LA CONCEPTION INTUITIONNISTE DE LA LOGIQUE

1. La logique de l'être

On étudie souvent la logique comme une science purement formelle, où il ne s'agit pas du sens des notions logiques, mais seulement de leurs propriétés formelles. Alors on ne se demande pas ce que veut dire qu'une proposition soit vraie ou fausse, mais on s'occupe seulement des conditions formelles sous lesquelles on peut déduire une proposition à partir d'autres propositions. Cependant, dès qu'on veut appliquer la logique, on doit bien se poser la question de la signification du mot « vrai » et des autres termes logiques, et on est alors conduit à des énoncés comme le suivant : « Une proposition est vraie si l'état de choses qu'elle exprime existe dans le monde réel ». La définition varie selon le point de vue du philosophe, mais elle présuppose toujours une conception du réel ; cela revient à dire que la logique a besoin, pour son interprétation, d'une ontologie.

Les difficultés auxquelles se heurte l'interprétation de l'implication sont bien connues. A vrai dire, dans la logique des propositions il n'y a pas de place pour une implication proprement dite, car chaque proposition est ou vraie ou fausse, et on ne conçoit pas comment sa vérité pourrait dépendre de celle d'autres propositions. Ainsi on est conduit à la définition de l'implication par le vrai et le faux : la proposition $p \rightarrow q$ est fausse si, et seulement si p est vrai et q est faux. D'une part, cette définition s'ajuste mal avec l'idée intuitive de l'implication, d'autre part, elle dépend, pour son application, de la notion du vrai.

La logique des propositions, sous sa forme traditionnelle, n'est donc indépendante que lorsqu'on la traite comme un calcul purement formel. Dès qu'on essaie de l'interpréter, on doit avoir recours à une métaphysique.

2. La logique des modalités

Plusieurs logiciens, peu satisfaits de l'interprétation de l'implication dont je viens de parler, ont essayé d'en donner une qui s'accorde mieux avec l'intuition. Notamment C. I. Lewis a proposé de considérer, à côté de l'implication matérielle, une implication stricte, dont la définition se base sur la notion de nécessité. p implique q au sens strict, s'il est impossible que p soit vrai et q soit faux. Pour Lewis, la possibilité est une notion primitive, et la nécessité s'y ramène au moyen de la négation. Toutefois, pour appliquer la logique, il nous faut savoir ce que les mots « nécessaire » et « possible » veulent dire. On peut définir qu'une proposition est possible si elle n'est pas contradictoire, mais pour que cette définition ait un sens clair, il faut prendre le mot « contradictoire » dans son sens logique, et on ramène ainsi la logique stricte à la logique usuelle. Ce n'est pas le but de Lewis. En tant qu'on peut conclure de ses exemples, il prend les mots « non-contradictoire » dans un sens assez vague qui s'explique par leur usage dans le langage de tous les jours. En analysant un peu cette notion, on voit qu'elle est très compliquée et qu'elle donne lieu à des problèmes difficiles.

Voici une autre définition de l'implication stricte, suggérée par les considérations de Lewis. p implique q au sens strict, si q exprime un effet de la cause exprimée par p. Par exemple : S'il fait noir dans la chambre, je ne peux pas y lire. Cette définition est très proche de l'intuition, mais elle a l'inconvénient de supposer comme donnée une théorie de la causalité, et celle-ci, plus encore que celle de l'existence, est un vrai champ de bataille dans la philosophie. Il semble donc que la théorie de l'implication stricte, au lieu de clarifier le sens de la logique des propositions, la fait dépendre de notions beaucoup plus compliquées et plus obscures.

