IL-modellen en bisimulaties

René de Jonge

juli 2004

Samenvatting

In dit artikel worden enkele bekende begrippen en stellingen uit de klassieke modale logica geformuleerd voor de uitgebreidere logica IL.

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Met dit artikel voor mijn derdejaarsproject wiskunde geef ik een vervolg aan het inleidende vak over modale logica. Ik zal de notatie en terminologie uit het daarbij gebruikte boek van Blackburn et al [1] aanhouden.

We brengen als eerste het begrip logica in herinnering en geven dan de axioma's die de logica IL definiëren. We formuleren vervolgens de bekende begrippen frames, modellen en bisimulaties voor deze nieuwe logica. Bisimulaties vormen de rode draad in ons verhaal. We zullen zien dat we ook begrensde morfismes kunnen definiëren in de nieuwe situatie. We bewijzen echter eerst een analogon van de belangrijke stelling van Hennessey-Milner. We kunnen in het klassieke geval een bisimulatie gebruiken om een model te reduceren. Dit zullen we laten zien en we tonen daarnaast aan dat voor onze nieuwe modellen dit in het algemeen echter niet geldt.

De logica IL heet interpreteerbaarheidslogica. Om IL-formules te maken staat ons een extra modale operator $\rhd$ ter beschikking. Deze operator heeft een bijzondere waarheidsclausule. Er valt over de logica IL veel te zeggen, maar dit zal niet aan bod komen in dit stuk. Zoals gezegd, bisimulaties vormen de rode draad in ons verhaal.

IL-frames werden geïntroduceerd door Veltman. Deze frames zijn voorzien van een extra collectie tweeplaatsige relaties ten opzichte van de klassieke frames. Ieder punt w van het model levert een relatie S_w. De IL-frames worden gekarakteriseerd door de axioma's van IL. Met behulp van IL-frames kunnen we op de gebruikelijke manier IL-modellen maken: we voorzien een frame van een valuatie. Deze valuatie definieert $\Vdash$.

Het begrip IL-bisimulatie werd geïntroduceerd door Visser (Zie zijn 'Preliminary notes on interpretability logic' via Berarducci [2]). Een IL-bisimulatie is niet geheel verschillend van een gewone bisimulatie. Het is in feite een uitbreiding van het traditionele begrip met extra eisen voor de extra's van onze nieuwe modellen. De bekende 'heen en weer' eisen van een gewone bisimulatie zijn hierin ook weer aanwezig.

Een vereniging van klassieke bisimulaties is weer een bisimulatie. Nu zullen we werken met een nieuwe bisimulaties. Het is dan niet duidelijk of de vereniging daarvan ook weer een bisimulatie zal zijn. Dit blijkt echter eenvoudig te bewijzen.

Ik startte dit project met de onjuiste verwachting dat een vereniging van IL-bisimulaties niet in het algemeen weer een bisimulatie is. IL-bisimulaties en klassieke bisimulaties verschillen echter op een ander punt. Als een klassieke bisimulatie een equivalentierelatie is, dan kunnen we de punten van een model uitdelen naar deze relatie. Dit levert ons een gereduceerd model. Zoals al eerder is opgemerkt is dit voor IL-bisimulaties niet het geval.

Onze IL-modellen zullen voor ieder punt w in het model een relatie S_w hebben. Met behulp van de bisimulatie is het aan te tonen dat de relaties S_w in ILM-modellen zijn te vatten in één relatie S.
Een andere toepassing van IL-bisimulaties vinden we bij interpolatie. We zijn dan geïnteresseerd of bij twee willekeurige formules ϕ en ψ met $\Vdash \phi \to \psi$ er een formule η met uitsluitend de propositieletters van ϕ en ψ bestaat waarvoor $\Vdash \phi \to \eta$ en $\Vdash \eta \to \psi$ gelden. Zo'n formule η is een interpolant. IL-bisimulaties kun je gebruiken om te proberen aan te tonen dat een interpolant niet bestaat. In Areces et al [4] bijvoorbeeld wordt met behulp van deze bisimulatie aangetoond dat ILW, een uitbreiding van IL, geen interpolatie toelaat. Dit in tegenstelling tot IL zelf. Voor ILM, een andere uitbreiding van IL, is hetzelfde gedaan door Ignatiev, zie Visser [3].
We zullen in dit stuk verder niet ingaan op deze toepassingen.

Ik wil tot slot graag Prof. de Jongh danken voor de begeleiding van dit poject. Mijn dank gaat verder uit naar Evan Goris voor het geven van een aantal suggesties en het maken van correcties.

2 De logica IL

Definitie 1. Een *normale modale logica* Λ is een verzameling modale formules die alle *propositionele tautologieën* en de axioma's $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ en $\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$ bevat en gesloten is onder *modus ponens*, *generalisatie* en *uniforme substitutie* van propositieletters.

De kleinste normale modale logica wordt aangeduid met K. Door aan K extra axioma's toe te voegen ontstaan andere normale modale logica's. We spreken kortweg over logica's. Een voorbeeld is GL.

Definitie 2. De logica GL onstaat door aan K het volgende axioma toe te voegen

$$\Box(\Box p \to p) \to \Box p. \tag{1}$$

De logica IL onstaat door daarnaast ook onderstaande axioma's toe te voegen. Deze axioma's bevatten een nieuwe modale operator $\rhd$.

$$\Box(p \to q) \to (p \rhd q) \tag{2}$$
$$(p \rhd q) \wedge (q \rhd r) \to (p \rhd r) \tag{3}$$
$$(p \rhd r) \wedge (q \rhd r) \to (p \vee q \rhd r) \tag{4}$$
$$(p \rhd q) \to (\Diamond p \to \Diamond q) \tag{5}$$
$$\Diamond p \rhd p \tag{6}$$

Na de syntactische opmerkingen in deze paragraaf zullen we in de rest van dit artikel uitsluitend semantisch werken. Echter eerst nog de volgende opmerking.

Er geldt dat $\vdash_{IL} \Diamond\phi \leftrightarrow \neg(\phi \rhd \bot)$. Dat wil zeggen, $\Diamond\phi$ en $\neg(\phi \rhd \bot)$ zijn IL-equivalent. We zullen zien dat we $\Diamond$ niet nodig hebben als operator: we kunnen hem opvatten als afkorting.

3 IL-frames

We beginnen met het definiëren van frames.

Definitie 3. Een *IL-frame* is een tuple $F = (W, R, S)$ waarvoor geldt:

- W is een niet-lege verzamenling,
- R is een tweeplaatsige transitieve en convers welgefundeerde relatie op W (dwz er zijn geen oneindige paden $w_0 R w_1 R w_2 R \ldots$),
- $S = \{S_w : w \in W\}$ met, voor iedere $w \in W$, S_w een tweeplaatsige transitieve en reflexieve relatie op $w\uparrow := \{u \in W : wRu\}$ zodat voor alle $u, v \in w\uparrow$ geldt $uRv \Rightarrow uS_wv$.

