevering geplaatst.

[82] Brouwer: als $\Delta, \neg A \Rightarrow A$ geldig is, dan ook $\Delta \Rightarrow A$; Beth en Leblanc: als $\Delta \Rightarrow A \rightarrow B$ en $\Delta \Rightarrow A \rightarrow C) \rightarrow A$ geldig zijn, dan ook $\Delta \rightarrow B$; Belnap en Leblanc: als $\Delta \Rightarrow A$ en $\Delta \Rightarrow (C \leftrightarrow A) \leftrightarrow (C \leftrightarrow B)$ geldig, dan ook $\Delta \Rightarrow B$. Zoals herhaaldelijk opgemerkt behoeven $\vee$ en $\wedge$ geen toevoegingen. Vergelijk verder de dissertatie de Jongh (1968).

[83] Door J.A.W. Kamp en D.H.J. de Jongh is in 1964 een automatische tester ontwikkeld voor de intuitionistische propositiecalculus: H. Kamp, D.H.J. de Jongh, LISP-Algol-programma voor de intuitionistische propositielogica, R1014, codenr. JON 260364/7266; en idem, R1057 codenr. JON 260364/8615. Hier is Hendriks (1996) een voortzetting van.

De I-valuaties vormen een deelklasse van de pseudovaluaties. Kunnen pseudovaluaties, dus ook I-valuaties een algebraïsche vertaling krijgen? Beth merkte al in 1954 tegen Tarski op: [84] "Finally, I see now that pseudo-valuations correspond to arbitrary ideals in a Boolean algebra, which might provide a connection with recent work by Łos."

Beth heeft verder geen onderzoek naar dit vermoeden gedaan. Wel verscheen er in 1966 een artikel van A.S. Troelstra en D.H.J. de Jongh waarin nader onderzoek gepleegd werd naar Beths I-valuaties. In de Jongh & Troelstra (1966) werden implicatieve valuaties gecorreleerd met pseudo-Boolese algebra's en deze met tralies met een (relatief) pseudocomplement (met een 0-element).[85] Dit was niet nieuw, maar wel de correlatie tussen bepaalde operaties op I-valuaties en op algebra's. De stap naar Heyting-algebra's en de volledige intuïtionistische propositielogica is dan niet ver meer.

### 9.2.3 Modale systemen

In het begin van dit hoofdstuk is al ingegaan op Beths motieven voor onderzoek naar implicatieve fragmenten. Dit werd door hem uitgebreid naar implicatieve en strikt implicatieve fragmenten van de modale systemen S4 en S5. Deze fragmenten waren door hem gekozen voor de overgang van een systeem waarin men Heytings propositionele intuïtionistische logica onder een transformatie kan inbedden (S4) naar een systeem waarin dit zeker niet kan (S5). De wet van Peirce zal voor dat verschil cruciaal zijn.[86]

De door Beth gehanteerde technieken van het werken met hulptableaus en hulpvaluaties zijn niet anders dan de al in de vorige secties behandelde. Beth nam ook het gebruik van een conjunctieve en disjunctieve splitsing in hulptableaus over. Alleen de situatie, waarin een hulptableau wordt opgeroepen, verschilt. Aan S4 zal hier meer aandacht worden geschonken dan aan S5. In de eerste plaats vanwege het belang van op intuïtionistische logica gericht onderzoek; in de tweede plaats paste Beth eerder dan anderen (i.c. Kripke) de tableaumethode toe op S4; S5 was al eerder door Kripke op die manier afgehandeld.

[84] Brief Beth – A. Tarski, 30 juni 1954.

[85] Elk tralie met relatief pseudocomplement heeft een 1-element, maar niet altijd een 0-element. Elk tralie met relatief pseudocomplement en met 0-element is een pseudo-Boolese algebra. Omgekeerd, elk element $a$ van een pseudo-Boolese algebra $A$ heeft een pseudo-complement $-a$, waarbij $-a = a \hookrightarrow 0$. Zie Grätzer (1978), Rasiowa (1974).

[86] Men kan substitutie gaan toepassen van $A \to B$ voor $A$ en $C$ voor $B$ op $((A \to B) \to A) \to A$. Het resultaat is dan $(((A \to B) \to C) \to (A \to B)) \to (A \to B)$. Beth gebruikt een modale strikte S5-variant $(((A \prec B) \prec C) \prec (A \prec B)) \prec (A \prec B)$ [$A \prec B$: strikte implicatie]. Men kan met de McKinsey-Tarski vertaling voor S4 werken (McKinsey & Tarski (1948)): omzetting van $X$ in $TX$. (1) $TX$ in $\Box X$ voor $X$ een atoom, en (2) $T(Y \to Z)$ in $TX \prec TY$. Voor $((A \to B) \to A) \to A$ resulteert dit in $((\Box A \prec \Box B) \prec \Box A) \prec \Box A$. Dit is van belang daar binnen S4 de niet getransformeerde Peirce gewoon geldig is. Anders wordt het wanneer men de implicatie binnen het met Heyting corresponderende fragment wil gaan bestuderen. Dan krijgt men te maken met een vertaling van Tarski en derhalve een van modale operatoren voorziene formule. De getransformeerde, en van modale operatoren voorziene, Peirce is wel degelijk ongeldig binnen de context van het werk van Beth en Nieland.

**Implicatieve S4.** De hier gebruikte implicatieve S4 [$\rightarrow$S4] bestaat uit de al in het begin ingevoerde axioma's 1, 2 en 3 (het klassieke implicatieve fragment), met daaraan toegevoegd de volgende modale axioma's:'[87] $\Box A \rightarrow A$, $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$. Regels: de regels voor de implicatieve logica tezamen met de modale regel 'als $A \in\rightarrow$S4, dan ook $\Box A \in\rightarrow$S4'. Daarnaast is er sprake van een *strikt implicatieve S4: $\prec$S4.*[88] ($A \prec B =_{df} \Box(A \rightarrow B)$)[89].

Er zal, afgezien van reductieregel 3b, alleen bij de valuatieregels worden stilgestaan:

- $\rightarrow$S4-valuatieregel S2: $v(\Box A) = 1$, als $\forall v^* \leq v : v^*(A) = 1$.[90]
- $\rightarrow$S4-valuatieregel S2: $v(\Box A) = 0$, als $\exists v^* \leq v : v^*(A) = 0$ [introductie van een hulpvaluatie/hulptableau][91].
- $\rightarrow$S4-valuatieregel S3: als $v(\Box A) = 1$, dan $\forall v^* \leq v : v^*(\Box A) = 1$.[92]
- $\rightarrow$S4-valuatieregel S3a: als $v(\Box A) = 1$, dan $v(A) = 1$ én $\forall v^* \leq v$: $v^*(A) = 1$.
- $\rightarrow$S4-reductieregel 3b: Men heeft dan de vorm $\Delta \Rightarrow \Gamma, \Gamma = \Gamma_{atomen} \cup \Gamma^*$, $\Gamma^* = \Gamma^{**} \cup \{\Box A\}$:

$$\begin{array}{r|l}
\text{w} & \text{o} \\ \hline
+t_0 & \\
\Delta & \Gamma_{atomen}, \Gamma^{**}, \Box A \\
-t_0 & \\
[\text{vel}] & \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l}
+t_1 & & +t_2 \\
& A & \Gamma^{**} \\
\end{array}$$

$\Gamma_{atomen}$ wordt door Beth opgevoerd om te laten zien dat de atomen op rechts binnen een tableau, binnen dat tableau wel meetellen, maar dat hun rol in andere hulptableaus uitgespeeld is.

- $\rightarrow$S4 implicatie: per (hulp)valuatie/(hulp)tableau gelijk aan het klassieke geval.

Valuatieregels voor de strikt implicatieve S4: er kan voor $\prec$ wel een valuatie gegeven worden, maar gezien Beths herformulatie met $\Box$ en $\rightarrow$ zoals in S4 kan men net zo goed terugverwijzen naar de valuaties voor de implicatieve S4.

- $\prec$S4, valuatieregel S4: $v(A \prec B) = 1$, als $\forall v^* \leq v$: of $v^*(A) = 0$ of $v^*(B) = 1$.[93]

[87](Nieland & Beth 1961*a*), (Beth & Nieland 1965).

[88](Nieland & Beth 1961*a*), (Beth & Nieland 1965).

[89](Beth & Nieland 1965), p. 21, $\prec$-S4-axioma's: $A \prec A$, $(A \prec B) \prec (C \prec (A \prec B))$, $(A \prec (B \prec C)) \prec ((A \prec B) \prec (A \prec C)))$. Regel: als $A \prec B$ en $A$, dan $B$.

[90](Nieland & Beth 1961*a*).

[91](Nieland & Beth 1961*a*). Beths ordening $\leq, <$ tussen punten (hulpvaluaties, hulptableaus) elders vaak weergegeven als een toegankelijkheidsrelatie met bepaalde voorwaarden (keuzen uit reflexiviteit, transitiviteit, symmetrie, etc.) tussen werelden.

[92](Beth & Nieland 1965). Men kan aan de linkerzijde formules met een $\Box$-operator op kop doorschuiven naar lager liggende hulptableaus.

[93](Nieland & Beth 1961*a*).

**Implicatieve S5.** De axioma's zijn die van $\to S4 + (\Box A \to \Box B) \to \Box(\Box A \to B)$.[94]
S5-regels = S4-regels zonder de disjuncte splitsingen, maar wel met de mogelijkheid tot herplaatsing. Met dit laatste vult men een al eerder ingevoerd, maar (blijkbaar) onvolledig behandeld (hulp)tableau aan.[95]

- $\to$S5, valuatieregel S2:

  $v(\Box A) = 1$, als $\forall v^* \in V$: $v^*(A) = 1$. Let er bij $v(\Box A) = 1$ op dat er $\forall v^* \in V$ staat, en niet $\forall v^* \leq v$. Dit houdt in dat men ook naar hoger in de partiële orde liggende tableaus formule $A$ op waar moet bijschrijven.[96]

  $v(\Box A) = 0$, als $\exists v^* \in V$: $v^*(A) = 0$. Hiermee introduceert men een extra hulpvaluatie (-tableau).[97]

Hiernaast zijn er S5-tableauregels.[98]

**Modaal-logische deductie.** Beth gaf geen deductieve formulering van modale tableaus. Ook wordt er geen methode aangegeven om tot een natuurlijke deductieve afleiding te komen.

Toch verandert er er niet veel. Alleen de hulptableaus vormen een nieuw element. Voer nu hulpdeducties (met geneste clustering) in. Men kan de hulptableaus introduceren en elimineren.[99]

| w | o | wordt tot | premissen | conclusie |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta$ | $\Gamma$ | | $\Delta$ | $\Gamma$ |
| $+t_k$ | | | $t_k$-introductie(+) | $t_k$-eliminatie(−) |
| $\Delta^*$ | $\Gamma^*$ | | $\Delta^*$ | $\Gamma^*$ |
| $-t_k$ | | | | |
| $+t_{k+1}$ | | | $t_{k+1}$-introductie(+) | $t_{k+1}$-eliminatie(−) |
| $\Delta^{**}$ | $\Gamma^{**}$ | | $\Delta^{**}$ | $\Gamma^{**}$ |
| $-t_{k+1}$ | etc. | | | etc. |

Wederom loopt en draait men hier op de, in het hoofdstuk over deductieve tableaus, al besproken wijze door het figuur heen. Men kan ook de door A.S. Troelstra bedachte afwikkeling van een deductie gebruiken.

Moeilijkheden van andere aard vormen Beths conjunctieve en disjunctieve splitsing in hulptableaus. Gebruik hier het i.v.m. de intuïtionistische logica door

[94] Voor de axiomatiek; implicatieve S5: (Nieland & Beth 1961*b*), (Beth & Nieland 1965); strikt implicatieve S5: (Beth & Nieland 1965), (Nieland 1961).

[95] De schema's lijken soms vrij warrig, maar in de praktijk valt dit erg mee: men kan pakketten regels samenstellen als grondregels en daarmee andere regels er uit werken. Zie (Nieland & Beth 1961*b*), p. 25–27.

[96] (Nieland & Beth 1961*b*).

[97] (Nieland & Beth 1961*b*).

[98] $\to$S5-reductieregel (tableau) (3a)) [(Nieland & Beth 1961*b*)] = ingeperkte $\to$S4-reductieregel (3a) [(Beth & Nieland 1965)]. $\to$S5-reductieregel (3a+) [(Beth & Nieland 1965)] = $\to$S5-reductieregel (3aa) [(Nieland & Beth 1961*b*)]. $\to$S5-reductieregel (3b) = $\to$S4-reductieregel (3b) zonder de twee ten opzichte van elkaar disjunctieve hulptableaus (één doorlopend hulptableau is voldoende).

[99] Zie Barth (1969): hierin wordt uitgegaan van de modale systemen van Beth en Nieland. Zie ook Fitch (1952), Fitting (1983) en Zeman (1973).

Beth gebruikte adagium: Wat niet tot de geldigheid bijdraagt, draagt ook niet tot het bewijs bij; ignoreer dit bij de lineaire herformulering. Hiermee heeft men tevens de oneindig lange takken uitgeschakeld. Moeilijkheden leveren de problemen van de herformuleringen in S5 op waarbij men voor het verkrijgen van een bepaalde formule die in de tak terugschuift, wel de volledige tableau-uitwerking nodig heeft om die formule los te krijgen — men beschikt binnen een bepaalde (hulp)tableau nog niet over de informatie die men later in een ander hulptableau verkrijgt. De teruggeschoven formule kan dan tijdens de constructie van een lineaire deductie op een vreemde plaats komen te staan. Men kan dit euvel bestrijden door een afwikkeling, anders dan die van Beth, voor S5 voor te schrijven.[100]

[100]Hendriks (1996), p. 147, beschrijft hoe men bepaalde formules zo kan inzetten dat de uitwerking op een later moment plaatsvindt zonder dat een herschrijving nodig is.

# Hoofdstuk 10

# Beth-modellen

*“Persönlich bin ich augenblicklich noch immer mit den semantischen Tafeln beschäftigt. Ich habe jetzt die Methode auf die intuitionistische Logik übertragen und dieselbe in einem Vollständigkeitsbeweis verwendet der nicht, wie die bisherigen, von einem dem formalen System angepassten, sondern von dem in der intuitionistischen Mathematik selbst üblichen Begriff eines Modells (oder Gegenbeispiels) ausgeht. Vom intuitionistischen Standpunkt aus ist das Ergebnis unerwartet und schwer zu verdauen, wie es mir erscheint, obzwar es nichts gegen den Intuitionismus als solchen beweist.”* [1]

## 10.1 De basis van de Beth-modellen

### 10.1.1 Spreiding en tegenmodel

#### Zoektocht naar een intuïtionistische interpretatie

**Interpretaties.** Aanvankelijk waren er alleen informele interpretaties, ‘verklaringen’ van de betekenis van de intuïtionistische logische operaties. Heyting (1931), later vollediger in Heyting (1934), gaf, voortbouwend op beschouwingen van Brouwer, een verklaring in termen van de primitieve begrippen ‘constructie’ en ‘constructief bewijs’; Kolmogoroff (1932) formuleerde onafhankelijk zijn interpretatie van de intuïtionistische propositielogica als een calculus van problemen. Heyting en Kolmogoroff zagen dit oorspronkelijk als verschillende interpretaties, veel later zou Heyting ze in Heyting (1958*a*) gelijk stellen (vandaar de aanduiding als Brouwer – Heyting – Kolmogoroff-interpretatie in de recente literatuur).

In dit stadium waren er veel misverstanden te overwinnen, zoals o.a. blijkt uit de eindeloze polemiek door de heren Barzin en Errera gevoerd. Met een kort citaat uit Glivenko (1928), p. 225, kan de onenigheid worden omschreven: “On s’efforce parfois, comme MM. Barzin et Errera l’ont fait, d’interpréter le contenu de la logique brouwerienne en introduisant la notion de propositions tierces,

[1] Uit de brief E.W. Beth – H. Scholz, 10 november 1956. Tafel = tableau.

c'est-à-dire de propositions qui ne sont ni vraies ni fausses. Je vais montrer que dans la logique brouwerienne, l'introduction des propositions tierces est autant illégitime que dans la logique classique, de sort que la logique brouwerienne n'est nullement une logique tripartite." [2]

Nadat Tarski (1935*a*) een precieze formulering voor waarheid in de klassieke context had geformuleerd, rees vanzelf de vraag of iets dergelijks ook mogelijk was voor de intuïtionistische logica. Voor de propositielogica gaf Tarski (1938) zelf al een antwoord d.m.v. een semantiek met valuaties waarvan de waarden open verzamelingen in een topologische ruimte waren.

In twee opzichten bleef er echter een kloof bestaan tussen het bereikte en het wenselijke m.b.t. de formele semantiek van de intuïtionistische logica.

(a) Voor een volledigheidsbewijs was Tarski, en vele auteurs na hem, gedwongen op metamathematisch niveau klassieke, niet-intuïtionistische methoden toe te laten (niet dat Tarski dit als een probleem beschouwde).

(b) In plaats van de, van de klassieke nogal radicaal afwijkende semantiek met oneindig veel waarheidswaarden zoals bij Tarski en velen na hem, kan men ook vragen naar een semantiek die intuïtief dichter bij de klassieke semantiek staat: $A$ is geldig d.e.s.d. als voor alle intuïtionistisch zinvolle interpretaties $^*$ de uitspraak $A^*$ intuïtionistisch waar is (een interpretatie moet een domein voor het individuenbereik aanwijzen en relaties voor de relatiesymbolen in $A$).

Beide lacunes waren vooreerst moeilijk te vullen; gezien dit vacuum waren benaderingen als die van Kleene (1945) met zijn numerieke realiseerbaarheid interessant.

De leemten (a) en (b) werden pas veel later gevuld, en wel met name door (het vervolg op) werk van Beth en Kreisel.

In de discussie betreffende de mogelijkheid van intuïtionistische volledigheidsbewijzen is vaak sprake van een zekere verwarring, die zijn oorsprong vindt in Heytings eerste formaliseringsartikel (1930), p. 42, waar hij enerzijds opmerkt:
"Es ist prinzipiell unmöglich, ein System von Formeln aufzustellen, das mit der intuitionistischen Mathematik gleichwertig wäre, denn die Möglichkeiten des Denkens lassen sich nicht auf eine endliche Zahl von im Voraus aufstellbaren Regeln zurückführen."
Maar anderzijds, een bladzijde later:
"Die Vollständigkeit im weiteren Sinne, welche besagt, daß jede Formel, welche eine richtige Beziehung zwischen Aussagen darstellt, aus den Axiomen gefolgert werden kann, und welche also wieder auf die mathematische Interpretation des Formalsystems bezug nimmt, kann, wie schon oben bemerkt worden ist, aus prinzipiellen Gründen nicht gefordert werden."

Het eerste citaat heeft het over alle mogelijkheden om iets te bewijzen; en zelfs in de klassieke wiskunde hebben we geen mogelijkheden om een dergelijke totaliteit te karakteriseren. Anderzijds is het niet uitgesloten dat voor uitspraken in een

[2] Zie voor verdere discussie de artikelen van Heyting, Barzin, Errera en anderen rond 1930. Vergelijk Heyting (1980), pp. 252–260 en Heyting (1958*a*), p.108–109.

welomschreven taal geldigheid samenvalt met bewijsbaarheid in een beperkt systeem — en dit is precies wat volledigheid van de klassieke predicatenlogica inhoudt.

**Beth komt op.** Vanaf 1945 begon Beth belangstelling voor deze kwesties te krijgen. Hij wenste een combinatie van intuïtionistische logica, Tarski's waarheidsdefinitie en een waarachtige intuïtionistische interpretatie. Voor het laatste wilde hij eindige spreidingen en keuzerijen, waar Brouwer gebruik van maakte bij de opbouw van zijn analyse, in gaan zetten. Beth was in die tijd echter nog niet bij machte om zijn gedachten formeel uit te werken. Pas bij zijn ontwikkeling van semantische tableaus bedacht hij dat men hiermee wellicht ook een intuïtionistische semantiek kan construeren. Tussen beide pogingen in 1947 en 1955 ligt er bij Beth een gat. In die periode was zijn belangstelling voor het intuïtionisme niet verdwenen, maar produceerde hij niet werk dat vergelijkbaar is met wat hij de daarop komende jaren zou afleveren. Wel hield hij voordrachten die zijn kennis m.b.t. het opzetten van een intuïtionistisch volledigheidsbewijs onderbouwden.

Met zijn semantiek zette Beth zich af tegen een al te operationalistische aanpak van een intuïtionistische semantiek. Rasiowa is een goed voorbeeld van het tegendeel. Zij had de nodige bedenkingen tegen een dergelijke, voor haar onnodige achtergrond. De volgende passage wordt gegeven, omdat de daarin vermelde gedachten welhaast exemplarisch zijn: [3]

"The inclusion of two chapters on intuitionism is not an indication of the authors' positive attitude towards intuitionistic ideas.[4] Intuitionism, like other non-classical logics, has no practical application in mathematics. [. . . ] It is amazing that vaguely defined philosophical ideas concerning the notion of existence in mathematics have led to the creation of formalized logical systems which, from the mathematical point of view, proved to be equivalent to the theory of lattices of open subsets of topological spaces. [. . . ] we have not included the latest results of Beth and Kreisel concerning other notions of satisfiability than the algebraic notion of satisfiability which we have adopted."

Beth vond dat het beschouwen van intuïtionistische logica als alweer het zoveelste systeem — en het dientengevolge metalogisch alleen met een klassiek redeneersysteem dit van een operationele kant aanpakken — geen recht deed aan het intuïtionisme: [5]

"Already in 1938 a completeness proof for the intuitionistic calculus was given by Tarski. They [Rasiowa en Tarski] start from Heyting's formulation of intuitionistic logic and, for this formal system, they establish a certain interpretation which is entirely based upon the structural properties of the system and has hardly any connection with intuitionistic mathematics itself."

Van intuïtionistische zijde, met name Heyting, was men daarmee evenmin

[3](Rasiowa & Sikorski 1963), p. 8–9.

[4]Dat was het bij Beth ook niet in alle opzichten.

[5](Beth 1956*d*), p. 386. Tarski in 1938: (Tarski 1938).

gelukkig. Meer nog, de gedachte dat men het bestuderen van het intuïtionisme — en de praktijk daarvan — kan vervangen door het bestuderen van aangedragen semantieken, was volgens Heyting een onjuiste. Een goed voorbeeld vormt het vermelde onderzoek door Kleene; niet over dit onderzoek zelf, maar wel betreffende de daaruit getrokken onjuiste gevolgtrekkingen — niet door Kleene, maar wel door anderen — merkte Heyting tegen Kreisel op: [6]

"I have no objections against anything Kleene has written about intuitionism, but I protest against the idea which is rather common, that his results permit to abolish intuitionism and to study the theory of recursive functions or that of realizability instead. Every result of Kleene is relative to a given formalization of intuitionistic mathematics, and one can never be sure that this formalization is complete. The question whether an intuitionistic reasoning can be formalized in the system, can only be answered after that the reasoning be made. Consequently an intuitionistic mathematician runs at every moment the risk of applying methods which do not fit into the system"

Kleene neemt volgens Heyting overal de nodige voorzichtigheid in acht: [7] "I maintain that I have no objection against anything Kleene has written about intuitionism, because Kleene always covers his retreat."; dit blijkt ook in Kleene (1952*a*), p. 514: "The negation $\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ of that formula $[\forall x(A(x) \vee \neg A(x))]$ is classically untrue, but (by the corollary) realizable, and hence intuitionistically true, if we accept realizability (intuitionistically established) as sufficient for intuitionistic truth.'

**Volledigheid.** Een belangrijke rol bij het opstellen van een intuïtionistisch aanvaardbaar volledigheidsbewijs wordt gespeeld door de spreidingen en de keuzerijen. Deze zullen overal opduiken, om te beginnen in deze en de volgende secties.

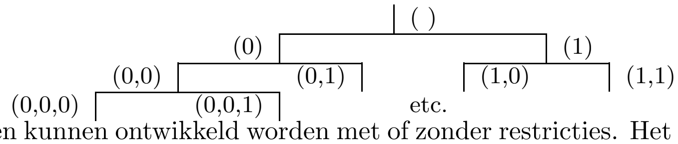
*Spreidingen* (*spreads*) zijn een ondersoort van de species. Een spreiding kan per knoop oneindig vertakkend en van oneindige lengte zijn. Hier zijn het de per knoop eindig vertakkende spreidingen (waaiers, fans) die de hoofdrol opeisen. Met de waaiers kan men overgaan tot het vormen van een intuïtionistisch continuum en aan de hand hiervan tot het vormen van een intuïtionistisch aanvaardbare analyse. Daarnaast vormt hier de *Hoofdstelling van de eindige spreidingen* (*waaierstelling*, fan-stelling) een belangrijk bestanddeel: als alle takken van een eindig vertakkende spreiding van eindige lengte zijn, dan is die spreiding als geheel van eindige lengte.

Men kan tegen spreidingen aankijken als een (desnoods op het horizontale vlak oneindig) uitwaaierende boom. De takken (paden) kan men als keuzerijen interpreteren. De duaal splitsende boom is hier een ondersoort van. Als illustratie een duaal splitsende boom die is overgenomen uit Kleene & Vesley (1965), p. 49. Deze boom representeert de universele spreiding (spread), bestaande uit (wellicht afbrekende) keuze-rijen $(1, 1, \ldots), (1, 0, \ldots)$ etc., en de knopen met afgebroken keuzerijen. De oorsprong wordt als ( ) genomen, verder

[6] Brief A. Heyting – G. Kreisel, 26 mei 1955, (Heyting-archief: brieven Kreisel).

[7] Brief Heyting – G. Kreisel, 12 juli 1955, (Heyting-archief, brieven Kreisel).

krijgt men bij een splitsing vanaf een knoop een 0 op links en een 1 op rechts erbij.[8]




De rijen kunnen ontwikkeld worden met of zonder restricties. Het is mogelijk om tijdens de ontwikkeling restricties te veranderen (toe te voegen, weg te halen). Zo kan een aanvankelijk zonder restricties aangroeiende rij vanaf een gegeven moment een rij met restricties worden. Veelvuldig heeft men te maken met een beginrij. Notaties: $\alpha, \beta, \ldots$: rijen; $\overline{\alpha}(n)$: de eerste n waarden, beginrij (*initiaalsegment*) tot op de n-de waarde van $\alpha$; $\alpha(n)$: de n-de waarde binnen de rij $\alpha$.

Was het vanuit intuïtionistisch oogpunt wel mogelijk volledigheidsbewijzen te geven? In Heyting (1956) werd nog steeds over de 'onmogelijkheid' van een intuïtionistisch bewijs gesproken: [9] "no formal system can be proved to represent adequately an intuitionistic theory. There always remains a residue of ambiguity in the interpretation of the signs". De teneur was opnieuw dat van een definitietechnisch probleem: het al dan niet in voldoende mate kunnen omschrijven van wat de intuïtionisten bedoelen. Beth (1956*d*), p. 382, vatte dit evenwel ten onrechte op als een betwijfelen van de mogelijkheid tot volledigheid in de metalogische zin. In Beth (1956*d*) werd dit bestreden met een verwijzing naar het door hemzelf ontwikkelde systeem.

In Heyting (1968*a*), p. 317, werd opnieuw de mogelijkheid van een volledigheidsbewijs betwijfeld. Deze keer werd dit gebaseerd op denkbeelden van Kreisel en Gödel — d.w.z. Gödel (1933) zoals te vinden in Kreisel (1958*a*).[10] Deze bezwaren berusten op wat door de verschillende soorten volledigheidsbewijzen aan principes geïmpliceerd wordt. Van sommige formules kan men zich afvragen of deze intuïtionistisch wel aanvaardbaar zijn.[11] Beth (1959*c*) (voorgedragen in 1957) gaat hiertegen in; Beth ging daarbij uit van Kreisel (1957).

Het belangrijkste onderscheid is het verschil tussen zwakke en sterke volledigheid voor de Heyting-calculus.[12] Eerst enkele begrippen. $D$ loopt over species, $P_i^*$ loopt over subspecies van $D^{r_i}$ (d.w.z. de relaties op $D$). $A_D$ de beperking van de individuele variabelen van $A$ tot $D$. $Bew(m,n)$ is het bewijspredicaat voor Heyting-calculus gerelateerd aan een gekozen toekenning van Gödel-getallen: $m$ het Gödel-getal voor een formule met Gödel-getal $n$; $\lceil A \rceil$ is het Gödel-getal voor $A$.

1. *sterk*. Formule $A$ is volledig onder: als $A$ geldig is, dan is $A$ bewijsbaar,

[8] Vergelijk hiermee Beths en Kreisels zuid-west (0) en zuid-oost (1) afslagen in hun onderlinge correspondentie (brief Beth – G. Kreisel, 21 maart 1958; brief G. Kreisel – Beth, 28 maart 1958, (Reading)) en in Beth (1959*c*).

[9] (Heyting 1956), p. 102., 3$^e$ alinea.

[10] M.b.t. bovenvermeld artikel van Gödel geeft Kreisel (1958*a*) ten onrechte Gödels 'Zum intuitionistischen Aussagenkalkül' op.

[11] Vergelijk Kreisel (1961).

[12] Naar Kreisel (1961).

ofwel $\forall D \forall P_1^* \ldots \forall P_k^* A_D(P_1^* \ldots P_k^*) \to \exists p Bew(p, \ulcorner A \urcorner)$

2. *zwak.* Als voorgaande, maar met dubbele ontkenning: $\forall D \forall P_1^* \ldots \forall P_k^*$ $A_D(P_1^* \ldots P_k^*) \to \neg\neg\exists p Bew(p, \ulcorner A \urcorner)$

Implicaties: voor $A(n, \alpha)$ een primitief recursieve relatie tussen keuzerijen $\alpha$ en natuurlijke getallen $n$ [en $\alpha$ uit de (0, 1)-waardige binaire spreiding, zie het nog te tonen plaatje uit Kleene & Vesley (1965)] bestaat er een formule $A$:

(a) $\forall \alpha \neg\neg\exists n A(n, \alpha) \to \forall \alpha \exists n A(n, \alpha)$, onder sterke volledigheid.
(b) $\forall \alpha \neg\neg\exists n A(n, \alpha) \to \neg\neg\forall \alpha \exists n A(n, \alpha)$, onder zwakke volledigheid.
(c) Volgens Kreisel (1961), (JSL 27: p. 141), impliceert het negatieve fragment van HPC $\neg\neg\exists n A(n) \to \exists n A(n)$.

Kreisel (1961), (JSL 27: p. 141) meent dat de formule onder (c) zeker niet plausibel is voor de geïntendeerde interpretaties en vervolgt: "so it is plausible that HPC *cannot be proved to be strongly complete*" On the other hand, (b) is not so implausible, and may be provable on the basis of as yet undiscovered axioms which hold for the intended interpretation [...]. *So the problem whether HPC is weakly complete is still open.*"

Volgens Veldman (1976) had men over het algemeen de indruk dat een intuïtionistisch volledigheidsbewijs moeilijkheden met zich mee bracht: "[B]ut arguments by K. Gödel and G. Kreisel gave people the feeling that an intuitionistic completeness theorem would be impossible [(Kreisel 1961)]. A (strong) completeness theorem would imply $\neg\neg\forall x A(x) \to \forall x A(x)$ for any primitive recursive predicate $A$ of natural numbers, and one has no reason to believe this for the usual intuitionistic interpretation. Nevertheless, the following [Veldman (1976)][13] contains a correct intuitionistic completeness theorem for intuitionistic predicate logic. So the old arguments by Gödel and Kreisel should not work for the proposed semantical construction of intuitionistic logic. They do not, indeed. The reason is, loosely speaking, that negation is treated positively."

Het is echter niet zo dat Heyting voortijdig de mogelijkheid tot een intuïtionistisch volledigheidsbewijs ontkende, hij zag het alleen somber in: [14]
"It is possible to find conditions which every intuitionistic proof in a certain field of mathematics must satisfy; Brouwer has used such conditions in his proof of the fan theorem (clearest exposition [Brouwer (1954)]). Thus you are right that perhaps such conditions can lead to a completeness proof for some systems of intuitionistic logic. On the other hand I do not see how it could be mathematically proved that such a completeness proof is impossible; one can say at most that it seems highly improbable."

### Beths inzichten

**Beths keuzerijen in 1947.** Al in de jaren dertig en veertig had Beth zich zo nu en dan met de logische en filosofische kanten van het intuïtionisme bezig

[13] Een volledigheidsbewijs uitgaande van Kripke-modellen.
[14] Brief A. Heyting – G. Kreisel, 12 juli 1955, (Heyting-archief: brieven Kreisel).

gehouden.[15] Opmerkelijke denkbeelden dienaangaande vallen uit die periode niet te halen. Maar vanaf 1943, en meer nog in een artikel uit 1947, zocht hij een weg om met behulp van een semantiek op de wijze van Tarski intuïtionistische begrippen te kunnen behandelen: [16]

"As soon however, as we enter into the relations between mathematical entities (and their properties and relations) and mathematical constructions on the one side, and mathematical statements (formulae, definitions) and proofs on the other, we are to combine mathematical and metamathematical method, that is to say, we must apply the semantical method."

Dat semantische deel werd in Beth (1947*c*) in de spreidingen gezocht. Als volgt werden in Beth (1947*c*), p. 576, de spreidingen in de semantiek ingevoerd:

"The adoption of the semantical point of view gives rise to two questions, namely:

1. whether there is, for any formal definition, a corresponding spread in the sense of non-formalized intuitionistic mathematics;
2. whether there is, for any spread in the sense of non-formalized intuitionistic mathematics, a corresponding formal definition of the type, described before.

The first question may be answered in the affirmative without any hesitation."

Over de spreidingen merkte Beth (1947*c*), p. 576 op: "Any spread is determined by two progressions M* and M of functions; consequently the question arises, in which manner these progressions should be defined; it will be evident, that we should apply recursion procedures." Later zou Beth zijn denkbeelden in verband brengen met Brouwers na-oorlogsche Cambridge-lessen.[17] Constructief aanvaardbare metastellingen zoals een volledigheidsbewijs waren in 1947 nog een ver verwijderde mogelijkheid. De constructie van 'any spread is determined by two progressions M* and M of functions' zal een rol spelen in Beths volledigheidsbewijs bij het beschouwen van zijn modellen als tweetallen van modellen $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, die ieder op zich geconstrueerd zijn vanuit twee reeksen semimodellen $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots)$, $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \ldots)$.