3. La logique symbolique

Sommes-nous donc réduits, pour traiter la logique d'une manière exacte, à la considérer comme un calcul formel et à renoncer à toute interprétation de ce calcul ? La logique symbolique (synonymes : logique mathématique, logique formalisée) est aujourd'hui le sujet d'études étendues. Elle s'est constituée en une science mathématique, et ses méthodes sont modelées d'après les méthodes mathématiques. Or, celles-ci ont beaucoup évolué depuis le milieu du XIXe siècle. Les mathématiques se sont peu à peu émancipées de leur interprétation dans la réalité ; aujourd'hui la plupart des mathématiciens considèrent leur science comme étant purement formelle. En France le groupe de mathématiciens qui se présentent au public sous le nom collectif de Bourbaki, publient un traité où les mathématiques sont développées de cette manière. De leur point de vue, les mathématiques consistent en signes qu'on écrit sur le papier ; tout ce qu'il y a de plus, toutes les idées qu'on lie à ces signes, ne regardent pas le mathématicien comme tel, mais seulement le physicien ou le technicien qui applique les mathématiques.

La logique a suivi de près l'évolution qui a conduit à cette conception des mathématiques. Elle aussi s'est constituée en une science purement formelle, où l'on peut opérer avec les signes sans s'occuper de leur sens. Tout comme les mathématiques, la logique a gagné en clarté et en précision par la séparation entre le système formel et son interprétation. On peut même dire qu'en logique cette séparation a mieux réussi qu'en mathématiques, à cause de la structure plus simple de la logique. Tout de même, la question de l'application est plus pressante pour la logique. On conçoit facilement que les mathématiques s'appliquent aux sciences de la nature, où les expériences conduisent à des résultats numériques ; j'ai déjà souligné que pour expliquer l'application de la logique il faut d'abord analyser les notions du vrai et du faux. La logique formalisée a beaucoup contribué à systématiser les lois de la logique, mais elle est inapte à en clarifier l'application. En outre, la logique formelle bivalente s'éloigne fort de l'intuition des notions logiques, comme, par exemple, celle de l'implication.

4. La logique du savoir

Pour arriver à une logique qui soit à la fois mieux adaptée à nos intuitions et plus facile à appliquer, je choisis comme point de départ le fait que pour appliquer une règle logique nous devons savoir que les prémisses sont vraies ; alors la règle nous apprend que la conclusion est également vraie. On néglige presque toujours le fait que dans les applications de la logique il s'agit toujours de ce que nous savons et des conclusions que nous pouvons tirer de ce que nous savons.

On fera sans doute l'objection qu'en adoptant ce point de vue je base la logique sur la théorie de la connaissance, dans laquelle il n'y a guère plus d'accord entre les opinions qu'en métaphysique. Je réponds qu'il faut choisir quelque point de départ ; ce qui importe c'est que les notions de base soient aussi immédiates que possible. Or, du moins pour l'homme, le savoir est plus immédiat que l'être, qui ne se manifeste pour lui que par une analyse du savoir.

Une autre objection serait que rien n'est gagné en mettant la logique en relation avec le savoir au lieu de la baser sur la notion du vrai, car une proposition n'a un sens bien défini que lorsqu'on peut savoir si elle est vraie. De cette manière, par un détour, la notion de proposition est de nouveau basée sur celle de vérité. Néanmoins, en concordance avec le fait que le savoir est une notion plus immédiate que l'être, il est plus facile de préciser les conditions sous lesquelles on sait qu'une proposition donnée est vraie que de dire exactement sous quelles conditions elle est vraie. Plus explicitement, dans beaucoup de cas, pour définir la vérité d'une proposition, on n'a d'autre moyen que d'énumérer les conditions sous lesquelles on la sait vraie. Considérons quelques exemples. Tout le monde sait quelles informations il faut prendre pour savoir si la proposition : « Le plus vieil habitant de Paris a 101 ans » est vraie ; c'est précisément par ce paquet d'informations que se définit le sens de la proposition. La question est un peu plus difficile pour un énoncé comme : « Tous les hommes sont mortels. » On peut soutenir que cette proposition est analytique, la propriété d'être mortel faisant partie de la définition de l'homme ; on peut aussi la considérer comme un énoncé vérifié par l'expérience. Dans les deux cas on indique les conditions sous lesquelles on sait que la proposition est vraie. Pour : « Tous les Français sont des hommes » c'est le premier cas qui se présente : sans doute il fait partie de la définition d'un Français qu'il est un homme. Considérons maintenant le syllogisme : « Tous les hommes sont mortels. Tous les Français sont des hommes. Donc : Tous les Français sont mortels. » Il est clair que, si je sais que les deux prémisses sont vraies, je sais que la conclusion est vraie, et c'est en ce sens que les prémisses impliquent la conclusion. Un raisonnement analogue s'impose pour le *modus ponens*, par exemple : « Si j'ai un mal de tête, je ne peux pas travailler. J'ai un mal de tête. Donc : Je ne peux pas travailler. » Je sais par l'expérience que la première prémisse est vraie ; j'éprouve directement la vérité de la seconde. Je sais donc que la conclusion est vraie.