Een *model* voor een IL-frame is op de gebruikelijke manier gedefinieerd. Voor $\Vdash$ geldt hetzelfde, we moeten echter nog de volgende definitie toevoegen:

$$w \Vdash p \rhd q \Leftrightarrow w \Vdash \forall u((wRu \;\&\; u \Vdash p) \Rightarrow \exists v(uS_wv \;\&\; v \Vdash q)).$$

Opmerking. De operator $\rhd$ is universeel-extentieel. Dit is dus *niet* een 'gewone' tweeplaatsige modale operator zoals gedefineerd in Blackburn et al [1].

Propositie 4. De axioma's die IL definiëren zijn geldig op IL-frames. Dat wil zeggen, als F een IL-frames is, dan geldt:

1. $F \Vdash \Box(p \to q) \to (p \rhd q)$,
2. $F \Vdash (p \rhd q) \wedge (q \rhd r) \to (p \rhd r)$,
3. $F \Vdash (p \rhd r) \wedge (q \rhd r) \to (p \vee q \rhd r)$,
4. $F \Vdash (p \rhd q) \to (\Diamond p \to \Diamond q)$,
5. $F \Vdash \Diamond p \rhd p$.

Bewijs. Zij F een IL-frame. Stel M is een model gebaseerd op F en stel $w \in W$.

1. Aan te tonen: $M, w \Vdash \Box(p \to q) \to (p \rhd q)$. Stel $w \Vdash \Box(p \to q)$. Dus voor alle $u \in W$ met wRu geldt: als $u \Vdash p$ dan $u \Vdash q$. Stel nu $u \in W$ met wRu en $u \Vdash p$. Dan moeten we aantonen dat er een $v \in W$ is met uS_wv en $v \Vdash q$. Neem $v = u$. Het is duidelijk dat $u \Vdash q$ geldt. Bovendien is uS_wu, want $u \in w\uparrow$ en S_w is reflexief.

2. Aan te tonen: $M, w \Vdash (p \rhd q) \wedge (q \rhd r) \to (p \rhd r)$. Stel $w \Vdash p \rhd q$ en $w \Vdash q \rhd r$. Dan geldt dus dat

$$\forall u \in W \text{ met } wRu \text{ en } u \Vdash p, \exists v \in W \text{ met } uS_wv \text{ en } v \Vdash q,$$
$$\forall v \in W \text{ met } wRv \text{ en } v \Vdash q, \exists x \in W \text{ met } vS_wx \text{ en } x \Vdash r.$$

   Zij nu $u \in W$ met wRu en $u \Vdash p$. We moeten aantonen dat er een $x \in W$ is met uS_wx en $x \Vdash r$. Dan volgt immers $w \Vdash (p \rhd r)$. De eerste regel geeft een punt $v \in W$ met uS_wv en $v \Vdash q$. Er geldt uS_wv, dus blijkbaar wRv. Uit de tweede regel volgt nu het bestaan van een $x \in W$ met $x \Vdash r$ en vS_wx. Uit de transitiviteit van S_w volgt uS_wx, zoals gewenst.

3. Aan te tonen: $M, w \Vdash (p \rhd r) \wedge (q \rhd r) \to (p \vee q \rhd r)$. Stel $M, w \Vdash p \rhd r$ en $M, w \Vdash q \rhd r$. Dan geldt dus dat

$$\forall u \in W \text{ met } wRu \text{ en } u \Vdash p, \exists v \in W \text{ met } uS_wv \text{ en } v \Vdash r,$$
$$\forall u \in W \text{ met } wRu \text{ en } u \Vdash q, \exists v \in W \text{ met } uS_wv \text{ en } v \Vdash r.$$

   Zij nu $u \in W$ met wRu en $u \Vdash p \vee q$. Dus $u \Vdash p$ of $u \Vdash q$. Dan volgt met respectievelijk de eerste of tweede regel dat er een $v \in W$ is met uS_wv en $v \Vdash r$. Dus $w \Vdash p \vee q \rhd r$. Dit bewijst de implicatie.

4. Aan te tonen: $M, w \Vdash (p \rhd q) \to (\Diamond p \to \Diamond q)$. Stel $w \Vdash p \rhd q$, dwz voor iedere $u \in W$ met wRu en $u \Vdash p$ is er een $v \in W$ met uS_wv en $v \Vdash q$. Stel vervolgens $w \Vdash \Diamond p$, dwz er is een $x \in W$ met wRx en $x \Vdash p$. We moeten nu aantonen dat er een $y \in W$ is met wRy en $y \Vdash q$. Pas daartoe de eerste conclusie toe met $u = x$. Hieruit volgt het bestaan van een $y \in W$ met $y \Vdash q$ en xS_wy. Er geldt dus wRy, want $y \in w\uparrow$.

5. Aan te tonen: $M, w \Vdash \Diamond p \rhd p$. Stel $u \in W$ met wRu en $u \Vdash \Diamond p$. Uit $u \Vdash \Diamond p$ volgt dat er een $v \in W$ is met $v \Vdash p$ en uRv. Uit wRu en uRv volgt met transitiviteit van R dat wRv. Dan zijn dus $u, v \in w\uparrow$. Uit uRv en de definitie van S_w volgt uS_wv.

QED

Opmerking. We weten dat de axioma's van K, genoemd in definitie 1, geldig zijn op alle frames $F = (W, R)$. Hetzelfde geldt uiteraard voor tautologieën. Het eerste axioma (Löb) is geldig op alle frames $F = (W, R)$ met R transitief en convers welgefundeerd. Verder weten we dat de regels modus ponens en generalisatie geldigheid behouden. Zie [1].
Uit bovenstaande propositie volgt dan dat IL *correct* (*sound*) is met betrekking tot de IL-frames $F = (W, R, S)$.

Opmerking. Uit bovenstaande volgt met de laatste opmerking in paragraaf 2 dat $\Vdash \Diamond\phi \leftrightarrow \neg(\phi \rhd \bot)$. Dus we kunnen $\Diamond\phi$ zien als afkorting van $\neg(\phi \rhd \bot)$. Hiermee kunnen we bewijzen met inductie naar de lengte van een IL-formule korter maken: we kunnen het geval met een $\Diamond$ weg laten. Ik heb dat echter niet gedaan voor de duidelijkheid.

4 Bisimulaties tussen IL-modellen

Een bisimulatie is een bekend begrip. We definiëren nu een nieuwe bisimulatie tussen onze nieuwe IL-modellen. Let goed op de nieuwe voorwaarden voor de relaties S_w.

Definitie 5. Een *bisimulatie* tussen twee IL-modellen $M = (F, V)$ en $M' = (F', V')$ is een niet-lege relatie $Z \subseteq W \times W'$ die voldoet aan:

(atomair) als wZw', dan geldt ($w \in V(p)$ desda $w' \in V'(p)$), voor iedere propositieletter p,

(forth) als wZw' en wRv, dan is er een v' waarvoor geldt: vZv', $w'R'v'$ en voor alle u' met $v'S'_{w'}u'$ is er een u met uZu' en vS_wu,

(back) als wZw' en $w'R'v'$, dan is er een v waarvoor geldt: vZv', wRv en voor alle u met vS_wu is er een u' met uZu' en $v'S'_{w'}u'$.