[15] De artikelen Beth (1935*b*) en Beth (1936) waren o.a. daar een gevolg van: de consistentie van de klassieke rekenkunde als een voorbrengsel van de consistentie van de intuïtionistische rekenkunde. Beth had dit blijkbaar geschreven zonder de eerdere resultaten dienaangaande van Gödel en Gentzen te kennen. De uitvoering kwam Beth op kritiek van Gentzen te staan: brieven G. Gentzen – Beth, 25 en 29 januari 1937, (Göttingen)). Ook het door Beth (in de brief Beth – G. Gentzen, 28 januari 1937, (Amersfoort)) naar voren brengen van Church (1936*a*) (een recensie van Beth (1936)) werd door Gentzen (brief Gentzen – Beth, 29 januari 1937, (Göttingen)) ter zijde geschoven: "Sie (und Herr Barzin) sind also im Irrtum, wenn Sie glauben, den von Gödel und mir bewiesenen Satz von neuem bewiesen zu haben. Leider hat auch Church in seinem Referat, das mir bekannt ist, diese irrige Auffassung wiedergegeben." Het door Beth tenslotte opgestelde 'complément', waarin hij de zaak recht zette, had wel Gentzens instemming (brief G. Gentzen – Beth, 6 februari 1937, (Göttingen)).

[16] (Beth 1947*c*), p. 575. Hieraan voorafgaand was de Nederlandse versie ms. *Semantische beschouwingen over intuïtionistische wiskunde*; deze was als een opsomming van bespiegelingen gevoegd bij de brief Beth – L.E.J. Brouwer, 7 juli 1945, (Amersfoort). In Beth (1947*c*) wordt dienaangaande in noot 1 vermeld: "This paper was written in July 1945, immediately after the liberation of our country." Wie het stuk op de zitting van de Akademie op 29 november 1947 ingediend heeft is de schrijver dezes onduidelijk; alleen leden konden dit, missschien was het Brouwer. Volgens Beth (1959*c*), p. 15 was hij al in 1943 begonnen.

[17] Deze lessen zijn naderhand door D. van Dalen uitgegeven als Brouwer (1981). Beth had in zijn tijd slechts een rudimentaire vorm tot zijn beschikking.

Beth (1947*c*) bestond uit een aarzelend tasten naar een weg en zeker nog niet het bewandelen daarvan. In de jaren daarna bestudeerde hij aspecten die hem later van pas zouden komen bij het formuleren van zijn semantiek.[18] Beth zocht in zijn voordracht te Berkeley in 1952 naar een andere formulering van de stelling van Heine-Borel. Al in Brouwer (1926) wordt er op gewezen dat de algemene vorm van de stelling van Heine-Borel intuïtionistisch niet aanvaardbaar is.[19] Wel is dit het geval met het toepassen van de nodige inperkingen. Dit werd nog niet gegoten in de terminologie van later tijd, maar Brouwer (1926) verschafte wel het raamwerk daartoe.[20]

Beth bewoog zich in 1947 op een terrein waarop ook S.C. Kleene werkzaam was. Volgens Beth (1947*c*), pp. 576, 577, kan men in het intuïtionistische geval men niet naar willekeur over recursieve functies:

"Any spread is determined by two progressions M* and M of functions; consequently the question arises, in which manner these progressions should be defined; it will be evident, that we should apply recursion procedures. [...] If, in the definition of the progressions M* and M, we stick recursions of a definite type, only part of the spread in the sense of non-formalized intuitionistic mathematics will be capable of being defined in the formal manner described above, In this connection we should ask, whether from the intuitionistic point of view only recursions of a certain definite type are to be admitted; in my opinion, we should rather admit an indefinite range of types of recursion."

Hiermee is in de ogen van Beth bij ophanging aan de spreidingen niet elke recursieve functie geschikt. Odifreddi (1989), p. 118, gebruikt dit en schrijft dit resultaat toe aan Kleene (1943) en Beth (1947*c*).[21] Odifreddi geeft het weer in de bewoordingen dat elke constructieve functie recursief is, maar dat het omgekeerde niet altijd opgaat.[22] Met het onderzoek naar die functies was Kleene al op het einde van de Tweede Wereldoorlog begonnen (volgens Kleene (1952*b*), p. 681 al in 1941).[23] Hiertoe had hij zich ook om de door intuïtionisten

[18]Bijvoorbeeld: ms. E.W. Beth, *Compactness proofs in intuitionistic mathematics*, voordracht van 15 mei 1952, Math. Colloquium, U.C., Berkeley (twee versies).

[19]Brouwer (1926) parafraserend houdt Heine-Borel het volgende in. Voor compacte metrische ruimte $R$, en $R^\star$ een compact interval op $R$: als voor elk punt op $R^\star$ er een omgeving is, dan bestaat er een eindig aantal omgevingen waarin $R^\star$ volledig bevat is; d.w.z. elk element van $R^\star$ zit wel in minstens één van de omgevingen.

[20]Het is opmerkelijk, dat Beth in geen enkele van zijn publicaties een verwijzing naar dit artikel van Brouwer geeft.

[21]Volgens Kleene (1948) was Beth (1947*c*) onafhankelijk van de resultaten van Kleene (1945) en Nelson (1947). Zie hierover ook Kleene (1952*b*), p. 681.

[22]Over het hoe en wat, zie Odifreddi (1989), pp. 118–123, de sectie over constructivisme.

[23]Volgens Beth was Kleene niet altijd bij de les. Hij meende bij Kleene met betrekking tot intuïtionistische aanvaardbaarheid enkele schoonheidsfoutjes ontdekt te hebben. Dit meende hij te moeten uitmeten in het typoscript *On the intuitionistic validity of certain theorems in the theory of recursive functions* uit 1953. Op aanraden van Heyting heeft Beth er vanaf gezien dit samen met een brief naar Kleene te sturen en heeft verder geen moeite gedaan het ergens geplaatst te krijgen (ook in Beth zaten schoonheidsfoutjes). Zie hiertoe de brief A. Heyting – Beth, 9 november 1953, (Laren); brief Beth – A. Heyting, 7 november 1953; en de niet verzonden brief Beth – S.C. Kleene, 16 november 1953. Met zijn Beth-modellen had Beth in later tijd een extra wapen in handen gekregen. Derhalve werd er door Beth in 1957,

gebruikte rijen en verzamelingen (soort, species) te bekommeren.

Als volgt geeft Heyting aan hoe de verschillende principes en begrippen met elkaar te maken hebben: [24]

"The fan theorem is limited to finitary, consequently decidable, spread directions [Brouwer: arrows];[25] the application of the finiteness condition is quite obvious in the last step of the proof. Your example[26] shows me that you have in mind not the fan theorem, but the theorem on bar induction, which is implicit in Brouwer's proof of the fan theorem. Brouwer was aware of the fact that his proof method applies to non-finitary spread directions; whether he ever considered non-decidable species of finite sequences, I do not know. He was interested in spreads for reasons which were partly mathematical (intuitionistic equivalent for the classical continuum), partly philosophical (generating of mathematical objects by a person); the craving for extreme generality was less strong than it is now. [...] As far as I can see, bar induction is valid for non-decidable species of finite sequences as well."

Bovenstaand citaat levert de volgende punten op:
1. Welorde. 2. Bar-inductie en bar-stelling, zij berusten op de aangenomen orde. 3. Waaierstelling, waarin de bar-inductie verwerkt is. 4. Vorming van een continuum.[27] 5. Eisen op de gebruikte rijen en de spreidingen.
Wij zullen enkele van deze begrippen nog tegenkomen in de loop van dit verhaal.

**Gebruik van tableaus vanaf 1955.** Ergens gedurende de periode 1954 — 1955 moet Beth de combinatie tussen spreidingen en bomen (semantische tableaus) opgemerkt hebben, of zoals hij later in 1957 in een brief aan Heyting opmerkte: [28] "Inderdaad ga ik uit van een klassiek, en dus intuïtionistisch aanvechtbaar modelbegrip, maar mijn beschouwingen hebben dan ook betrekking op de klassieke logica. Bovendien is een groot deel van de constructie niettemin intuïtionistisch aanvaardbaar, daar de bij een logisch probleem behorende boomconstructie een verzameling van modellen levert, die door een finiete spreiding kan worden voorgesteld."

Van hieruit was de volgende stap naar een andere modellering van de te gebruiken modellen: [29]

"[T]he introduction of the notion of a choice sequence brings a subjective element into the situation. But, as Heyting rightly observes, this subjective element is eliminated if we agree to concentrate upon such properties of choice sequences as appear after a finite number of choices. *This attitude implies, however, a radical change in the semantic*

---

verschenen als Beth (1959*c*), p. 16, 17, alsnog ingegaan op Kleene (1952*a*), p. 284, stelling 8. Later in dit hoofdstuk zullen wij dit opnieuw tegenkomen.

[24]Brief A. Heyting – G. Kreisel, 24 september 1962, (Heyting-archief, Brieven, Kreisel).

[25]Zie Brouwer (1954) als een laatste expositie over dit onderwerp.

[26]Brief G. Kreisel – A. Heyting, 11 september 1962, (New York) [Heyting-archief]; maar zie ook eerdere brieven van Kreisel.

[27]Dit punt valt buiten het directe gebruik van de Beth-modellen, maar heeft natuurlijk wel propagandistische waarde.

[28]Brief Beth – A. Heyting, 3 mei 1957, (Baltimore). De verwijzing heeft betrekking op Beth (1957*c*). Heyting zal wel het zijne hebben gedacht over deze uitspraak.

[29]Beth (1956*d*), p. 379. 'This attitude ... notions' cursief door mij, verder cursief door Beth.

*notions.* The classical rules determine [...] the validity or non-validity of a formula *on each branch* separately [...] These difficulties vanish, if we agree to determine validity or non-validity, not on individual branches, but collectively on all those branches which have a certain initial element in common, that is, *on a subtree.*" [30]

En nu het volgende belangrijke punt: [31] "Dit leidde tot een aanpassing van de methode der semantische tableaux aan de beginselen der intuïtionistische logica, die in 1931 door A. Heyting is opgesteld. Tot mijn grote verbazing bleek het daarna mogelijk, de volledigheid te bewijzen van de intuïtionistische elementaire logica zonder, als in het klassieke geval, een beroep te doen op het oneindigheidsbegrip."

Beth trachtte hiermee een methode te introduceren die aan de intuïtionistische eisen voldeed. Hij kreeg daarbij met twee moeilijkheden te maken. De eerste is die waarmee een ieder kampt, namelijk ervoor te zorgen dat syntax en semantiek op de juiste manier met elkaar oplopen. De tweede daaraan inherente moeilijkheid bestaat in het eigenlijke bewijs van de volledigheidsstelling. Als men deze met constructief aanvaardbare begrippen en methoden wil uitvoeren kan men niet zonder meer over het gehele klassiek-wiskundige apparaat beschikken. In het volgende citaat vertelt Beth hoe zijn weg naar volledigheid liep: [32]

Eerst het klassieke deel: "Als *semantische Tafel* für die Sequenz $K \Rightarrow \Delta$ bezeichne ich eine stammbaumartige Anordnung von Formeln welche sich 1. als Versuch der Konstruktion eines Gegenbeispiels, und 2. als Versuch einer Ableitung in einem gewissen formalen System $F$ auffassen lässt. Aus der Tatsache, dass zwangsläufig einer dieser beiden Versuche gelingen muss, ergibt sich sofort der Gödelsche Vollständigkeitssatz, demzufolge zu jeder Sequenz entweder eine Ableitung in $F$ oder ein Gegenbeispiel existieren muss."

En nu overgaand op het intuïtionistische geval: "Es lässt sich nun die Konstruktion der semantischen Tafeln der intuitionistischen Einstellung anpassen; die semantische Tafel ist dann zusätzlich noch 3. als Versuch der Umformung eines beliebigen Modells des Konjunktivs $K$ in ein Modell des Disjunktivs $\Delta$ zu betrachten. Die Tatsache, dass das Gelingen von 3. zwangsläufig das Gelingen von 2. impliziert, liefert dann die Begründung eines intuitionistischen Vollständigkeitssatzes für die intuitionistische Prädikatenlogik erster Ordnung. Der Beweis ist dem des Brouwerschen Hauptsatzes für finite Mengen nahe verwandt (wie ja auch der Gödelsche Vollständigkeitssatz eng zusammenhängt mit dem Satz von Heine-Borel)."

Voor de oplossing van het tweede probleem heeft men in de eerste plaats te maken met het gebruik van compactheid binnen een klassiek bewijs. Beths aanpassing van zijn semantische tableaus was bedoeld om de intuïtionistische

[30] Subtree: deelboom, topologische begrip van omgeving, 'bar'.

[31] Ms. E.W. Beth, *Problemen der hedendaagse logica*, voordracht Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, 8 oktober 1956.

[32] Ms. E.W. Beth, *Semantische Tafeln für die intuitionistische Prädikatenlogik erster Ordnung*, samenvatting door E.W. Beth van een voordracht onder dezelfde titel ter gelegenheid van het IV. Österr. Mathematikerkongress, Wenen, 17–22 september 1956.

tegenhanger daarvan, de waaierstelling van Brouwer, toe te kunnen passen: [33]
"Wenn die Konstruktion der Tafel gedeutet wird als ein Versuch, ein Gegenbeispiel zu konstruieren, so ist nach wie vor für den Beweis, dass für jede nicht abgeschlossene semantische Tafel auch tatsächlich ein entsprechendes Gegenbeispiel existiert, ein intuitionistisch nicht akzeptabeler Kompaktheitsschluss zu verwenden. Es liegt jedoch intuitionistisch betrachtet eine andere Deutung viel näher, nämlich, als ein Versuch, jedes Modell der Vorformeln [antecedentaire formules, de gehele et-rij] einer Sequenz zu zerlegen in endlich viele Untermodelle, deren jedes eine wohlbestimmte Nachformel [een succedentaire formule uit de vel-rij] erfüllt. Gibt es ein Verfahren, dass für jedes vorgegebene Modell die erwünschte Umformung herbeiführt, so muss immer auch die betreffende Sequenz ableitbar sein, und die semantische Tafel ist geschlossen. Der Beweis ist dem zweiten Brouwerschen Beweis für den Hauptsatz der finiten Mengen nahe verwandt."

**Tegenmodel vs. inpassing.** Beth is in de loop van 1955 ermee begonnen zijn theorie bekend te maken: zijn eerste lezing over dit onderwerp hield hij tijdens een colloquium te Parijs (26 september tot 1 oktober 1955).[34] De uiteindelijke versie van het artikel is vergeleken met Beth (1956*d*) onbeholpen en onvolledig. Bovendien ontbreekt er een intuïtionistisch aanvaardbaar volledigheidsbewijs. Op dat moment had Beth zelf nog de nodige scepsis aangaande dit onderwerp: [35]
"In my paper on intuitionistic logic, I take a non-intuitionistic attitude, and convince myself that, if an intuitionist uses a law of logic not contained in Heyting's system, then I can find an intuitionistic counter-example to prove that this law is not acceptable from an intuitionist point of view. For the denumerable case, the lemma of infinity is not needed, we only need the (metamathematical) principle of the excluded third. *As for the classical logic, an entirely constructive completeness proof cannot be given.* But the counter-example, the existence of which is proved by non-constructive methods, is in itself constructive."

Uit een brief, later dat jaar, aan Heyting valt af te lezen hoe Beth begon met het gebruiken van semantische tableaus voor intuïtionistische doeleinden. De volgende passage daaruit dient als een korte inleiding tot de Beth-modellen en geeft tevens de volgorde aan, waarin de verschillende problemen behandeld zullen worden: [36]

---

[33]Ms. E.W. Beth, *Semantische Tafeln für die intuitionistische Prädikatenlogik erster Ordnung*, voordracht ter gelegenheid van IV. Österr. Mathematikerkongress, Wenen, 17–22 september 1956. 'Untermodelle': met het hier gebruikte woord 'Untermodelle', 'submodellen', wordt, gezien de context, wellicht geduid op de door Beth ingevoerde semimodellen; deze zijn niet submodellen in de klassiek-logische zin. Een bespreking volgt later.

[34]Later uitgegeven als Beth (1958*a*). Dit noemde Beth in Beth (1956*d*), p. 2, niet zonder reden een 'preliminary report'. Op dezelfde pagina wijst Beth op de kritische opmerkingen van Tarski en Heyting op zijn stuk tijdens het colloquium. In hoeverre dit verbeteringen achteraf opgeleverd heeft voor de pas veel later uitgegeven voordracht, is de schrijver dezes onbekend.

[35]Brief Beth – A. Robinson, 5 september 1955. Met 'my paper' zal wel Beths pas veel later uitgegeven eersteling op intuïtionistisch gebied, Beth (1958*a*), bedoeld worden: daar ontbreekt dan ook een volledigheidsbewijs. Cursivering door mij.

[36]Brief Beth – A, Heyting, 18 november 1955. Cursief door mij. Voor de disjunctieve

"Ons gesprek heeft namelijk tengevolge gehad, dat vanmorgen de betekenis van de disjunctieve splitsing me opeens voor ogen stond. Men moet van het begin af sequenten beschouwen van het algemene type $A_1, A_2, \ldots, A_m \Rightarrow B_1, B_2, \ldots, B_n$, waaraan de volgende betekenis moet worden gehecht: ieder model van $A_1, A_2, \ldots, A_m$ is de vereniging van eindig veel *submodellen*, die elk aan een der condities $B_1, B_2, \ldots, B_n$ voldoen.

We gaan nu *niet een tegenmodel-constructie* beproeven, maar een *inpassingsconstructie*, als door Brouwerbeschreven. We stellen ons voor een *bepaald (gegeven) model* van de $A$'s en tevens een *nog onbepaald model*, dat een vereniging is van de submodellen als bovenbedoeld. Noem die modellen $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$. We gaan $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ elk hoe langer hoe verder in submodellen splitsen [automatisch veroorzaakt bij de decompositie van formules, vergelijk de stapsgewijze ontwikkeling van een tableau]. Splitsing van $\mathcal{M}$ levert in het tableau een conjunctieve splitsing, splitsing van $\mathcal{N}$ een disjunctieve splitsing. De constructie loopt succesvol af, als we $\mathcal{M}$ in stukjes hebben gesplitst, die alle passen in een bepaald stukje van $\mathcal{N}$.

Bovenstaande interpretatie leidt natuurlijk tot een ingrijpende herziening van het gehele stuk.[37] We kunnen de boom voor $\mathcal{M}$ gegeven denken, de boom voor $\mathcal{N}$ kan volgens een vast recept (semantisch tableau) worden geconstrueerd. Denk de stukjes van $\mathcal{N}$ genummerd. Als de sequent op intuïtionistisch acceptabele wijze bewezen is, dan staat voor elke tak van de boom voor $\mathcal{N}$ het nummer vast van het stukje van de boom voor $\mathcal{N}$ waarin hij terecht komt.

Dit feit levert de grondslag voor de toepassing van de [waaier] stelling van Brouwer."

Het paar $< \mathcal{M}, \mathcal{N} >$, de combinatie (bepaald model, [nog] onbepaald model), werd door Beth een *Herbrand-veld* genoemd, omdat dit begrip volgens hem de stelling van Herbrand vertegenwoordigt.[38] De Herbrand-velden vormen een eindige spreiding (waaier). In dit opzicht volgde hij Beth (1947*c*). Op zichzelf genomen was dit geen slechte methode. Helaas bracht dit met zich mee dat Beth ook zijn semantische tableaus in tweeën ging delen en naast de beide modellen, $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$, nu ook twee bomen ging optekenen. Misschien werd dit (door hem) uit een oogpunt van didactiek gedaan, noodzakelijk was het echter niet; de eindige spreiding was er toch al. Alle plaatsen van nu niet meer opgetekende formules (ze zitten in de ene of in de andere boom) werden leeg meegenomen: beide bomen hebben bij Beth dezelfde ruimtelijke constructie tot elkaar en tot de oorspronkelijke (semantische tableau) boom (dat werd zelfs een nieuwe stelling).

### Ontvangst van de Beth-modellen

Beth gaf uiteindelijk twee vormen van een volledigheidsbewijs gerelateerd aan het door hem geformuleerde intuïtionistische systeem F0. De duidelijkste for-

splitsing, zie ook Beth (1958*a*). Gerelateerd aan de brief aan Robinson en zijn Parijse voordracht is Beth na amper twee maanden van idee veranderd m.b.t. de mogelijkheid van een intuïtionistisch volledigheidsbewijs. Beth gebruikt in deze brief driemaal de term 'submodellen': dit zijn de latere semimodellen; misschien had hij deze in 1955 nog niet in de later vorm voor ogen of had hij zijn latere term nog niet bedacht. Voor een bespreking, zie later.

[37]Hiermee zal wel Beths, in 1958 uitgegeven, Parijse voordracht mee bedoeld zijn.

[38](Beth 1956*d*), p. 387: "[T]he construction of the Herbrand field provides the counterpart to Herbrand's Theorem."

mulering is te vinden in Beth (1959*b*): [39]

1. *Klassiek*: Voor elke sequent $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ geldt één van de twee volgende voorwaarden:

   (a) Het semantische tableau voor $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ is gesloten, dus geldt (intuïtionistisch) $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_m$, en derhalve is $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ afleidbaar in F0.

   (b) Het semantische tableau voor $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ is niet gesloten, dus is er een tegenmodel voor $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_m$, en derhalve is $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ niet afleidbaar in F0.

2. *Intuïtionistisch* (zwakker dan punt 1):

   Als een sequent $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ intuïtionistisch geldig is, dan is deze sequent afleidbaar in het intuïtionistische systeem F0.

De kritiek was vooral op Beths intuïtionistisch uitgevoerde bewijs gericht. Met betrekking tot het klassieke bewijs was men milder. Dit bracht met zich mee dat een groot deel van de op- en aanmerkingen gericht was op het voorbereidende werk aangaande beide stellingen en het resultaat van de klassiek uitgevoerde stelling. Heyting (1958*b*) zag niets in Beths intuïtionistisch uitgevoerde bewijs: "However, this reasoning [het gebruik van Brouwers waaierstelling] appears not to be correct; probably only a negative form of the completeness theorem can be proved intuitionistically." Eveneens betreffende Beth (1956*d*) merkte Kreisel op: [40] "Your intuitionistic proof: I am afraid I do not understand this proof at all." Ook Kleene (1957) leverde kritiek, waaronder op de door Beth gememoreerde keuzerijen. Later maakte ook Heyting daar melding van: [41] "Je artikel over intuïtionistische logica bleek tot een vrij uitvoerige discussie tussen Kleene en Kreisel geleid te hebben. Nieuw voor mij was hierin, dat je interpretatie van negatie en implicatie alleen geldt, als men alleen geheel vrije keuzerijen toelaat, en niet zodanige, die door een wet bepaald zijn." Het soort keuzerijen zou een belangrijk punt gaan vormen. Beth zelf had zeker oog voor tekortkomingen in het bewijs in Beth (1956*d*), maar vond wel: [42]

"With respect to the intuitionistic proof, my own attitude is ambivalent. This proof seems to belong to intuitionistic higher-order logic, for which no formal standards are available at present. On the other hand, all proofs of the fan theorem which I have seen seem to be fallacious. Looking at the matter under this aspect, 'duplicating Brouwer's proof' [43] is a polite expression for imitating 'Brouwer's fallacy'."

[39] Voor F0, zie de supplementen. De opsomming van het klassieke deel naar Beth (1959*b*), p. 458; en van het intuïtionistische deel naar Beth (1959*b*), p. 459.

[40] Brief G. Kreisel – Beth, 18 december 1957, (Reading), p. 3.

[41] Brief A. Heyting – Beth, 19 januari 1958, (Notre Dame). Zie ook het nog te geven citaat uit de brief G. Kreisel – Beth, 23 maart 1958, (Reading), waarin een definitie van absoluut vrije keuzenrijen, en de brief Beth – G. Kreisel, 1 april 1958, waarin Beth instemt met Kreisels analyse.

[42] Brief Beth - G. Kreisel, 23 december 1957. Kreisel constateerde in zijn brief aan Beth van 30 december 1957 (Reading) dan ook terecht: "Since you are yourself in doubt about the intuitionistic completeness proof [...]."

[43] Zoals Kreisels opmerking in de brief G. Kreisel – Beth, 18 december 1957, (Reading), p. 3.

Beth hield zich bezig om in zijn intuïtionistische bewijs Brouwers waaierstelling te kopiëren waar eenvoudig toepassen wellicht een minder verwrongen en meer heldere bewijsgang had opgeleverd. Punt twee van kritiek behelsde de gebruikte modellen, semimodellen en hun onderlinge verhoudingen. In Beth (1959*b*) wordt slechts kort nader op de kritiek ingegaan: "it will not be necessary here to state these objections which have been raised, from different viewpoints, by A. Heyting and by K. Gödel and G. Kreisel. In my opinion, the difficulties are connected rather with the statement of the completeness theorem than with its proof. The hypothesis in the theorem can be restated as follows: All models $\mathcal{M}'$ which fulfil the conjunctive $A$ also fulfil the disjunctive $B$ [maar dan is de sequent $A \Rightarrow B$ afleidbaar in F0]." De consequenties, die uit deze overweging voortvloeien kunnen pas op het einde van het nog te behandelen bewijs worden besproken.

Over het klassieke bewijs werd dus welwillender geoordeeld. Volgens Kreisel gaf het klassieke bewijs eerder aanleiding om van daar uit bij een intuïtionistisch bewijs te komen dan het mede door Beth gegeven intuïtionistische bewijs.[44] Jammer voor Beth, maar het loskomen van de kritieken zat wel erg dicht aan tegen Beths tweede, op stapel staande, uitvoerige explicatie over dit onderwerp: Beth (1959*b*). In een brief in december 1957 naar Kreisel merkte Beth al op dat het hem onmogelijk was op de valreep onvolkomenheden in zijn volledigheidsstellingen te verbeteren: [45]

"So it seems better to include a summary of my material in its present state and to mention both the fact that certain objections have been raised and my own attitude on the above lines. I plan to go into the problem of intuitionistic higher-order logic when the book is ready. It is perhaps necessary to say that I do not plan to establish such a system in accordance with general requirements of a constructive character, but rather in agreement with intuitionistic mathematics as it stands."

Beth heeft deze plannen voor de Beth-modellen na het verschijnen van Beth (1959*b*) niet meer uitgevoerd. Formalisatie van en werken in een intuïtionistische hogere-orde-logica is door hem wel terloops bekeken, maar nooit echt beoefend. Hiermee zette Beth zich buiten spel: de rol van de diverse soorten sequenten, de recursieve functies en een steeds algemener wordende terminologie en constructiemethoden voor intuïtionistische begrippen werden door hem niet opgepakt. Dit apparaat werd bovendien niet voor niets gehanteerd. Zonder deze formaliseringen loopt men kans aan tal van zaken voorbij te gaan, anderzijds kunnen bij een te rigoureuze aanpak deze formaliseringen de eenvoud en de oorspronkelijke denkbeelden van Beth met hun onderlinge samenhang versluieren.

Het kan zijn dat Beth intussen meer geïnteresseerd was geraakt in de combinatie van Kripke-semantiek met de derivatieve logica van hemzelf. Beth reageerde nogal gelaten op Kreisels mededeling dat deze bezig was met een verbeterde versie van Beths bewijs. In een eerder stadium had hij aan Beth

[44](Kreisel 1956), brief G. Kreisel– Beth, 18 december 1957, (Reading).

[45]Brief Beth – G. Kreisel, 23 december 1957. In een latere brief van 1 april 1958 van Beth aan Kreisel brengt Beth dit nogmaals onder woorden.

geschreven: [46] “I regard your work as a very important contribution to the subject. For this reason it seems to me desirable to give a flawless proof of your result.” Drie jaar later kon hij aan Beth melden: [47] “During the summer we prepared at Stanford a *Project report* concerning the completeness of intuitionistic logic including (a) [...], (c) a very detailed version of your completeness proof with a full proof of its applicability to decidable subsystems, (d [...]” Onder (c) heeft men de verwijzing naar Dyson & Kreisel (1961). Beths laconieke antwoord luidde als volgt: [48] “I shall be very interested to see your *Project report*. If I do not find time to read it carefully, it would certainly provide excellent material for a seminar either by myself or by Heyting and me.” Er is wel in het Euratom-project door Beth ruimte gemaakt om de diverse rapporten van Kreisel te bestuderen. Een voorbeeld hiervan zijn de werkzaamheden van A. Ghose. Tot interessante resultaten heeft dit niet geleid.

### 10.1.2 Syntax en semantiek

De basis van Beths syntax werd gevormd door het intuïtionistische deel van G3 uit Kleene (1952*a*). Hiermee berustte indirect Beths syntactische basis op Heytings artikelen van begin jaren dertig. Aan de hand hiervan contrueerde Beth een systeem van tableausequenten. Dit werd later weer overgenomen in Dyson & Kreisel (1961).[49]

Betreffende het gehanteerde systeem F0 kan worden toegevoegd dat Beths semantiek (van tableausequenten) de op haar kop gezette syntax omvat: [50] “If read upside down, the above rules may also be construed as instructions for the construction of a semantic tableau.” Deze omdraaiing werd al geformuleerd in Beth (1956*d*), p. 363: “Before we continue the systematic development, it may be observed that the above clauses (1) — (8) may be interpreted as rules for the construction of semantic tableau Beth (1955*b*) for the sequent $A_1, A_2, \ldots, A_m \Rightarrow B_1, B_2, \ldots, B_n$.” Sequenten en tableausequenten zijn twee kanten van eenzelfde zaak volgens Beth (1959*b*), p. 450 (III).

Het algemene geval bestaat ook hier uit een sequent van de vorm $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_m$. In Beths notatie: de conjunctieve antecedentverzameling $[A_1, \ldots, A_n]$ en de disjunctieve succedentverzameling $\{B_1, \ldots, B_m\}$.[51]

Beth maakte ook voor de intuïtionistische tableausequenten gebruik van de disjunctieve (vel)- en conjunctieve (et)- splitsingen binnen het tableau.[52] In het bijzonder is de door Beth toegevoegde intuïtionistische sequentenregel 8 van

[46] Brief G. Kreisel – Beth, 19 december 1957, (Reading).
[47] Brief G. Kreisel – Beth, 11 november 1960, (Paris).
[48] Brief Beth – G. Kreisel, 5 december 1960
[49] Voor Beths sequenten, zie de supplementen.
[50] (Beth 1959*b*), p. 450.
[51] Twee lastige combinaties: niet te verwarren met haakjes voor commentaar of verzamelingen.
[52] Dergelijke splitsingen waren er bij Kleene ook al. Voor conjunctieve splitsingen heeft men de sluitingseis dat beide subtableaus gesloten moeten worden, voor de disjunctieve splitsingen minstens één.

belang: [53]

$$\text{F1959a.8.}\quad \frac{\Delta \Rightarrow A_1 \text{ [vel] } \Delta \Rightarrow A_2,\dots,A_k,A_1}{\Delta \Rightarrow A_1,A_2,\dots,A_k} \qquad \frac{\Delta \Rightarrow A \text{ [vel] } \Delta \Rightarrow \Gamma, A}{\Delta \Rightarrow A,\Gamma}\quad \text{F0.8.}$$

met de omkering voor de tableausequent (regel 8):

$$\frac{\Delta \Rightarrow A_1,A_2,\dots,A_k}{\Delta \Rightarrow A_1 \text{ [vel] } \Delta \Rightarrow A_2,\dots,A_k,A_1}$$

Hiermee schreef hij een permutatie van formules voor die regressie en oneindig lange takken kan veroorzaken. In Dyson & Kreisel (1961) komt regel 8 niet voor. Wel zijn daar toegevoegd de regels [DK61]-8a. 'als $A,\Delta \Rightarrow \Gamma$, dan $\Delta, A \Rightarrow \Gamma$' voor atoom $A$, en de regel [DK61]-8b. 'als $\Delta \Rightarrow A,\Gamma$, dan $\Delta \Rightarrow A$ [or] $\Delta \Rightarrow \Gamma, A$'. Het toevoegen van regel [DK61]-8a werd al eerder door R.O. Gandy aan Beth als wenselijk geuit om daarmee definitie 7.3 in Beth (1956*d*) algemener te maken.[54]

Men heeft met het in acht nemen van de voorschriften voor de tableausequenten (regel 8) te maken met een tableau-afwikkeling van de volgende vorm.[55]

$$\begin{array}{r|l}
\text{waar} & \text{niet waar?} \\ \hline
A_1 \wedge \cdots \wedge A_n & B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_m \\
A_1 & \\
\vdots & \\
A_n & \\
\text{[vel]} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|r|l}
B_1 & \text{[vel]} & B_2 \vee \cdots \vee B_m \vee B_1 \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
B_2 & B_3 \vee \cdots \vee B_n \vee B_1 \vee B_2 \\
 & \text{etc.}
\end{array}$$

De tableaus die men uit de tableausequenten ontwikkelt, zijn niet volledig oplopend met de voorschriften van de klassieke semantische tableaus. Naast het disjunctieve en het conjunctieve sluiten heeft men twee extra voorschriften voor de succedentaire negatie.

$$\text{ad regel 2b.}\quad \begin{array}{r|l}
\text{waar} & \text{niet waar?} \\ \hline
 & \Delta, \neg A \ [\ \Delta = \emptyset\ ] \\
A & \emptyset\ [\neg A \text{ verwijderd}]
\end{array}$$

Bovendien is het niet meer toegestaan, zoals bij semantische tableaus, overal in het succedent naar willekeur in de per stap verkregen tableausequenten formules te wisselen. De plaats van de 'meegenomen' formules is nu van belang, evenals de plaats van de net gebruikte (aan decompositie onderworpen) formule. Hiermee kan men repetitie en oneindig doorlopen van takken verkrijgen. Dit zijn we al eerder tegengekomen bij de derivatieve logica in het hoofdstuk 'Implicatieve systemen'

Als voorbeeld het tableau voor de sequent $\emptyset \Rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A)$: [56]

[53] F1959.8 is een uitgeschreven F0.8.
[54] Brief R.O. Gandy – Beth, 24 juni 1958, (Leeds).
[55] Naar Beth (1956*d*), p. 363.
[56] Naar Beth (1959*b*), p. 451.

$$
\begin{array}{r|l}
\text{juist} & \text{nog onbepaald} \\
\hline
 & \neg\neg(A \vee \neg A) \\
\neg(A \vee \neg A) & \emptyset \\
 & A \vee \neg A \\
\text{[vel]} & A, \neg A \\
\hline
\multicolumn{1}{|l}{A} & \multicolumn{1}{r|}{\text{[vel]}} \quad \neg A, A \\
 & \neg A \qquad\qquad\qquad \mid \; A, \neg A \\
A & \emptyset \\
 & A \vee \neg A \text{ [*]} \\
\text{[vel]} & A, \neg A \\
\hline
\multicolumn{1}{|l}{A} & \multicolumn{1}{r|}{} \quad \neg A, A
\end{array}
$$

De $A \vee \neg A$ met * op rechts vanwege de door regel 8 toegestane herhaling van $\neg(A \vee \neg A)$ op links (uit de hoogste kolom als de directe reductie van $\neg\neg(A \vee \neg A)$) en met de omzetting daarvan naar $A \vee \neg A$ op rechts [*]. In het tableau sluit het disjunctief samenhangende tableau op de onderste linkertak vanwege $A \mid A$, en sluit vanwege de disjunctieve samenhang het volledige tableau.[57] $\neg\neg(A \vee \neg A)$ levert een sluitende tableau op — en naar men later zal zien $A \vee \neg A$ een niet sluitend tableau. Dergelijke voorbeelden bieden evenzovele illustraties bij Brouwer (1923), p. 877:

"De klassieke opvatting postuleert voor iedere eigenschap het alternatief van juistheid en ongerijmdheid van ongerijmdheid. Voor de intuïtionistische opvatting is ongerijmdheid van ongerijmdheid weliswaar een gevolg van juistheid, doch niet met juistheid aequivalent, terwijl het alternatief van ongerijmdheid of ongerijmdheid van ongerijmdheid evenmin wordt erkend als dat van juistheid of ongerijmdheid." [58]

In Beth (1956*d*), p. 364 wordt voor $\neg\neg(A \vee \neg A)$ ook een 'syntactische' afleiding gegeven, waarbij het tableau op zijn kop wordt gezet, te beginnen met $\neg(A \vee \neg A), A \Rightarrow A$ en eindigend met $\emptyset \Rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A)$. Hier doen alleen de takken mee die betrokken zijn bij het eindresultaat. De oneindige takken vallen daarmee al meteen af.