Dans ces exemples la différence entre la logique de l'être et celle du savoir est encore peu importante ; les deux logiques sont pour ainsi dire parallèles. Mais du moment que l'infini joue un rôle, la différence devient plus claire. Si une suite finie de nombres entiers m'est donnée, je peux savoir par simple inspection si le nombre 5 s'y trouve ou non ; ici encore le savoir se trouve juste à côté de l'être. Mais si la suite donnée est infinie, tout est différent, parce que je n'ai plus moyen de parcourir toute la suite. Nous allons étudier de plus près les difficultés causées par cette circonstance.

5. L'infini mathématique

En mathématiques l'infini se présente en premier lieu sous la forme de la suite des nombres naturels : 1, 2, 3, ... Je dirai simplement « nombre » au lieu de « nombre naturel ». Ce qui nous intéresse c'est la signification d'un énoncé sur l'existence d'un nombre. Cette notion est difficile puisqu'il ne s'agit pas d'une existence matérielle. Il est impossible de relever ici toutes les discussions sur ce concept ; je veux seulement faire ressortir que les difficultés de la notion d'existence mathématique suffisent pour expliquer le fait que la logique du savoir soit née comme logique du savoir de l'infini mathématique. Je viens d'en nommer une autre raison, à savoir qu'il est en général impossible de constater cette existence par simple inspection.

Pour être plus concret, je prends un exemple. Comme on sait, un nombre qui n'a d'autres diviseurs que 1 et soi-même, s'appelle nombre premier. (Par exemple, 7 est premier, car il n'a comme diviseurs que 1 et 7 ; 6 n'est pas premier, car, outre 1 et 6, il a les diviseurs 2 et 3). Considérons l'énoncé (A) : Tout nombre plus grand que 1 est ou premier, ou la somme de deux nombres premiers, ou la somme de trois nombres premiers.

On ne sait pas si (A) est vrai. Pour tous les nombres qu'on a essayés, (A) s'est trouvé satisfait. (Par exemple, $27 = 3 + 11 + 13$; $28 = 11 + 17$; 29 est premier ; d'autres décompositions sont possibles, comme $28 = 5 + 23$, $29 = 5 + 11 + 13$). Appelons « nombre exceptionnel » un nombre qui ne satisfasse pas à (A), donc un nombre qui ne soit ni 1, ni premier, ni la somme de deux ou de trois nombres premiers. Comme je viens de dire, on n'a jamais trouvé de nombre exceptionnel, ce qui n'exclut pas qu'il en existe parmi les nombres qu'on n'a pas encore essayés. Évidemment (A) est équivalent à (A') :

(A') Il n'existe pas de nombre exceptionnel.

Étudions, en outre, les énoncés (B) et (B') :

(B) Il existe un nombre exceptionnel.

(B') Il est impossible qu'il n'existe pas de nombre exceptionnel. Dans la logique de l'être, (B) et (B') sont équivalents, car (B) est ou vrai ou faux, donc si (B) ne peut pas être faux, (B) est vrai.

Dans la logique du savoir, nous devons d'abord nous demander comment nous pouvons savoir qu'un nombre exceptionnel existe. La manière la plus simple est d'indiquer effectivement un tel nombre. Considérons donc les énoncés (C) et (D) :

(C) J'ai indiqué effectivement un nombre exceptionnel.

(D) J'ai ramené à une contradiction la supposition qu'aucun nombre exceptionnel n'existe.