Als er een bisimulatie Z tussen M en M' is, dan noteren we $M \leftrightarroweq M'$. Als wZw', voor een bisimulatie Z tussen M en M', dan noteren we $M, w \leftrightarroweq M', w'$.

We zullen nu zien dat de vereniging van bisimulaties weer een bisimulatie is. Zoals gezegd in de inleiding lag de deze stelling aan de bais van dit project. Het bewijs is echter heel eenvoudig.

Stelling 6. De vereniging van bisimulaties is weer een bisimulatie.

Bewijs. Laat $\{Z_i : i \in I\}$ een verzameling bisimulaties zijn tussen twee IL-modellen M en M'. We tonen aan dat dan ook $Z := \bigcup_i Z_i$ een bisimulatie is tussen M en M'.

(atomair) Zij $w \in W$ en $w' \in W'$ met wZw'. Dan bestaat er een $i \in I$ zdd wZ_iw'. Dus w en w' maken dezelfde propositieletters waar.

(forth) Stel wZw' en wRv. We tonen aan dat er een v' bestaat met $vZv', w'R'v'$ en $\forall u'(v'S'_w u' \Rightarrow \exists u(vS_w u \ \& \ uZu'))$. Omdat wZw', dus wZ_iw' voor een zekere $i \in I$. Omdat Z_i een bisimulatie is, volgt uit wRv en (forth) dat er een v' bestaat met $vZ_iv', w'R'v'$ en $\forall u'(v'S'_w u' \Rightarrow \exists u(vS_w u \ \& \ uZ_iu'))$. Uit vZ_iv' en uZ_iu' volgen respectievelijk vZv' en uZu', dus we zijn klaar.

(back) Dit wordt op dezelfde manier bewezen als (forth).

QED

Gevolg 7. Er bestaat een maximale bisimulatie tussen IL-modellen M en M', namelijk de vereniging van alle bisimulaties tussen M en M'.

5 De Hennessey-Milner stelling

Stelling 8. Laten M en M' twee IL-modellen zijn en Z een bisimulatie tussen M en M'. Dan geldt voor iedere IL-formule ϕ :

$$wZw' \Rightarrow (M, w \Vdash \phi \text{ desda } M', w' \Vdash \phi).$$

Bewijs. We bewijzen deze propositie met inductie naar (de lengte van) ϕ. Stel wZw'. Als ϕ een atomaire formule is, onderscheiden we de twee gevallen $\phi = \bot$ en $\phi = p$, voor een propositieletter p. Er geldt $M, w \nVdash \bot$ en $M', w' \nVdash \bot$ en dus

$$M, w \Vdash \bot \Leftrightarrow M', w' \Vdash \bot.$$

Voor het geval $\phi = p$ geldt, wegens (atomair) van definitie 5,

$$M, w \Vdash p \Leftrightarrow w \in V(p) \overset{\text{atomair}}{\Longleftrightarrow} w' \in V'(p) \Leftrightarrow M', w' \Vdash p.$$

Stel nu dat de propositie waar is voor alle IL-formules ψ met lengte$(\psi) <$ lengte(ϕ). We moeten aantonen: $M, w \Vdash \phi \Leftrightarrow M', w' \Vdash \phi$. Als ϕ een Boolese formule is, onderscheiden we de gevallen $\phi = \neg\psi$ en $\phi = \psi \wedge \eta$, voor een zekere formules ψ en η. Wegens de inductiehypothese geldt:

$$M, w \Vdash \neg\psi \Leftrightarrow M, w \nVdash \psi \overset{\text{IH}}{\Longleftrightarrow} M', w' \nVdash \psi \Leftrightarrow M', w' \Vdash \neg\psi,$$

$$M, w \Vdash \psi \wedge \eta \Leftrightarrow \begin{cases} M, w \Vdash \psi \\ M, w \Vdash \eta \end{cases} \overset{\text{IH}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} M', w' \Vdash \psi \\ M', w' \Vdash \eta \end{cases} \Leftrightarrow M', w' \Vdash \psi \wedge \eta.$$

Tot slot het geval dat ϕ een modale formule is. We onderscheiden nu $\phi = \Diamond\psi$ en $\phi = \psi \rhd \eta$. We beginnen met $\phi = \Diamond\psi$.

Stel $M, w \Vdash \Diamond\psi$. Dan bestaat er een $v \in W$ met wRv en $M, v \Vdash \psi$. Uit (forth) volgt dat er een $v' \in W'$ is met $w'Rv'$ en vZv'. Uit $M, v \Vdash \psi$ en vZv' volgt met de inductiehypothese $M', v' \Vdash \psi$. Dus $M', w' \Vdash \Diamond\psi$.
De omgekeerde bewering wordt op dezelde manier mbv (back) bewezen.

Stel nu $\phi = \psi \rhd \eta$. Neem aan $M, w \Vdash \psi \rhd \eta$. Om aan te tonen dat $M', w' \Vdash \psi \rhd \eta$, bekijken we $u' \in W'$ met $w'R'u'$ en $M', u' \Vdash \psi$. We tonen dan aan dat er een $v' \in W'$ bestaat met $u'S_{w'}v'$ en $M', v' \Vdash \eta$. Welnu, wegens (back) is er een $u \in W$ met wRu en uZu'. Met de inductiehypothese volgt uit uZu' en $M', u' \Vdash \psi$ dat $M, u \Vdash \psi$. Dus voor u geldt wRu en $M, u \Vdash \psi$. Nu zegt $M, w \Vdash \psi \rhd \eta$ dat er een $v \in W$ bestaat met uS_wv en $M, v \Vdash \eta$. Uit uS_wv en de tweede eis van (back) volgt nu het bestaan van een $v' \in W'$ met $u'S_{w'}v'$ en vZv'. Uit vZv' en $M, v \Vdash \eta$ volgt met de inductiehypothese $M', v' \Vdash \eta$. Hiermee is $M, w \Vdash \psi \rhd \eta \Rightarrow M', w' \Vdash \psi \rhd \eta$ bewezen.
De implicatie de andere kant op wordt op dezelfde manier bewezen, maar nu met behulp van (forth) in plaats van (back).

QED

In stelling 8 hebben we gezien dat twee punten w en w' in twee modellen M en M' precies dezelfde formules waar maken als er een bisimulatie bestaat tussen deze twee punten.
De volgende stelling die we zullen formuleren is een uitbreiding van de stelling van Hennessey-Milner. De stelling doet een uitspraak over de omkering van stelling 8. Eerst definiëren we het begrip *theorie*.

Definitie 9. Als M een IL-model is en $w \in W$, dan noemen we $\{\phi : M, w \Vdash \phi\}$ de *theorie* van het punt w. Als twee punten w en w' in twee IL-modellen M en M' dezelfde theoriën hebben, dan noteren we $w \leftrightsquigarrow w'$.

In de stelling zullen we verder eisen dat de modellen *image-finite* zijn. Dit begrip definiëren we nu.