**Waarden en kolomnamen** Het zal de lezer opgevallen zijn dat in de voorafgaande kolomnamen sprake was van 'waar' vs. 'niet waar?' en van 'juist' vs. 'nog onbepaald'. Beth gebruikte in publicaties 'waar' vs. 'niet waar?'. In zijn brief van 18 november 1955 aan Heyting had hij het over 'bepaald' vs. 'onbepaald'. Men kan zich ook aansluiten bij het huidige taalgebruik: 'bewijsbaar' vs. '(nog) niet bewijsbaar'. Hier zal de voorkeur aan 'juist' vs. 'nog onbepaald'

[57] Voorbeeld naar (Beth 1956*d*), p. 364; (Beth 1959*b*), p. 451].

[58] En Brouwer vervolgt: "Een sequentie van $n$ ongerijmdheidspraedicaten [...] kan volgens de klassieke opvatting door herhaalde schrapping telkens van twee op elkaar volgende dezer praedicaten hetzij tot ongerijmdheid, hetzij tot juistheid worden herleid. Men zou nu een ogenblik kunnen menen, dat voor de intuïtionistische opvatting dergelijke schrappingen geheel zijn uitgesloten, en dat dientengevolge sequenties van ongerijmdheidspraedicaten van verschillend aantal steeds ongelijkwaardig zouden moeten zijn. Dit is echter niet het geval; integendeel zijn de bedoelde schrappingen ook voor de intuïtionistische opvatting geoorloofd, *mits het laatste ongerijmdheidspraedicaat der sequentie er van uitgesloten blijve* [...]. Voor de intuïtionistische opvatting is [...] een eindige sequentie van ongerijmdheidspraedicaten te herleiden hetzij tot *ongerijmdheid van ongerijmdheid*, hetzij tot *ongerijmdheid*." Cursief door Brouwer.

worden gegeven, zoals al in het laatste voorbeeld is toegepast. Helemaal triviaal was dit niet. Heyting meende in 1955: [59] "Je ne comprends pas en quoi l'échec d'une tentative de dérivation d'une formule fournit un contre-exemple. Il me paraît que M. Beth introduit une valeur logique *indéterminée* à côté du vrai et du faux, ce qui ne correspond pas à l'interprétation de la logique intuitionniste." Wellicht had Heyting nog te zeer de drie waarden van M. Barzin en A. Errera in herinnering. Beth gebruikte in zijn Parijse 1955' lezing het tweetal 'vrai' en '(faux)', waarbij '(faux)' niet voor 'faux' staat, maar de rol van 'nog onbepaald' vervult. Beth hanteerde zeker niet het drietal 'vrai', 'faux' en 'indéterminée'.[60]

## 10.2 Constructie van Beth-modellen

Tot nu toe heeft men met tableaus en tegenmodellen te maken gehad. Afgezien van de vraag of de door Beth voorgeschreven regels voor de tableausequenten adequaat zijn, moeten ze ook intuïtionistisch aanvaardbaar zijn. Beth heeft hiertoe omvormingen bedacht die de boodschap van de tegenmodellen en tableaus onverlet laten, maar bovendien de intuïtionisten tevreden moeten stellen. Eerst moeten bomen (spreidingen) met hun bewerkingen vastgelegd worden evenals manier waarop men te werk gaat om een model voor een formule te vinden d.m.v. de reductie van zo een formule.

### 10.2.1 Boomconstructies

Beth-modellen worden ook wel boommodellen genoemd. De boom staat op zijn kop, men loopt vanaf de oorsprong naar beneden.
◦ — *boom* $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} =< \mathtt{B}, O, P, R, f, F >$, is een partiëel geordende verzameling:

- ◦ $\mathtt{B}$ is de verzameling van de elementen (knopen, punten) $p, p_1, \ldots, q, q_1, \ldots$.
- ◦ *Relatie* $R$ is een relatie tussen elementen van $\mathtt{B}$ en geeft de ordening op $\mathtt{B}$ aan. $R(p, q)$ speelt de rol van directe opvolger-relatie: q volgt direct op p. Vanwege het binaire splitsen kunnen er maximaal twee directe opvolgers zijn; dit i.t.t directe voorganger: voor elke knoop $q$, $q \neq O$, is er precies één knoop $p$ met $R(p, q)$.
- ◦ Een boom heeft één begin, de *oorsprong* $O$, en één of meer eindknopen (bladeren). Het begin kan ook de eindknoop zijn. Tussen de oorsprong en de eindknopen lopen takken die door knopen en hun orde bepaald worden.

[59] Zie de 'interventions' achter Beth (1958*a*) op p. 84.

[60] Grofweg vloeien deze overwegingen voort uit de aanname dat men een bewering $A$ op een bepaald moment met 'waar' kan omschrijven, als men op dat moment voldoende grond heeft om die bewering $A$ te bewijzen (en in dit geval: constructief bewijzen). Als 'nog onbepaald', wanneer men dit nog niet kan: een dergelijke bewering $A$ is dus niet onwaar, maar ook niet waar op zo een moment (in zo een situatie). Als men een bewering $\neg A$ (ofwel '$A$ leidt tot ongerijmdheid') heeft onder 'waar' of 'bepaald', wil dat zeggen dat op een bepaald moment men niet alleen $A$ niet kan bewijzen, maar dat dit ook niet vanaf dat moment eens wel mogelijk zou kunnen zijn op een later moment.

- *Vertex* (eerste vertakkingspunt). Hiermee wordt het eerste punt $P$ bedoeld van waaruit de (deel) boom gaat splitsen: het is het vertakkingspunt met het kleinste $f$-getal (zie lager). De nul-boom bevat geen enkel punt.
- *Tak* $t$ (pad $t$, en voor Beth pas in latere instantie een keuzerij) is een maximaal lineair geordende verzameling binnen een boom (een tak kan dus niet splitsen, maar wel over een splitsing lopen); een tak is ook een boom.
- *Functie* $f$ (rank): de toekenning van een getal aan een knoop; dat getal geeft aan hoe ver een knoop van de oorsprong verwijderd is. De functie $f$ geeft daarmee de gelaagdheid aan van de boom: $f(O) = 1$ en als $R(p,q)$, dan $f(q) = f(p) + 1$. Voor elke $k \leq f(P)$ ($P$ is vertex) is er precies één knoop $p$ met $f(p) = k$. Hiermee wil Beth zeggen dat er tussen de oorsprong en de vertex geen splitsingen kunnen zijn. Met de functie $f$ kan men de lengte van de takken vaststellen en kijken welke de langste is (of zijn).
- *Functie* $F$: deze heeft als domein $\mathtt{B}$ en als waardenbereik een andere verzameling; in ons geval van de nog te formuleren Beth-modellen bestaat deze uit formuleverzamelingen (disjunctieve en conjunctieve). Bij de formulering van de boomconstructie sec is $F$ eigenlijk overbodig.

Er is een tweetal begrippen dat nadere aandacht vraagt: deelboom en afknotting. Dit zijn twee onmisbare bouwstenen bij de constructie van Beths volledigheidsbewijzen. Op de deelboom definieerde Beth semimodellen en deze werden op hun beurt gebruikt om geldigheid te definieren.[61] Door de afknotting verkrijgt Beth de ondergrenzen die hij nodig heeft in zijn intuïtionistische volledigheidsbewijs, en om zijn variant op de waaierstelling rond te krijgen.

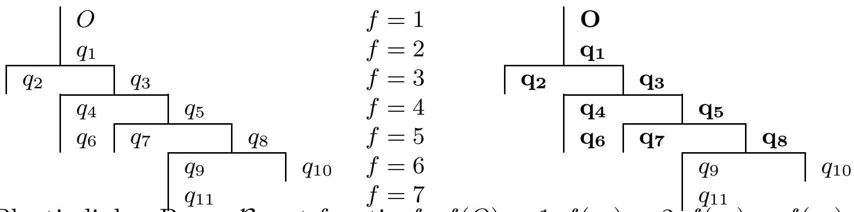
- *Deelboom* (onderboom, bar): voor een punt $p \in \mathtt{B}$ is $\mathcal{B}^p =< \mathtt{B}^p, O, p, R^*, f^*, F^* >$ een boom, gerelateerd aan de boom $\mathcal{B} =< \mathtt{B}, O, P, R, f, F >$. $\mathtt{B}^p$ bestaat uit alle $q \in \mathtt{B}$ die op een tak liggen waarop ook $p$ ligt. Punt $p$ kan natuurlijk op een aantal takken liggen: men heeft dan te maken met een vereniging waarbij de knopen vanaf de oorsprong tot en met $p$ gemeen zijn. Vergelijk dit begrip met dat van de omgeving van $p$, zoals in de nog te behandelen topologische beschrijving.
- Boom $\mathcal{B}$ heet de *vereniging* van zijn eindig vele deelbomen $\mathcal{B}', \mathcal{B}'', \ldots$, als $\mathtt{B}$ de vereniging is van de verzamelingen $\mathtt{B}', \mathtt{B}'', \ldots$. En omgekeerd heet de opsomming van de eindig vele deelbomen $\mathcal{B}', \mathcal{B}'', \ldots$ van boom $\mathcal{B}$ de *decompositie* van die boom $\mathcal{B}$, als eveneens $\mathtt{B}$ de vereniging is van de verzamelingen $\mathtt{B}', \mathtt{B}'', \ldots$.
- *Afknotting* (trunk) $\mathcal{B}_k =< \mathtt{B}_k, O, P^*, R^*, f^*, F^* >$ is een boom, gerelateerd aan een boom $\mathcal{B} =< \mathtt{B}, O, P, R, f, F >$: men neemt een bepaald f-niveau, hier $k$, en snijdt over dat punt de boom als het ware horizontaal doormidden: men blijft derhalve een boom houden, maar deze bestaat

[61] In de literatuur wordt 'deelboom' soms ook gebruikt i.p.v. semimodel (bijvoorbeeld door Kreisel). Het omgekeerde gaat niet altijd op volgens Beth.

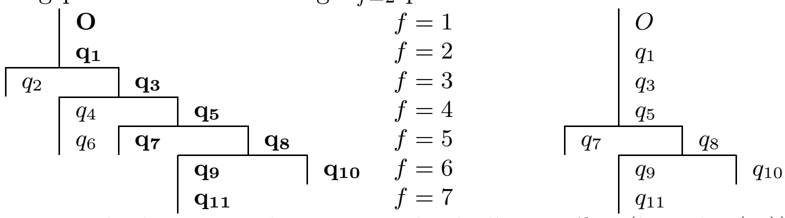
alleen uit een 'topstuk' van de oorspronkelijke boom tot op de punten $p$ met $f(p) = k$. Hierbij: $\mathtt{B}_k = \{p \in \mathtt{B} | f(p) \leq k\}$, $P^*, R^*, f^*, F^*$ zijn de restricties van $P, R, f, F$ tot $\mathtt{B}_k$, en $P^* = P$, als $f(P) \leq k$, en $P^* = O$ anders. In het laatste geval ligt het eerste vertakkingspunt van de boom onder de grens van waaruit men de afknotting neemt: de afknotting loopt in dit geval over een aantal lineair liggende knopen en neemt men per definitie $O$ als 'eerste vertakkingspunt'.

- *Constructie* van een boom $\mathcal{B}$ is elke rij van *afknottingen* van $\mathcal{B}$ waarvan de lengten een bovengrens $k$ hebben d.e.s.d. als $k$ de lengte van $\mathcal{B}$ (d.w.z. de lengte van de langste tak van $\mathcal{B}$) is.

**Voorbeeld.**




a. Plaatje links. Boom $\mathcal{B}$ met functie $f$: $f(O) = 1, f(q_1) = 2, f(q_2) = f(q_3) = 3, f(q_4) = f(q_5) = 4, f(q_6) = f(q_7) = f(q_8) = 5, \ldots$ De vertex $P$ bestaat uit $q_1$ met $f(q_1) = f(P) = 2$ Takken: $< O, q_1, q_3, q_4, q_6 >, < O, q_1, q_3, q_5, q_7 >, \ldots$
b. Plaatje rechts (vet). De (afknotting $\mathcal{B}_{f=5}$) met: $\mathtt{B}_k$ van afknotting $\mathcal{B}_k$ voor $k = 5$ bestaat uit: $\{O, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8\}$. De vertex van afknotting $\mathcal{B}_5$ bestaat uit $q_1$. Stel dat men geknot zou hebben op $f = 2$, dan zou het eerste vertakkingspunt van de afknotting $\mathcal{B}_{f=2}$ per definitie uit $O$ bestaan.




In bovenstaand plaatje wordt met vet de deelboom $\mathcal{B}^{q_5}$ (bar, $bar(q_5)$) van boom $\mathcal{B}$ weergegeven. De $\mathtt{B}^p$ van deelboom $\mathcal{B}^p$, en voor $p = q_5$, bestaat uit: $\{O, q_1, q_3, q_5, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}\}$. De vertex $P^*$ van deelboom $\mathcal{B}^{q_5}$ is $q_5$, met $f(q_5) = f(P^*) = 4$.

## 10.2.2 Definities voor modelconstructies

### Geldigheid en model

**Semimodel.** Beth definieerde met behulp van bomen, deelbomen en afknottingen een model. Ten behoeve van model formuleerde Beth eerst semimodel. Een *semimodel* $\mathcal{M}$ is een boom $< \mathtt{B}, O, P, R, f, F >$. Nu gaat de functie $F$ een rol spelen: de waarden $F(p)$ van de functie $F$ zijn de formules op een punt

$p$. In Beths lezing uit 1955 (Beth 1958*a*), p. 80 wordt een semimodel als een binaire boom genomen waarvan elk punt hoogstens met één formule (in de latere versies: conjunctieve/ disjunctieve verzameling) gecorreleerd is.

*Geldigheid* wordt met behulp van een semimodel gedefinieerd. Dus nu eerst een omschrijving van de voorwaarden die worden opgelegd aan een semimodel. Per te behandelen item zal als korte verklaring de formulering uit Beths lezing van 1955 (Beth 1958*a*) en Beth (1956*d*) gebruikt worden; bovendien wordt ook kort de syntactische notie vermeld).[62]

In later tijd worden onderstaande relaties aangeduid met behulp van forceren (*forcing*) en gebruikt men het symbool $\Vdash$ [en '$\nVdash$' voor 'niet $\Vdash$' ] daartoe. Kort zal dit ook bij sommige items vermeld worden.[63] Een verdere toevoeging bestaat uit valuatiefuncties $v, v(A,p) = 1$ of 0 en voor $p, q$ met $R(p,q)$ [$q$ directe opvolger van $p$]: $R(p,q)$ en $v(A,p) = 1$, dan $v(A,q) = 1$. Voor elementaire logica heeft men bovendien een domein nodig. Een duidelijke vermelding waaruit zijn domeinen bestaan, ontbreekt bij Beth.
Men kan ook formuleren met takken in de vorm van keuzerijen, in dit geval absoluut vrije keuzerijen[64] (notatie: $\forall\alpha \in p$: alle takken (rijen) die door punt $p$ lopen, en ten opzichte waarvan punt $p$ de rol van vertex vervult). Beth nam aanvankelijk afstand van keuzerijen; men kan wel zijn geldigheidsdefinitie gaan interpreteren met keuzerijen.[65]

Een *formule A heet geldig* op het semimodel $\mathcal{M}(\mathcal{M} \models A)$ onder:

1. $A$ is atomair, $\mathcal{M} \models A$, en $\mathcal{M}$ als volgt gedefinieerd: $\mathcal{M} = \bigcup_{i\in \mathtt{I}} \mathcal{M}^{p_i}$, $\mathtt{I}$ eindig ($\mathcal{M}^{p_i}$ deelboom) z.d.d. met elk van de eerste vertakkingspunten (vertices), $p_1, p_2, \ldots$, $A$ zelf of een conjunctie waarin $A$ optreedt, gecorreleerd is — ofwel $A$ komt op elke tak van $\mathcal{M}$ voor.

   Forcing: met een expliciet vermelde valuatie zou men het als volgt kunnen uitdrukken: voor een knoop $p$, $p \Vdash A$ d.e.s.d. als er een 'bar', zeg $bar(p)$, voor knoop $p$ bestaat z.d.d. voor alle $q \in bar(p), v(A,q) = 1$. Met rijen en met verwijzing naar een domein en een éénplaatsig predicaat: $p \Vdash P(a)$ onder $\forall\alpha \in p\exists n(\overline{\alpha}n \Vdash P(a))$.

   Syntactisch: men beschikt over een constructie om $A$ te bewijzen.
2. $A = \neg B$, en niet voor elke deelboom $\mathcal{M}^p$ van $\mathcal{M}$ geldt $\mathcal{M}^p \models B$ — ofwel $\mathcal{M}$ vervult geen enkele deelboom $\mathcal{M}^*$ die $A$ vervult.

   Forcing: $p \Vdash \neg A$ als voor alle $q$ die opvolger zijn van $p$: $q \nVdash A$.

   Syntactisch: men beschikt over een constructie waarin vervat dat de opbouw van de vereiste constructie van $A$ ergens tot tegenspraak leidt.

---

[62] Vergelijk hiermee de in de supplementen gegeven sequenten en tableausequenten voor intuïtionistische logica. De benummering daar en hier lopen met elkaar op.

[63] Zie hiertoe ook (Troelstra & van Dalen 1988), p. 677 e.v. en (van Dalen 1986), p. 249 e.v.

[64] Zie ook Troelstra (1977), hoofdstuk 7: 'Choice sequences and completeness of intuitionistic predicate logic'. Voor de absoluut vrije keuzerijen, zie Kreisel (1958*b*); behandeling later in dit hoofdstuk.

[65] In **?**) werd er nog geen afstand tot de keuzerijen genomen, blijkbaar is dit pas later ontstaan.

3. $A = B \wedge C, \mathcal{M} \models B$ en $\mathcal{M} \models C$ — ofwel $\mathcal{M}$ vervult $B$ en $C$; zie onder punt 1, maar dan voor $B$ en $C$; $\mathcal{M} \models [A_1, \ldots, A_n]$, als voor alle $A_i$ geldt: $\mathcal{M} \models A_i$.

   Forcing: $p \Vdash A \wedge B$, onder: $p \Vdash A$ en $p \Vdash B$.
4. $A = B \vee C, \mathcal{M} = \bigcup_{i \in \mathtt{I}} \mathcal{M}^i$, $\mathtt{I}$ eindig, $\mathcal{M}^i$ deelboom van $\mathcal{M}$, en $\mathcal{M}^i \models B$ of $\mathcal{M}^i \models C$ — ofwel $\mathcal{M}$ is de vereniging van een eindig aantal deelbomen waarvan elk de formule $B$ of de formule $C$ vervult. Evenzo $\mathcal{M} \models \{A_1, \ldots A_n\}$, als $\mathcal{M} = \bigcup_{i \in \mathtt{I}} \mathcal{M}^i$, $\mathtt{I}$ eindig en $\mathcal{M}_i$ is deelboom van $\mathcal{M}$, en voor alle $i \in I$ is er minstens één $k, 1 \leq k \leq n$, met $\mathcal{M}_i \models A_k$.

   Forcing: $p \Vdash A \vee B$, onder: er bestaat een $bar(p)$ z.d.d. voor alle $q \in bar(p)$: $q \Vdash A$ of $q \Vdash B$. Met als takken (keuzerijen): $\forall \alpha \in p \exists n (\overline{\alpha} n \Vdash A$ of $\overline{\alpha} n \Vdash B)$
5. $A = B \rightarrow C$, als er een deelboom $\mathcal{M}^*$ van $\mathcal{M}$ is met $\mathcal{M}^* \models B$, dan ook $\mathcal{M}^* \models C$ — ofwel elke deelboom $\mathcal{M}^*$ van $\mathcal{M}$ die $B$ vervult, vervult ook $C$.

   Forcing: $p \Vdash A \rightarrow B$ d.e.s.d. als voor alle directe opvolgers $q$ van $p$ geldt: als $q \Vdash A$, dan ook $q \Vdash B$.

   Syntactisch: men beschikt over een procedure die, uitgaande van de constructie om $A$ te bewijzen, automatisch (machinaal) een constructie om $B$ te bewijzen oplevert.
6. $A = \forall x B x$, en voor alle formules $B(a_1), B(a_2), \ldots$ : $\mathcal{M} \models B(a_1)$, en $\mathcal{M} \models B(a_2)$, en $\ldots$— ofwel $\mathcal{M}$ vervult alle formules $B(a_1), B(a_2), \ldots$.

   Forcing: $p \Vdash \forall x B(x)$ onder: voor alle $a$ in het domein, $p \Vdash B(a)$.

   Syntactisch: men beschikt over een procedure om voor elke $a$ een bewijs te leveren van $B(a)$.
7. $A = \exists x B x, \mathcal{M} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{M}^i$, $I$ eindig, $\mathcal{M}^i$ deelboom van $\mathcal{M}$, en voor alle $\mathcal{M}^i$ is er een $B(a_k)$, met $\mathcal{M}^i \models B(a_k)$ — ofwel $\mathcal{M}$ vervult $B(a_k)$ voor een zekere $k$. Of iets anders geformuleerd: $\mathcal{M}$ is de vereniging van eindig veel deelbomen voor elk waarvan een index $k$ gevonden kan worden zodat $B(a_k)$ daarop geldig is.

   Forcing: $p \Vdash \exists x B(x)$ d.e.s.d. als er een $bar(p)$ bestaat z.d.d. voor alle $q \in bar(p)$: er een $a$ in het domein bestaat, met $q \Vdash B(a)$. Rijen: $\forall \alpha \in p \exists n \exists a (\overline{\alpha} n \Vdash B(a))$.

   Syntactisch: men beschikt over een procedure om een $a$ te vinden en daarbij het bewijs van $B(a)$ te leveren.
8. $A$ is een willekeurige formule, en $\mathcal{M}$ is een lege boom.

Aan de punten 3 en 4 kan een algemenere formulering worden toegevoegd: als een formule, conjunctie of disjunctie geldig is op een semimodel $\mathcal{M}$, dan is deze ook geldig op elke deelboom $\mathcal{B}'$ van $\mathcal{M}$. Evenzo: als $\mathcal{M}', \mathcal{M}'', \ldots$ een eindige decompositie is van semimodel $\mathcal{M}$ en als op al die deelbomen een formule, conjunctie of disjunctie geldig is, dan zijn deze ook geldig op semi-model $\mathcal{M}$ zelf.

**Model.** Een *model* is een semimodel dat voldoet aan de volgende eisen:

1. Het semimodel niet de lege boom is.
2. Wanneer een formule $A$ (of een k-ledige conjunctie of disjunctie $A$) die gecorreleerd is met een punt $p$ op $\mathcal{M}$, dan ook geldig is op de deelboom $\mathcal{M}^p$ van $\mathcal{M}$ (dus $\mathcal{M}^p \models A$).

Na de nog te bespreken decompositie deelt men een semantisch boommodel in tweeën: het conjunctieve model $\mathcal{M}$ met alleen de juiste formules en het disjunctieve model $\mathcal{N}$ met alleen de nog onbepaalde formules. Bovenstaande voorwaarden gelden voor de conjunctieve boom, d.w.z. het conjunctieve model, alsook voor de disjunctieve boom (het disjunctieve model). De relatie tussen semimodel en model, tezamen met de omschrijving van de interpretatie van de operatoren, ligt evenwel niet zo eenvoudig als hier gesuggereerd wordt.

*Semimodel en submodel* Een semimodel is niet een submodel in de klassieke betekenis van dat woord.[66] Een semimodel is een model in potentie, maar hoeft dit niet te worden De klassieke submodellen liggen netjes vast (hun uitbreiding is een model en zij zijn het zelf ook), semimodellen kunnen daarentegen afvallen vanwege interne inconsistentie en daarmee niet een model implementeren. Een verschilpunt is ook dat bij semimodellen het domein wel, bij klassieke submodellen het domein niet kan veranderen. De klassieke submodellen kan men binnen deze context interpreteren als subruimten (zie hiertoe ook de laatste sectie van dit hoofdstuk). De rol van de semimodellen zal de oorzaak ervan zijn dat Beths intuïtionistisch uitgevoerde volledigheidsbewijs niet geheel zal voldoen, zoals hij zelf ook inzag.

**Takken.** Men kan de takken gebruiken bij de karakterisering van formules. Hier zal Beth (1959*c*), pp. 17–18, geparafraseerd worden tezamen met een formulering (niet door Beth) met forceren uit later tijd:

- Formule $A$ heet *verzekerd* (Beth: secured) op een tak, als die tak in een deelboom zit waarop $A$ geldig is.

  Forcing: $p \Vdash A$ onder: er bestaat een $bar(p)$ z.d.d. voor alle $q \in bar(p)$, $q \Vdash A$.
- Formule A heet *ongerijmd* op een tak, als die tak in een deelboom zit waarop $\neg A$ geldig is.

  Forcing: $p \nVdash A$, onder: er bestaat een tak $\sigma$ door $p$ z.d.d. voor alle andere punten $q$ op $\sigma$, $q \nVdash A$ (dit item is door contrapositie uit de voorgaande voorwaarden af te leiden).
- *Beslisbaarheid op een tak*, als $A$ of $\neg A$ geldig is op een deelboom waarin die tak zit; m.a.w. $A \vee \neg A$ is geldig op een deelboom, $A \vee \neg A$ is zeker gesteld op die tak.

[66] Ook in recentere literatuur wordt van semimodellen gebruik gemaakt: als ‘possibly inconsistent models’ in Troelstra (1977), p. 125, als ‘fallible Beth model’ in Troelstra & van Dalen (1988), p. 690, en soms als ‘exploding models’ (de Swart), hoewel dit niet volledig de lading dekt.

**Domeinen.** In verband met de juiste intuïtionistische weg is ook de keuze van de domeinen niet van belang ontbloot. Volgens Beth in een brief aan Kreisel heeft dit te maken met het omzetten van bomen (boom-modellen) in de gebruikelijke modellen.[67] Veelal worden de parameters $1, 2, 3\ldots$ of ook $a, b, \ldots$ opgevat als natuurlijke getallen en neemt men als domein de verzameling van alle natuurlijke getallen.

In 1960 was Beth na de nodige brieven van Kreisel voorzichtiger geworden. Voor het klassieke geval is het een triviale uitbreiding van niet lege verzamelingen natuurlijke getallen naar de verzameling van alle natuurlijke getallen; daarentegen: [68] "Intuitionistically, it would not be possible, in general, to duplicate this extension, and thus we have to account for very strange non-empty sets S, such as a set which contains only either 1 or 2 but not both. And the restriction of a primitive recursive function to S might behave in a very strange manner. —But this is not meant as anything but a very loose remark."

Naar analogie van Brouwer en Heyting kan men volgens Beth modellen nemen, waarin voor $1, 2, 3, \ldots$ takken in een boom genomen worden en als domein de species (ofwel de intuïtionistische acceptabele verzameling) van alle vrije keuzerijen in de waaier die door dezelfde boom gerepresenteerd wordt. Beth: [69] "presumably a great variety of models could be constructed in this manner."

**Enkele voorbeelden.** Er worden hier twee voorbeelden gegeven: een eerste laat zien hoe men met semimodellen en de modelregels moet werken; het tweede over de moeilijkheden in het verleden en de oplossingen in het, toenmalige, heden.

*Voorbeeld.*

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
 & \forall x(A \vee B(x) & & & \\
q_1, F(q_1) = A & & B(1) & & \\
 & q_2, F(q_2) = A & & B(2) & \\
 & & & \vdots & \\
 & & q_k, F(q_k) = A & & p, F(p) = B(k)
\end{array}$$

Als volgt dient naar (Beth 1956*d*), p. 360–361 ((Beth 1959*b*), p. 447–448) dit voorbeeld geïnterpreteerd te worden. Uit de voorafgaande definitie van geldigheid voor semimodel geldt:

A. a. Uit modelregel 1 (atomair): $\mathcal{M}^{q_1}, \ldots, \mathcal{M}^{q_k} \models A$ en $\mathcal{M}^p \models B(k)$; b. Maar dan over modelregel 4 (disjunctie): $\mathcal{M} \models A \vee B(k)$; c. Modelregel 4 gaat op voor $k = 1, 2, \ldots$, maar dan over modelregel 6 (universele quantificatie): $\mathcal{M} \models \forall x(A \vee B(x))$.

B. Er is echter geen decompositie van $\mathcal{M}$ in eindig veel deelbomen, waarop elk daarvan $A$ of $\forall x B(x)$ geldig is. Hierdoor $\mathcal{M} \not\models A \vee \forall x B(x)$ en $\mathcal{M} \not\models \{A, \forall x B(x)\}$. Dit laatste heeft als gevolg, dat hiermee een tegenmodel wordt geleverd voor $\forall x(A \vee B(x)) \Rightarrow A \vee \forall x B(x))$.

[67]Brief Beth — G. Kreisel, 27 februari 1958.
[68]Brief Beth – G. Kreisel, 12 maart 1960.
[69]Brief Beth – G. Kreisel, 27 februari 1958.

*Voorbeeld* Het tweede voorbeeld laat enigzins zien dat vóór de systematische aanpak van intuïtionistische semantiek de beoordeling van het waarheidsgehalte van bepaalde formules moeizaam was. Kleene (1952*a*), p. 513, merkte op, als commentaar aan de vlak daaraan voorafgaande stelling: "The formula $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ is classically provable, and hence under classical interpretation true. But it is unrealizable. So, if realizability is accepted as a necessary condition for intuitionistic truth, it is untrue intuitionistically, and therefore unprovable not only in the present intuitionistic formal system, but by any intuitionistic methods whatsoever." Daarentegen zei Kleene (1952*a*), p. 513, over de negatie hiervan (en dit is dan de stelling, waarvan Kleenes commentaar daarop net vermeld is): "The formula $\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ (although the negation of a classically provable formula) is realizable."

Kreisel wilde graag weten of Heyting $\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ intuïtionistisch bewijsbaar achtte met $\exists z T_1(x, x, z)$ voor $A(x)$ gesubstitueerd — d.w.z. men beschouwt $\neg\forall x\ (\exists z T_1(x, x, z) \vee \neg\exists z T_1(x, x, z))$.[70] Heytings antwoord luidde: [71] "I do not know whether it is provable. That does not mean that I assert that it is undecidable. I do not know whether realizablity is sufficient for intuitionistic truth, nor do I know whether it is necessary." [72]

Ook Beth had nog wat te verhalen op Kleene. In 1957 tijdens het intuïtionismecongres in Amsterdam, waar Heyting en Kleene onder de toehoorders waren, besprak Beth soortgelijke formules, maar dan gerelateerd aan takken (takkenbundels) van boommodellen. Beth ging er van uit dat, als een propositie $P$ beslisbaar is, men dan $P \vee \neg P$ heeft. Dit werkte Beth uit in twee lezingen, in Ithaca (Beth 1957*b*), p. 119, en later in hetzelfde jaar in Amsterdam (Beth 1959*c*), 16–18. Een voorbeeld van formuleringen uitgaande van takken uit Beth (1957*b*), p. 120 (appendix) is de vraag of $\forall x\forall y(S(x, y) \vee \neg S(x, y)), \forall x\forall y(T(x, y) \vee \neg T(x, y)), \forall x(P(x) \leftrightarrow \exists y S(x, y)), \forall x(\neg P(x) \leftrightarrow \exists y T(x, y)) \Rightarrow \forall(P(x) \vee \neg P(x))$ intuïtionistisch geldig is onder de voorwaarde dat $S$ en $T$ beslisbaar zijn.[73] Bovenstaande valt volgens Beth te halen uit Kleene (1952*a*), p. 284, stelling 8. Wij hebben al eerder gezien dat in 1953 Beth door Heyting ervan weerhouden werd, zijn denkbeelden publiek te maken. Nu, met zijn Beth-modellen kon hij beweren: "Kleene's theorem [...] seems to suggest an affirmative answer to this question. However, in accordance with the semantic rules, stated in Beth (1956*d*), the tree below [(Beth 1959*c*), p. 17] provides a counter-model to our

[70] Voor $T_1(x, y, z)$, zie het hoofdstuk over deductieve tableaus, i.h.b. de sectie over de kortste variant.

[71] Brief A. Heyting – G. Kreisel,12 juli 1955, (Heyting-archief, brieven Kreisel).