Dans la logique du savoir (C) et (D) ne sont pas du tout équivalents. Dans le cas de (C) nous savons beaucoup plus que dans celui de (D) ; en particulier, dans le cas de (C) nous connaissons la valeur exacte d'un nombre exceptionnel, qui dans le cas de (D) peut rester complètement inconnue. Il faudra donc distinguer entre les deux énoncés ; il ne nous est plus permis de les exprimer tous les deux par la même phrase : « Il existe un nombre exceptionnel. » La question de savoir laquelle des deux sera exprimée par cette phrase, est une question de terminologie qui ne touche pas au fond des choses. Cependant il y a des raisons pour considérer « Il existe un nombre exceptionnel » comme synonyme de (C). Il serait bizarre de définir par un énoncé négatif tel que (D), l'existence, qui, du point de vue de l'intuition, est la notion la plus positive de toutes. En outre, quoiqu'en mathématiques on puisse raisonner d'une manière abstraite sur un nombre dont on a prouvé l'impossibilité de la non-existence, on ne peut utiliser dans les calculs que les nombres dont on connaît la valeur. Nous adoptons donc à titre de définition que (B) signifiera le même que (C). Plus généralement si $P(x)$ est un prédicat qui est défini pour les nombres naturels, « Il existe un nombre x tel que $P(x)$ » signifiera « On sait calculer un nombre x tel que $P(x)$. » On peut considérer cette définition comme un cas particulier du « principe de positivité » qui s'énonce comme suit : Chaque énoncé mathématique ou logique exprime le résultat d'une construction.

6. La négation

Une difficulté se présente concernant l'interprétation de la négation. Si (B) veut dire la même chose que (C), on pourrait être tenté d'interpréter « Il n'existe pas de nombre exceptionnel » comme voulant dire « Je ne sais pas calculer de nombre exceptionnel. » Mais cet énoncé pèche contre le principe de positivité. En outre, il n'exprime pas un résultat définitif, car le fait que je ne sais pas (à ce moment) calculer de nombre exceptionnel, n'exclut pas que j'en trouve un la semaine prochaine. Pour donner à l'énoncé négatif un sens dans la logique du savoir, il faut indiquer la construction par laquelle nous concluons à la non-existence d'un nombre exceptionnel. Cette construction ne peut être que celle d'une contradiction. Nous sommes donc menés à l'interprétation suivante. « Il n'existe pas de nombre exceptionnel » signifie : « On a déduit une contradiction de la supposition qu'un nombre exceptionnel existe. » En général, la négation d'une proposition p sera interprétée par « On a déduit une contradiction de la supposition que p ». Déduire une contradiction est une construction ; cette définition de la négation satisfait donc au principe de positivité.

Comparons maintenant les énoncés (B) et (E) :

(B) Il existe un nombre exceptionnel.

(E) Il n'existe pas de nombre exceptionnel.

D'après nos définitions ils ont respectivement la même signification que (F) et (G) :

(F) On sait calculer un nombre exceptionnel.

(G) On sait déduire une contradiction à partir de la supposition qu'on ait trouvé un nombre exceptionnel.

Il n'y a aucune raison pour affirmer que (F) ou (G) doit être vrai. En fait, en l'état actuel de la science, ni (F) ni (G) n'est réalisé. Cela veut dire que ni (B) ni (E) ne peut être posé comme vrai. Autrement dit, le principe du tiers exclu n'est pas valable. Ce résultat est moins étonnant qu'il paraît à première vue, car il s'appuie sur les interprétations (F) et (G) que nous avons données des énoncés (B) et (E), et qui diffèrent essentiellement des interprétations usuelles dans la logique de l'être.