Definitie 10. Een IL-model M heet *image-finite* als voor iedere $u \in W$ geldt dat $\{v \in W : uRv\}$ eindig is.

Als M image-finite is, dan is dus voor iedere w de verzameling $w \uparrow$ eindig. Hieruit volgt dat ook $\{v \in W : uS_wv\}$ eindig is, voor iedere $u, w \in W$.

Stelling 11. (Hennessey-Milner voor IL-modellen) Laat M en M' twee image-finite IL-modellen zijn. Dan geldt voor alle $w \in W$ en $w' \in W'$:

$$w \leftrightarrows w' \Leftrightarrow \forall \phi (M, w \Vdash \phi \text{ desda } M', w' \Vdash \phi).$$

Oftewel, $w \leftrightarrows w'$ dan en slechts dan als $w \leftrightsquigarrow w'$.

Bewijs. De uitspraak $\Rightarrow$ volgt uit stelling 8. Voor de implicatie $\Leftarrow$ gaan we na dat

$$Z = \{(w, w') : w \leftrightsquigarrow w'\} \subseteq W \times W'$$

een bisimulatie tussen M en M' definieert.

(atomair) Als wZw', dan maken w en w' duidelijk dezelfde propositieletters waar. Immers, de theoriën van w en w' zijn gelijk.

(forth) Stel wZw' en wRv. We tonen eerst aan dat er een $v' \in W'$ bestaat met vZv' en $w'R'v'$.

Laat $N' = \{v' \in W' : w'R'v'\}$, de verzameling van buren van w'. Deze verzameling is niet leeg. Want als $N' = \emptyset$, dan heeft w' geen R-opvolgers en dus is er (op een flauwe manier) voldaan aan $M', w' \Vdash \Box\bot$. Uit $w \leftrightsquigarrow w'$ volgt dan $M, w \Vdash \Box\bot$. Er geldt wRv, en dus $M, v \Vdash \bot$. Dit is onzin, dus $N \neq \emptyset$. Omdat M' image-finite is, vinden we verder dat N' eindig is. Zeg $N' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$.

Neem nu om een tegenspraak af te leiden aan dat er geen v' bestaat met vZv' en $w'R'v'$. Dan geldt dus $v \not\leftrightsquigarrow v'_i$, voor alle $1 \leq i \leq n$. Dus voor alle $1 \leq i \leq n$ bestaat er een IL-formule ψ_i zdd $M, v \Vdash \psi_i$, terwijl $M', v'_i \nVdash \psi_i$. Dus $M, v \Vdash \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n$ en $M', v_i \nVdash \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n$, voor alle $1 \leq i \leq n$. Hieruit volgt $M, w \Vdash \Diamond(\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$ en $M', w' \nVdash \Diamond(\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$. Dit is in tegenspraak met $w \leftrightsquigarrow w'$. Dus er is inderdaad een $v' \in W'$ met vZv' en $w'R'v'$.

Wegens bovenstaande bestaat er een k met $1 \leq k \leq n$ zodanig dat er precies k elementen van N' bisimulair zijn met v. We mogen aannemen dat dit $v'_1, \ldots, v'_k$ zijn. Dus vZv'_i voor alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ en $\neg(vZv'_i)$ voor alle $i \in \{k+1, \ldots, n\}$. Uit $v \not\leftrightsquigarrow v'_i$ voor $i \in \{k+1, \ldots, n\}$ volgt dat er IL-formules $\eta_{k+1}, \ldots, \eta_n$ zijn zdd $v'_i \nVdash \eta_i$ en $v \Vdash \eta_i$ voor alle $i \in \{k+1, \ldots, n\}$. Dus $v \Vdash \eta_{k+1} \wedge \ldots \wedge \eta_n$ en $v'_i \nVdash \eta_{k+1} \wedge \ldots \wedge \eta_n$ voor alle $i \in \{k+1, \ldots, n\}$. Uit $v \leftrightsquigarrow v'_i$ voor alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ volgt dan $v'_i \Vdash \eta_{k+1} \wedge \ldots \wedge \eta_n$ voor alle $i \in \{1, \ldots, k\}$. Merk nu op dat voor iedere $v' \in W'$ met $w'R'v'$ en $v' \Vdash \eta_{k+1} \wedge \ldots \wedge \eta_n$ geldt vZv', want $v' = v'_i$ voor een zekere $i \in \{1, \ldots, k\}$.

We kunnen nu bewijzen dat er een $v' \in W'$ bestaat waarvoor geldt: vZv', $w'R'v'$ en voor iedere u' met $v'S'_{w'}u'$ is er een u met uZu' en vS_wu.

Stel om een tegenspraak af te leiden dat zo'n punt niet bestaat. Wegens bovenstaande bestaat er minstens één v' met vZv' en $w'R'v'$. We mogen aannemen dat $v'_1, \ldots, v'_l$ (met $1 \leq l \leq n$) de enige punten uit N' zijn die hieraan voldoen. Er geldt voor zo'n v'_j ($1 \leq j \leq l$) met vZv'_j en $w'R'v'_j$ dat er een u'_j met $v'_jS'_{w'}u'_j$ bestaat zdd voor alle u met vS_wu *niet* geldt uZu'_j $(*)$.

Bekijk $N = \{x \in W : vS_wx\}$. $N \neq \emptyset$, want $v \in N$, want S_w is reflexief. N is eindig, want M is image-finite. Zeg $N = \{x_1, \ldots, x_m\}$.

Er geldt $x_i \not\leftrightsquigarrow u'_j$ voor iedere $i \in \{1, \ldots, m\}$, wegens de aanname $(*)$. Voor iedere $i \in \{1, \ldots, m\}$ bestaat er dus een IL-formule ϕ^j_i zdd $u'_j \Vdash \phi^j_i$, maar $x_i \nVdash \phi^j_i$. Dus $u'_j \Vdash \phi^j_1 \wedge \ldots \wedge \phi^j_m$ en $x \nVdash \phi^j_1 \wedge \ldots \wedge \phi^j_m$ voor iedere $x \in W$ met vS_wx. Schrijf nu, voor iedere $j \in \{1, \ldots, l\}$, kortweg ϕ^j in plaats van $\phi^j_1 \wedge \ldots \wedge \phi^j_m$.

Er geldt dus

$$\exists v \in W(wRv \;\&\; v \Vdash \eta_{k+1} \wedge \ldots \wedge \eta_n \;\&\; \neg\exists x \in W(vS_wx \;\&\; x \Vdash \phi^1 \vee \ldots \vee \phi^l)),$$

$\forall v' \in W(w'R'v' \,\&\, v \Vdash \eta_{k+1}\wedge\ldots\wedge\eta_n \Rightarrow \exists u' \in W'(v'S'_{w'}u' \,\&\, u' \Vdash \phi^1\vee\ldots\vee\phi^l))$.

Dus

$$M, w \nVdash (\eta_{k+1} \wedge \ldots \wedge \eta_n) \rhd (\phi^1 \vee \ldots \vee \phi^l)$$

en

$$M', w' \Vdash (\eta_{k+1} \wedge \ldots \wedge \eta_n) \rhd (\phi^1 \vee \ldots \vee \phi^l).$$

Dit is in tegenspraak met de aanname wZw'.