[72] Gezien de talloze voorstellen en opmerkingen van Kreisel, die Heyting blijkbaar boven het hoofd groeiden (Beth was niet de enige die daar last van had), voegde Heyting er nog aan toe: "I understand in which sense you assert that Kleene's thesis is wrong; I do not see that you give a mathematical proof for the fact that it is wrong. I do not think that the introduction of Wahlfolgen [keuzerijen] is essential at this point. Intuitionistically we may restrict the discussion to sequences which are defined by some law; then still the question rises whether such a function is always recursive. [En Heyting eindigde met de wanhoopskreten:] I am not satisfied with your proof of [...]. I do not see [...]."

[73] In zijn Amsterdamse lezing in 1957, het latere Beth (1959*c*), was de formulering eenvoudiger: $\forall x(S(x) \vee \neg S(x)), \forall x(T(x) \vee \neg T(x)), P \leftrightarrow \exists x S(x), \neg P \leftrightarrow \exists T(x) \vdash P \vee \neg P$.

sequent."

Over de methode hiertoe merkte Beth nog op: "However, such questions are not discussed, in intuitionistic mathematics, in terms of truth and falsehood, but rather in terms of securedness and absurdity."

### Keuzerijen

**Afwijzing en gebruik.** Het niet gebruiken van keuzerijen was een welbewuste keuze in Beth (1956*d*), p. 385. Twee redenen vallen hier al te noemen, de derde (en belangrijkste) komt later aan bod:

1. "I have attempted to give a classical treatment along with the intuitionistic argument; therefore I could not deviate too far from the classical way of speaking."
2, "I have no reason to be more consistently intuitionistic than the intuitionists themselves."

In een brief aan Kreisel vermeldde Beth: [74] "One of these days I discussed my paper [Beth (1956*d*)] [with] Heyting, who also has objections to my intuitionist completeness proof. I think that the difficulties are connected with the point discussed on p. 29 of my paper, in particular lines 5–7, 17–18 and 24–34" Deze regels maken deel uit van de sectie 10: 'Intuitionistic comments: higher-order logic'. Hierin gaat Beth in op Brouwers hoofdstelling en de wijze waarop deze bij Beth optreedt als een vereenvoudigde variant daarvan: "Accordingly, if 'translated' into our terminology, the Fundamental Theorem becomes trivial." Dit gaf in Kleene's recensie al aanleiding tot kritiek. Beth ging evenwel nog een stap verder, vooral in de door hem vermelde p. 29, regels 24–34. Daar zegt hij: "I have avoided referring to all choice sequences (or branches), but I have been constantly speaking of all semi-models and of all models."

Waar ligt de vorming van keuzerijen bij Beth? Deze verkrijgt men volgens Kreisel door de functie $h$ (definitie 7.8 in Beth (1956*d*)).[75] $h$ is beslisbaar geconstrueerd (een groot deel van de ingewikkelde constructie van Beth (1956*d*) heeft dit ten doel). Men gaat daarmee uit van de sequent $C \Rightarrow D$ [$C$ conjunctie, $D$ disjunctie] en de waaier $\mathcal{M}$ met zijn isomorfe (hulp)waaier $\mathcal{N}$. De elementen van $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ zijn eindige rijen formules. Vanuit de oorsprong construeert men semimodellen, daarnaast heeft men te maken met waaiers $\mathcal{M}^h$ en $\mathcal{N}^h$: deze worden door $h$ opgeroepen. Beth: "[L]et $h$ be a function which associates, with every rank k, a set $h(k)$ of points of rank $k$ on $\mathcal{M}$ (or $\mathcal{N}$)".

Op de volgende wijze meende Beth de keuzerijen, die de basis voor de waaierstelling vormen, te kunnen elimineren ten gunste van zijn semimodellen. D.w.z. op de punten waar de waaierstelling nodig zou zijn, als we alles met takken formuleren, kunnen we als we kiezen voor omgevingen de waaierstelling

[74] Brief Beth – G. Kreisel, 8 december 1957.

[75] Brief G. Kreisel – Beth, . Voor een uitvoerige bespreking van Beths functie $h$, waarbij alle mogelijkheden afgelopen worden, zie Kreisel (1958*b*), p. 380 e.v. In een later stadium zal uitvoeriger op de eigenschappen van functie $h$ worden ingegaan

'inbouwen' door eindige overdekkingen te eisen (anders het gevolg van compactheid = waaierstelling).

Kleene (1957) herhaalt als volgt welwillend Beths opmerking aangaande de waaierstelling:

"Beth admits that in substituting his vocabulary of subtrees something is lost from intuitionistic analysis, inasmuch Brouwer's fan theorem becomes trivial." [...] "But when $A(\alpha) \equiv \neg B(\alpha)$, we do not agree with Beth to take $\forall \alpha A(\alpha)$ as true simply when, allowing *only* free choices, one would never be in a position to know that $B(\alpha)$ is true. Brouwer allows, for his spreads and fans, not only choice sequences growing in complete freedom, but also those which are 'sharp', i.e. determined from the beginning or at a later stage by a law fixing all further choices in advance." [76]

*Absoluut vrije keuzerijen.* Ook Kreisel ging in op de, in die latere sectie in Beth (1956*d*) genoemde, maar in zijn geldigheidsdefinitie niet gebruikte keuzerijen:[77]

"In this proof we use, besides Heyting's axioms for free choice sequences, also the axiom $\mathcal{A}(\alpha) \rightarrow \exists p \forall \beta (\forall q (q \leq p \rightarrow \alpha(q) = \beta(q)) \rightarrow \mathcal{A}(\beta))$.

The intuitive meaning of the axiom is that we can assert a property $[\mathcal{A}]$ of $\alpha$ only if we can assert it on basis of a finite number of values of $\alpha$. This means that, unlike in Heyting's or Brouwer's formulation, well-defined functions are not included: we have *absolutely free choice sequences.* (This axiom is needed to justify your definition of validity of implication and negation)."

Beth stemde in met deze opmerking van Kreisel over de absoluut vrije keuzerijen:[78]

"You are completely right that my construction is based on a certain axiom not assumed by Heyting. You interpret it as excluding well-defined functions. I wonder if it does not rather mean a restriction as to the properties of choice sequences (free or well-defined) which are taken into consideration. This does not solve all problems, but it seem to simplify the situation."

**Keuzerijen en bomen.** In Beth (1959*b*), pp. 476–477, kwam Beth publicitair voor een laatste keer terug op de keuzerijen en formuleerde alles zoals wij ons dat zouden indenken. Beth ging uit van: "All choice sequences $\alpha$ in a [finitary] spread $M$ have the property $A$." En hiermee werd volgens Beth door Heyting bedoeld: "[W]henever an element $\alpha$ of $M$ is generated by a sequence of free choices, it must always turn out after finitely many choices have been made that the element $\alpha$ has the property $A$."

Neem zo een situatie aan. Dan kan men met elke $\alpha$ van $M$ een natuurlijk getal $n_\alpha$ correleren: dit geeft het aantal keuzen aan dat men heeft moeten

[76] Hierbij verwijst Kleene naar Brouwer (1954), p. 7.; een oneindige rij: 'arrow'. Deze kan zich ontwikkelen 'in complete freedom' (d.w.z. elke keuze van een nieuw element is onafhankelijk van de voorgaande keuzen). Men kan ook vanaf een keuze overgaan op een wet bij de verdere ontwikkeling: dan verandert de 'arrow' in een 'sharp arrow'. Deze ontwikkeling kan zich al direct in het begin afspelen.

[77] Brief G. Kreisel – Beth, 23 maart 1958, (Reading). Cursivering door mij. 'Absolutely free choice sequences': dit kwam ook ter sprake in de al geciteerde brief van Heyting naar Beth van 19 januari 1958.

[78] Brief Beth – G. Kreisel, 1 april 1958.

maken om $\alpha$ met de eigenschap $A$ te kunnen bedelen. Wij stellen nu de eindige $M$ voor als een binair vertakkende boom $B$, met de keuzerijen $\alpha$ van $M$ als de takken van $B$. Als na $n_\alpha$ keuzen de rij $\alpha$ de eigenschap $A$ heeft, dan nemen wij op het corresponderende punt van boom $B$ de formule $A(n_\alpha)$. Met Brouwers hoofdstelling kan boom $B$ nu een decompositie in eindig veel deelbomen $B^p$ ondergaan: met elke vertex $p$ hangt een formule $A(n)$ samen. [en in dat geval is dan ook $\exists x A(x)$ geldig op $B$.]

Volgens Beth slaat nu "All choice sequences $\alpha$ in a [finitary] spread $M$ have the property $A$." op: "the corresponding finitary tree $B$ *as a whole*."

### Reductie met decompositie

De constructie van tegenmodellen, semimodellen en bomen zijn de revue gepasseerd, maar nog niet precies hoe men vanuit een poging tot een tegenmodel een model kan vinden en hoe de inpassingsconstructie moet worden uitgevoerd. Wij geven hiervan nu een intuïtieve voorstelling vanuit de tableauplaatjes, later doen we het nog een keer over.

De operatoren worden door de regels voor de tableausequenten vastgelegd. Deze geven de constructie-aanwijzingen voor de splitsing in modellen voor de conjunctieve en de disjunctieve groep aan. Wij zullen nu, vooral aan de hand van voorbeelden, een intuïtieve indruk geven. Later komt nog een precieze beschrijving aan de hand van de constructie van $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$.

Neem als voorbeeld $A \vee B$ als antecedent. Men heeft dan te maken met de tableausequent F0-4a: als $A \vee B, \Delta \Rightarrow \Gamma$, dan $\Delta, A \Rightarrow \Gamma$ [et] $\Delta, B \Rightarrow \Gamma$, of voor het gemak: $A \vee B \Rightarrow \Gamma$, dan $A \Rightarrow \Gamma$ [et] $B \Rightarrow \Gamma$. Voer dit nu als semantisch tableau (model $\mathcal{P} =< \mathcal{M}, \mathcal{N} >$) uit:

$$\begin{array}{r|l}
\text{juist} & \text{nog onbepaald} \\
\hline
A \vee B & \Gamma \\
\text{[et]} & \\
\end{array}$$
$$A \ \lceil\ \Gamma \qquad\qquad\qquad B\ \rceil\ \Gamma$$

Nu met de decompositie in de modellen $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$:

$$\begin{array}{c}
\mathcal{M}\text{-juist:} \\
A \vee B \mid 1. \\
A \ \lceil\ 2. \qquad B\ \rceil\ 3.
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\mathcal{N}\text{-nog onbepaald:} \\
1. \mid \{\Gamma\} \\
2. \ \lceil\ \{\Gamma\} \qquad\qquad 3.\ \rceil\ \{\Gamma\}
\end{array}$$

Voor regel 8 (permutatie, disjunctieve splitsing) zijn er twee mogelijkheden voor de omzetting van model $\mathcal{M}$ van $\Delta = [A_1, A_2, \ldots]$ in model $\mathcal{N}$ van $\Gamma = \{B_1, \Gamma^*\}$. Uitgaande van het vroeger vertoonde plaatje komen we nu tot:

$$\begin{array}{c}
[\Delta] \mid \\
[\Delta] \ \lceil \qquad [\Delta]\ \rceil
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\mid \{B_1, \Gamma^*\} \\
\lceil\ \{B_1\} \qquad\qquad \rceil\ \{\Gamma^*, B_1\}
\end{array}$$

1. zet model $\mathcal{M}$ om in model $\mathcal{N}_1$ van $B_1$, etc.
2. zet $\mathcal{M}$ om in eindige veel deelbomen $\mathcal{M}', \mathcal{M}'' \ldots$; zet vervolgens die deelbomen om in $\mathcal{N}', \mathcal{N}'' \ldots$ van $\mathcal{N}_2$ en laten die $\mathcal{N}', \mathcal{N}'' \ldots$ modellen van $B_2, \ldots, B_k$ of $B_1$ zijn.

**Voorbeeld.** Het uiteentrekken van een semantisch tableau zal aan de hand van een propositioneel standaardvoorbeeld bekeken worden, nml. het intuïtionistisch niet geaccepteerde $A \vee \neg A$. Ga hiertoe uit van het tegenmodel (tableau) voor de sequent $\emptyset \Rightarrow A \vee \neg A$:

| juist | nog onbepaald | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $A \vee \neg A$ 1. | | | | |
| [vel] | $A, \neg A$ 2. | | | | |
| $A$ 3. | [vel] | $\neg A, A$ 4. | | | |
| | $\neg A$ 5. | [vel] | $A, \neg A$ 6. | | |
| $A$ | $\emptyset$ 7. | $A$ 8. | [vel] | $\neg A, A$ 9. | |
| | | | $\neg A$ 10. | | $A, \neg A$ 11. |
| | | $A$ | $\emptyset$ 12. | | etc. |

Bovenstaand disjunctief samenhangende tableau sluit op geen enkele tak (er is zelfs sprake van één oneindig voortlopende tak), het tableau als geheel sluit derhalve niet.[79]

Beth zal als volgt een weergave met uit elkaar getrokken antecedent en succedent gebruiken voor de sequent $\emptyset \Rightarrow A \vee \neg A$. [80] Men poogt hier elk model $\mathcal{M}$ voor $[\emptyset]$ (men kan hier elk model nemen) om te zetten in een model $\mathcal{N}$ voor $A \vee \neg A$ (de cijfertjes in beide onderstaande figuren corresponderen met de cijfertjes in bovenstaand figuur en met elkaar).[81] De nu volgende bomen hebben geen opdeling in 'juist' of 'nog onbepaald' meer, ze zijn nu het één of het ander: de juist-boom (model $\mathcal{M}$) en de nog onbepaald-boom (model $\mathcal{N}$).

$\mathcal{M}$-juist:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $[\emptyset]$ | $q_1 = 1.$ | | | | $f = 1$ |
| | 2. | | | | $f = 2$ |
| 3. | | 4. | | | $f = 3$ |
| | 5. | | 6. | | $f = 4$ |
| $A$ | 7. | 8. | | 9. | $f = 5$ |
| | | | 10. | 11. | $f = 6$ |
| | | $A$ | 12. | etc. | $f = 7$ |

$\mathcal{N}$-nog onbepaald:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_1 = 1.$ | $A \vee \neg A$ | | | | | 1 |
| 2. | $\{A, \neg A\}$ | | | | | 2 |
| 3. $A$ | 4. | $\{\neg A, A\}$ | | | | 3 |
| 5. | $\neg A$ | 6. | $\{A, \neg A\}$ | | | 4 |
| 7. | $\{\emptyset\}$ | 8. $A$ | 9. | $\{\neg A, A\}$ | | 5 |
| | | 10. | $\neg A$ | 11. | $\{A, \neg A\}$ | 6 |
| | | 12. | $\{\emptyset\}$ | | etc. | 7 |

### Inpassing, tegenmodel, schets van volledigheid

In het voorafgaande zijn model, semimodel, deelbooom, afknotting, decompositie en gelaagdheid aangeroerd. Hiermee is het mogelijk een eerste, provisorische schets te geven van wat Beth als volledigheidsstelling voor ogen stond. In dit opzicht lijkt het op het vergelijken van Beth (1959*b*) met Beth (1956*d*). In Beth (1959*b*) ontbreken enkele uitvoerige definities; toegegeven moet worden

[79] Voorbeeld naar Beth (1956*d*), p. 365; (Beth 1959*b*), p. 451, 454

[80] (Beth 1959*b*), p. 454.

[81] Naar (Beth 1959*b*), p. 454.

dat in Beth (1959*b*) in eerdere secties uitgebreid op de ontwikkeling van semantische tableaus wordt ingegaan en daarmee tot op zekere hoogte onderdelen van de constructie ontvouwen worden die in Beth (1956*d*) niet vooraf gegeven worden. Omdat men over het algemeen naar Beth (1956*d*) teruggrijpt, als er iets over Beths constructie gezegd wordt, zullen later toch uitgebreid de daar voorkomende begrippen en werkwijze bekeken worden (al zou het hier korter kunnen). Zeer nauw bij Beth sluit een aantal artikelen door Kreisel aan. Dyson & Kreisel (1961) gaat zelfs uit van de uitvoerige constructies in Beth (1956*d*).

**Tegenmodel en inpassing.** Men moet de tableaus zien te combineren met de net beschreven modellen. Dit gebeurt door de inpassingsmethode. De tableauconstructies werden gegeven vanuit de omkering van de bewijsregels: deze constructievoorschriften vormen de basis van de tableaus en de inpassing. Aan de hand van de constructiemethoden worden de inductieve definities gegeven en de constructie van een model.

Met een tegenmodel $\mathcal{M}$ bedoelden we een model dat van een sequent $A \Rightarrow B$ wel de antecedent, maar niet de succedent vervult. We construeren nu twee semimodellen waarvan de ene de antecedent, de andere de succedent van de sequent als oorsprong heeft. Hoe dat in zijn werking gaat vertellen de tableausequenten. De ontwikkeling van beide modellen als boom (spreiding) loopt gelijk op. Een voorbeeld: het probleem van $\Delta \Rightarrow A, \Gamma$ is het probleem (regel 8) van $\Delta \Rightarrow A$ en $\Delta \Rightarrow \Gamma, A$. Hoe dit gaat treft men in de vorige sectie over decompositie aan. Strikt naar de operatoren verkrijgt men dergelijke constructies.

Bij de stapsgewijze constructie van een tableau heeft men te maken met deeltableaus. Voor een tableau $\mathcal{T}$ kan men geneste rijtjes deeltableaus hebben. Het tableau $\mathcal{T}$ kan door een tweetal $< \mathcal{M}, \mathcal{N} >$ (het Herbrand-veld), met $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ semimodellen, gerepresenteerd worden. De takken (keuzerijen) moeten dan wel aan zekere voorwaarden voldoen. Voor elk rijtje deeltableaus $\mathcal{T}^*$ van $\mathcal{T}$ heeft men een tweetal rijtjes in het Herbrand-veld. Zoals men bij de ontwikkeling van een tableau een aangroeiende rij uitbreidingen krijgt vanaf het vertrekpunt tot het einde en dit zich bij verdubbeling eveneens voordoet, zo ook heeft men bij de constructie van de twee modellen een constructie vanuit de semimodellen, met eveneens ten opzichte van elkaar een gelijksoortige opbouw: met elkaar corresponderende punten en gerelateerd aan sequenten voor elk punt op de ene boom van het ene model een deel van de sequent waarvan het gespiegelde punt het andere deel geeft. Bij de constructie van de twee groepen semimodellen moet alles precies 'synchroon' verlopen. Hier draagt de, pas later precies te definieren, functie $h$ zorg voor: voor de semimodellen $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ met uiteindelijk de semimodellen $\mathcal{M}^h$ en $\mathcal{N}^h$. Beth (1957*b*), p. 118: functie $h$ selecteert op elke vertakking, zoals veroorzaakt door de net vermelde constructieregels, waarvan één weergegeven door bovenstaand plaatje, één van de beide deelbomen.

Laten $p$ en $q$ de corresponderende punten op $\mathcal{M}^h, \mathcal{N}^h$ zijn, en laten $A_p, B_q$, $\Delta_p, \Gamma_q$ de met die punten verbonden formules of con/dis-junctieven zijn. Dan zijn er twee mogelijkheden

a. Als voor dergelijke puntencombinaties er geen axiomavorm is, dan is het

linkerdeel van de sequent op punt $p$ altijd geldig op de deelboom $\mathcal{M}_p^h$ van $\mathcal{M}^h$ ($p$ treedt dan als vertex op), en de succedent van de sequent is op die deelboom $\mathcal{M}_p^h$ nergens geldig.
b. Stel dat er zo een puntencombinatie $(p, q)$ met axiomavorm is, dan is $\mathcal{M}^h$ een model; de succedent van de sequent is altijd geldig op de deelboom $\mathcal{M}_p^h$ (anders was er geen sprake van axioma $A \Rightarrow A$) en bovendien geldig op $\mathcal{M}$.

**Schets van volledigheid.** Nu is het mogelijk om een inleidende schets te geven van een klassiek en een intuïtionistisch geformuleerd volledigheidsbewijs van het intuïtionistische systeem $F_0$.[82]

We gaan weer uit van een functie $h$. Voor het *klassieke bewijs* heeft men twee gevallen:

1. Er is een functie $h$ z.d.d. voor deze $h$ de deelmodellen $\mathcal{M}^h$ en $\mathcal{N}^h$ geen punten $p$ en $q$ hebben, waarbij $\Delta_p \Rightarrow \Gamma_q$ een afsluiting (axioma) heeft. Dan vormt $\mathcal{M}^h$ een tegenmodel voor $\Delta \Rightarrow \Gamma$ en $\Delta \nvdash_{F_0} \Gamma$.
2. Voor alle $\mathcal{M}^h$ en $\mathcal{N}^h$ zijn er punten $p$ en $q$ z.d.d. $\Delta_p \Rightarrow \Gamma_q$ een afsluiting (axioma) heeft. In dat geval is er een bovengrens $k$ (met gebruikmaking van *compactheid*[83] aan de gelaagdheid (ofwel de diepte) van de punten $p$ en $q$. In dit geval leveren van onderen naar boven de sequenten $\Delta_p \Rightarrow \Gamma_q$ van de afknottingen op $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ een afleiding van $\Delta \Rightarrow \Gamma$.

Bovenstaand argument levert een volledigheidsbewijs op, maar dit is vanwege het gebruik van compactheid intuïtionistisch niet aanvaarbaar.

We gaan nu over naar het *intuïtionistische bewijs*. Stel, dat $\Delta \Rightarrow \Gamma$ geldig is. Dan bestaat er een effectieve procedure, zeg $\mathcal{P}$, om in een eindig aantal stappen elk model $\mathcal{M}$ van $\Delta$ in een model $\mathcal{N}$ van $\Gamma$ om te zetten. Deze procedure kan niet op volledige bomen werken, maar moet dit doen op afknottingen van *voldoende* lengte. Het is mogelijk om de procedure $\mathcal{P}$ op afknottingen van semimodellen $\mathcal{M}^h$ te laten werken. Als er een afknotting van voldoende lengte is, heeft men één van de volgende twee gevallen:

1. De afknotting kan niet tot een model van $\Delta$ uitgebreid worden.
2. Elke uitbreiding van de afknotting in een model van $\Delta$ is ook een model voor $\Gamma$.

In geval 2 kan men een bovengrens $k$ stellen aan alle voldoende grote lengten (met gebruikmaking van Brouwers tweede bewijs voor de hoofdstelling van eindige spreidingen). Van hieruit kan men volgens Beth verder gaan als in het klassieke bewijs.

[82] Wij volgen hier Beth (1957*b*).
[83] Compactheid en Königs lemma lopen hier met elkaar op.

**Kripke-semantiek.** Al in een eerder stadium, in verband met implicatieve systemen, is de Kripke-semantiek ter sprake gekomen. In Kripke (1965) wordt naast het geven van een semantiek voor de intuïtionistische logica ook de relatie tussen zijn systeem en de Beth-modellen onderzocht (pp. 120–124). Kripke (1965) ging in de eerste plaats uit van Beth (1956*d*) en van Dyson & Kreisel (1961). Later is Kripke's onderzoek door anderen overgenomen, zoals in Schütte (1968). Voor de transformatie van Kripke- naar Beth-modellen, zie Troelstra & van Dalen (1988), p. 679, e.v.

De wijze waarop in Kripke (1965), p. 94–95, de semantiek wordt opgevoerd ligt in de lijn van Beths semantiek voor implicatie binnen de derivatieve logica. De moeilijkheden met betrekking tot verschillende operatoren, zoals die zo nu en dan in de diverse hoofdstukken zijn besproken, komen ook hier aan bod. Hier bovenuit gaat bij Kripke de behandeling van de quantoren die bij Beth alleen in de Beth-modellen aan bod komt. Kripke-semantiek voor de intuïtionistische logica verschilt niet wezenlijk van die voor de modale logica: geen modale operatoren, maar wel het gebruik van hulptableaus.

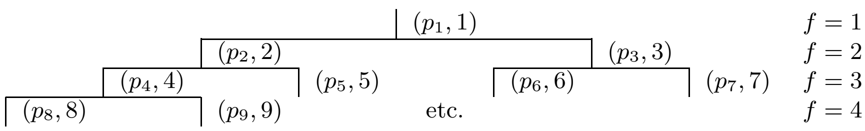
## 10.3 Volledigheid

### 10.3.1 Aanloop tot volledigheid

De inzichtelijke reducties met decomposities uit de vorige secties vormen de leidraad van wat nu volgen gaat. Wij gaan alles nu preciezer voorstellen, en vooral preciezer benoemen. Daarbij gaan we uit van de in de supplementen gegeven intuïtionistische tableausequenten.

Brouwers waaierstelling heeft betrekking op eindige spreidingen. Elke eindige spreiding kan worden voorgesteld als een boom. Identificeer de takken in de boom met rijen natuurlijke getallen die gekozen kunnen worden volgens een bepaalde spreidingswet.

Wij hebben met een bijzonder geval te maken: de duaal splitsende bomen. Deze kunnen voorgesteld worden naar een ideaal geval zoals in onderstaand figuur. Bovendien kan elke boom beschreven worden in een, in de intuïtionistische tweede orde logica verwoorde, deductieve theorie. Beide zaken zullen aan de orde komen, maar eerst de duaal splitsende bomen. Op dit gegeven werd in Beth (1956*d*) de volledigheidsstelling opgezet.




In de boom heeft men knopen $p_1, p_2, \ldots$. Men identificeert de knopen met de getallen $1, 2, \ldots$ op bovenstaande wijze: op een splitsing steeds links even, rechts oneven, rechts = links + 1. Eigenlijk zou men een functie, zeg $\chi(p_i) = i$, moeten tussenvoegen, maar dit zal meer verduisteren dan verlichten. Nu kan men definieren (uit de figuur aflezen) $R(p, q)$ geldt als $q = 2p$ of $q = 2p + 1$

($\chi(q) = 2\chi(p)$, etc., als men preciezer wil zijn); $f(p) = k$ als $2^{k-1} \leq p < 2^k$. Dit is voldoende voor de propositionele operatoren.

Men kan met alleen het bovenstaande nog niet werken met de quantoren en in het bijzonder met de inzet van nieuwe individuen. Daartoe neemt Beth (1956*d*) een opsomming aan van alle prenex-formules $Q_1A_1(x_1), Q_2A_2(x_2), \ldots, Q_tA_t(x_t), \ldots$, waarbij $Q$ voor $\forall, \exists$. Voor elke index $i$ definieert Beth een indexfunctie $s_i(t)$:

- $s_i(1) = \mu x\ [x > i$ en $\forall j_{\text{index in } Q_1A_1(x_1)} : x > j]$.
- $s_i(t+1) = \mu x\ [x > s_i(t)$ en $\forall j_{\text{index in } Q_{t+1}A_{t+1}(x_{t+1})} : x > j]$.

Beth (1956*d*), p. 370, punt 7.4: Bij een gegeven sequent $\Delta \Rightarrow \Gamma$ worden de twee semimodellen $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ bepaald door de constructies $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots \mathcal{M}_k, \ldots$ en $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \ldots \mathcal{N}_k, \ldots$. Men komt constructief door recursie aan $\mathcal{M}_k$ en $\mathcal{N}_k$.

Om bovenstaande constructie uit te voeren maakt Beth gebruik van het boven uitgetekende plaatje. Voor verse individuen gebruikt hij de functie $s_i$.

**(r, i)-index.** [84] Laat $r$ een f-getal(rank) zijn, $i$ een index en $\Delta \Rightarrow \Gamma$ een sequent. Hiervan uitgaande construeert Beth twee sequenten $\Delta_1^{r,i} \Rightarrow \Gamma_1^{r,i}$ en $\Delta_2^{r,i} \Rightarrow \Gamma_2^{r,i}$. De bedoeling is om vanuit de sequent $\Delta \Rightarrow \Gamma$ de volgende stap in de decompositie te nemen. In de tableauboom kan men bij sommige operatoren duale splitsing verwachten (vandaar de twee nieuwe sequenten) en bij de quantoren verse individuen (de indexfunctie). Men moet nu de regels voor intuïtionistische tableausequenten afgaan zoals gegeven in het supplement. Wij zullen enkele voorbeelden geven. Hierbij staat $[\ \ldots]$ om het conjunctieve deel en $\{\ \ldots\}$ om het disjunctieve deel.

- Voor een $r'$, $r = 4r' - 3$ of $r = 4r' - 1$:

  — Regel 8: $\Delta^* \Rightarrow B_1, B_2, \ldots, B_n$, dan $\Delta^* \Rightarrow B_1$ vel $\Delta^* \Rightarrow B_2, \ldots B_n, B_1$. Regel 8 is hier de enige regel met een disjunctieve splitsing. $\Delta_1^{r,i} = \Delta_2^{r,i} = \Delta = [\Delta^*]$, $\Gamma_1^{r,i} = \{B_1\}$, $\Gamma_2^{r,i} = \{B_2, \ldots, B_n, B_1\}$.
- Voor een $r'$, $r = 4r' - 2$; hier laat Beth de gevallen 2a t/m 7a onder vallen (geval 1 was het axioma).

  — Regel 2a, $\neg A, \Delta^* \Rightarrow \Gamma^*$, dan $\Delta^*, \neg A \Rightarrow \Gamma^*, A$. Voor $\Delta = [\neg A, \Delta^*]$, $\Gamma = \{\Gamma^*\}$, dan $\Delta_1^{r,i} = \Delta_2^{r,i} = [\Delta^*, \neg A]$, $\Gamma_1^{r,i} = \Gamma_2^{r,i} = \{\Gamma^*, A\}$.

  — Regel 7a, $\exists x A(x), \Delta^* \Rightarrow \Gamma^*$, dan $\Delta^*, A(p) \Rightarrow \Gamma^*$, met $p$ een nieuw ingevoerde constante. Laat nu $p = s_i(t)$, als $\exists x A(x)$ is $Q_t x_t B_t(x_t)$ uit de opsomming van de prenex-formules.
- Voor een $r'$, $r = 4r'$; hier laat Beth de gevallen 2b t/m 7b onder vallen.

  — Regel 3b. $\Delta^* \Rightarrow A \wedge B, \Gamma^*$, dan $\Delta^* \Rightarrow$ et $\Delta \Rightarrow \Gamma^*, B$. Nu is $\Delta = \Delta_1^{r,i} = \Delta_2^{r,i} = [\Delta^*]$ en $\Gamma = \{A \wedge B, \Gamma^*\}$, $\Gamma_1^{r,i} = \{A\}$, $\Gamma_2^{r,i} = \{\Gamma^*, B\}$.

$$
\begin{array}{rl}
\Delta = [\Delta^*] & \Gamma = \{A \wedge B, \Gamma^*\} \\
{[\text{et}]} & \\
\Delta_1^{r,i} = [\Delta^*] \ \ \Gamma_1^{r,i} = \{A\} & \Delta_2^{r,i} = [\Delta^*] \ \ \Gamma_2^{r,i} = \{\Gamma^*, B\}
\end{array}
$$

[84](Beth 1956*d*), p. 369–370.

Wij hebben niet te maken met één enkele boom (model), maar met twee ketens van bomen (modellen):

$\Delta = [\Delta^*]$

[et]

$\Delta_1^{r,i} = [\Delta^*]$ $\quad$ $\Delta_2^{r,i} = [\Delta^*]$

en:

$\Gamma = \{A \wedge B, \Gamma^*\}$

[et]

$\Gamma_1^{r,i} = \{A\}$ $\quad$ $\Gamma_2^{r,i} = \{\Gamma^*, B\}$

Van de twee modellen $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ willen wij graag, dat ze precies met elkaar oplopen. Dat wordt met punt 7.4 duidelijk gemaakt.
Wij gaan uit van een sequent $\Delta \Rightarrow \Gamma$ met de corresponderende semimodellen $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$, beide gevormd door $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_k, \ldots$, respectievelijk $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \ldots, \mathcal{N}_k, \ldots$. Met recursie op eerst het paar $(\mathcal{M}_1, \mathcal{N}_1)$, en dan het paar $(\mathcal{M}_{k+1}, \mathcal{N}_{k+1})$:

- $k = 1$. $\mathcal{M}_1 = (\mathtt{B}_1, O, O', R', f', F')$,[85] $\mathcal{N}_1 = (\mathtt{B}_1, O, O', R', f', G')$, $F'(1) = \Delta, G'(1) = \Gamma$.
- $k = k+1$. Stel $\mathcal{M}_k = (\mathtt{B}_k, O, O^\circ, R^*, f^\circ, F^\circ)$, $\mathcal{N}_k = (\mathtt{B}_k, O, O^\circ, R^\circ, f^\circ, G^\circ)$ bekend, dan $\mathcal{M}_{k+1} = (\mathtt{B}_{k+1}, O, O^*, R^*, f^*, F^*)$, $\mathcal{N}_{k+1} = (\mathtt{B}_{k+1}, O, O^*, R^*, f^*, G^*)$ als volgt te verkrijgen. $\mathtt{B}_{k+1}, O, O^*, R^*, f^*$ met de definities, de moeilijkheden zitten in $F^*, G^*$:

  — Voor $f(p) \leq k$: neem $F^*(p) = F^\circ(p), G^*(p) = G^\circ(p)$
  — Voor $F^*(p), G^*(p)$, $f(p) = k+1$ en $R(p,q)$: $2^k \leq 2q < 2q+1 < 2^{k+1}$, en betrek in de redenering mee:

  (a) f-getal(rank) $r = k$; (b) de index $i$, met $i$ de grootste getalconstante die in de oplopende afknottingen $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_k$, respectievelijk $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \ldots, \mathcal{N}_k$ optreedt; (c) de sequent $\Delta \Rightarrow \Gamma$, met $\Delta = F^\circ(q), \Gamma = G^\circ(q)$.

  Dan: $F^*(2q) = \Delta_1^{r,i}, G^*(2q) = \Gamma_1^{r,i}, F^*(2q+1) = \Delta_2^{r,i}, G^*(2q+1) = \Gamma_2^{r,i}$.

**h-functie.** Laat $k$ een f-getal (rank) zijn —elke knoop $p$ heeft een $k : f(p) = k$. Dan is er een functie $h$, die als volgt een verzameling knopen van rank $k$ [dus voor alle knopen $p$ met $f(p) = k$: $h(f(p))$] oplevert: [86]

- $h(1) = \{O\}$
- $h(k) = h(f(p))$, voor een $p$, valt uiteen in:

  a. $f(p)$ *oneven*:
  — a.1. $p \in h(f(p))$, dan $2p, 2p+1 \in h(f(p)+1)$.
  — a.2. $p \notin h(f(p))$, dan $2p, 2p+1 \notin h(f(p)+1)$

[85] de combinatie van achtereenvolgens: alle punten van de boom, oorsprong, vertex, ordening, rank, formuletoekenning.
[86] (Beth 1956*d*), p. 371–372.

b. $f(p)$ *even*:
— b.1. $p \in h(f(p))$, dan óf $2p \in h(f(p)+1)$ óf $2p+1 \in h(f(p)+1)$.
— b.2. $p \notin h(f(p))$, dan $2p, 2p+1 \notin h(f(p)+1)$.