Il sera utile de mettre en garde contre quelques malentendus. Il serait erroné de dire que le principe du tiers exclu soit faux car cela signifierait qu'il impliquerait contradiction. Or il n'est pas contradictoire que (B) ou (E) soit vrai ; nous avons seulement constaté qu'en l'état actuel de la science il n'y a aucune raison pour affirmer l'un ou l'autre. Cette constatation ne constitue pas un théorème de la logique, tout comme la constatation qu'un certain problème mathématique n'est pas résolu, ne constitue pas un théorème mathématique. Il serait également erroné de croire que la logique du savoir soit une logique plurivalente, où à côté des propositions vraies et des propositions fausses on considère des propositions ni vraies ni fausses, qui ont quelque troisième valeur logique. Il y a seulement des propositions, comme celle du tiers exclu, dont nous ne savons pas si elles sont vraies ou fausses et sur la vérité desquelles nous ne pouvons par conséquent rien affirmer. Ce qui donne lieu à ce malentendu, c'est qu'on confond les considérations sur la logique avec les théorèmes de la logique. Que le principe du tiers exclu ne s'applique pas, c'est une constatation sur la logique, non pas un théorème de la logique.

7. L'implication

Nous verrons que l'implication trouve dans la logique du savoir une interprétation très intuitive et très naturelle.

Prenons comme exemple l'énoncé (H) :

(H) Si au moins un nombre exceptionnel existe, alors le plus petit nombre exceptionnel est pair.

Voici une démonstration de (H). Soit a un nombre exceptionnel impair. Alors a-3 n'est ni 1, ni premier, ni la somme de deux nombres premiers. Si a-3 était la somme de trois nombres premiers, l'un d'eux serait 2, donc on aurait $a\text{-}3 = 2 + p + q$, avec p et q premiers. On aurait donc $a = 5 + p + q$, ce qui contredirait l'hypothèse que a est exceptionnel. J'ai démontré que a-3 est un nombre pair exceptionnel.

Comme à tout nombre impair exceptionnel *a* il correspond un nombre pair exceptionnel *a*-3 qui est plus petit, le plus petit nombre exceptionnel doit être pair.

En analysant cette démonstration nous voyons qu'elle consiste en une construction qui, partant de l'hypothèse que nous connaissions un nombre exceptionnel *a* (ou, ce qui revient au même, que nous ayons démontré qu'un nombre exceptionnel existe), mène à une démonstration de la proposition « Le plus petit nombre exceptionnel est pair ». En général on démontrera la proposition « A entraîne B » par une construction qui démontre B sous l'hypothèse qu'une démonstration de A soit donnée. L'interprétation de « A entraîne B » dans la logique du savoir est précisément celle-ci, qu'une telle construction est connue. Les difficultés auxquelles se heurtait la définition de l'implication dans la logique de l'être, trouvent ici leur solution immédiate. Tandis qu'il est difficile de comprendre comment la vérité d'une proposition peut dépendre de la vérité d'une autre proposition, il est tout naturel que la démonstration d'une proposition dépende de la démonstration d'une autre proposition.

C'est M. L.-E.-J. Brouwer qui a compris le premier que pour l'infini mathématique la logique du savoir est la plus adéquate et c'est lui qui a introduit l'expression « mathématiques intuitionnistes » pour désigner les mathématiques basées sur cette logique.

Comme nous avons vu, le principe du tiers exclu n'est pas valable dans la logique intuitionniste. Par conséquent, plusieurs autres règles logiques ne s'appliquent pas non plus. Citons comme exemple que la double négation d'une proposition p n'est pas équivalente à p. D'ailleurs il est clair que (B′), qui est la double négation de (B), n'est pas équivalent à (B), car pour pouvoir affirmer (B) il faut connaître un nombre exceptionnel, ce qui n'est pas nécessaire pour pouvoir affirmer (B′). Le fait que plusieurs règles de la logique traditionnelle font défaut dans la logique intuitionniste, n'est pas un appauvrissement, car il faut compléter cette logique par des règles, entre autres sur l'emploi de la double négation, qui dans la logique bivalente se réduisent à des identités si l'on raie les doubles négations. Ce n'est pas le but de cet article d'entrer dans les détails de la technique de la logique intuitionniste. On trouvera quelques indications là-dessus avec une bibliographie complète dans mon livre *Les fondements des mathématiques* (Paris, Gauthier-Villars, 1955).

A. HEYTING.