(back) Het bewijs van deze eis verloopt op dezelfde manier als van (forth).

QED

Gevolg 12. De relatie $\leftrightsquigarrow$ definieert een bisimulatie tussen image-finite IL-modellen M en M' en deze bisimulatie bevat iedere bisimulatie tussen M en M'.

Bewijs. De eerste bewering is bewezen in het bewijs hierboven. Als Z een bisimulatie is tussen M en M', dan zegt stelling 8 dat $wZw' \Rightarrow w \leftrightsquigarrow w'$, dwz $Z \subseteq \leftrightsquigarrow$.

QED

Gevolg 13. Als M en M' image-finite zijn, dan is de bisimulatie $\leftrightsquigarrow$ gelijk aan de maximale bisimulatie, zie gevolg 7.

6 Vier speciale bisimulaties

In Blackburn et al [1] worden voordat de bisimulatie wordt ingevoerd eerst vier begrippen gedefinieerd. Het zijn in feite vier ideeën om uit een of meerdere modellen een nieuw model te maken. We hebben het over disjuncte verenigingen, begrensde morfismen, gegenereerde submodellen en isomorfismen. We weten dat deze in het klassieke geval alle weer een bisimulatie opleveren.

Wij hebben al een bisimulatie gedefinieerd en komen deze begrippen pas hier tegen. Het was uiteraard niet nodig om met deze begrippen het begrip bisimulatie in te leiden. Het is de moeite waard om deze begrippen te formuleren voor IL-modellen. We kunnen bovendien ook weer bewijzen dat ze bisimulaties definiëren. In het hoofdstuk over gereduceerde modellen komen we de begrensde morfismen trouwens ook nog een keer tegen.

Definitie 14. We definiëren de volgende vier begrippen.

- Als $M_i = (W_i, R_i, S_i, V_i)$ $(i \in I)$ disjuncte IL-modellen zijn, dan definiëren we de *disjuncte vereninging* als het IL-model $\biguplus_i M_i = (W, R, S, V)$, waarbij $W = \bigcup_{i\in I} W_i$, $R = \bigcup_{i\in I} R_i$, $S = \bigcup_{i\in I} S_i$ en $V(p) = \bigcup_{i\in I} V_i(p)$, voor alle propositieletters p.

Stel $M = (W, R, S, V)$ en $M' = (W', R', S', V')$ zijn twee IL-modellen.

- M' heet een submodel van M als $W' \subseteq W, R' = R \cap (W' \times W'), S' = \{S'_{w'} : w' \in W'\}$, met $S'_{w'} = S_{w'} \cap (W' \times W')$, voor iedere $w' \in W'$, en $V'(p) = V(p) \cap W'$, voor iedere propositieletter p. We noemen M' nu een *gegenereerd submodel* van M (notatie: $M' \rightarrowtail M$) als M' een submodel is van M en als voor iedere $u, v \in W$ geldt: als $u \in W'$ en uRv, dan $v \in W'$.
- M en M' heten *isomorf* (notatie: $M \cong M'$) als er een bijectie $f : W \to W'$ bestaat die voldoet aan:
  - $\forall w \in W(w \in V(p) \Leftrightarrow f(w) \in V'(p))$, voor iedere propositieletter p,
  - $\forall u, v \in W(uRv \Leftrightarrow f(u)R'f(v))$,
  - $\forall u, v, w \in W(uS_wv \Leftrightarrow f(u)S'_{f(w)}f(v))$.
- Een afbeelding $f : W \to W'$ heet een *begrensd morfisme* als hij voldoet aan:
  - $\forall w \in W(w \in V(p) \Leftrightarrow f(w) \in V'(p))$, voor iedere propositieletter p,
  - $\forall u, v \in W(uRv \Rightarrow f(u)R'f(v))$,
  - $\forall u, v, w \in W(uS_wv \Rightarrow f(u)S'_{f(w)}f(v))$,
  - $\forall u \in W, \forall v' \in W'(f(u)R'v' \Rightarrow \exists v \in W(uRv \ \& \ f(v) = v'))$,
  - $\forall u, w \in W, \forall v' \in W'(f(u)S'_{f(w)}v' \Rightarrow \exists v \in W(uS_wv \ \& \ f(v) = v'))$.

  Als f een surjectief begrensd morfisme is, noteren we $f : M \twoheadrightarrow M'$.

Propositie 15. Laat M, M' en M_i $(i \in I)$ IL-modellen zijn. Er geldt:

1. $\forall i \in I, \forall w \in W_i$ geldt $M_i, w \leftrightarrows \biguplus_i M_i, w$,
2. als $M' \rightarrowtail M$, dan geldt voor alle $w \in W'$ dat $M, w \leftrightarrows M', w$,
3. als $M \cong M'$, dan $M \leftrightarrows M'$,
4. als $f : M \twoheadrightarrow M'$, dan geldt voor alle $w \in W$ dat $M, w \leftrightarrows M', f(w)$.

Bewijs. In alle gevallen definiëren we een relatie Z. Vervolgens bewijzen we dat Z een bisimulatie is door de eisen van definitie 5 na te gaan.

1. Aan te tonen: $M_i, w \leftrightarrows \biguplus_i M_i, w$, voor $w \in W_i$. Definieer

$$Z = \{(w, w) : w \in W_i\} \subseteq W_i \times W.$$

   Z is een bisimulatie tussen M_i en $\biguplus_i M_i$.

   (atomair) Als wZw' dan $w' = w \in W_i$. Voor een propositieletter p geldt $w \in V_i(p) \Leftrightarrow w' \in V(p)$. Dit is duidelijk, omdat $V(p)$ de vereninging is van de $V_i(p)$ met $i \in I$.

   (forth) Stel wZw' en wRv. Dus $w' = w \in W_i$. Voor $v' := v \in W_i$ geldt vZv' en $w'R'v'$. Stel voor $u' \in W$ geldt $v'S'_{w'}u'$. Dus $u' \in W_i$, want $v' \in W_i$. Voor $u := u'$ geldt uZu' en vS_wu.

(back) Dit wordt op dezelfde manier als (forth) bewezen.

2. Stel $M' \rightarrowtail M$. Aan te tonen: $M, w \leftrightarroweq M', w$, voor $w \in W'$. Definieer

$$Z = \{(w, w) : w \in W'\} \subseteq W \times W'.$$

Z is een bisimulatie tussen M' en M.

(atomair) Stel wZw'. Dan is $w = w' \in W'$. Voor een propositieletter p geldt $w \in V(p) \Leftrightarrow w' \in V'(p)$, want $w = w'$ en $V'(p) = V(p) \cap W'$.

(forth) Stel wZw' en wRv. Dan is $w = w' \in W'$ en, wegens de definitie van gegenereerd submodel, $v \in W'$. Bekijk $v' := v \in W'$. Er geldt dus vZv'. Verder $w'R'v'$, wegens de definitie van R'. Stel voor $u' \in W'$ geldt $v'S'_{w'}u'$. Bekijk $u := u'$. Er geldt uZu' en, wegens de definitie van S', vS_wu.