Laat $\mathtt{B}^h = \bigcup_{k=1,2,\ldots} h(k)$. Hiermee kan men $\mathcal{M}^h = (\mathtt{B}^h, O, O', R, f, F)$ construeren; $R, f, F$ worden beperkt tot $\mathtt{B}^h$. Evenzo voor $\mathcal{N}^h$. $\mathcal{N}^h$ en $\mathcal{M}^h$ zijn wel semimodellen, maar *niet* altijd deelbomen van $\mathcal{N}$ en $\mathcal{M}$.

Voor de rest van het verhaal is de diepte van $h$ en de bovengrens aan de diepte van $h$ van belang:
- *diepte* van de functie $h$:

a. diepte($h$)= $\mu r$ [$\exists p : f(p) = r$ en $p$ op $\mathcal{M}^h$ en $F(p) \Rightarrow G(p)$ is van de axiomavorm].
b. diepte($h$) heet oneindig als er niet zo een $r$ zoals in geval (a) voor $h$ gevonden kan worden.

**Beths sleutelstelling.**

We komen nu toe aan wat Kreisel de *'crux of your paper'* [87] noemde: stelling 7.9. op p. 372 van Beth (1956*d*) (en Beth (1959*b*), p. 455, lemma onder 8).

Hier wordt de functie $h$ gecombineerd met de semimodellen $\mathcal{M}^h$,$\mathcal{N}^h$ zoals boven met $\mathtt{B}^h$. Laat voor $\mathcal{M}^h$ de functie $F$ en voor $\mathcal{N}^h$ de functie $G$ de formule(verzameling)-toekenningen aan de knopen zijn: dus, zeg voor een knoop $p$, $F(p)$ en $G(p)$. Maar dan heeft men met verwijzing naar het voorafgaande ook de sequent $F(p) \Rightarrow G(p)$. Stel nu dat voor $p$, met $p \in \mathtt{B}^h$, de sequent $F(p) \Rightarrow G(p)$ *niet* de axiomavorm heeft. Dan heeft men gevallen a en b: [88]

a. *Conjunctie* (verzameling) $F(p) = \Delta$, $p$ vertex op deelboom $\mathcal{B}'$ (deelmodel $\mathcal{M}'$) van $\mathcal{M}^h$ en $\mathcal{M}' \models F(p)$. Als $F(p) = [\emptyset]$, dan is de stelling triviaal.
b. *Disjunctie* (verzameling) $G(p) = \Gamma$, $p$ vertex op deelboom $\mathcal{B}'$ (deelmodel $\mathcal{N}'$) van $\mathcal{N}^h$ en $\mathcal{M}' \not\models F(p)$. Als $G(p) = \{\emptyset\}$, dan is de stelling triviaal.

In het bewijs loopt men de formules van $F(p)$ (de eerste formule, de tweede, etc.) en van $G(p)$ af en dit per formule, of deze atomair dan wel samengesteld is. In eerste instantie laat men zien dat als $A$ atomair is, dan $\mathcal{M}' \models A$.

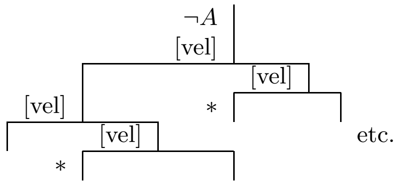
- Als een atomaire formule $A \in F(p)$, dan $A \in F(q)$ voor elke $q$ op $\mathcal{M}'$ met $f(q) > f(p)$. En als een atomaire formule $A$ optreedt in $G(p)$, dan kan men op $\mathcal{M}'$ een $q$ vinden met $f(q) > f(p)$ en $G(q) = A$.

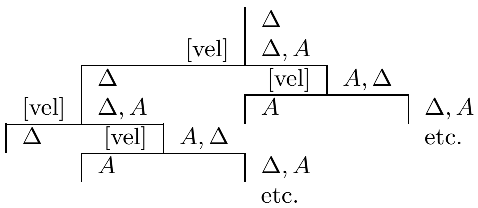
[87] Brief G. Kreisel – Beth, 13 december 1957, (Reading).

[88] Kreisel ontdekte een onjuistheid in 7.9 (vergelijk de recensie Kreisel (1956)). Gezien een andere context wordt 7.9 wel gebruikt, maar anders geformuleerd in Beth (1959*b*): gerelateerd aan een sequent '$F(p) \Rightarrow G(p)$, $< \mathcal{M}, \mathcal{N} >$ voor $\mathcal{M}'$ een deelmodel van $\mathcal{M}$ en $p \in \mathtt{S}$: (a)– $\mathcal{M}'^{(p)} \models F(p)$; ($a'$)– als $A \in F(p)$, dan $\mathcal{M}'^{(p)} \models A$; ($a''$)– $A$ eerste formule in $F(p)$, dan $\mathcal{M}'^{(p)} \models A$. En ($b$)– $\mathcal{M}'^{(p)} \not\models G(p)$; ($b'$)– $A \in G(p)$, dan voor elk submodel $\mathcal{M}^\circ$ van $\mathcal{M}'^{(p)}$, $\mathcal{M}^\circ \not\models A$; ($b''$)– $G(p)$ is $A$, dan voor elk submodel $\mathcal{M}^\circ$ van $\mathcal{M}'^{(p)}$, $\mathcal{M}^\circ \not\models A$.

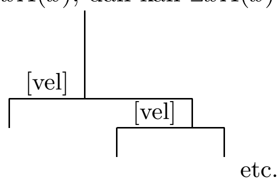
- Als een formule $A$ niet atomair is, dan heeft men 12 gevallen voor $\vee, \wedge, \rightarrow, \neg, \forall, \exists$ onder de $\mathcal{M}$ en de $\mathcal{N}$. Al deze gevallen heeft men te behandelen om daarmee te laten zien, dat alles goed verloopt.

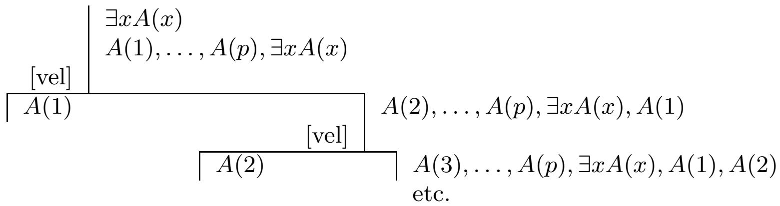
Van de samengestelde formules onder geval b zullen hier slechts enkele voorbeelden gegeven worden. Wederom: het belang van regel 8 van systeem $\mathcal{F}$ is groot.
Voorbeeld 1. Stel $\neg A$ is de eerste formule van $F(p)$.[89] De inductiehypothese levert op dat $A$ niet geldig is op de plaatsen met $*$; door de constructieregels voor $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}^h$ zijn er gelijksoortige deelbomen voor $\mathcal{M}'$. Dus $\neg A$ is geldig op $\mathcal{M}'$.




Voorbeeld 2. Laat $G(p) = \exists x A(x)$, dan kan $\exists x A(x)$ niet geldig zijn op $\mathcal{M}'$.[90]




## 10.3.2 Volledigheidsstellingen

### Klassieke volledigheidsstelling

Gebruik nu *diepte*$(h)$: Voor elke sequent $A \Rightarrow B$ heeft men dan betreffende $h$ één van de twee volgende gevallen: [91]

[89] Naar (Beth 1956*d*), p. 373.
[90] Naar (Beth 1956*d*), p. 374.
[91] (Beth 1956*d*), p. 375

a. Er is een bovengrens $r_0$ aan de diepte van functie $h$ en bijgevolg is de sequent $A \Rightarrow B$ afleidbaar. Dit is het punt, waarop wij terug zullen keren vanuit de intuïtionistische volledigheidsstelling, wanneer zekere voorwaarden vervuld zijn.

b. Er is geen bovengrens aan die diepte en bijgeval bestaat er een functie $h_0$ van oneindige diepte. Maar dan is er tevens een tegenmodel $\mathcal{M}^{h_0}$ [over sleutelstelling: 7.9] voor de sequent $A \Rightarrow B$.

De gevallen (a) en (b) tezamen leveren volledigheid. Het bijgeleverd krijgen van een tegenmodel levert volgens Beth in het intuïtionistisch opgezette bewijs moeilijkheden op.

Geval (a) behoeft een nadere toelichting. Uitgaande van bovengrens $r_0$ kan men een afknotting $\mathcal{M}_{r_0}$ construeren. Maar dan moet men een formele afleiding van $A \Rightarrow B$ in het systeem $F_0$ hebben. Ga nu terug naar het plaatje van de boom met alle natuurlijke getallen, dan kan men deze aflezend verder redeneren. Stel van niet, dan is het niet mogelijk een afleiding voor $F(2) \Rightarrow G(2)$ of voor $F(3) \Rightarrow G(3)$ te vinden, met $h(2) = \{2, 3\}$. Het plaatje lezend zijn onder 2 nu 4 en 5 aan de beurt, en onder 3 nu 6 en 7 etc. tot men met $h$ de waarde $r_0$ overschrijdt.

**Kreisel** Kreisel meende dat men aan Beths klassieke bewijs genoeg had.[92] Hij gaf een 'intuïtionistische' (in de woorden vban Kreisel) analyse van dit bewijs als volgt.[93]

Kreisel introduceerde het begrip $K^h(n)$ met de betekenis: voor alle punten $p$ in [de boom] $\mathcal{B}_n^h$ heeft de sequent $F(p) \Rightarrow G(p)$ niet de axiomavorm.[94] Vervolgens stelt hij dat voor alle $n$: $K^h(n)$ en $\forall h K^h(n)$ beslisbaar zijn. Volgens Kreisel is Beths sleutelstelling 7.9 een intuïtionistisch bewijs voor alle h: als $\forall n K^h(n)$, dan gelden de beide punten a en b van stelling 7.9. Hij neemt hier $h$ als een vrije keuzerij.
Met Beths stelling 7.10, de klassieke volledigheid, heeft men een intuïtionistisch geldige bewijs van:
'Als voor alle $h$ : geldt $\exists r \neg K^h(r)$, dan is $A \Rightarrow B$ bewijsbaar wanneer $\mathcal{B}$ de met $A \Rightarrow B$ geassocieerde boom is.'
Voor $A = \emptyset$ [dus het geval $\emptyset \Rightarrow B$] meende Kreisel:
Als $B$ niet bewijsbaar is, dan niet voor alle $h$ : $\exists r \neg K^h(r)$; en voor alle $h$: als $\forall n K^h(n)$, dan is $B$ niet geldig op de boom $\mathcal{M}^h$. Ofwel: als $B$ niet bewijsbaar is, dan is er een $h$ waarvoor $\forall n K^h(n)$ geldt, en derhalve is $B$ niet geldig op een boom $\mathcal{M}^h$.

[92] Brief G. Kreisel — Beth, 18 december 1957, (Reading).

[93] De hier volgende argumenten van Kreisel worden in Kreisel (1958*b*), p. 378 e.v., nauwkeuriger en in breder verband opnieuw gegeven.

[94] Zie ook Kreisel (1958*b*), p. 380: als $A$ en $B$ op eendere (homologe) posities op de afknottingen $\mathcal{M}_n^h$ van $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}_n^h$ van $\mathcal{N}$ optreden, dan is $A$ niet van de vorm $[K, B, K^*]$ (d.w.z. er is geen sprake van de axiomavorm op die posities). Kreisel spreekt verder niet over bomen, maar gebruikt de term spreiding.

'Intuïtionistisch' verder redenerend meende Kreisel dat alles afhangt van twee gevallen:
a. Men kan effectief een functie $h_0$ construeren waarvoor $\forall n K^{h_0}(n)$ geldt; in dit geval krijgt men intuïtionistische volledigheid.
b. Men kan niet zo een functie $h_0$ construeren, en men moet aannemen dat $h$ over vrije keuzerijen loopt. In dit geval heeft men dat niet voor alle $h$ geldt: $\exists r \neg K^h(r)$; en ook dat voor alle $h$ niet $\forall r K^h(r)$ geldt. In dit geval is stelling 7.9 betekenisloos.
Al met al meende Kreisel uit Beths klassieke bewijs een intuïtionistisch bewijs te kunnen construeren. Beth was het niet geheel met Kreisel eens: [95]

"In your Intuitionistic Analysis of Classical Proof, I do not agree that 'in case (a) we get intuitionistic completeness'. It seems more appropriate to say: if we had always case (a), then we had intuitionistic completeness. But we must anticipate that in more involved examples we meet with case (b). Moreover, we can say: if, for a certain sequent, we are in case (a), then we have, intuitionistically, a counter-example to that sequent."

### Intuïtionistische volledigheidsstelling

**Procedure $\mathcal{P}$** Wij gaan ook hier uit van Beth (1956*d*), pp. 376–377 (dat niet wezenlijk verschilt met Beth (1959*b*), pp. 460, 461). Stel, dat $A \Rightarrow B$ geldig is. Dan heeft men een procedure $\mathcal{P}$ die een model $\mathcal{M}$ voor formule $A$ omzet in een model $\mathcal{N}$ voor formule $B$. Die procedure zoekt zijn weg van $\mathcal{M}$ naar $\mathcal{N}$ over een afknotting $\mathcal{M}_k$ van $\mathcal{M}$ naar een afknotting $\mathcal{N}_k$ van $\mathcal{N}$. De procedure $\mathcal{P}$ moet in de termen van Beth (a) 'geschikt', (b) 'gerechtvaardigd' en (c) 'effectief berekenbaar' zijn voor elke $\mathcal{M}_k$.
Beth onderscheidt drie gevallen; en voor elk geval gebruikt Beth (1956*d*) als karakteristiek een getal $b(\mathcal{M}_k)$, omdat hij daarmee in tweede instantie allerlei combinaties wil gaan vormen en de beschrijving hiermee vergemakkelijkt:

- De procedure $\mathcal{P}$ slaagt en transformeert $\mathcal{M}_k$ in $\mathcal{N}_k$; $b(\mathcal{M}_k) = 1$.
- De procedure $\mathcal{P}$ loopt stuk, omdat $\mathcal{M}_k$ niet uitgebreid kan worden tot een model $\mathcal{M}$ van $A$; $b(\mathcal{M}_k) = 3$.
- De procedure $\mathcal{P}$ loopt stuk, omdat $\mathcal{M}_k$ van onvoldoende lengte is; $b(\mathcal{M}_k) = 5$.

Nu gaat Beth onderzoek verrichten naar (a) geschikt, (b) gerechtvaardigd en (c) effectief berekenbaar zijn voor elke argumentwaarde $\mathcal{M}_k$ van functie $b$. Hij gaat derhalve de gevallen (a), (b) en (c) per stuk afmeten met de mogelijkheden $b(\mathcal{M}_k) = 1, 3, 5$. In gevallen (b) en (c) wordt een hulpfunctie $c$ ingevoerd.

a 'Geschikt' gecombineerd met $b(\mathcal{M}_k) = 1, 3, 5$. Als $b(\mathcal{M}_k) = 1$, dan moet de transformatie van $\mathcal{M}_k$ in $\mathcal{N}_k$ effectief zijn. Als $b(\mathcal{M}_k) = 3$, dan moet het duidelijk zijn, wat er fout is met $\mathcal{M}_k$. Als $b(\mathcal{M}_k) = 5$, dan moet $\mathcal{M}_k$ voldoende uitgebreid kunnen worden tot op een $\mathcal{M}_l$, met $b(\mathcal{M}_l) = 1$ of $= 3$.

[95] Brief Beth – G. Kreisel, 23 december 1957.

b ‘Gerechtvaardigd’ gecombineerd met $b(\mathcal{M}_k) = 1, 3, 5$. Als $b(\mathcal{M}_k) = 1$ en als de omzetting van $\mathcal{M}_k$ in $\mathcal{N}_k$ direct volgens de axiomaregel gebeurt, dan $c(\mathcal{M}_k) = 1$; $c(\mathcal{M}_k) = 2$, als de transformatie meer stappen vraagt. Als $b(\mathcal{M}_k) = 3$ en een formule $A$ optreedt in de vertex $p$ van een deelboom $\mathcal{M}'$ waarop $A$ (m.b.v. $\mathcal{M}_k$) niet geldig is, dan $c(\mathcal{M}_k) = 3$; $c(\mathcal{M}_k) = 4$, als dit niet het geval is. Als $b(\mathcal{M}_k) = 5$, dan $c(\mathcal{M}_k) = 5$.

c ‘Effectief berekenbaar’ gecombineerd met $b(\mathcal{M}_k) = 1, 3, 5$. Alleen onder $b(\mathcal{M}_k) = c(\mathcal{M}_k) = 1, 3$ kunnen de waarden voor $b$ en $c$ direct gevonden worden. In alle andere gevallen heeft de berekening ander waarden van $b$ en $c$ nodig.

Voor de uitvoering van het bewijs begint Beth bij een afknotting $\mathcal{M}_1$ die gemeen is aan alle semimodellen $\mathcal{M}^h$ ($\mathcal{M}_1$ behoort tot $\mathcal{M}_0$). Bereken nu $b(\mathcal{M}_1)$. Laat $r_0$ het grootste getal zijn van alle (eindig vele) getallen $k$ z.d.d. in de berekening van $b(\mathcal{M}_1)$ de waarden van $b(\mathcal{M}_k)$ of $c(\mathcal{M}_k)$ aan de beurt komen. De waarde $r_0$ is een bovengrens voor de diepte van een functie $h$. Want stel dat er een functie $h_0$ met een diepte $r_0$ is. Dan zou, met $\mathcal{M}^{h_0}_{r_0}$ als een uitbreiding van $\mathcal{M}_1$, de berekening van $b(\mathcal{M}_1)$ moeten gaan over $b(\mathcal{M}^{h_0}_{r_0})$ of $c(\mathcal{M}^{h_0}_{r_0})$. Maar we kunnen niet $c(\mathcal{M}^{h_0}_{r_0}) = 1, 3$ hebben. Zodoende komen in de berekening van $b(\mathcal{M}_1)$ ergens de waarden van $b(\mathcal{M}_k)$ of $c(\mathcal{M}_k)$ met $k > r_0$ aan de beurt. Dit kan niet vanwege de manier waarop $r_0$ is vastgelegd. Met de bovengrens $r_0$ voor de diepte van functie $h$ kan men verder gaan zoals in de klassieke volledigheidsstelling onder geval a: het semantische tableau moet gesloten zijn.

*Nogmaals: het tegenmodel.* Bij de klassiek uitgevoerde volledigheid werden er twee gevallen onderscheiden. In geval b werd er beweerd dat men ook een tegenmodel kon vinden. Beth kon dit niet in het intuïtionistische geval bewijzen en betwijfelde zelfs of dit wel bewezen kon worden: Beth (1956*d*), p. 377, corollarium 7.11. Wel kan men soms in concrete gevallen het tegenmodel construeren. Dat Beth niet zo zeker van deze belangrijke zaak is, valt hem niet aan te rekenen: allen, die over dergelijke kwesties publiceerden, hielden indertijd een slag om de arm, niet in de laatste plaats Heyting en Kreisel.

**Beths verweer tegen Kreisel.** Zoals vermeld kon Kreisel niets met Beths intuïtionistische volledigheidsbewijs beginnen: [96]

“First you state, bottom of p. 366, that Def. 4.1 of *holding true* can be ‘expressed differently’ as in p. 366, last line, and first paragraph of p. 367 [hier is Beth bezig met de constructie uit te leggen hoe men niet alleen voor een model een eindige decompositie in deelbomen moet verkrijgen, maar ook hoe dit uit te smeren over twee rijen modellen voor de antecedent en de succedent van een sequent om zodoende het geheel als waaier intuïtionistisch aanvaardbaar te maken]. But where do you prove that? It is true you say yourself that section 6 is merely introductory, but where do you give the full proof?

It is therefore impossible for me to understand p. 376 [d.w.z. de intuïtionistische versie van Beths volledigheidsbewijs].

[96] Brief G. Kreisel – Beth, 18 december 1957, (Reading).

But second, even if one forgets this difficulty, is it really true that you duplicate Brouwer's proof of the fan theorem? The matter seems to me to hinge on the phrase 'seeing by inspection'. [...] But how does one 'see by inspection' that a certain formula is not valid? [...] The matter seems crucial because the *definition of* $r_0$, in line 24 of p. 377 [$r_0$ de bovengrens aan de 'ranks' $k$, $r_0$ bovengrens aan de diepte van een functie $h$], *seems empty unless we can say that ultimately non-validity and validity are always 'seen by inspection'.*

Beth verdedigde zich door zijn ideeën aan te passen aan de volgende bewering van Heyting:[97] "Jedes Element der Menge $\mathtt{M}$ hat die Eigenschaft $E$, wenn man, bevor man anfängt, durch Wahlen ein Element von $\mathtt{M}$ zu bestimmen, sicher ist, dass, wie die Wahlen auch ausfallen, nach einer endlichen Anzahl von Wahlen das Erfülltsein von $E$ sich herausstellen wird." Van hieruit begon Beth met zijn verweer: [98]

"[I]ntuitionistic proofs (and, in particular, proofs of the fan theorem) sometimes start by restating the hypothesis in a way not warranted by previous definitions. In the case under discussion, such a restatement seems to be required on account of the following considerations.

The hypothesis in the completeness proof is: all models of the junctive $C$ are models of the $D$ [uitgaande van een sequent $C \Rightarrow D$]. In our proof, this hypothesis is applied to all semi-models $\mathcal{M}^h$ which happens to be models, and hence are models of the junctive $C$. These semi-models form a subspecies of a certain fan.

[...] Let us define $\mathcal{M}^h \in \mathtt{E}$ as follows: $\mathcal{M}^h$ has the property $E$, if[:] $\mathcal{M}^h$ is a model [implies] $\mathcal{M}^h$ is a model of the junctive $D$. Now, by the hypothesis, every $\mathcal{M}^h$ must have the property $E$.

In accordance with Heyting's explanation, this means that, after a finite number of steps in the construction of $\mathcal{M}^h$, it must turn out[99] that[:] $\mathcal{M}^h$ is a model [implies] $\mathcal{M}^h$ is a model of the junctive $D$.

On the other hand, if for each $\mathcal{M}^h$, the property $\mathcal{M}^h$ is a model [implies] $\mathcal{M}$ is a model of the junctive $D$ must turn out to belong to $\mathcal{M}^h$ after a finite number of steps, then, as the models $\mathcal{M}^h$ are elements of a fan, there is an upper bound for this number of steps. And, if we ask in what manner this property can be seen by inspection, the obvious reply seems to be: by the appearance of a sequent of the form referred to in rule (i) in Theorem 4.3 [het optreden van de axiomavorm].

Another argument would run as follows. With functions $h$, we connect models $\mathcal{M}^h$, as follows. If $\mathcal{M}^h$ is a model (and hence a model of $C$), then $\mathcal{M}(h) = \mathcal{M}^h$; if $\mathcal{M}^h$ is *not* a model, then $\mathcal{M}(h)$ will be the zero-model, which (fulfils *every* junctive and hence) is a model of $C$. Then there can be no $h$ with which no model $\mathcal{M}(h)$ of $C$ is connected.

Now there is a machine which converts every model $\mathcal{M}$ of $C$ into a model $\mathcal{N}$ of $D$. Applying Parson's remark, we stipulate that the machine may refuse a trunk $\mathcal{M}$ only if $\mathcal{M}$ cannot be developed into a model of $C$. Now the machine cannot refuse any model $\mathcal{M}(h)$, and so on."

Dat Beth toch niet zo zeker was van zijn zaak laat het vervolg zien, waarbij hij

[97](Heyting 1936), p. 118 en (Beth 1956*d*), p. 378.

[98]Brief Beth – Kreisel, 23 december 1957.

[99]'This turn out' (herausstellen) is meant to be accessible to 'seeing by inspection."; zie ook (Beth 1956*d*), p. 381, Franse citaat van Heyting.

meteen zijn toekomstverwachtingen uitspreekt:

I fully agree that all these arguments look more or less fallacious, but it seems to me that this situation can only be improved by 1. setting up certain formal standards for intuitionistic higher-order logic, and 2. giving a more elaborated statement of the completeness theorem, in which the explanations given above appear no longer as part of the proof but are incorporated into the hypothesis of the theorem (or perhaps rather into the axioms for higher-order logic)."

**Beths verbeteringen.** In de sectie over de kritiek op Beths modellen is er al gewag gemaakt van Beths voorstel om de vorm van zijn volledigheidsstelling te veranderen in: "All models $\mathcal{M}'$ which fulfil the conjunctive $C$ also fulfil the disjunctive $D$, then it [i.e. the sequent $C \Rightarrow D$] is derivable in the Formal System $F_0$."

Volgens Beth lag de betekenis van "All models $\mathcal{M}'$" constructief niet goed vast en derhalve was een tweede verandering van zijn stelling nodig: "All semi-models $\mathcal{M}''$ (including the models $\mathcal{M}'$) which fulfil the conjunctive $C$ also fulfil the disjunctive $D$, then it [i.e. the sequent $C \Rightarrow D$] is derivable in the Formal System $F_0$."

De consequenties, die dit met zich meebracht, werkden in Beth (1959*b*), p. 461, slechts globaal behandeld. Een echt uitgewerkt bewijs heeft hij nooit geleverd. Volgens hemzelf geeft hij in Beth (1959*b*) geen constructie voor die modellen $\mathcal{M}'$ voornoemd. Zijn semimodellen omvatten naast modellen ook semimodellen die niet model kunnen zijn of die niet de conjunctie $C$ [uit $C \Rightarrow D$] vervullen.

Een semimodel $\mathcal{M}$ is een eindige waaier; elke keuzerij daarin is een model of een semimodel, maar niet elk zo een model hoeft een subwaaier van het semimodel $\mathcal{M}$ te zijn. Beth geeft de constructie van bepaalde semimodellen die een representatieve selectie van die $\mathcal{M}'$-modellen bevatten. Echter bevat het semimodel meer, namelijk semimodellen, $\mathcal{M}''$, die niet modellen zijn voor de conjunctie $C$ [uit $C \Rightarrow D$] .

Dergelijke moeilijkheden had Beth al in 1956 onderkend. Al eerder is er gerefereerd naar Beth (1956*d*), p. 29: "I have avoided referring to all choice sequences (or branches), but I have been constantly speaking of all semi-models and of all models." De laatste reden van Beth (1956*d*), pp. 29, 30, om de expliciete vermelding van keuzerijen te vermijden werd toen nog niet genoemd:

"And thirdly, in adopting a completely systematic procedure I would have met with the following difficulty. It seems that the species of all semi-models can be represented by a spread, but for the species of all models such a representation is not possible. In our argument, this observation accounts for the fact that the procedure, discussed in the intuitionistic version of my proof of Theorem 7.10 [if a sequent $A \Rightarrow B$ holds true, then it is derivable in the formal system F0 (intuïtionistische variant)], applies not only to models, but also to the semi-models. So, while we are really interested in models only, we would have been compelled continually to refer to the spread which represents all semi-models."

In een brief aan Kreisel uit 1957 ging Beth hier verder op in: [100]

"The hypothesis in the completeness theorem contains the quantifier '*all models*', whereas (in general) the species of all models of a given conjunctive cannot be represented by a spread, my paper contains a method for embedding all models of a given conjunctive in a spread which in addition contains semi-models. But presumably the species of all models can also be embedded in other spreads and, as I have shown in my paper in Amsterdam [i.e. Beth (1959*c*)] the meaning of the quantifier '*all models*' may depend on the choice of the spread in which these models are embedded."

Dergelijke overwegingen zouden later in de Swart (1976) (een volledigheidsbewijs voor Beth-modellen in Gödel-stijl) en Veldman (1976) (een volledigheidsbewijs voor Kripke-modellen in Henkin-stijl) een precieze vorm krijgen.

### 10.3.3 Beth-modellen en topologie

Er is een topologische interpretatie voor Beth-modellen. Deze werd behandeld in Kreisel (1958*b*), en later in Dyson & Kreisel (1961). Dit levert vergelijkingsmateriaal op met het werk van de voorgangers: Tarski, McKinsey en Rasiowa. Ook Beth ging hieraan niet voorbij (zij het dat Beth de propositielogica niet ontstegen is): in Beth (1959*b*) [101] betrof het intuitionistische propositielogica, in Beth (1961*b*) en in Beth & Nieland (1965), pp. 23–24, een fragment van S4 (Kripke-stijl). In alle gevallen werd er uitgegaan van de relaties tussen logica en topologie zoals bij de voorgangers.

De ruimte die voor Beths S4-fragment wordt vrijgemaakt, heeft een meerledige achtergrond. Er wordt voortgeborduurd op Beths pogingen om met behulp van zijn derivatieve logica met hulptableaus fragmenten van S4 en hun relaties tot intuïtionistische logica te bekijken; in S4 draait het hier alleen om de formules waarin van modale operatoren gebruik wordt gemaakt: daar is het intuïtionistische fragment te zoeken.[102]

**Valuaties.** Beths S4-fragment bestond uit implicatie[103] en negatie (desgewenst uit te breiden met conjunctie en disjunctie) tezamen met de noodzakelijkheidsoperator.[104] De valuaties voor negatie (regel S2) en implicatie (regel S1) (en desgewenst disjunctie en conjunctie) zijn klassiek. De valuatie voor noodzakelijkheid (regel S3) vereist hulpvaluaties (hulptableaus). Daarnaast heeft Beth nog als extra regel de valuatieregel (S4): Als $v(A) = 0$ en als er een $v^* < v$ bestaat met $v^*(A) = 1$, dan bestaat er een $v^{**} < v$ met $v^{**}(A) = 0$.

Beth ging voor een topologie uit van het tweetal $(\mathtt{M}, i) = \mathcal{M}$: $\mathtt{M}$ is een verzameling, $i$ een operator (het inwendige) op de deelverzamelingen van $\mathtt{M}$, en

[100] Brief Beth – G. Kreisel, 8 december 1957. Cursief door Beth.

[101] Oefening 86 op p. 680: Toplogical treatment of intuitionistic logic —(Tarski 1938), (Mostowski 1948), (Rasiowa 1951).

[102] Zie het hoofdstuk over implicatieve systemen, bespreking van S4.

[103] Voor implicatieve S4: (Nieland & Beth 1961*a*), (Beth & Nieland 1965).

[104] Voor de uitbreidingen naar disjunctie en conjunctie o.a. in Beth & Nieland (1965): "Conjunction, disjunction and equivalence can then be introduced in the same way as in classical logic."

gedefinieerd op de gebruikelijke manier.[105] Men kan nu de relaties vastleggen tussen de formules en de topologie.

○— *Intuïtionisme.*[106] Ga uit van een topologie $\mathcal{M} = (\mathtt{M}, i)$. Definieer als volgt een functie $v$: $v(A)$ is een open deelverzameling op $\mathtt{M}$, als $A$ atomair is. Voor $A, B$ formules: $v(A \to B) = i(\mathtt{M} \setminus v(A) \cup v(B))$; $v(\neg A) = i(\mathtt{M} \setminus v(A))$, $v(A \vee B) = v(A) \cup v(B)$ en $v(A \wedge B) = v(A) \cap v(B)$. Het gebruik van de operator i verloopt zoals onder de Tarski-McKinsey vertaling van de propositionele Heyting naar S4.[107]

a. Als $A$ afleidbaar is uit de intuïtionistische propositie-logica, dan heeft men voor elke valuatie $v$ over een ruimte $\mathtt{M}$: $v(A) = \mathtt{M}$.
b. En omgekeerd kan men voor elke formule $A$ die niet in de intuitionistische propositie-logica zit, een topologische ruimte $\mathtt{M}$ vinden en een valuatie $v$ met $v(A) \neq \mathtt{M}$. Aan het geval b zal in de volgende paragraaf nadere aandacht besteed worden.

○— *Implicatieve S4 met negatie.*[108] Naar Tarski en McKinsey kan men een functie $v$ gebruiken, die de logische operatoren $(\to, \neg, \Box)$ verbindt met een topologie $(\mathtt{M}, i)$: $v(A) \subseteq \mathtt{M}$, voor $A$ een atomaire formule; En voor $A, B$ formules: $v(A \to B) = (\mathtt{M} \setminus v(A)) \cup v(B)$; $v(\neg A) = \mathtt{M} \setminus v(A)$; $v(\Box A) = i(v(A))$.

Uit bovenstaande kwam Beth naar analogie aan Tarski en McKinsey tot het volgende:

a. Als S4 $\vdash A$, de topologie $(\mathtt{M}, i)$ en $v$ bovenstaande functie, dan heeft men $v(A) = \mathtt{M}$.
b. De andere kant op: S4 $\nvdash A$, dan bestaat er een $(\mathtt{M}, i)$ en een functie $w$ over $(\mathtt{M}, i)$ met $w(A) \neq \mathtt{M}$.

**Beths ruimte.** In beide gevallen lagen de tableaus aan de door Beth gememoreerde ruimte ten grondslag. Men kan als punten van de ruimte de takken van de boom $\mathcal{B}$ nemen.

○— Het intuïtionistische geval. De omgeving van een punt van $\mathtt{M}$ is de omgeving van een tak $t$ van boom $\mathcal{B}$, dat zijn de verzamelingen van de takken $t^*$ van de deelbomen $\mathcal{B}^*$ van $\mathcal{B}$ en $t$ zit in die $\mathcal{B}^*$.

Vergelijk hiermee Dyson & Kreisel (1961), p. 7, *The relation between the (intuitionistic version of the) topological interpretation and the intended interpretation*:

"We consider special topological 'spaces' determined as follows: Given a finitary *tree* or spread $\mathcal{T}$, i.e. a graph without circuits and a finite number of (immediate) descendants at each node, we consider paths determined by absolutely free choice sequences in the sense of Kreisel (1958*b*) chosen from the tree. An open 'set' is given by a species $\mathtt{V}$ of

[105] Voor $\mathtt{X}$ en $\mathtt{Y}$ deelverzamelingen op $\mathtt{M}$: $i\mathtt{X} \subseteq \mathtt{X}$; $ii\mathtt{X} = i\mathtt{X}$; $i(\mathtt{X} \cap \mathtt{Y}) = i\mathtt{X} \cap i\mathtt{Y}$; en $i\mathtt{M} = \mathtt{M}$. Zie verder Engelking (1989).