(back) Stel wZw' en $w'R'v'$. Dan is $w = w' \in W'$ en $v' \in W'$. Bekijk $v := v' \in W$. Er geldt dus vZv'. Verder is $w'R'v'$ duidelijk wegens de definitie van R'. Stel voor $u \in W$ geldt vS_wu. Dus $u \in w \uparrow$, dwz wRu. Omdat $w \in W'$ volgt uit de definitie dat $u \in W'$. Bekijk $u' := u \in W'$. Er geldt uZu' en, wegens de definitie van S', $v'S'_{w'}u'$.

3. Stel $M \cong M'$. Aan te tonen: $M \leftrightarroweq M'$. Laat $f : W \to W'$ het isomorfisme zijn. Definieer

$$Z = \{(w, f(w)) : w \in W\} \subseteq W \times W'.$$

Z is een bisimulatie tussen M en M'.

(atomair) Als wZw', dan $w' = f(w)$. Voor iedere propositieletter p geldt $w \in V(p) \Leftrightarrow f(w) \in V'(p)$, wegens het eerste onderdeel van de definitie van isomorfisme.

(forth) Stel wZw' en wRv. Dan $w' = f(w)$. Bekijk $v' := f(v)$. Er geldt vZv' en $w'R'v'$, het laatste wegens het tweede onderdeel van de definitie. Stel voor $u' \in W'$ geldt $v'S'_{w'}u'$. Bekijk $u := f^{-1}(u') \in W$. Er geldt uZu' en, wegens het derde onderdeel van de definitie, vS_wu.

(back) Dit wordt op dezelfde manier als (forth) bewezen.

4. Stel $f : M \twoheadrightarrow M'$. Aan te tonen: $M, w \leftrightarroweq M', f(w)$. Definieer

$$Z = \{(w, f(w)) : w \in W\} \subseteq W \times W'.$$

Z is een bisimulatie tussen M en M'.

(atomair) Stel wZw', dan $w' = f(w)$. Er geldt, voor een propositieletter p, $w \in V(p) \Leftrightarrow f(w) \in V'(p)$, wegens de eerste eis van de definitie van begrensd morfisme.

(forth) Stel wZw' en wRv. Dan $w' = f(w)$. Bekijk $v' := f(v)$. Dan geldt vZv' en, wegens de tweede eis van de definitie, $w'R'v'$. Stel nu dat voor $u' \in W'$ geldt $v'S_{w'}u'$. Met de vijfde eis van de definitie volgt dat er een $u \in W$ bestaat met vS_wu en $f(u) = u'$. Uit het laatste volgt uZu'.

(back) Stel wZw' en $w'R'v'$. Dan $w' = f(w)$. De vierde eis van de definitie zegt dat er een $v \in W$ bestaat met wRv en $f(v) = v'$. Dus er geldt vZv'. Stel nu dat voor $u \in W$ geldt $vS_w u$. Als $u' := f(u)$, dan volgt met de derde eis van de definitie $v'S'_{w'}u'$.

QED

7 Gereduceerde modellen

7.1 Klassieke modellen

We werken nu weer even met klassieke modellen $M = (W, R, V)$ en bisimulaties.

Reflexieve-symmetrische-transitieve afsluiting

Lemma 16. Laten M een model en Z een bisimulatie tussen M en M zijn. Dan zijn ook

1. $\{(w, w) : w \in W\}$,
2. $Z^{\smile} := \{(v, w) : (w, v) \in Z\}$ en
3. $Z^* := \{(v, w) : \exists u_0, \ldots, u_n(wZu_0Z \ldots Zu_nZw)\}$

bisimulaties tussen M en M.

Bewijs.

1. Zij $Z_1 := \{(w, w) : w \in W\}$. Als wZ_1w', dan $w = w'$, dus w en w' maken dezelfde propositieletters waar. Als wZ_1w' en wRv dan geldt voor $v' := v$ dat vZ_1v' en $w'R'v'$. Het bewijs van (back) is hetzelfde.
2. Triviaal.
3. (atomair) Stel wZ^*w'. Dan zijn er dus $v_0, \ldots, v_n$ zdd $wZv_0Z \ldots Zv_nZw'$. Z is een bisimulatie, dus $w \in V(p) \Leftrightarrow v_0 \in V(p) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow v_n \in V(p) \Leftrightarrow w' \in V(p)$, voor iedere propositieletter p.

   (forth) Stel wZ^*w' en wRv. Dan zijn er $v_0, \ldots, v_n$ met $wZv_0Z \ldots Zv_nZw'$. Uit wZv_0 en wRv volgt dat er een v'_0 bestaat met vZv'_0 en $v_0Rv'_0$. Uit v_0Zv_1 en $v_0Rv'_0$ volgt dat er een v'_1 bestaat met $v'_0Zv'_1$ en $v_1Zv'_1$. Zo doorgaand vinden we $v'_0, v'_1, \ldots, v'_n, v'$ met $vZv'_0Z \ldots Zv'_nZv'$ en $w'Rv'$. Uit het eerste volgt vZ^*v'.

   (back) Het bewijs verloopt op dezelfde manier als van (forth).

QED

Propositie 17. Laten M en Z als in lemma 16. Dan geldt dat

$$Z^+ := (Z \cup Z^{\smile} \cup \{(w, w) : w \in W\})^*$$

een reflexieve, symmetrische en transitieve bisimulatie tussen M en M is.

Bewijs. Uit lemma 16 en het feit dat een vereniging van bisimulaties weer een bisimulatie is volgt dat Z^+ een bisimulatie is. Omdat $Z \cup Z^{\smile} \cup \{(w,w) : w \in W\}$ bevat is in Z^+, is het duidelijk dat Z^+ reflexief is. Als vZ^+w, dan zijn er $u_0, \ldots, u_n$ zdd $vZ'u_0Z', \ldots, Z'u_nZ'w$, met $Z' := Z \cup Z^{\smile} \cup \{(w,w) : w \in W\}$. Omdat Z' symmetrisch is, vinden we nu dat ook Z^+ symmetrisch is. Tot slot is Z^+ transitief, want stel uZ^+v en vZ^+w. Dan zijn er dus $u_0, \ldots, u_n$ en $v_0, \ldots, v_m$ zdd $uZ'u_0Z' \ldots Z'u_nZ'v$ en $vZ'v_0Z' \ldots Z'v_mZ'w$. We kunnen deze ketens koppelen en dus geldt uZ^+w.

QED

Definitie 18. We noemen de bisimulatie Z^+ uit propositie 17 de *reflexieve-symmetrische-transitieve afsluiting* van Z.

Gereduceerd model

In de volgende stelling bekijken we een bisimulatie Z die reflexief, symmetrisch en transitief is. Als we een bisimulatie Z hebben, dan kunnen we altijd naar Z^+ kijken als we met een reflexieve, symmetrische en transitieve bisimulatie willen werken.
Eerst definiëren we het begrip *gereduceerd model.*

Definitie 19. Zij $M = (W, R, V)$ een model en Z een reflexieve, symmetrische en transitieve bisimulatie tussen M en M. We definiëren een nieuw model $M_Z = (W_Z, R_Z, V_Z)$.

Definieer de volgende relatie $\sim$ op $W : w \sim v \Leftrightarrow wZv$. Het is duidelijk dat $\sim$ een equivalentierelatie is omdat Z reflexief, symmetrisch en transitief is. Noteer de equivalentieklasse van een $w \in W$ met $\overline{w}$. Definieer nu $W_Z := \{\overline{w} : w \in W\}$ als de verzameling van equivalentieklassen. Definieer verder een relatie R_Z op W_Z als volgt: $\overline{x}R_Z\overline{y} \Leftrightarrow \exists w \in \overline{x}, \exists v \in \overline{y}$ zdd wRv. Met $w \in \overline{x}$ bedoelen we dat w een representant is van $\overline{x}$. Definieer tot slot V_Z door $\overline{x} \in V_Z(p) \Leftrightarrow \exists w \in \overline{x}$ zdd $w \in V(p)$, voor iedere propositieletter p.

Het model M_Z noemen we het *gereduceerde model* met betrekking tot Z.

Begrensd morfisme met gereduceerd model

Stelling 20. Laten M een model en Z een reflexieve, symmetrische en transitieve bisimulatie tussen M en M zijn. Laat verder M_Z het gereduceerde model van M met betrekking tot Z zijn. Dan is $f : W \to W_Z$, gegeven door $f(w) = \overline{w}$, een (klassiek) begrensd morfisme. Verder is f surjectief, dus $f : M \twoheadrightarrow M_Z$.

Bewijs. We controleren de eisen van de definitie.

- $w \in V(p) \Leftrightarrow \overline{w} \in V_Z(p)$, voor iedere propositieletter p.

  $\Rightarrow$: Dit is duidelijk uit de definitie van V_Z. $\Leftarrow$: Als $\overline{w} \in V_Z(p)$, dan bestaat er dus een $v \in W$ met vZw en $v \in V(p)$. Uit de definitie van bisimulatie volgt $w \in V(p)$.

- $uRv \Rightarrow \overline{u}R_Z\overline{v}$.

  Dit is duidelijk uit de definitie van R_Z.

- $\overline{u}R_Zv' \Rightarrow \exists v(uRv \;\&\; \overline{v} = v')$.

  Stel $\overline{u}R_Zv'$. Zeg $v' = \overline{z}$. Uit $\overline{u}R_Z\overline{z}$ volgt dat er $x, y \in W$ zijn met uZx, yZz en xRy. Uit de definitie van bisimulatie volgt dat er een $v \in W$ is met uRv en vZy. Uit het laatste volgt $\overline{v} = \overline{y} = \overline{z} = v'$.

Verder is f surjectief, want w is een origineel van $\overline{w}$.

QED

Als $f : M \twoheadrightarrow M$, dan weten we dat $\{(w, f(w)) : w \in W\}$ een bisimulatie is tussen M en M'. Dus uit de voorafgaande stelling volgt dat $\{(w, \overline{w}) : w \in W\}$ een bisimulatie is tussen M en zijn gereduceerde model M_Z.

7.2 IL-modellen

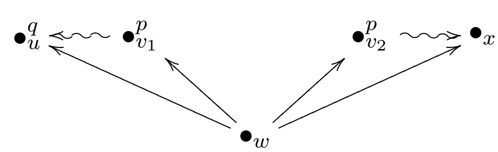
Geen gereduceerd model

We zullen nu laten zien dat we een dergelijk resultaat als bovenstaande niet hebben als we werken met IL-modellen.

Als we een *gereduceerd IL-model* willen definiëren, dan lijkt het voor de hand liggend dit als volgt te doen. We breiden definitie 19 uit met de definitie $S_Z := \{S_{\overline{w}} : w \in W\}$ met $\overline{y}S_{\overline{x}}\overline{z} \Leftrightarrow \exists u \in \overline{y}, \exists v \in \overline{z}, \exists w \in \overline{x}$ zdd uS_wv. Merk op dat we voor het gemak $S_{\overline{w}}$ noteren in plaats van $(S_Z)_{\overline{w}}$.

Bekijk nu het IL-model $M = (W, R, S, V)$ met

$$\begin{aligned} W &:= \{w, u, v_1, v_2, x\}, \\ R &:= \{(w,u), (w,v_1), (w,v_2), (w,x)\}, \\ S_w &:= \{(v_1,u), (v_2,x)\}, \\ V(p) &:= \{v_1, v_2\} \text{ en } V(q) := \{u\}. \end{aligned}$$



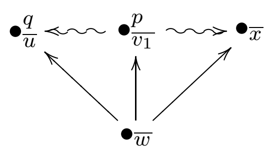
Figuur 1: Model M

Het is eenvoudig in te zien dat $Z := \{(v_1, v_2), (v_2, v_1)\} \cup \{(w, w) : w \in W\}$ een reflexieve, symmetrische en transitieve bisimulatie definieert tussen M en M. De twee punten v_1 en v_2 maken beide alleen de propositieletter p waar. Aan de eisen (back) en (forth) is op een vrij flauwe manier voldaan.

We kunnen nu het gereduceerde model M_Z van M met betrekking tot Z bekijken. De punten v_1 en v_2 worden geïdentificeerd en vormen samen één punt $\overline{v_1}$

in het nieuwe model. De overige punten van M vormen ieder een eigen klasse in M_Z. Dus $W_Z = \{\overline{w}, \overline{u}, \overline{v_1}, \overline{x}\}$. In het model M vertrekt vanuit w naar elk ander punt een R-lijn, dus in het nieuwe model vertrekt vanuit $\overline{w}$ naar elke andere klasse een R_Z-lijn. Dus $R_Z = \{(\overline{w}, \overline{u}), (\overline{w}, \overline{v_1}), (\overline{w}, \overline{x})\}$. Met het oog op bovenstaande definitie van S_Z is het eenvoudig in te zien dat $S_Z = \{S_w\}$, met $S_w = \{(\overline{v_1}, \overline{u}), (\overline{v_1}, \overline{x})\}$. Tot slot is V_Z gegeven door $V_Z(p) = \{\overline{v_1}\}$ en $V_Z(q) = \{\overline{u}\}$. Samenvattend, $M_Z = (W_Z, R_Z, S_Z, V_Z)$ met

$$\begin{aligned} W_Z &= \{\overline{w}, \overline{u}, \overline{v_1}, \overline{x}\}, \\ R_Z &= \{(\overline{w}, \overline{u}), (\overline{w}, \overline{v_1}), (\overline{w}, \overline{x})\}, \\ S_w &= \{(\overline{v_1}, \overline{u}), (\overline{v_1}, \overline{x})\}, \\ V_Z(p) &= \{\overline{v_1}\} \text{ en } V_Z(q) = \{\overline{u}\}. \end{aligned}$$



Figuur 2: Gereduceerd model M_Z

Bekijk nu de punten w en $\overline{w}$ in respectievelijk M en M_Z. Er geldt $M, w \nVdash p \rhd q$ en $M_Z, \overline{w} \Vdash p \rhd q$. Immers, in M_Z heeft iedere R_Z-opvolger van $\overline{w}$ waarin p waar is een $S_{\overline{w}}$-opvolger waarin q waar is. Echter, in M is v_2 een R-opvolger van w waarin p waar is, maar v_2 heeft geen S_w-opvolger waarin q waar is.