[106] (Beth 1959*b*), oefening 86

[107] Vergelijk hiertoe het hoofdstuk over implicaties.

[108] Zie ook (Schütte 1968), pp. 82–84, i.h.b. p. 84.

nodes, and may be conceived as consisting of all paths which go through some node belonging to $\mathtt{V}$."

○— Het S4-fragment. Beth gebruikte twee varianten:

1. Neem naar analogie van het intuïtionistische geval de takken als de maximaal geordende verzamelingen — d.w.z. zonder $\leq$ — en deelverzamelingen op de valuatieverzameling $\mathtt{V}$. Zij zijn de punten voor de $\mathtt{M}$. Voor $P$ zo een punt op $\mathtt{M}$ is er een omgeving van $P$, $O(P)$ geheten, als de volgende verzameling: $\{P^* \in M \mid \exists v \in P^* \cap P\}$.

2. Neem de hulpvaluaties (de knopen op de takken van de boom) als de punten van $\mathtt{M}$. Men kan *knopen* van bomen en hulpvaluaties van een valuatie gescheiden denken. Voor het gemak identificeren wij ze hier echter. Laat bovenstaande $\mathtt{M}$ nu de verzameling $\mathtt{V}$ van alle hulpvaluaties zijn. Voor elke $v \in \mathtt{V}$ wordt er een omgeving, $O(v)$, gedefinieerd als de verzameling van de $v^* \in \mathtt{V}$ met $v^* \leq v$.

Volgens Beth (in navolging van Tarski's meetkundige interpretaties) zijn de hier gebruikte ruimten $(\mathtt{M}, i)$ homeomorf aan een compacte deelverzameling van de Cantor-verzameling $C$.[109] $C$ is dan weer door het Euklidische vlak te vervangen (vgl. Tarski).

Met deze topologische interpretaties zijn we weer terug bij af, het begin van het hoofdstuk over semantiek, en houdt Beth zich weer bezig met normalere wiskunde.

[109] Zie het hoofdstuk over semantiek en Engelking (1989), zie ook Mints (1999).

# Hoofdstuk 11

# Supplementen

## 11.1 Sequenten en tableaus.

### 11.1.1 Beths sequenten

**Syntax.** [1] Volgens Beth (1959*b*), p. 282–283, vormt het volgende *sequentensysteem* de basis voor zijn semantische tableaus. De bij Kleene (1952*a*) in G3 vermelde formuleherhaling worden hier niet toegepast. Bij de *tableausequenten* komt men ze wel tegen. Vanwege ruimtebesparing zijn in hetzelfde schema de intuïtionistische sequenten geplakt. Dit is naar Beth (1959*b*), p. 449 (zie ook Beth (1957*b*)). Regel F (Beth 1959*b*)-8. is toegevoegd in Beth (1959*b*). Deze regel, zij het andersom, was ook al te vinden in Beth (1956*d*). Door deze regel, waarin een permutatie voorkomt, heeft Beth een aftelling met cijfertjes $1, \ldots, p$ nodig om precies te laten zien hoe dit gebeurt. In het klassieke geval kan hij alle opsommingen met de parameters $a, \ldots, t$ aanduiden. Haakjes, [ en ], om de formules heen geven aan, wat men weg moet laten om het intuïtionistische sequentensysteem (d.w.z. Beth (1959*b*), p. 449) te verkrijgen.

(i) [F0–] axioma: $\Delta, A, \Delta^* \Rightarrow [\Gamma], A, [\Gamma^*]$.

(ii) [F0–] propositionele operatoren:

[F0.] 2a. $\dfrac{\Delta \Rightarrow \Gamma, A}{\neg A, \Delta \Rightarrow \Gamma}$ $\qquad$ $\dfrac{\Delta, A \Rightarrow \Gamma}{\Delta \Rightarrow \neg A[\Gamma]}$ [F0.] 2b.

[F0.] 3a. $\dfrac{\Delta, A, B \Rightarrow \Gamma}{A \wedge B, \Delta \Rightarrow \Gamma}$ $\qquad$ $\dfrac{\Delta \rightarrow \Gamma, A \text{ [et] } \Delta \Rightarrow \Gamma, B}{\Delta \Rightarrow A \wedge B, \Gamma}$ [0.] 3b.

[1] Voor de axiomatiek: zie voor klassieke propositielogica: (Beth 1962*a*), p. 128.; en voor intuitionistische propositielogica: (Beth 1962*a*).

[F0.] 4a. $\dfrac{\Delta, A \Rightarrow \Gamma \text{ [et] } \Delta, B \Rightarrow \Gamma}{A \vee B, \Delta \Rightarrow \Gamma}$ $\dfrac{\Delta \Rightarrow \Gamma, A, B}{\Delta \Rightarrow A \vee B, \Gamma}$ [F0.] 4b.

F0.5a. $\dfrac{\Delta, A \rightarrow B \Rightarrow \Gamma \text{ [et] } \Delta, A \rightarrow B \Rightarrow \Gamma}{A \rightarrow B, \Delta \Rightarrow \Gamma}$ $\dfrac{\Delta, A \Rightarrow [\Gamma]B}{\Delta \Rightarrow A \rightarrow B[\Gamma]}$ [F0.] 5b.

$\dfrac{\Delta \Rightarrow \Gamma, A \text{ [et] } \Delta, B \Rightarrow \Gamma}{A \rightarrow B, \Delta \Rightarrow \Gamma}$ klassiek 5a.

(iii) [F0–] quantoren:

F0.6a. $\dfrac{\Delta, A(1), \ldots, A(p), \forall A(x) \Rightarrow \Gamma}{\forall x A(x), \Delta \Rightarrow \Gamma}$ $\dfrac{\Delta \Rightarrow A(p)}{\Delta \Rightarrow \forall x A(x)}$ F0.6b.

[F0.] 7a. $\dfrac{\Delta, A(p) \Rightarrow \Gamma}{\exists x A(x), \Delta \Rightarrow \Gamma}$ $\dfrac{\Delta \Rightarrow \Gamma, A(1), \ldots, A(p), \exists x A(x)}{\Delta \Rightarrow \exists x A(x), \Gamma}$ F0.7b.

klassiek 7b. $\dfrac{\Delta \Rightarrow \Gamma, A(a), \ldots, A(t)}{\Delta \Rightarrow \exists x A(x), \Gamma}$

F1959a.8. $\dfrac{\Delta \Rightarrow A_1 \text{ [vel] } \Delta \Rightarrow A_2, \ldots, A_k, A_1}{\Delta \Rightarrow A_1, A_2, \ldots, A_k}$ $\dfrac{\Delta \Rightarrow A \text{ [vel] } \Delta \Rightarrow \Gamma, A}{\Delta \Rightarrow A, \Gamma}$ F0.8.

F0, ge- en verboden: ad regel 6b: de $p$ treedt niet op in $\Delta$ of in $\forall x A(x)$. ad regel 7a: de $p$ treedt niet op in $\exists x A(x)$, niet in $\Delta$ en niet in $\Gamma$. Regel F1959a.8 is een uitgeschreven regel F0.8; pas in het intuïtionistische geval spelen deze regels een rol (vorming van oneindige takken).

**Semantiek.** Voor de intuïtionistische tableau-sequentenregels kan men naar Beth (1956*d*) verwijzen: [2] deze zijn precies het omgekeerde van bovenstaande sequenten. Houdt bij de intuïtionistische omkering het wegvallen van formuleverzamelingen, zoals boven beschreven, aan. Enkele afwijkende gevallen:

2a. $\dfrac{\neg A, \Delta \Rightarrow \Gamma}{\Delta, \neg A \Rightarrow \Gamma, A}$ $\dfrac{\Delta \Rightarrow \neg A}{\Delta, A \Rightarrow \emptyset}$ 2b.

5a. $\dfrac{A \rightarrow B, \Delta \Rightarrow \Gamma}{\Delta \Rightarrow \Gamma, A \text{ [et] } \Delta, B \Rightarrow \Gamma}$

### 11.1.2 Overzicht tableaus

*Afhankelijkheden*:

<table>
<tr><td colspan="5">prototableaus</td></tr>
<tr><td colspan="3">semantische<br>tableaus</td><td colspan="2">pseudo<br>valuaties</td></tr>
<tr><td>deductieve<br>tableaus</td><td>semantische<br>tableaus</td><td>Beth<br>modellen</td><td>modale<br>tableaus</td><td>derivatieve<br>tableaus</td></tr>
</table>

*Voorlopers*:

1935. Gentzen: terugredenering naar axioma's zonder snede

[2]Deze tableau-sequentenregels zijn nagenoeg dezelfde als in Beths lezing uit 1955 — drie jaar later uitgegeven als Beth (1958*a*), pp. 79–80. Alleen zijn in Beth (1958*a*) overal de hier impliciete herhalingsregels voor de antecedentaire herhalingsregel expliciet aangegeven; bovendien is het resultaat van regel 8 daar als regel 7 iets duidelijker uitgeschreven: $\Delta \Rightarrow A_1, \ldots, A_k$ geeft $\Delta \Rightarrow A_1 [\vee] \cdots [\vee] \Delta \Rightarrow A_k$.

1952. Kleene: zoals Gentzen, maar nu ook zonder structurele regels.
1954. Beth: lezingen Sorbonne: voorjaar 1954 (uitg. 1956); latere ingrepen van Beth bij uitgave daarvan in 1956, hierdoor onduidelijkheden — echt tableau in 1956, voorloper in 1954.
1954. Beth: afgeblazen artikel met opdracht aan Feys — een 'half-tableau' voor constructie van pseudovaluaties: begin 1954.

*Semantische tableaus*:

1954. Beth: november, december: de uiteindelijke vormgeving van de tableaus — Beth komt op het idee van de tableaukolommen-splitsing (brief Hasenjaeger) en de uit een tableau af te lezen formele afleiding (deductie) (brief Hintikka).
1955. Beth: artikel opgedragen aan Feys — echte tableaus.
1955. Hintikka: artikel modelverzamelingen. Beth in contact met Hintikka.
1957. Beth: stuurt materiaal naar Kripke waaronder Beth (1955*b*) en Beth (1956*d*).
1958. Kripke: introductie hulptableaus in modale logica; (Kripke 1959*a*) was al in augustus 1958 door JSL ontvangen.
1959. Kripke: hulptableaus en S5.
1959. Kripke: belofte in abstract Kripke (1959*b*) in JSL om aan S4, gecombineerd met intuïtionisme, te gaan werken.
1961. Beth: gebruik hulptableaus bij de constructie van pseudovaluaties (modale logica, implicatie: S4, intuïtionistische fragmenten).
1963. Kripke: semantiek voor intuïtionistische logica m.b.v. tableaus en hulptableaus.

*Beth-modellen*:

1947 Het naar voren brengen van spreidingen en keuzerijen als werktuigen voor een waarlijke intuïtionistische semantiek in Beth (1947*c*) [1945 bedacht]. Er wordt hier nog geen semantisch apparaat ontwikkeld.

1955 De beginperiode: gebruik van semantische tableaus. Dit resulteerde in de lezing te Parijs in 1955 [als Beth (1958*a*) gepubliceerd].

1956 Verbeteringen op de lezing uit 1955. Het preciezer formuleren van de begrippen, een poging tot het geven van een intuïtionistisch volledigheidsbewijs. Dit resulteerde in Beth (1956*d*) dat nadien door Beth niet wezenlijk meer veranderd is.

1958 Publicaties van Kreisel over de verschillende aspecten van volledigheid van intuïtionistische logica: Kreisel (1958*b*) en Kreisel (1958*a*).

1959 Op Beth (1956*d*) kwam vooral van Kreisel kritiek. Dit gaf aanleiding tot marginale verbeteringen door Beth. Dit resulteerde in Beth (1959*b*) waar nog steeds het nodige op aan te merken viel.

1961 Dyson & Kreisel (1961) geven een verbeterde versie van Beths semantiek. Kreisel (1961) over niet-afleidbaarheid van bepaalde formules.

1965 Kripke (1965) [lezing 1963] levert een klassiek, maar niet intuïtionistisch gestoeld bewijs voor volledigheidsstelling van de intuïtionistische logica. Relatie tussen Bethmodellen en Kripkesemantiek door Kripke omschreven.

1976 Na Beth werd een constructief bewijs geleverd door Veldman (1976) [in 1974 door JSL ontvangen]. Dit ging uit van de Kripke-semantiek; de Swart (1976) [in 1974 door JSL ontvangen] gaf aan de hand van Veldman (1976) een constructief bewijs voor de Beth-modellen.

## 11.2 Varia Beth

### 11.2.1 Leven E.W. Beth

Bij de hieronder volgende data zijn enkele wetenswaardigheden over H.J.E. Beth vermeld.[3] Bij gegevens die op H.J.E. Beth betrekking hebben, staat telkens diens naam vermeld. Aan de diverse door E.W. Beth gebruikte huisadressen zal hier niet veel aandacht worden besteed. Bij tijd en wijle woonde hij bij zijn ouders (voor de laatste keer te Amersfoort op het einde van de Tweede Wereldoorlog). Daarnaast was hij her en der in de kost. Na zijn huwelijk vestigde hij zich in Amsterdam. Gedurende de langste periode was aldaar het adres Bernard Zweerskade 23-I. In zijn laatste levensjaren beschikte Beth bovendien over een zomerhuisje te Laag Kanje in de gemeente Maarn om aldaar in het struweel van het Stichtse verborgen het jachtige leven van de grote stad te kunnen ontvluchten. De zandgrond en de omringende bossen verschaffen denkelijk ook nog een betere lucht voor iemand die erge last heeft van de ademhalingswegen, dan de miasmen van het Zuider Amstelkanaal, waaraan hij woonachtig was. Dit was ook de grond voor zijn plan om in de buurt van het Spaanse Alicante een woning vlak bij het strand te laten bouwen.[4] In de winter van 1963 – 1964 had Beth gehoopt daar al gebruik van te kunnen maken. Het is echter anders gelopen. Beths vrouw, C.P.C. Beth–Pastoor, bracht de laatste levensjaren door in het appartementencomplex Boszicht te Doorn.[5]

5-7-1880: Geboorte van Hermanus Johannes Eliza Beth te Rozendaal en Nispen. 1897: Eindexamen Hogere Burger School [HBS] door H.J.E. Beth en begin van zijn studie Wis- en Natuurkunde aan de Universiteit van Amsterdam. 1904: Doctoraal Wis- en Natuurkunde door H.J.E. Beth aan de Universiteit van Amsterdam. 1904 – 1906: H.J.E. Beth leraar te Amsterdam en Baarn. 1906: H.J.E. Beth leraar aan de HBS te Almelo.

7-7-1908: Geboorte van Evert Willem Beth te Almelo als zoon van H.J.E. Beth en

[3] De gegevens over H.J.E. Beth zijn voornamelijk gehaald uit het Jubileum-nummer *H.J.E. Beth 70 jaar* van *Euclides 25* (-No. 5, 5-7-1950) (1949/50). De gegevens over E.W. Beth zijn afkomstig van hemzelf uit de diverse curricula vitae of op andere wijze uit het Beth-Archief verkregen.

[4] Brief Beth – L. Henkin, 20 augustus 1963 en brief Beth – L. Apostel, 20 oktober 1963. Beth – Eggink, 13 mei 1963.

[5] De gegevens betreffende de woonplaats van Beth in de provincie Utrecht en de woonplaats van zijn vrouw te Doorn zijn van Beths zuster A.A.M. Beth afkomstig.

Hillegje de Groot (1882 – 1960). Het gezin bestond verder uit twee dochters, Ali (1911 – 1989) en Antoninia A.M. (1913 – 1995).[6]
4-11-1910: Promotie van H.J.E. Beth op *De schommelingen om een evenwichtsstand bij het bestaan eener eenvoudige lineaire relatie tusschen de reciproke waarden der perioden, met toepassing op de beweging, zonder wrijving, van een zwaar punt op den bodem eener vaas*, (promotor D.J. Korteweg, Faculteit Wis- en Natuurkunde, Universiteit van Amsterdam), Kampen (Kok), 1910, 135 pp.[7]
1912: H.J.E. Beth directeur van de HBS te Almelo. 1920: Aanbod aan H.J.E. Beth van een leerstoel aan de toen nog particuliere[8] (pas later een gouvernementsinstelling) en op 3 juli 1920 door de Gouverneur-generaal geopende Technische Hogeschool te Bandoeng; dit werd door H.J.E. Beth afgewezen. 1922 – 1935: H.J.E. Beth directeur van de Rijks HBS te Deventer.
11-7-1925: Eindexamen door E.W. Beth aan de Rijks HBS te Deventer. 1925 – 1926: Studie voor het examen apothekersassistent. 1926: Enkele maanden studie farmacie aan de Rijks Universiteit Utrecht. 23-3-1927: Beth (te Deventer) voorgoed ongeschikt verklaard voor de militaire dienst. 28-10-1929: Kandidaatsexamen-A Wis- en Natuurkunde aan de Rijks Universiteit Utrecht. 6-7-1932: Doctoraalexamen Wis- en Natuurkunde aan de Rijks Universiteit Utrecht (hoofdvak wiskunde, bijvakken natuurkunde en mechanica; geslaagd cum laude). Afstudeerhoogleraren: H.A. Kramers, J. Wolff, J. Barrau.
1932 – 1933: Vrije studie te Utrecht bij H.A. Kramers (natuurkunde) en T. Goedewaagen (filosofie, neo-kantiaan). 1933 – 1934: Vrije studie te Leiden bij W. van der Woude (wiskunde, meetkunde), H.D. Kloosterman (wiskunde, (additieve) getaltheorie), A.J. de Sopper (filosofie, neo-kantiaan) en J. Woltjer.[9] 22-12-1933: Diploma levensverzekeringswiskunde. 1934 – 1935: Studie aan de Université Libre te Brussel bij M. Barzin en A. Errera (wiskunde). Dit geschiedde met een beurs van de Nederlandse Afdeling van de Commissie voor Intellectuele Toenadering tussen Nederland en België. 1935 – 1946: H.J.E. Beth directeur van de Rijks HBS te Amersfoort.

21-5-1935: Doctoraalexamen Wijsbegeerte van E.W. Beth aan de Rijks Universiteit te Utrecht (hoofdvak psychologie, bijvakken wijsbegeerte en wiskunde).
15-11-1935: Promotie van E.W. Beth op *Rede en Aanschouwing in de Wiskunde*, (promotor J.C. Franken (neo-kantiaan), Faculteit Letteren en Wijsbegeerte, Rijks Universiteit Utrecht), Groningen, 1935, VIII+120 pp.
15-11-1935 – 31-8-1937: Leraar wiskunde (tijdelijk) aan de Rijks HBS te Tiel. 1-9-1936 – 31-8-1937: Leraar wiskunde (tijdelijk) aan de Pallas Athene School te Amersfoort (voor ten hoogste 3 lesuren; tegelijk met Tiel). 1-9-1937 – 1-3-1938: Leraar wiskunde (tijdelijk) aan het Kennemer Lyceum te Bloemendaal. Maart t/m april 1938: Leraar wiskunde (tijdelijk) aan het Gymnasium te 's Hertogenbosch. 26-4-1938 – 30-11-1938: Leraar wiskunde (tijdelijk) aan de RijksHBS te Winterswijk. 1-4-1939 – 15-7-1939: Leraar wiskunde (tijdelijk) aan de Particuliere HBS-A te Rotterdam. 1-9-1939 – 31-8-1940: Leraar wiskunde (tijdelijk) aan het Gymnasium te Haarlem.

[6] De geboorte- en sterfdatum van Beths moeder en zijn zuster Ali van Beths zuster A.A.M. Beth; de overlijdensdatum van Antoninia uit een overlijdensadvertentie.
[7] Deze dissertatie lag in het verlengde van Kortewegs werkzaamheden m.b.t. trillingen om een evenwichtstoestand.
[8] Stichting van het Koninklijk Instituut voor Hooger Technisch Onderwijs in Nederlandsch-Indië.
[9] Hendrik Douwe Kloosterman, 1900 – 1968.

1940 – 1942: Student rechten te Amsterdam 17-10-1941: Kandidaatsexamen Rechtsgeleerdheid aan de Universiteit van Amsterdam. 16-9-1942 – 1-5-1943: Assistent zuivere en toegepaste wiskunde aan de Technische Hogeschool Delft (onder C.H. van Os). De aanstelling liep tot 31-8-1943, maar Beth heeft zelf eerder ontslag genomen.
22-1-1943: Promotie van E.W. Beths zuster Ali Beth op *Variatieverschijnselen in het Oud-Indisch*, (Faculteit Letteren en Wijsbegeerte, Rijks-Universiteit te Utrecht; promotor J. Gonda).
24-8-1943 – 15-8-1945: Leraar wiskunde (tijdelijk als invalkracht) aan de Rijks HBS te Amersfoort (zijn vader was aldaar directeur).

22-5-1946: Benoeming tot buitengewoon hoogleraar in de 'logica en haar geschiedenis en de filosofie der exacte wetenschappen' aan de Universiteit van Amsterdam (in de Faculteit Wis- en Natuurkunde en de Faculteit Letteren en Wijsbegeerte).
23-9-1946: Intree-rede van Beth: *De strekking en het bestaansrecht der metaphysica in verband met de toekomst der wijsbegeerte*, (inaugurale rede, Universiteit van Amsterdam, 1946), Groningen-Batavia (P. Noordhoff), 1946, 20 pp.
26-3-1947: Huwelijk van E.W. Beth met Cornelia Petronella Christina Pastoor (geboren 25-11-1896 te 's Gravenhage — gestorven 25-11-1978).

1947 – 1953: Voorzitter van de Nederlandse Vereniging voor Logica en Filosofie van de Exacte Wetenschappen. 1948 – 1954: Voorzitter van de Algemene Nederlandse Vereniging voor Wijsbegeerte. 1948: Secretaris van het Tiende Internationale Congres voor Wijsbegeerte te Amsterdam. 2-11-1949: Benoeming van Beth tot gewoon hoogleraar aan de Universiteit van Amsterdam (in de Faculteit Wis- en Natuurkunde, de Faculteit Letteren en Wijsbegeerte en de Faculteit Politieke en Sociale Wetenschappen).

Februari – maart 1951: Bezoek aan Universiteit van Cambridge, Engeland. December 1951 – juli 1952: Eerste reis van Beth naar de Verenigde Staten (als 'research assistent' onder A. Tarski aan de Universiteit van Californië te Berkeley). 1952: Benoeming tot directeur van het 'Instituut voor Grondslagenonderzoek en Filosofie der Exacte Wetenschappen' aan de Universiteit van Amsterdam. 6-2-1952: Overlijden van H.J.E. Beth. 1953: Opname van E.W. Beth als lid van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Afdeling Letteren. Maart – april 1954: Bezoek aan de Universiteit van Parijs (Sorbonne). Januari – augustus 1957: Tweede reis van Beth naar de Verenigde Staten (als 'visiting professor in philosophy' aan de Universiteit Johns Hopkins te Baltimore). 1964: Eredoctoraat aan de Universiteit van Gent (Beth was al te verzwakt om dit persoonlijk in ontvangst te nemen).[10]

12-4-1964: Overlijden van Beth te Amsterdam. 16-4-1964: Begrafenis van Beth op de begraafplaats Zorgvlied, Amsteldijk 273, te Amsterdam. Zijn grafsteen wordt gesierd door de spreuk 'Door wetenschap tot wijsheid'.[11]

**Dissertaties bij Beth.** De zeven door Beth afgehandelde dissertaties vormen een niet al te grote oogst. In die tijd was er over het algemeen nog niet zo een grote productie aan promoties zoals tegenwoordig. Veelal deed men dit naast zijn gewone werk. Wel was er in het begin van de zestiger jaren een grote

[10] Gegevens eredoctoraat van Beth uit Heyting (1966), p. 292.
[11] Opschrift van Beths grafsteen naar een veld-waarneming van E.C.W. Krabbe.

hoeveelheid dissertaties bij Beth in voorbereiding waarvan een deel gekoppeld was aan het door Beth geëntameerde Euratom-project. Door Beths plotselinge overlijden kon de afwerking niet meer bij hem plaatsvinden en moesten deze mensen hun toevlucht elders zoeken.
P.C. Gilmore (1953); K.L. de Bouvère (1955); J.J. Mulckhuyse (1960); W.A. Verloren van Themaat (1963); F. Balk - Smit Duyzentkunst (1963); J.J. Broeder (1963); J.A. Stommel (1964, waarnemend promotor H. Engel).

Bij een aantal dissertaties heeft Beth een rol gespeeld zoals bij die van M. Guillaume (1960, P. Samuel, E. Blanc). Beth zat in de commissie, het onderwerp betrof toepassingen van Beths semantische tableaus; De dissertatie van J.J.A. Mooij (1966, promotor A. Heyting) was op het moment van Beth overlijden al vergevorderd; D.H.J. de Jongh (1968, promotor S.C. Kleene); S.C. van Westrhenen (1969, promotor W. Peremans)

### 11.2.2 Bronnen

**Archief E.W. Beth.** Dit archief is indertijd door E.W. Beth aan de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen [K.N.A.W.] nagelaten. Later is er correspondentie-materiaal dat op de toenmalige subfaculteit wiskunde van de Universiteit van Amsterdam achtergebleven was, aan toegevoegd.[12] Vanaf eind 1992 is het archief opgenomen in de collectie van het Rijksarchief in Noord Holland.[13]

Een deel van de geciteerde brieven bestaat uit afschriften of kopieën. Deze afschriften zijn veelal in de vorm van carbondoorslagen. De in het archief aanwezige ingekomen brieven zijn dan originelen, de door Beth geschreven uitgegane brieven zijn bewaard gebleven als carbondoorslagen. Ook zijn dergelijke (carbon-) kopieën aanwezig van brieven die niet afkomstig zijn van Beth of gericht aan Beth. Het betreft dan vaak brieven met betrekking tot geleerde genootschappen. Voor bestuurskwesties werden veelal afschriften rondgezonden naar meerdere personen. Het is in de dissertatie nagelaten om overal netjes te vermelden of men met een kopie dan wel een origineel van doen heeft.

**Andere gebruikte archieven** *Archief A. Heyting.* Dit archief is door A. Heyting nagelaten aan het vroegere Mathematisch Instituut. In 2000 is dit archief aan het Rijksarchief in Noord Holland te Haarlem overgedragen.[14] *Archief A.S. Troelstra.* Dit archief is door A.S. Troelstra in bewaring gegeven bij het Rijksarchief in Noord Holland te Haarlem. (overgedragen 2001)[15]

**Bibliotheca E.W. Beth.** De Bibliotheca E.W. Beth wordt gevormd door boeken, tijdschriften en overdrukken die indertijd door Beth aan het voormalige

[12] Opslag: Trippenhuis, het hoofdkantoor van de K.N.A.W. Kloveniersburgwal 29, Amsterdam.
[13] Kleine Houtweg 18, Haarlem. Inventaris: Velthuys-Bechthold (1995). De toegang tot dit archief is vrij.
[14] Inventaris: Troelstra (1989). De toegang tot dit archief is vrij.
[15] Er is een inventaris van dit archief aanwezig. De toegang tot dit archief is ten dele vrij.

Instituut voor Grondslagenonderzoek nagelaten zijn.[16] Aanvankelijk betrof het een bruikleen van zijn weduwe C.P.C. Beth–Pastoor.

"De Bibliotheca E.W. Beth bevat niet slechts werken op het gebied van logica, grondslagenonderzoek en filosofie der exacte wetenschappen, maar ook op het gebied der algemene wijsbegeerte en op dat van diverse vakwetenschappen. Eveneens zijn belangrijke tijdschriften voorhanden." [17]

In de Bibliotheca E.W. Beth is het volledige werk van Beth te vinden, ook zijn daar de ingebonden overdrukken van al zijn artikelen aanwezig.[18] Daarnaast was er een door zijn beide zusters geschonken portret in olieverf van Beth aanwezig (nu deel uitmakend historische verzameling van de UvA).

---

[16] De Bibliotheca E.W. Beth is tegenwoordig ondergebracht in de bibliotheek van de Afdeling Wijsbegeerte van de Faculteit der Geesteswetenschappen aan de Universiteit van Amsterdam: Nieuwe Doelenstraat 15 (Vendelstraat 8), Amsterdam.

[17] Uit een (stencil)brief van 6 oktober 1967 van H.B. Curry. Curry was Beths opvolger als hoogleraar-directeur van het Instituut voor Grondslagenonderzoek.

[18] Vaak treft men daar bij tal van boeken in de kantlijn aantekeningen van Beth aan. Een tweede overdrukkenverzameling en Beths boeken zijn te vinden in de bibliotheek van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen: Joan Muyskenweg 25, Amsterdam. Beths boeken en een (onvolledige) overdrukkenverzameling zijn ook te vinden in de wiskunde-bibliotheek van de Faculteit Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica aan de Universiteit van Amsterdam (Plantage Muidergracht 24, Amsterdam).

# Afkortingen

**Verenigingen, tijdschriften en instellingen**:

AIPS: Académie Internationale de Philosophie des Sciences
ANVW: Algemene Nederlandse Vereniging van Wijsbegeerte
ASL: Association of Symbolic Logic
B & W Amsterdam]: Burgemeester en Wethouders [van Amsterdam]
CI: Centrale Interfaculteit
CIP: Congrès Internationaux de Philosophie
FISP: Fédération Internationale des Sociétés de Philosophie
GCP: Genootschap voor Critische Philosophie
HSS: History of Science Society
ICHS [=CIPHS]: International Council of Humanistic Sciences [Conseil International de la Philosophie et des Sciences Humaines]
ICSU: International Council of Scientific Unions
IGLO: Instituut voor Grondslagenonderzoek en Filosofie der Exacte Wetenschappen
IIP: Intitut International de (Collaboration) Philosophi(qu)e
IIST: Institut International des Sciences Théoriques
IMU: International Mathematical Union
ISG: Internationaal Significsch Studiegenootschap
ISS: International Significic Society
IUS: Institute for the Unity of Science
JSL: Journal of Symbolic Logic
K[N]AW: Koninklijke [Nederlandse] Akademie van Wetenschappen
MC: Mathematisch Centrum
NAW: Nieuw Archief voor Wiskunde
NVL: Nederlandse Vereniging voor Logica
PSA: Philosophy of Science Association
RANH: Rijks Archief Noord-Holland
SG: Significsch Genootschap
SILPS: Société Internationale de Logique et de Philosophie des Sciences
UC: University of California

UT: University of Texas
UIHPS: Union Internationale d'Histoire et Philosophie des Sciences
UIHS: Union International d'Histoire des Sciences
UIPS: Union Internationale de Philosophie des Sciences
UNESCO: United Nations Educational Scientific and Cultural Organisation
UVA: Universiteit van Amsterdam
WG: Wiskundig Genootschap
WN: Faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen

# Index

# Abstract


**E.W. Beth as a logician**

The subject of this dissertation is the logical work of E.W. Beth. In addition, there is a short biography and an introduction to some of Beth's methodological and philosophical ideas.

Evert Willem Beth (1908–1964) was born in Almelo, a small town near the Dutch-German border. He was the son of H.J.E. Beth and H. de Groot. His father studied mathematics and physics at the University of Amsterdam, where he received his Ph.D. in mathematics, thereafter working as teacher in mathematics and physics in secondary schools. E.W. Beth studied mathematics and physics at the University of Utrecht, followed by a study in philosophy and psychology. Evert Beth's Ph.D. (1935) was in philosophy (faculty of arts), because the borderland between philosophy and mathematics did not yet exist as an academic discipline in the faculty of science at that time.

In 1946 Beth became in Amsterdam the first professor of logic and foundations of mathematics in the Netherlands. He held this position in Amsterdam until his death in 1964. He also held two positions outside Holland: in 1951 as research assistent of A. Tarski in Berkely (UC) and in 1957 as professor of methodology at Johns Hopkins University in Baltimore.

The aim of this study is to show the diversity of Beth's logical systems and what binds them (both systematically and historically) together. Beth's main contributions to logic were the definition theorem, semantic tableaux and the Beth models. The foundation of his work was Gentzen's extended Hauptsatz, the subformula theorem and an extensive use of (Tarskian) model theory.

Beth's work was a combination of syntactical and semantical components. The definition theorem (1953) is a counterpart of deductive completeness. Beth's proof is primarily syntactic: he uses the midsequent, topology and reduced logic.

With his Definition Theorem and his non-normal valuations, Beth created the tools for the next stage in his development, the semantic tableaux (1954–1955). With the semantic tableaux Beth explored different areas: classical logic, modal logic and intuitionistic logic. The semantic tableaux give a rapid decision procedure, their basis is a binairy splitting tree. In combination with his

semantic tableaux Beth made a proof-theoretic variant: the deductive tableaux.

During his entire professional career Beth was interested in intuitionistic logic, but he was himself not an intuitionist and disliked intuitionistic philosphy. Beth combined his semantic tableaux with trees and choice sequence, thus creating the Beth models (1956). With the application (and in his case duplication) of Brouwer's fundamental theorem he avoided non-intuitionistic mathematics in his intuitionistic semantics and completeness proof.

Another area was the use of his earlier developed non-standard valuations: in combination with his so-called help (subordinate) tableaux and valuations it was possible to study intuitionistic and modal logic as in Kripke world semantics.

During the last period of his life (1960–1964) Beth tried to make his logical research subservient to a diverse range of applications: the study of language, theorem proving, mathematical heuristics and translation methods in natural languages.

Beth had considerable influence in international organisations. He foresaw their importance as early as the 1940s. In Europe, directly after World War II, there was no supportive climate for the studies in formal methods: no money, no professors and a scientific community, which disliked logic and the philosophy of science. So, he tried to set up international networks and organised congresses to get the recognition he needed for money and jobs. He understood that getting recognition in the Netherlands was only possible with international support. But there was also an idealistic component in the motives underlying his efforts: he wanted not only to improve the Dutch situation, but also to further the theories of logic on a world scale. Nor did he limit himself to only pure logic. In Holland he worked towards a combination of formal philosophy, philosophy of science, pure logic and foundations of mathematics. He was the first to bring these several studies together. Nowadays logic is an internationally recognized scientific discipline. As I show in the biography, we owe a lot of that to Beth.

Beth had ideas about philosophy, methodology and the philosophy of science as well. His aim was to create what he called a scientific philosophy, i.e. philosophy without speculation. He was furious at those modern philosophical movements like existantialism and the like. He thought of philosophy as not monolithic and static, but as changing in time. In this dissertation there is a small part devoted to this subject: Beth's wishes for pure philosophy and the philosophy of mathematics. Finally, I give a short impression of Beth's methodology (logic) for classical and quantum mechanics.

# Bibliografie


Aebi, M. (1947), *Kants Begründung der deutschen Philosophie*, Basel.

Balk - Smit Duyzentkunst, F. (1963), *De grammaticale functie, Methode van grammaticale analyse, aan het Nederlands gedemonstreerd*, J.B. Wolters, Groningen. (dissertatie, 26-2-1963, Universiteit van Amsterdam).

Barth, E.M. (1969), 'On natural deduction in modal logic with two primitives', *Logique et analyse* **12**, 157–166.

Bartley, W.W. (1977), *Lewis Carroll's symbolic logic*, Harvester, Hassocks.

Barwise, J. & Feferman, S. (1985), *Model-theoretic logics*, Perspectives in mathematical logic, Springer, New York.

Bell, J.L. & Slomson, A.B. (1969), *Models and ultraproducts*, Studies in Logic, North-Holland, Amsterdam.

Belnap, N.D. & Thomason, R.H. (1963), 'A rule-completeness theorem', *Notre Dame Journal of Formal Logic* **4**(1), 39–43.

Belnap, N.D., Leblanc, H. & Thomason, R.H. (1963), 'On not strengthening intuitionistic logic', *Notre Dame Journal of Formal Logic* **4**(4), 313–320.

van Benthem, B.C. (1938/1939), *Inleiding op de metaphysica; Aristoteles en Thomas van Aquino. Wijsgerige grondbegrippen*, number 9, Roermond. (vertaald uit het Latijn en van toelichtingen voorzien).

van Berkel, K. (1996), *Dijksterhuis, een biografie*, Bakker.

Bernays, P. (1954), Über den Zusammenhang des Herbrand'schen Satzes mit den neueren Ergebnissen von Schütte und Stenius, *in* 'Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1954', Vol. II, Noordhoff — North-Holland, Groningen — Amsterdam, p. 397.

Beth, E.W. (1933/34), 'Critiek van Vredenduin's 'logica der wiskunde'', *Euclides* **10**, 214–218. (recensie door Beth van: P.G.J. Vredenduin, Logica der wiskunde, *Annalen der critische philosophie* 3, 1933).

Beth, E.W. (1935*a*), *Rede en aanschouwing in de wiskunde*, Noordhoff, Groningen. (VIII+ 120 pp.). (dissertatie 5-11-1935, Rijks Universiteit van Utrecht).

Beth, E.W. (1935*b*), Sur un théorème concernant le principe du tiers exclu et ses applications dans la théorie de la non-contradiction, *in* '2me Congrès National des Sciences, (Bruxelles, 19 – 23 juin 1935), Comptes rendus 1', pp. 160–164.

Beth, E.W. (1936), 'Démonstration d'un théorème concernant le principe du tiers exclu', *Académie Royale de Belgique, Bulletin de la classe des sciences, no. 5* **22**, 580–581. (Séance du 5 mai 1936).

Beth, E.W. (1937/38), 'Doel en zin van het meetkunde-onderwijs', *Euclides* **14**, 236–241.

Beth, E.W. (1938), 'Une démonstration de la non-contradiction de la logique des types au point de vue fini', *Nieuw Archief voor Wiskunde, (2e reeks)* **19**, 59–62.

Beth, E.W. (1939/40), 'De psychologische argumenten en richtlijnen voor de vernieuwing van het onderwijs in de wiskunde', *Euclides* **16**, 236–243. (Verslag van de vergadering van de wiskundewerkgroep van de werkgemeenschap tot vernieuwing van onderwijs en opvoeding (27 november 1937), Sterrewacht Utrecht).

Beth, E.W. (1940), *Inleiding tot de wijsbegeerte der wiskunde*, Philosophische Bibliotheek, Standaard Boekhandel en Dekker en van der Vegt, Antwerpen – Brussel, Nijmegen – Utrecht. (269 pp.). ($1942^2$). (Sterk uitgebreide en herziene heruitgave: *Wijsbegeerte der wiskunde*, Philosophische Bibliotheek, Antwerpen – Brussel, (Standaard Boekhandel), Nijmegen – Utrecht, (Dekker & van de Vegt), (1948), 388 pp.).

Beth, E.W. (1946), 'Metaphysica en wetenschap', *De Gids*.

Beth, E.W. (1947*a*), 'Eine neue Metakritik, Zum Buche 'Kants Begründung der deutschen Philosophie' von Magdalena Aebi', *Neue Zürcher Zeitung*. Aflevering van 12-8-1947, ( zie ook *ANTW* 40 (1947/48), pp. 228–229).

Beth, E.W. (1947*b*), 'Prof.dr. L.E.J. Brouwer', *Nieuwe Rotterdamsche Courant*. Aflevering van 18 februari 1947.

Beth, E.W. (1947*c*), 'Semantic considerations on intuitionistic mathematics', *Indagationes Mathematicae* **9**, 572–577.

Beth, E.W. (1948/49), 'Analyse sémantique des théories physiques', *Synthese*.

Beth, E.W. (1948*a*), 'Betekenis van wijsgerige congressen, Mens, mensheid, menselijkheid', *Elseviers Weekblad.* Aflevering van 17-7-1948.

Beth, E.W. (1948*b*), De wetenschap als cultuurfactor, *in* 'De functie der wetenschap', Tweede symposion der Sociëteit voor Culturele Samenwerking, s Gravenhage, pp. 7–19.

Beth, E.W. (1948*c*), *Natuurphilosophie*, number 30 *in* 'Noordduijn's Wetenschappelijke Reeks', J. Noordduijn, Gorinchem. 230 pp.

Beth, E.W. (1949*a*), 'recensie van A. Tarski, A problem concerning the notion of definability, JSL 13, (1948)', *Mathematical Reviews* **10**, 176.

Beth, E.W. (1949*b*), 'Towards an up-to-date philosophy of the natural sciences', *Methodos* **1**, 178–185.

Beth, E.W. (1950), *Les fondements logiques des mathématiques*, number 1 *in* 'Collection de logique mathématique, série A', Gauthiers-Villars, Nauwelaerts, Paris, Louvain. (224 pp.). ($1955^2$ herzien, 244 pp.). (En als *I fondementi logici della mathematica*, Milano (Feltrinelli), (1963), (XVI + 321 pp.)).

Beth, E.W. (1951*a*), 'Techniek, kind der logika, Einstein-prijs voor Kurt Gödel', *Elseviers Weekblad.* 14 april 1951.

Beth, E.W. (1951*b*), 'A topological proof of the theorem of Löwenheim – Skolem – Gödel', *Indagationes Mathematicae* **13**, 437–444.

Beth, E.W. (1952), 'Existence of complete models for extensions of the first-order predicate calculus.', *Bulletin of the American mathematical Society* **58**, 502. (abstract).

Beth, E.W. (1953/54*a*), 'Verstand en intuïtie', *Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte* **46**, 213–244. (Ook *Annalen* 23 (1953), 29–40).

Beth, E.W. (1953/54*b*), 'Zomerconferentie 1953', *Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte* **46**, 41–55.

Beth, E.W. (1953*a*), *Inleiding tot de wijsbegeerte der exacte wetenschappen*, Philosophische bibliotheek, Standaard-Boekhandel, Antwerpen. 144 pp.

Beth, E.W. (1953*b*), 'On Padoa's method in the theory of definition', *Indagationes Mathematicae* **15**, 330–339.

Beth, E.W. (1953*c*), 'Some consequences of the theorem of Löwenheim – Skolem – Gödel – Malcev', *Indagationes Mathematicae* **15**, 66–71.

Beth, E.W. (1953*d*), Sur la description de certaines modèles d'un système formel, *in* 'Logique, analyse philosophique, philosophie des mathématiques', Vol. 5, Actes du XIème Congrès International de Philosophie, (Bruxelle, 20–26 Août 1953), North-Holland–Nauwelaerts, Amsterdam–Louvain, pp. 64–69.

Beth, E.W. (1954), Observations métamathématiques sur les structures simplement ordonnées, *in* 'Actes du 2e Colloque Int. de Logique Math. (appl. sci. de la logique math.), (Paris, 25–30 août 1952)', Paris.

Beth, E.W. (1955/1956*a*), 'In memoriam J. Clay (1882–1955)', *Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte* **47**, 233–235.

Beth, E.W. (1955*a*), 'Remarks on natural deduction', *Indagationes Mathematicae* **17**, 322–325. (dedicated to Robert Feys).

Beth, E.W. (1955*b*), 'Semantic entailment and formal derivability', *Konklijke Nederlandse Akademie Wetenschappen, Mededelingen, Nieuwe Reeks* **18**(13), 309–342.

Beth, E.W. (1956/1957*a*), 'In memoriam Gerrit Mannoury', *Euclides* **32**, 298–301.

Beth, E.W. (1956*b*), *l'Existence en mathématiques*, number 10 *in* 'Collection de logique mathématiques, série A', Gauthier-Villars/Nauwelaerts, Paris/Louvain. (66 p.). (Beths lezingen aan de Sorbonne (Parijs), 29 maart – april 2 april, 1954).

Beth, E.W. (1956*c*), 'Quelques remarques sur la sémantique', *Revue Philosophique de Louvain* **54**, 605–625.

Beth, E.W. (1956*d*), 'Semantic construction of intuitionistic logic', *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Mededelingen, Nieuwe Reeks* **19**(11), 357–388.

Beth, E.W. (1956*e*), 'Ueber Lockes Allgemeines Dreieck', *Kant-Studien* **48**, 361–380.

Beth, E.W. (1957*b*), Intuitionistic predicate logic, *in* 'Summaries of talks presented at the Summer Institute for Symbolic Logic in 1957', Vol. 1, Cornell University, pp. 113–121. ($1960^2$).

Beth, E.W. (1957*c*), *La crise de la raison et la logique*, Vol. 12 of *Collection de logique mathématique, Série A*, Gauthier-Villars, Nauwelaerts, Paris, Louvain. (52 pp.).

Beth, E.W. (1958*a*), Construction sémantique de la logique intuitioniste, *in* 'Le raisonnement en mathématique et en sciences experimentales (Paris, 26 Sept.–1 Oct. 1955)', number 70 *in* 'Colloques Intern. du C.N.R.S.', pp. 77–83. (A. Heyting, 'Interventions', related to Beth's lecture: p. 84).

Beth, E.W. (1958*b*), 'On machines which prove theorems', *Simon Stevin* **32**, 49–60. (Als lezing: *Formal derivation by means of semantic tableaux*, 6 augustus 1957, IBM Research Centre Yorktown, NY. Zie ook Beths *Formal methods'*, pp. 112–121).

Beth, E.W. (1958*c*), Semantics as a theory of reference, *in* 'Philosophy in the Mid-Century I', Firenze, pp. 62–100.

Beth, E.W. (1959*a*), 'Considérations heuristiques sur les méthodes de déduction par séquences', *Logique et Analyse* **2**, 153–159.

Beth, E.W. (1959*b*), *The foundations of mathematics. A study in the philosophy of sciences*, Studies in Logic, North-Holland, Amsterdam. (XXVI + 722 pp.; 1965, 2e druk, herzien, North-Holland, (XXVIII + 741 pp.; 1966, 3e druk, Harper).

Beth, E.W. (1959*c*), Remarks on intuitionistic logic, *in* A. Heyting, ed., 'Constructivity in mathematics', Studies in Logic, (Colloquium constructivity in mathematics, Amsterdam, August 1957), North-Holland, Amsterdam, pp. 15–25.

Beth, E.W. (1960*a*), Completeness results for formal systems, *in* 'Proceedings International Congress of Mathematicians, 1958', Cambridge, pp. 281–288. (Congres Edinburgh, 14–21 August 1958).

Beth, E.W. (1960*b*), 'Een terugblik', *De Gids* **123**, 320–330.

Beth, E.W. (1960*c*), Inferentiële logica en tweewaardige implicatie-logica, *in* 'Wiskunde in de XXe eeuw', Vol. I, Internationale perfectioneringscursussen voor doctoren en licentiaten in de wiskunde. Eerste jaar, Brussel, 25–31 augustus 1960, Ministerie van Nationale Opvoeding en Cultuur. Secretariaat-generaal voor de hervormingen in het middelbare onderwijs, Brussel. (En als 'Logique inférentielle et logique bivalente de l'implication', etc.).

Beth, E.W. (1960*d*), 'Observations on an independent proof for Peirce's law', *The Journal of Symbolic Logic* **25**, 389. ((abstract), ontvangen 24 oktober 1961, in JSL vol. 25, no. 4 (d.w.z. binnen de pp. 287–374, uitgekomen oktober 1962)).

Beth, E.W. (1960*e*), 'Recensie van R.C. Lyndon, An interpolation theorem in the predicate calculus', *Mathematical Reviews* **21**, 1027. (No. 5555). (Lyndons artikel in: *Pacific Journal of Mathematics* 9 (1959), 129–142).

Beth, E.W. (1960*f*), 'Semantics of physical theories', *Synthese* **12**, 172–175.

Beth, E.W. (1961/1962*c*), 'Operatieve en semantische fundering van de logica', *Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte* **54**, 219–230. (Robert Feys in memoriam).

Beth, E.W. (1961*a*), Construction sémantique de la logique inférentielle, *in* 'Rapport CETIS', number 26, Compte-rendu des travaux effectué par l'Université d'Amsterdam dans le cadre de contrat Euratom, pp. 78–82. Rapport 8.

Beth, E.W. (1961*b*), Le systéme S4 et la topologie, *in* 'Rapport CETIS', number 26, Compte-rendu des travaux effectué par l'Université d'Amsterdam dans le cadre de contrat Euratom, pp. 143–147. Rapport 13.

Beth, E.W. (1961*c*), Méthodes de déduction, *in* 'Rapport CETIS', number 26, Compte-rendu des travaux effectué par l'Université d'Amsterdam dans le cadre de contrat Euratom, pp. 5–20. Rapport 1.

Beth, E.W. (1961*d*), 'Modernisme in de wetenschap', *Tirade* pp. 75–87.

Beth, E.W. (1961*e*), Observations concerning computation, deduction and heuristics, *in* 'Compte-rendu des travaux effectués par l'Université d'Amsterdam dans le cadre du contrat Euratom', number 26 *in* 'Rapport CETIS', Euratom–C.C.R. Ispra, pp. 106–119. (Ook in Computer programming and Formal systems, (P. Braffort, D. Hirschberg ed.), (Studies in Logic), Amsterdam (North-Holland), 1963, pp. 21–32).

Beth, E.W. (1961*f*), Remarques sur la théorie des pseudo-valuations, *in* 'Rapport CETIS', number 26, Compte-rendu des travaux effectué par l'Université d'Amsterdam dans le cadre de contrat Euratom, pp. 31–35. Rapport 3.

Beth, E.W. (1962/63), 'Logische en denkpsychologische aspecten van de vernieuwing van het wiskundeonderwijs', *Euclides* **38**, 179–187. (lezing vacantiecursus Mathematisch Centrum Amsterdam,1-9-1962).

Beth, E.W. (1962*a*), *Formal methods, An introduction to symbolic logic and to the study of effective operations in arithmetic and logic*, number 4 *in* 'Synthese Library', Reidel, Dordrecht. (XIV + 170 pp.).

Beth, E.W. (1962*b*), Observations concernant la théorie de la définition, *in* 'Actes du Colloque de Mathématiques réuni à Clermont à l'occasion du tricentenaire de la mort de Blaise Pascal, Tome I, Introduction et logique mathématique', Vol. 1 of *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Clermont*, l'Université de Clermont, Clermont, pp. 83–87. (Hommage à D.K. de Jongh).

Beth, E.W. (1962*d*), Ordnung in der Logik, *in* H. Kuhn & Fr. Wiedmann, eds, 'Das Problem der Ordnung', (Sechster deutscher Kongress für Philosophie, München 1960), Meisenheim am Glan, pp. 161–173.

Beth, E.W. (1962*e*), Umformung einer abgeschlossenen deduktiven oder semantischen Tafel in eine natürliche Ableitung auf Grund der derivativen bzw. klassischen Implikationslogik, *in* M. Käsbauer & F. von Kutschera, eds, 'Logik und Logikkalkül', Karl Alber, Freiburg–München, pp. 49–55. (Wilhelm Britzelmayer zum siebzigsten Geburtstag gewidmet).

Beth, E.W. (1963*a*), Carnap's views on the advantages of constructed systems over natural languages in the philosophy of science, *in* P.A. Schlipp, ed., 'The philosophy of Rudolf Carnap', number 11 *in* 'Library of living philosophers', Open Court, La Salle, pp. 469–502.

Beth, E.W. (1963*b*), 'De prehistorie van het automatisch redeneren', *Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte* **56**, 18–24.

Beth, E.W. (1963*c*), 'Konstanten van het wiskundig denken', *Mededelingen Kononklijke Nederlandse Akademie Wetenschappen, Mededelingen, Letterkunde, Nieuwe Reeks* **26**(7), 231–255.

Beth, E.W. (1964*a*), *Door wetenschap tot wijsheid, Verzamelde wijsgerige studiën*, van Gorcum – Prakke, Assen. (146 pp.). (bezorgd door E.M. Barth en J.J.A. Mooij). (In 1968 in het Engels als *Science, a road to wisdom*, Dordrecht (Reidel), (XIII + 123 pp.)).

Beth, E.W. (1964*b*), Het recht op eigen mening, *in* 'Album Prof. F. van Goethem', Antwerpen – Utrecht.

Beth, E.W. (1965*a*), Démonstration heuristique et déduction formelle, *in* '3e Congrès Int. de Cybernetique, Namen (1961)', Asssoc. Intern. de Cybernétique.

Beth, E.W. (1965*b*), *Mathematical thought, An introduction to the philosophy of mathematics*, number 11 *in* 'Synthese Library', Reidel, Dordrecht. (XII + 208 pp.). (bezorgd door E.M. Barth, J.J.A. Mooij).

Beth, E.W. (1965*c*), 'Semantische Begründung der derivativen Implikationslogik', *Archiv f. math. Logik und Grundlagenforschung* **7**(1–2), 23–28.

Beth, E.W. (1967), *Moderne logica*, van Gorcum – Prakke, Assen. (184 pp.; bezorgd door J.J.A. Mooij en E.M. Barth). ($1969^2$). (in het Engels als *Aspects in modern logic*, Dordrecht (Reidel), (1970), (176 pp.)).

Beth, E.W. & Bok, S.T. (1961), 'Rapport over het 3e Internationaal Congres voor Cybernetica', *Konkl. Nedl. Ak. Wetensch., Rapporten* **13**, 104–106.

Beth, E.W. & Leblanc, H. (1960), 'A note on the intuitionistic and the classical proposition calculus', *Logique et analyse* **3**, 174–176. (En in: H. Leblanc, *Existence, truth and provability*, Albany (State University New York Press), (1982), 382–384).

Beth, E.W. & Nieland, J.J.F. (1965), Semantic construction of Lewis's systems S4 and S5, *in* J.W. Addison, L. Henkin & A. Tarski, eds, 'Symposium of the theory of models', Studies in Logic, North-Holland, Amsterdam, pp. 17–24. (Proc. of the 1963 International Symposium at Berkeley).

Beth, E.W. & Piaget, J. (1961), *Epistémologie mathématique en psychologie, Essai sur les relations entre la logique formelle et la penseé réelle*, Presses Universitaires de France, Paris.

Beth, E.W. & Tarski, A. (1956), 'Equilaterality as the only primitive notion of euclidean geometry', *Indagationes Mathematicae* **18**, 462–467.

Birkhoff, G. & von Neumann, J. (1936), 'The logic of quantum mechanics', *Annals of Mathematics, 2e reeks,* **37**, 823–843.

de Bouvère, K.L. (1959), *A method in proofs of undefinability, with applications to functions in the arithmetic of natural numbers*, Noord Holland, Amsterdam. (Dissertatie, 20-5-1959, Universiteit van Amsterdam).

Bowen, K.A. (1979), *Model theory for modal logic, Kripke models for modal predicate calculi*, number 127 *in* 'Synthese Library', Reidel, Dordrecht.

Braffort, P. & van Scheepen, F. (1968), Foreword, *in* P. Braffort & F. van Scheepen, eds, 'Automation in language translation and theorem proving', number EUR 4038e, Commission of the European Communities, Brussels, p. VII.

Braithwaite, R.P. (1955), *Scientific explanation*, Cambridge University Press, Cambridge.

Brouwer, L.E.J. (1919), Intuïtionisme en formalisme, *in* 'Wiskunde, waarheid, werkelijkheid', Noordhoff, Groningen. (Rede, Universiteit van Amsterdam, 1912).

Brouwer, L.E.J. (1923), 'Intuïtionistische splitsing van mathematische grondbegrippen', *Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Verslagen (Wis- en Natuurkunde)* **32**(9), 877–889.

Brouwer, L.E.J. (1926), 'Die intuitionistische Form des Heine-Borelschen Theorems', *Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Proceedings* **29**(6), 866–867. (=De intuïtionistische vorm van het theorema van Heine-Borel, K.A.W., Verslagen 35, pp. 667–678).

Brouwer, L.E.J. (1930), *Die Struktur des Kontinuums*, Wien. Voordracht Brouwer op 14 maart 1928 te Wenen).

Brouwer, L.E.J. (1948), 'Essentieel negatieve eigenschappen', *Indagationes Mathematicae* **10**, 322–323.

Brouwer, L.E.J. (1954), 'Points and spaces', *Canadian Journal of Mathematics* **6**, 1–17.

Brouwer, L.E.J. (1956), 'Voorgeskiedenis, beginsels en metodes van die intuïtionisme', *Tydskrif vir Wetenschap en Kuns* pp. 186–197. (lezing uit 1952).

Brouwer, L.E.J. (1981), *in* D. van Dalen, ed., 'Brouwer's Cambridge lectures on intuitionism', Cambridge Univ. Press. (Lezingen Brouwer: 1946–1951).

Brouwer, L.E.J. (1991), Berliner Gastvorlesungen, *in* D. van Dalen, ed., 'L.E.J. Brouwer, Intuitionismus', B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, pp. 17–19. (Lezing Brouwer uit 1927).

Bull, R.A. & Segerberg, K. (1984), Basic modal logics, *in* D. Gabbay & F. Guenther, eds, 'Handbook of philosophical logic, II, Extensions of classical logic', Vol. 165 of *Synthese Library*, Reidel, Dordrecht, chapter II.1, pp. 1–89.

Burali-Forti, C. (1901), Sur les différentes méthodes logiques pour la définition du nombre réel, *in* '1e Congrès International de Philosophie (Paris, 1900)', Vol. 3, Armand Colin, Paris, pp. 294–269. (Klaus reprint, Nendeln, Liechtenstein, 1968).

Carton, M. (1960), 'Un procédé de mécanisation de la géométrie', *Cybernetica* **3**, 83–116, 301–311.

Chang, C.C. (1964), 'Some new results in definability', *Bulletin of the American Mathematical Society* **70**, 808–813.

Church, A. (1935), 'An unsolvable problem of elementary number theory', *Bulletin of the American Mathematical Society* **41**, 332–333. (abstract 205).

Church, A. (1936*a*), 'recensie van E.W. Beth, Démonstration d'un théorème concernant le principe du tiers exclu', *The Journal of Symbolic Logic* **1**, 118. (Beths artikel in: *Ac. Royale de Belgique, Bull. d.l. classe d. sciences, 5 s*, 22, (1936), pp. 580–581).

Church, A. (1936*b*), 'An unsolvable problem of elementary number theory', *American Journal of Mathematics* **58**, 345–363.

Church, A. (1937), 'recensie van E.W. Beth, Une démonstration de la non-contradiction de la logique des types au point de vue fini', *The Journal of Symbolic Logic* **2**, 44. (Beths artikel in: *Nw. Arch. Wisk., 2e reeks*, 190, (1936), pp. 59–62).

Church, A. (1940), 'On the concept of a random sequence', *Bulletin of the American Mathematical Society* **46**, 130–135.

Church, A. (1953), 'Non-normal truth-tables for the propositional calculus', *Boletin de la Sociedad Mathemática Mexicana* **10**, 41–52.

Church, A. (1956), *Introduction to mathematical logic, I*, Princeton University Press, Princeton.

Collins, G.E. (1975), Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition, *in* G. Goos & J. Hartmanis, eds, 'Automata theory and formal languages', number 33 *in* 'Lecture notes in computer science', 2nd GI Conference (Kaiserslautern, May 1975), Springer, Berlin, pp. 134–183.

Craig, W. (1951), *A theorem about first order functional calculus with identity, and two applications*, Cambridge, Mass. (dissertatie Harvard University).

Craig, W. (1956), 'recensie van Beth, On Padoa's method in the theory of definition', *The Journal of Symbolic Logic* **21**, 194–195. (Beths artikel in: *Indagationes Mathematicae* 15, (1953), 330–339).

Craig, W. (1957*a*), Analysis of first-order implications, *in* 'Summaries of talks presented at the Summer Institute for Symbolic Logic in 1957', Vol. 2, Cornell University, pp. 175–180. ($1960^2$ herzien).

Craig, W. (1957*b*), 'Linear reasoning, a new form of the Herbrand-Gentzen theorem', *The Journal of Symbolic Logic* **22**, 250–268.

Craig, W. (1957*c*), 'Three uses of the Herbrand-Gentzen theorem in relation to model theory and proof theory', *The Journal of Symbolic Logic* **22**, 269–285.

Curry, H.B. (1950), *A theory of formal deducibility*, number 6 *in* 'Notre Dame Mathematical Lectures', The University of Notre Dame.

Curry, H.B. (1965), Remarks on inferential deduction, *in* A.Tymieniecka, ed., 'Contributions to logic and methodology in honor of J.M. Bochenski', Studies in Logic, North-Holland, Amsterdam, pp. 45–72.

van Dalen, D. (1978), 'An interpretation of intuitionistic analysis', *Annals of mathematical logic* **13**, 1–43. (ontvangen 26 oktober 1976).

van Dalen, D. (1986), Intuitionistic logic, *in* D. Gabbay & F Günthner, eds, 'Handbook in philosophical logic, III', number 166 *in* 'Synthese Library', Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, chapter III.4, pp. 225–339.

van Dalen, D. (1997), 'How connected is the intuitionistic continuum?', *The Journal of Symbolic Logic* **62**(4), 1147–1150. (ontvangen 7 augustus 1995).

van Dalen, D. (1999), 'From Brouwerian counter examples to the Creating Subject', *Studia Logica* **62**, 305–314.

van Dalen, D. (2001), *L.E.J. Brouwer, 1881–1966; een biografie; het heldere licht van de wiskunde*, Bakker, Amsterdam.

van Dantzig, D. (1941), 'Mathematische en empiristische grondslagen der waarschijnlijkheidsrekening', *Nederlandsch Tijdschrift voor Natuurkunde* **8**, 70–93.

Dauben, J.W. (1995), *Abraham Robinson, The creation of nonstandard analysis, A personal and mathematical Odyssey*, Princeton University Press, Princeton (NJ).

Davis, M. (1958), *Computability and unsolvability*, Series in information processing and computers, McGraw-Hill, New York–Toronto.

Derckx, P.H.J.M. (1994), *H.J. Pos, 1898–1955: Objectief en partijdig. Biografie van een filosoof en humanist*, Verloren, Hilversum. (dissertatie, 1994, Universiteit van Humanistiek Utrecht).

Doorman, S.J. (1971), 'De functie van de logica in Beth's kritisch rationalisme', *Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte* **63**, 160–174.

Dumitriu, A. (1977), *History of logic*, Abacus, Turnbridge Wells (Kent). 4 dln.

Dummett, M.A.E. & Lemmon, E.J. (1958), 'Modal logics between S4 and S5.', *Zeitschrift für mathematische Logik and Grundlagen der Mathematik* **4**, 250–264.

Dyson, V.H. & Kreisel, G. (1961), Analysis of Beth's semantic construction of intuitionistic logic, Technical Report 3, Applied mathematics and statistical laboratories, Stanford University, Stanford. (Office of Ordnance Research, Contract No. DA-04-200-ORD-997).

Engelking, R. (1989), *General topology, Revised and completed edition*, number 6 *in* 'Sigma series in pure mathematics', Heldermann, Berlin.

Evans, H.P. & Kleene, S.C. (1939), 'A postulational basis for probability', *The American Mathematical Society* **46**, 141–148.

Feferman, S. (1955*a*), 'Product operations on relational systems', *Bulletin of the American Mathematical Society* **61**, 172. (No. 343t).

Feferman, S. (1955*b*), 'Sum operations on relational systems', *Bulletin of the American Mathematical Society* **61**, 172. (No. 342t).

Feferman, S. & Vaught, R.L. (1959), 'The first order properties of products of algebraic systems', *Fundamenta Mathematicae* **47**, 57–103.

Felscher, W. (1985), 'Dialogues, strategies and intuitionistic provability', *Annals of pure and applied logic* **28**, 217–254.

Fitch, F.B. (1952), *Symbolic logic, An introduction*, Roland Press, New York.

Fitting, M. (1996), *First-order logic and automated theorem proving*, 2 edn, Springer, New York – Berlin. (eerste druk: 1990; korter voorwoord, geen Lis).

Fitting, M.C. (1969), *Intuitionistic logic, model theory and forcing*, Studies in Logic, North-Holland, Amsterdam.

Fitting, M.C. (1983), *Proof methods for modal and intuitionistic logic*, Synthese Library, Reidel, Dordrecht.

van Fraassen, B.C. (1968), 'A topogical proof of the Löwenheim-Skolem Compactness, and strong completeness theorems for free logic', *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* **14**, 245–254.

van Fraassen, B.C. (1970), ‘On the extension of Beth’s semantics of physical theories’, *Philosophy of science* **37**, 323–339.

van Fraassen, B.C. (1974), The labyrinth of quantum logics, *in* R.S. Cohen & M.W. Wartofsky, eds, ‘Boston studies in the philosophy of science’, Vol. 13, Reidel, Dordrecht. (Lezing uit 1968; commentaar J. Stachel, zelfde boek, pp. 214–223.).

Freudenthal, H. (1960), *Lincos, Design of a language of cosmic intercourse*, Vol. I of *Studies in Logic*, North–Holland, Amsterdam.

Gentzen, G. (1935*a*), ‘Untersuchungen über das logische Schliessen, I’, *Mathematische Zeitschrift* **39**, 176–210.

Gentzen, G. (1935*b*), ‘Untersuchungen über das logische Schliessen, II’, *Mathematische Zeitschrift* **39**, 405–431.

Ghose, A. (1961), On the length of proofs, *in* ‘Rapport CETIS’, number 26, Compte-rendu des travaux effectué par l’Université d’Amsterdam dans le cadre de contrat Euratom, pp. 56–65. Rapport 5.

Gilmore, P.C. (1953), *The effect of Griss’ criticism of the intuitionistic logic on deductive theories formalized within the intuitionistic logic*, Noord Holland, Amsterdam. (dissertatie 3-6-1953, Universiteit van Amsterdam).

Gilmore, P.C. (1960), ‘A proof method for quantification theory, its justification and realization’, *IBM Journal of research and development* **4**, 28–35.

Glivenko, V. (1928), ‘Sur la logique de M. Brouwer’, *Académie Royale de Belgique, Bulletins de la Classe des Sciences,* 5$^{e}$ *série* **14**(4), 225–228. (Séance du 21 avril 1928).

Glivenko, V. (1929), ‘Sur quelques points de la logique de M. Brouwer’, *Académie Royale de Belgique, Bulletins de la Classe des Sciences,* 5$^{e}$ *série* **15**(3), 183–188.

Gödel, K. (1933), ‘Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie’, *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* **4**, 35–36.

Gödel, K. (1936), ‘Ueber die Länge von Beweisen’, *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* **7**, 23–24.

Goffree, F. (1985), *Ik was wiskundeleraar*, Stichting voor de Leerplanontwikkeling, Enschede. (5 interviews, o.a. met P. Vredenduin).

Grätzer, G. (1978), *General lattice theory*, number 52 *in* ‘Mathematische Reihe’, Birkhäuser, Basel.

Hasenjaeger, G. (1953), ‘Eine Bemerkung zu Henkin’s Beweis für die Vollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten stufe’, *The Journal of Symbolic Logic* **18**(1), 42–48.

Hausdorff, F. (1914), *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit, Leipzig. (En: Dover, New York, 1944; Chelsea Publ.C., New York, 1949).

van Heijenoort, J. (1967), *From Frege to Gödel, A source book in mathematical logic, 1879–1931*, Harvard, Cambridge, Massachusetts.

Hellman, G. & Thompson, F.W. (1975), 'Physicalism: ontology, determination, and reduction', *The Journal of Philosophy* **72**, 551–564.

Hellman, G. & Thompson, F.W. (1977), 'Physicalist materialism', *Noûs* **11**, 309–345.

Hendriks, A. (1996), *Computations in propositional logic*, number 1996-1 *in* 'ILLC Dissertation Series', ILLC, Amsterdam. (dissertatie 12-3-1996, Universiteit van Amsterdam).

Henkin, L. (1949), 'The completeness of the first-order functional calculus', *The Journal of Symblic Lgic* **14**, 159–166.

Henkin, L. (1950), 'Completeness in the theory of types', *The Journal of Symbolic Logic* **15**, 81–91.

Henkin, L. (1954), 'Metamathematical theorems equivalent to the prime ideal theorems for boolean algebras', *Bulletin of the American Mathematical Society* **60**, 387–388. (prelim. report, no. 553).

Herbrand, J. (1930), *Recherches sur la théorie de la démonstration*, Paris. (dissertatie); (aanvullingen en verbeteringen door B. Dreben en J. Denton, 1966 en later).

Herbrand, J. (1971), *Logical writings*, Reidel, Dordrecht. verzameld werk, W.D. Goldfarb ed.; aanvullingen en verbeteringen op Herbrand door B. Dreben, J. Denton.

Hermes, H. (1959), Zur Axiomatisierung der Mechanik, *in* L. Henkin, P. Suppes & A. Tarski, eds, 'The axiomatic method, With special references to geometry and physics', Studies in Logic, North-Holland, Amsterdam, pp. 282–290.

Herz, P. (1929), 'Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme', *Mathematische Annalen* **101**, 457–514.

Heyting, A. (1930*a*), 'Die formale Regeln der intuitionistischen Logik, I', *Sitzungsberichte der preußischen Akademie von Wissenschaften, physikalisch-mathematische Klasse* pp. 42–56.

Heyting, A. (1930*b*), 'Die formale Regeln der intuitionistischen Logik, II', *Sitzungsberichte der preußischen Akademie von Wissenschaften, physikalisch-mathematische Klasse* pp. 57–71.

Heyting, A. (1930*c*), 'Die formale Regeln der intuitionistischen Logik, III', *Sitzungsberichte der preußischen Akademie von Wissenschaften, physikalisch-mathematische Klasse* pp. 158–169.

Heyting, A. (1931), 'Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik', *Erkenntnis* **2**, 106–115. (=Annalen der Philosophie 10).

Heyting, A. (1934), *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus, Beweistheorie*, Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete, Springer, Berlin.

Heyting, A. (1936), 'Bermerkungen zu dem Aufsatz von Herrn Freudenthal', *Compositio Mathematica* **4**, 117–118.

Heyting, A. (1956), *Intuitionism, An introduction*, Studies in logic, North-Holland. ($1966^2$, $1971^3$, both revised).

Heyting, A. (1958*a*), Intuitionism in mathematics, *in* R. Klibansky, ed., 'Philosophy in the mid-century, A survey', La nuova editrice, Firenze, pp. 101–115.

Heyting, A. (1958*b*), 'Recensie van E.W. Beth, Semantic construction of intuitionistic logic', *Mathematical Reviews* **19**(6), 624–625. (artikel Beth in: KNAW Med. NR 19, 1956).

Heyting, A. (1963), *Axiomatic projective geometry*, Vol. 5 of *Bibliotheca Mathematica, A series of monographs and applied mathematics*, Noordhoff, North-Holland, Groningen-Amsterdam. (zonder datum).

Heyting, A. (1966), 'In memoriam Evert Willem Beth (1909 – 1964)', *Notre Dame Journal of Formal Logic* **7**(4), 289–295.

Heyting, A. (1968*a*), Intuitionism in mathematics, *in* R. Klibansky, ed., 'Contemporary philosophy, A survey I, Logic and foundations of mathematics', La nuova editrice, Firenze, pp. 316–323.

Heyting, A. (1968*b*), 'Wijsbegeerte van de wiskunde', *Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte* **60**, 140–153.

Heyting, A. (1980), *A. Heyting, Collected papers*, Mathematical Institute, University of Amsterdam, Amsterdam. (ed. J. Niekus, H. van Riemsdijk, A.S. Troelstra).

Hilbert, D. (1899), *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig – Berlin. $1956^8$, (ed. P. Bernays), Stuttgart (Teubner).

Hilbert, D. (1928), 'Die Grundlagen der Mathematik, II', *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* **6**, 65–85. (H. Weyl, Zusatz, *ibid.*, 86-88; P. Bernays, Zusatz, *ibid.*, 89–92).

Hilbert, D. & Ackermann, W. (1928), *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer. ($1967^5$ herzien).

Hilbert, D. & Bernays, P. (1934), *Grundlagen der Mathematik I*, Springer, Berlin. (1939: dl. II; 1968$^2$ van dl. I).

Hintikka, K.J.J. (1955), *Two papers on symbolic logic: Form and content in quantification theory and Reductions in the theory of types*, number 8 *in* 'Acta Philosophica Fennica', Helsinki.

Hintikka, K.J.J. (1991), Towards a theory of identifiability, *in* J.H. Fetzer & D. Shatz, eds, 'Definitions and definability: Philosophical perspectives', number 216 *in* 'Synthese Library', Kluwer, Dordrecht, chapter III, Formal developments, pp. 161–183.

Hoogland, E. (2001), *Definability and interpolation, Model-theoretic investigations.* Proefschrift, 29 juni 2001, Universiteit van Amsterdam.

Hutchins, W.J. (1986), *Machine translation; past, present, future*, Ellis Horwood, Chichester.

Jaśkowski, S. (1934), 'On the rules of supposition in formal logic', *Studia Logica* **1**, 5–32. (Oorspronkelijk Pools, heruitgegeven en vertaald in: *Polish logic 1920 – 1930*, (ed. S. McCall), Oxford (Clarendon), 1967, pp. 232–258).

Jauch, J.M. (1968), *Foundations of quantum mechanics*, Addison-Wesley series in advanced physics, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

Jech, T.J. (1973), *The axiom of choice*, Studies in logic, North-Holland, Amsterdam.

Johansson, I. (1937), 'Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus', *Compositio Mathematica* **4**, 119–136.

de Jongh, D.H.J. (1961), Recherches sur les I-valuations, *in* 'Rapport CETIS', number 26, Compte-rendu des travaux effectué par l'Université d'Amsterdam dans le cadre de contrat Euratom, pp. 172–178. Rapport 17 (1968 vertaald: Essays on I-valuations, *Automation in language, translation and theorem proving, Some applications in mathematical logic*, (Braffort ed.), Brussels (1968), (Euratom 4038e), 263–267)).

de Jongh, D.H.J. (1968), *Investigations on the intuitionistic propositional calculus*, number 69-894, University Microfilms, Inc., Ann Arbor, Michigan. (dissertatie University of Winconsin).

de Jongh, D.H.J. & Troelstra, A.S. (1966), 'On the connection of partially ordered sets with some pseudo-boolean algebras', *Indagationes Mathematicae* **28**(3), 317–329. (Dedicated to E.W. Beth).

de Jongh, D.H.J. & van Ulsen, P. (1999), Beth's nonclassical valuations, *in* 'Un logicien consciencieux, La philosophie de Evert Willem Beth', Vol. 4 of *Philosophia Scientiae*, Actes du Colloque Evert Willem Beth, Archives Henri–Poincaré (Nancy, 22–24 Avril 1998), Kimé, Paris, pp. 279–302.

Jónnson, B. & Tarski, A. (1951), 'Boolean algebras with operators, I', *American Journal of Mathematics* **73**, 891–939.

Kamp, J.A.W. (1971), 'Beth's bijdragen tot de logica', *Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte* **63**, 145–159.

Kanger, S. (1957), *Provability in logic*, Almqvist and Wiksell, Stockholm.

Kanger, S. (1963), A simplified proof method for elementary logic, *in* P. Braffort & D. Hirschberg, eds, 'Computer programming and formal systems', Studies in Logic, North-Holland, Amsterdam, pp. 87–94.

Kazemier, B.H. (1963/64), 'Ter herdenking van prof.dr. E.W. Beth', *Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte* **56**, 169–177.

Keisler, H.J. (1971), *Model theory for infinitary logic, Logic with countable conjunctions and finite quantifiers*, Vol. 62 of *Studies in Logic*, North-Holland, Amsterdam.

Kelley, J.L. (1950), 'The Tychonoff product implies the axiom of choice', *Fundamenta Mathematicae* **37**, 75–76.

Kennedy, H.C. (1980), *Peano, Life and works of Guiseppe Peano*, Reidel, Dordrecht.

Kleene, S.C. (1943), 'Recursive predicates and quantifiers', *Transactions of the American Mathematical Society* **53**, 41–73.

Kleene, S.C. (1945), 'On the interpretation of intuitionistic number theory', *The Journal of Symbolic Logic* **10**, 109–124.

Kleene, S.C. (1948), 'Recensie van E.W. Beth, Semantical considerations on intuitionistic mathematics', *Journal of Symbolic Logic* **13**, 173. (Beths artikel in: *Indagationes Mathematicae* 9, (1947), 572–577).

Kleene, S.C. (1952*a*), *Introduction to metamathematics*, number 1 *in* 'Bibliotheca Mathematica', North-Holland—Noordhoff, Amsterdam—Groningen. ($1959^2$).

Kleene, S.C. (1952*b*), Recursive functions and intuitionistic mathematics, *in* 'Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1950, Cambridge, Mass.', number 1, The American Mathematical Society, Providence, RI, pp. 679–685.

Kleene, S.C. (1952*c*), *Two papers on the predicate calculus*, number 10 *in* 'Memoirs of the American Mathematical Society', American Mathematical Society, Providence, R.I. (1. Permutability of inferences in Gentzen's calculi *LK* and *LJ*; 2. Finite axiomatizability of theories in the predicate calculus using additional predicate symbols).

Kleene, S.C. (1957), 'Recensie van E.W. Beth, Semantic construction of intuitionistic logic', *The Journal of Symbolic Logic* **22**, 363–365. (Beths artikel in: *Konkl. Nederl. Akad. Wetensch., Med. Nw. Reeks* 19, (1956) 357–388).

Kleene, S.C. & Vesley, R.E. (1965), *The foundations of intuitionistic mathematics, especially in relation to recursive functions*, Studies in logic and the foundations of mathematics, North-Holland, Amsterdam.

Knegtmans, P.J. (1998), *Een kwetsbaar centrum van de geest, de Universiteit van Amsterdam tussen 1935 en 1950*, Amsterdam University Press, Amsterdam. (dissertatie 1998).

Koetsier, T. & van Mill, J. (1997), General topology, in particular dimension theory, in the Netherlands: the decisive influence of Brouwer's intuitionism, *in* C.E. Aull & R. Lowen, eds, 'Handbook of the history of general topology,', Vol. 1, Kluwer, Dordrecht, pp. 135–180.

Kolmogoroff, A.N. (1932), 'Zur Deutung der intuitionistischen Logik', *Mathematische Zeitschrift* **35**, 58–65.

Kolmogoroff, A.N. (1933), *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Vol. 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Springer, Berlin.

Krabbe, E.C.W. (1982), *Studies in dialogical logic*, Elinkwijk, Utrecht. (dissertatie,1982, Rijks Universiteit Groningen).

Krabbe, E.C.W. (1985), 'Formal systems of dialogue rule', *Synthese* **63**, 295–328.

Kreisel, G. (1954*a*), 'Recensie van: E.W. Beth, Sur la description de certains modèles d'un système formel', *Mathematical Reviews* **15**(3), 189. (Beths artikel in: *Actes du XIè C. Int. d. Philos.*, Bruxelles, 1953, Vol.5, 64–69.).

Kreisel, G. (1954*b*), 'recensie van Setsuya Seki, On the weakened type logic', *Mathematical Reviews* **15**, 90. (Seki's artikel in: *Comm. Math. U. St. Paul* 2, (1953), pp. 29–40).

Kreisel, G. (1956), 'Recensie van E.W. Beth, Semantic construction of intuitionistic logic', *Zentralblatt für Mathematik* **73**, 249–250. (Beths artikel in: *Konkl. Ned. Akad. Wetensch., Med., Nw. Reeks* 19, (1956), 357–388).

Kreisel, G. (1957), Gödel's interpretation of Heyting's arithmetic, *in* 'Summaries of talks presented at the Summer Institute for Symbolic Logic in 1957', Vol. 1, Cornell University, pp. 125–133. ($1960^2$).

Kreisel, G. (1958*a*), 'The non-derivability of $\neg\forall x A(x) \rightarrow \exists x \neg A(x)$, A primitive recursive, in intuitionistic formal systems', *The Journal of Symbolic Logic* **23**(4), 456–457.

Kreisel, G. (1958*b*), 'A remark on free choice sequences and the topological completeness proofs.', *The Journal of Symbolic Logic* **23**, 369–388.

Kreisel, G. (1961), On weak completeness of intuitionistic predicate logic, Technical Report 3, Applied mathematics and statististical laboratories, Stanford University, Stanford. (Office of Ordnance Research, Contract No. DA-04-200-ORD-997); ook in The Journal of Symbolic Logic 27, (1962), pp. 139–158.

Kripke, S.A. (1959*a*), 'A completeness theorem in modal logic', *The Journal of Symbolic Logic* **24**(1), 1–14. (ontvangen 28 oktober 1958).

Kripke, S.A. (1959*b*), 'Semantic analysis of modal logic', *The Journal of Symbolic Logic* **24**(4), 323–324. (abstract).

Kripke, S.A. (1962), 'The undecidability of monadic modal quantification theory', *Zeitschrift f. mathematische Logik und Grundlagen d. Mathematik* **8**, 113–116.

Kripke, S.A. (1963*a*), 'Semantic analysis of modal logic I, Normal modal propositional calculi', *Zeitschrift für math. Logik und Grundlagen der Mathematik* **9**, 67–96.

Kripke, S.A. (1963*b*), Semantical considerations on modal logic, *in* 'Proceedings of a colloquium on modal and many-valued logics; Helsinki, 23–26 August, 1962', number 16, Acta Philosophica Fennica, Helsinki, pp. 83–94.

Kripke, S.A. (1965), Semantic analysis of intuitionistic logic I., *in* J.N. Crossley & M.A.E. Dummett, eds, 'Formal systems and recursive functions', Studies in Logic, Proceedings of the Eighth Logic Colloquium, (Oxford, July 1963), North–Holland, Amsterdam, pp. 92–130.

Kueker, D.W. (1970), 'Generalized interpolation and definability', *Annals of mathematical logic* **1**(4), 423–468.

Ladrière, J. (1951), 'Le théorème fondamental de Gentzen', *Revu Philosophique de Louvain* **49**, 357–384.

Leblanc, H. (1955), *An introduction to deductive logic*, J. Wiley, New York.

Leblanc, H. (1963), 'Proof routines for the propositional calculus', *Notre Dame Journal of Formal Logic.* 81–104.

Leblanc, H. & Belnap, N.D. (1962), 'Intuitionism reconsidered', *Notre Dame Journal of formal logic* **3**, 79–82.

Lewis, C.I. & Langford, C.H. (1932), *Symbolic logic.* (1951: herdruk, New York (Dover)).

Lindenbaum, A. & Tarski, A. (1926), 'Sur l'indépendence des notions primitives dans les systèmes mathématiques', *Annales de la Société Polonaise de Mathématique* **5**, 111–113.

Lindenbaum, A. & Tarski, A. (1934/35), 'Ueber die beschränktheit der Ausdruckmittel deduktiver Theorien', *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* **7**, 15–22.

Lineal, S.L. & Post, E. (1949), 'Recursive unsolvability of the deducibility, Tarski's completeness, and the independence of axioms problems of propositional calculus', *Bulletin of the American Mathematical Society* **55**, 50. (abstract 39).

Lis, Z. (1960), 'Wynikanie semantyczne a wynikanie formalne', *Studia Logica* **10**, 39–60. Pools, samenvattingen in Russisch en Engels.

Lorenzen, P. (1959), Ueber die Begriffe 'Beweis' und 'Definition', *in* A. Heyting, ed., 'Constructivity in mathematics', Studies in Logic, Proceedings of the colloquium held at Amsterdam, 1957, North-Holland, Amsterdam, pp. 169–178.

Lorenzen, P. (1961), Ein dialogisches Konstruktivitätskriterium, *in* 'Infinitistic methods', Proceedings on the symposium of foundations of mathematics, Warsaw, 2–9 Sept. 1959, PWN, Warsaw, pp. 193–200.

Lorenzen, P. (1962), *Metamathematik*, Hochschultaschenbücher, Bibliographisches Institut, Mannheim.

Lyndon, R.C. (1957), Sentences preserved under homomorphisms; sentences preserved under subdirect products, *in* 'Summaries of talks presented at the Summer Institute for Symbolic Logic in 1957', Vol. 1, Cornell University, pp. 122–124A. ($1960^2$ herzien; in $1957^1$ zijn onder de 'references' de nrs. $5-7$ niet aanwezig).

Lyndon, R.C. (1959*a*), 'An interpolation theorem in the predicate calculus', *Pacific Journal of Mathematics* **9**, 129–142.

Lyndon, R.C. (1959*b*), 'Properties preserved in subdirect products', *Pacific Journal of Mathematics* **9**, 155–164.

Lyndon, R.C. (1959*c*), 'Properties preserved under homomorphisms', *Pacific Journal of Mathematics* **9**, 143–154.

McKinsey, J.C.C. (1935), 'On the independence of undefined ideas', *Bulletin of the American Mathematical Society* **41**, 291–297.

McKinsey, J.C.C. & Tarski, A. (1948), 'Some theorems about the sentential calculus of Lewis and Heyting', *The Journal of Symbolic Logic* **13**, 1–15.

van Melsen, A.G.M. (1954), *De wijsbegeerte der exacte wetenschap*, Wolters, Groningen.

Mendelson, E. (1969), 'recensie van Beth, Piaget, epistémologie.... (1961)', *Zentralblatt f. Mathematik* **165**, 301–302.

Messiah, A. (1961), *Quantum Mechanics*, Vol. I, North-Holland, Amsterdam.

Mints, G. (1999), A completeness proof for propositional S4 in Cantor space, *in* E. Orlowska, ed., 'Logic at work, Essays dedicated to the memory of Helena Rasiowa', Studies in fuzziness and soft computing, Physica Verlag (Springer), Heidelberg, chapter 6, pp. 79–88.

von Mises, R. (1919), 'Grundlagen der Wahrscheinlichkeit', *Mathematische Zeitschrift* **5**, 52–99.

von Mises, R. (1928), *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit, Einführung in die neue Wahrscheinlichkeitslehre und ihre Anwendung*, Vol. 3 of *Schriften zur Wissenschaftliche Weltauffassung*, Julius Springer, Wien. ($1936^2$, herzien).

Mittelstaedt, P. (1978), *Quantum Logic*, number 126 *in* 'Synthese Library', Reidel, Dordrecht.

Montague, R. (1962), Deterministic theories, *in* N.F. Washburne, ed., 'Decisions, values and groups', Vol. 2, Conference University of New Mexico (June–August 1958), Pergamon, Oxford, pp. 325–370.

Mooij, J.J.A. (1971), 'Het werk van E.W. Beth: Algemeen-filosofische aspecten', *Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte* **63**, 175–188.

Mostowski, A. (1948), 'Proofs of non-deducibility in intuitionistic functional calculus', *The Journal of Symbolic Logic* **13**, 204–207.

Mostowski, A. (1952), 'On direct products of theories', *The Journal of Symbolic Logic* **17**, 1–31.

Müller, G. (1956), 'Recensie van: A. Church, Non-normal truth tables', *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete* **53**, 341. (Churchs artikel in: *Bol. d.l. Soc. Math. Mexicana* 10, (1953)), 41–52.

Nelson, D. (1947), 'Recursive functions and intuitionistic number theory', *Transactions of the American Mathematical Society* **61**, 307–368.

Newell, A. & Simon, H. (1956), 'The logic theory machine', *IRE Transactions Information Theory* **IT-2**(3), 61–79.

Nieland, J.J.F. (1961), Construction sémantique du système S5, *in* 'Rapport CETIS', number 26, Compte-rendu des travaux effectué par l'Université d'Amsterdam dans le cadre de contrat Euratom, pp. 75–77. Rapport 7.

Nieland, J.J.F. & Beth, E.W. (1961*a*), Construction sémantique du système S4, *in* 'Rapport CETIS', number 26, Compte-rendu des travaux effectué par l'Université d'Amsterdam dans le cadre de contrat Euratom, pp. 55–82. Rapport 6.

Nieland, J.J.F. & Beth, E.W. (1961*b*), Construction sémantique du système S5, Implication et nécessité, *in* 'Rapport CETIS', number 26, Compte-rendu des travaux effectué par l'Université d'Amsterdam dans le cadre de contrat Euratom, pp. 21–30. Rapport 2.

Odifreddi, P. (1989), *Classical recursion theory, The theory of functions and sets of natural numbers*, number 125 *in* 'Studies in Logic', North-Holland, Amsterdam. ($1992^2$).

Padoa, A. (1901), Théorie algébrique des nombres entiers, Précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque, *in* '1e Congrès International de Philosophie (Paris, 1900)', Vol. 3, Armand Colin, Paris, pp. 309–365. (Klaus reprint, Nendeln, Liechtenstein, 1968).

Padoa, A. (1902), Un nouveau système de définitions pour la géométrie euclidienne, *in* E. Duparcq, ed., 'Compte rendu de deuxième Congrès International des Mathématiciens, Venue à Paris du 6 au 12 Août 1900', Vol. 3, Gauthiers-Villars, Paris, pp. 253–263.

Papadimitriou, C.H. (1994), *Computational complexity*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (gecorrigeerde herdruk 1995).

Peano, G. (1901), Les définitions mathématiques, *in* '1e Congrès International de Philosophie', Vol. 3, Armand Colin, Paris, pp. 288–297. (Klaus reprint, Nendeln, Liechtenstein, 1968).

Peckhaus, V. (1999), Moral integrity during a difficult period: Beth and Scholz, *in* 'Un logicien consciencieux, La philosophie de Evert Willem Beth', Philosophia Scientiae, Kimé, Paris, pp. 151–174. (Actes du Colloque Evert Willem Beth, Archives Henri Poincaré et Fondation E.W. Beth, Nancy, 22-24 Avril, 1998).

Pieri, M. (1908), 'La geometria elementare instituita sulle nozioni di 'punto' e 'sfera'', *Memorie di matematica e di fisica della Società Italiana delle Scienze* **15**, 345–450. (Italiaans).

Prawitz, D. (1960), 'An improved proof procedure', *Theoria* **26**, 102–139.

Prawitz, D. (1965), *Natural deduction, A proof theoretical study*, Almqvist and Wiksell, Stockholm.

Prawitz, D., Prawitz, H. & Voghera, N. (1960), 'Mechanical proof procedure and its realization in an electronic computer', *Journal of the Association for Computing Machinery* **7**, 102–128.

Preparata, F.P. & Shamos, M.I. (1985), *Computational geometry*, Texts and monographs in computer science, Springer, New York.

Quine, W.V.O. (1955), 'A proof procedure for quantification theory', *The Journal of Symbolic Logic* **20**, 141–149.

Quine, W.V.O. (1985), *The time of my life, an autobiography*, MIT Press, Cambridge Mass.

Rasiowa, H. (1951), 'Algebraic treatment of the functional calculi of Heyting and Lewis', *Fundamenta Mathematicae* **38**, 99–126.

Rasiowa, H. (1974), *An algebraic approach to non-classical logics*, number 78 *in* 'Studies in logic', North-Holland, Amsterdam.

Rasiowa, H. & Sikorski, R. (1950), 'A proof of the completeness theorem of Gödel', *Fundamenta Mathematicae* **37**, 193–201.

Rasiowa, H. & Sikorski, R. (1963), *The mathematics of metamathematics*, number 41 *in* 'Monografie Matematyczne', Polish Scientific Publishers, Warszawa.

Robinson, A. (1956), 'A result on consistency and its application to the theory of definition', *Indagationes Mathematicae* **18**, 47–58.

Robinson, A. (1957*a*), Proving a theorem (as done by man, logician, or machine), *in* 'Summaries of talks', Summer Institute for symbolic logic, Cornell University 1957.

Robinson, A. (1957*b*), 'Some problems of definability in the lower predicate calculus', *Fundamenta Mathematicae* **44**, 309–329.

Robinson, A. (1963), *Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra*, Studies in logic, North-Holland, Amsterdam.

Robinson, J. (1949), 'Definablity and decision problems in arithmetic', *The Journal of Symbolic Logic* **14**, 98–114.

Rose, A. (1954*a*), 'Recensie van: A. Church, Non-normal truth tables', *Mathematical Reviews* **15**, 385. (Churchs artikel in: *Bol. d.l. Soc. Math. Mexicana* 10 (1953), 41–52).

Rose, G.F. (1954*b*), 'Recensie van: A. Church, Non-normal truth tables', *The Journal of Symbolic Logic* **19**, 233–234. (Churchs artikel in: *Bol. d.l. Soc. Math. Mexicana* 10 (1953), 41–52).

Rubin, H. & Rubin, J.E. (1963), *Equivalents of the axiom of choice*, Studies in Logic, North-Holland, Amsterdam.

van Scheepen, F. (1968), Introduction, Theoretical aspects of automatic data processing, *in* P. Braffort & F. van Scheepen, eds, 'Automation in language translation and theorem proving', number EUR 4038e, Commission of the European Communities, Brussels, pp. IX–XV.

Schütte, K. (1956), 'Ein System des Verknüpfenden Schliessens', *Archiv für Mathematische Logik und Grundlagenforschung* **2**, 34–67.

Schütte, K. (1962), 'Der Interpolationssatz der intuitionistischen Prädikatenlogik', *Mathematische Annalen* **148**, 192–200.

Schütte, K. (1968), *Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik*, Springer, Berlin.

Simon, H.A. (1959), Definable terms and primitives in axiom systems, *in* L. Henkin, P. Suppes & A. Tarski, eds, 'The axiomatic method, With special references to geometry and physics', Studies in Logic, North-Holland, Amsterdam, pp. 429–442. Herziene versie: 'Formalizing scientific theories', in H.A. Simon (1977), *Models of discovery, and other topics in the methods of science*, (Synthese Library), Dordrecht (Reidel), section 6).

Singletary, W.E. (1968), 'Results regarding the axiomatization of partial propositional calculi', *Notre Dame Journal of Formal Logic* **9**(3), 193–211. (ontvangen 31 maart 1967).

Skolem, Th.A. (1951), 'recensie van J.B. Rosser, Hao Wang, Non-standard models for formal logic', *The Journal of Symbolic Logic* **16**, 145–146. (artikel van Rosser, Wang in JSL 15 (1950), pp. 113–129.

Smullyan, R. (1968), *First order logic*, Springer, New York.

Staal, J.F. (1965), 'E.W. Beth 1908–1964, (biografie en bibliografie)', *Dialectica* **19**, 158–179. (Revisie bibliografie (maar geen biografie) in: *E.W. Beth, memorial colloquium*, (Paris 1964), (J.L. Destuoches ed.), Dordecht (Reidel), 1967, 121–137).

Strauss, M. (1936), 'Zur Begründung der statistischen Transformationstheorie der Quantenphysik', *Sitzungs Berichte Berliner Akademie d. Wissenschaften, Phys.–Math. Klasse* **27**, 90–113.

Suppes, P. (1957), *Introduction to logic*, Van Nostrand, New York.

Svenonius, L. (1959), 'A theorem on permutation in models', *Theoria* **25**, 173–178.

de Swart, H.C.M. (1976), 'Another intuitionistic completeness proof', *The Journal of Symbolic Logic* **41**, 644–662. (received September 24, 1974).

Tarski, A. (1933), 'Einige Betrachtungen über die Begriffe der $\omega$-Widerspruchsfreiheit und der $\omega$-Vollständigkeit', *Monatshefte für Mathematik und Physik* **40**, 97–112.

Tarski, A. (1935*a*), 'Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen', *Studia Philosophica* **1**, 261–405.

Tarski, A. (1935*b*), 'Einige methodologische Untersuchungen über die Definierbarkeit der Begriffe', *Erkenntnis* **5**, 80–100.

Tarski, A. (1938), 'Der Aussagenkalkül und die Topologie', *Fundamenta Mathematicae* **31**, 103–134.

Tarski, A. (1943/44), 'The semantic conception of truth', *Philosophy and Phenomenological Research* **3**, 341–376.

Tarski, A. (1946), *Introduction to logic and the methodology of deductive sciences*, 2 (revised) edn, Oxford University Press, New York. (translated by O. Helmer).

Tarski, A. (1947), Problems of mathematics, *in* 'Princeton University Bicentennial Conferences (1946), (Conference 2)', Princeton University, Princeton, pp. 10–12.

Tarski, A. (1948*a*), A decision method for elementary algebra and geometry, R 109, Rand, Santa Monica.

Tarski, A. (1948*b*), 'A problem concerning the notion of definability', *The Journal of Symbolic Logic* **13**, 107–111.

Tarski, A. (1949*a*), 'On essential undecidability', *The Journal of Symbolic Logic* **14**, 75–76. (abstract 5).

Tarski, A. (1949*b*), 'Undecidability of group theory', *The Journal of Symbolic Logic* **14**, 76–77. (abstract 7).

Tarski, A. (1952), Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics, *in* 'Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Cambridge, Mass., U.S.A., Aug. 30 – Sept. 6 (1950))', number I, American Mathematical Society, Providence, R.I., pp. 705–720.

Tarski, A. (1953), *Inleiding tot de logica, en tot de methodeleer der deductieve wetenschappen*, Noord-Holland. (Nederlandse bewerking door E.W. Beth (van Tarski's 'Introduction to logic' uit 1946).

Tarski, A. (1954*a*), 'Prime ideal theorem for boolean algebras and the axiom of choice', *Bulletin of the American Mathematical Society* **60**, 390–391. (No. 562). (prelim. report).

Tarski, A. (1954*b*), 'Prime ideal theorems for set algebra and ordening principles', *Bulletin of the American Mathematical Society* **60**, 391. No. 563t, (prelim. report).

Tarski, A. (1954*c*), 'Prime ideal theorems for set algebras and the axiom of choice', *Bulletin of the American Mathematical Society* **60**, 391. No. 564t, (prelim. report).

Tarski, A. (1956), *Logic, semantics, metamathematics, Papers from 1923 to 1938*, Clarendon, Oxford. (Eng. vertalingen door J. Woodger).

Tarski, A. (1959), What is elementary geometry, *in* L. Henkin, P. Suppes & A. Tarski, eds, 'The axiomatic method', Studies in Logic, North-Holland, Amsterdam, pp. 16–29.

Tarski, A., Mostowski, A & Robinson, R.M. (1953), *Undecidable theories*, Studies in Logic, North-Holland, Amsterdam.

Troelstra, A.S. (1965), 'On intermediate propositional logics', *Indagationes Mathematicae* **27**, 141–152. (Rapport Euratom(-project) 32 (1963)).

Troelstra, A.S. (1977), *Choice sequences, A chapter of intuitionistic mathematics*, Oxford logic guides, Clarendon, Oxford.

Troelstra, A.S. (1989), *Index of the Heyting Nachlass*, number X-89-03 *in* 'ITLI prepublication series', University of Amsterdam, Amsterdam. (verbeterde uitgave in 1999).

Troelstra, A.S. & Schwichtenberg, H. (1996), *Basic proof theory*, number 43 *in* 'Cambridge tracts in theoretical computer science', Cambridge University Press, Cambridge. (2ooo, tweede druk, herzien).

Troelstra, A.S. & van Dalen, D. (1988), *Constructivism in Mathematics, II*, number 123 *in* 'Studies in logic', North-Holland, Amsterdam.

Veldman, W. (1976), 'An intuitionistic completeness theorem for intuitionistic predicate logic', *The Journal of Symbolic Logic* **41**, 159–166. (received May 20, 1974).

Velthuys-Bechthold, P.J.M. (1995), *Inventory of the papers of Evert Willem Beth (1908–1964), philosopher, logician and mathematician, 1920-1964*, Inventarisreeks, Rijksarchief in Noord-Holland, Haarlem.

Vesley, R.E. (1963), 'On strengthening intuitionistic logic', *Notre Dame Journal of Formal Logic* **4**(1), 80.

Visser, H. (1999), Beth and the logical empiricists, *in* G. Heinzmann, ed., 'Un logicien consciencieux, La philosophie de Evert Willem Beth', Vol. 4 of *Philosophia Scientiae*, Archives Henri Poincaré, Kimé, Paris, pp. 49–76.

van der Waerden, B.L. (1926), *De algebraiese grondslagen der meetkunde van het aantal.* (Dissertatie 24-3-1926, Universiteit van Amsterdam).

Wallace, A.D. (1944), 'A substitute for the axiom of choice', *Bulletin of the American Mathematical Society* **50**, 278.

van Westrhenen, S.C. (1969), *Statistical estimation of provability in the first order predicate calculus*, Eindhoven. (dissertatie, 27-5-1969, Technische Hogeschool Eindhoven).

Wójcicki, R. (1979), *Topics in the formal methodology of empirical sciences*, Synthese Library, Reidel, Dordrecht.

Yntema, M.K. (1964), 'A detailed argument for the Post-Lineal theorems', *Notre Dame Journal of Formal Logic* **5**(1), 37–50.

Zeman, J.J. (1973), *The Lewis-modal systems*, Clarendon, Oxford.

*Titles in the ILLC Dissertation Series:*

ILLC DS-1996-01: **Lex Hendriks**
*Computations in Propositional Logic*

ILLC DS-1996-02: **Angelo Montanari**
*Metric and Layered Temporal Logic for Time Granularity*

ILLC DS-1996-03: **Martin H. van den Berg**
*Some Aspects of the Internal Structure of Discourse: the Dynamics of Nominal Anaphora*

ILLC DS-1996-04: **Jeroen Bruggeman**
*Formalizing Organizational Ecology*

ILLC DS-1997-01: **Ronald Cramer**
*Modular Design of Secure yet Practical Cryptographic Protocols*

ILLC DS-1997-02: **Nataša Rakić**
*Common Sense Time and Special Relativity*

ILLC DS-1997-03: **Arthur Nieuwendijk**
*On Logic. Inquiries into the Justification of Deduction*

ILLC DS-1997-04: **Atocha Aliseda-LLera**
*Seeking Explanations: Abduction in Logic, Philosophy of Science and Artificial Intelligence*

ILLC DS-1997-05: **Harry Stein**
*The Fiber and the Fabric: An Inquiry into Wittgenstein's Views on Rule-Following and Linguistic Normativity*

ILLC DS-1997-06: **Leonie Bosveld - de Smet**
*On Mass and Plural Quantification. The Case of French 'des'/'du'-NP's.*

ILLC DS-1998-01: **Sebastiaan A. Terwijn**
*Computability and Measure*

ILLC DS-1998-02: **Sjoerd D. Zwart**
*Approach to the Truth: Verisimilitude and Truthlikeness*

ILLC DS-1998-03: **Peter Grunwald**
*The Minimum Description Length Principle and Reasoning under Uncertainty*

ILLC DS-1998-04: **Giovanna d'Agostino**
*Modal Logic and Non-Well-Founded Set Theory: Translation, Bisimulation, Interpolation*

ILLC DS-1998-05: **Mehdi Dastani**
*Languages of Perception*

ILLC DS-1999-01: **Jelle Gerbrandy**
*Bisimulations on Planet Kripke*

ILLC DS-1999-02: **Khalil Sima'an**
*Learning efficient disambiguation*

ILLC DS-1999-03: **Jaap Maat**
*Philosophical Languages in the Seventeenth Century: Dalgarno, Wilkins, Leibniz*

ILLC DS-1999-04: **Barbara Terhal**
*Quantum Algorithms and Quantum Entanglement*

ILLC DS-2000-01: **Renata Wasserman**
*Resource Bounded Belief Revision*

ILLC DS-2000-02: **Jaap Kamps**
*A Logical Approach to Computational Theory Building (with applications to sociology)*

ILLC DS-2000-03: **Marco Vervoort**
*Games, Walks and Grammars: Problems I've Worked On*

ILLC DS-2000-04: **Paul van Ulsen**
*E.W. Beth als logicus*

ILLC DS-2000-05: **Carlos Areces**
*Logic Engineering. The Case of Description and Hybrid Logics*