We kunnen dus geen begrensd morfisme of bisimulatie vinden die w in M en $\overline{w}$ in M_Z koppelt. Want als dat wél zo is, dan maken w en $\overline{w}$ dezelfde IL-formules waar. Zie stelling 8. We hebben echter zojuist laten zien dat w en $\overline{w}$ niet dezelfde IL-formules waarmaken, dus met contrapositie volgt onze bewering.

De conclusie is dat er geen analogon van stelling 20 is voor IL-modellen en bisimulaties.

Reflexieve-symmetrische-transitieve afsluiting

Ondanks bovenstaande resultaat is het interessant om de reflexieve-symmetrische-transitieve afsluiting van een IL-bisimulatie te bekijken.

Lemma 21. Laten M een IL-model en Z een bisimulatie tussen M en M zijn. Dan zijn ook

1. $\{(w, w) : w \in W\}$,
2. $Z^{\smile} := \{(v, w) : (w, v) \in Z\}$ en
3. $Z^* := \{(v, w) : \exists u_0, \ldots, u_n(wZu_0Z \ldots Zu_nZw)\}$

bisimulaties tussen M en M.

Bewijs.

1. Dit wordt op dezelfde wijze bewezen als onderdeel 1 van lemma 16: kies steeds $w = w', v = v'$ en $u = u'$ in definitie 5.

2. Triviaal.

3. (atomair) Dit is hetzelfde als in het geval van lemma 16.

   (forth) Stel wZ^*w' en wRv. Dan zijn er $v_0, \ldots, v_n$ zdd $wZv_0Z\ldots Zv_nZw'$. Uit wZv_0 en wRv volgt dat er een v_0' bestaat met vZv_0', v_0Rv_0' en $\forall u_0'(v_0'S_{v_0}u_0' \Rightarrow \exists u(uZu_0' \ \& \ vS_wu))$. Uit v_0Zv_1 en v_0Rv_0' volgt dat er een v_1' bestaat met $v_0'Zv_1', v_1Rv_1'$ en $\forall u_1'(v_1'S_{v_1}u_1 \Rightarrow \exists u_0'(u'Zu_1' \ \& \ v_0'S_{v_0}u_0'))$. Zo doorgaand vinden we $v_0', \ldots, v_n', v'$ met $vZv_0'Z\ldots Zv_n'Zv'$, $w'Rv'$ en, voor iedere $i \in \{1, \ldots, n\}$, v_iRv_i'. En voor iedere u' met $v'S_{w'}u'$ vinden we $u, u_0', \ldots, u_n'$ zdd $uZu_0'Z\ldots Zu_n'Zu'$ en vS_wu en $v_i'S_{v_i}u_i'$, voor iedere $i \in \{1, \ldots, n\}$. Conclusie: voor v' geldt $w'Rv', vZ^*v'$ en $\forall u'(v'S_{w'}u' \Rightarrow \exists u(uZ^*u' \ \& \ vS_wu))$.

   (back) Het bewijs verloopt op dezelfde manier als van (forth).

QED

Propositie 22. Laten M en Z als in lemma 21. Dan geldt dat

$$Z^+ := (Z \cup Z^{\smile} \cup \{(w, w) : w \in W\})^*$$

een reflexieve, symmetrische en transitieve bisimulatie tussen M en M is.

Het bewijs is hetzelfde als dat van propositie 17.

Definitie 23. We noemen de bisimulatie Z^+ de *reflexieve-symmetrische-transitieve afsluiting* van Z.

Sterke bisimulatie

We kunnen een nieuwe bisimulatie tussen IL-modellen definiëren: een *sterke* bisimulatie. Als we eisen dat de bisimulatie Z tussen M en M een sterke bisimulatie is én een equivalentierelatie, dan kunnen we wel een analogon van stelling 20 bewijzen. We hebben dan echter geen begrensd morfisme tussen M en M_Z, maar slechts een bisimulatie. We gebruiken de definitie van gereduceerd IL-model die al eerder is gegeven.

Definitie 24. Een *sterke bisimulatie* tussen twee IL-modellen M en M' is een niet-lege relatie $Z \subseteq W \times W'$ die voldoet aan:

(atomair) als wZw', dan geldt ($w \in V(p)$ desda $w' \in V'(p)$), voor iedere propositieletter p,

(forth1) als wZw' en wRv dan is er een v' met vZv' en $w'R'v'$.

(forth2) als $wZw', uZu', u'R'w'$ en wS_uv, dan is er een v' met vZv' en $w'S'_{u'}v'$.

(back1) als wZw' en $w'R'v'$, dan is er een v met vZv' en wRv.

(back2) als wZw', uZu', uRw en $w'S'_{u'}v'$, dan is er een v met vZv' en wS_uv.

Deze definitie is algemeen geformuleerd met twee modellen M en M'. We zullen deze echter gebruiken met $M = M'$.

Lemma 25. Een sterke bisimulatie Z is een bisimulatie (als in definitie 5).

Bewijs. De eis (atomair) is onveranderd. Stel wZw' en wRv. Bekijk een willekeurige v' met vZv' en $w'R'v'$. Stel voor u' geldt $v'S'_{w'}u'$. Wegens (back2) bestaat er een u met uZu' en vS_wu. Dus uit (forth1) en (back2) volgt dat Z ook voldoet aan (forth) in definitie 5. Uit (forth2) en (back1) volgt dat Z ook voldoet aan (back).

QED

Een sterke bisimulatie heeft inderdaad veel sterkere eisen dan een gewone bisimulatie tussen IL-modellen. Bekijk nogmaals het concrete IL-model met punten $\{u, v_1, v_2, x, w\}$ van eerder. Zie figuur 1. Het is eenvoudig in te zien dat de bisimulatie in dat IL-model géén sterke bisimulatie is.

Bisimulatie met gereduceerd model

Stelling 26. Laten M een IL-model en Y een sterke reflexieve, symmetrische en transitieve bisimulatie tussen M en M zijn. Laat verder M_Y het gereduceerde model van M met betrekking tot Y zijn. Dan is $Z := \{(w, \overline{w}) : w \in W\}$ een bisimulatie tussen M en M_Y.

Bewijs. We gaan de eisen van definitie 5 na.

(atomair) Stel wZw'. Dan is $w' = \overline{w}$. Als $w \in V(p)$, dan $\overline{w} \in V_Y(p)$. Omgekeerd, als $\overline{w} \in V_Y(p)$, dan is er een v met vYw en $v \in V(p)$. Hieruit volgt $w \in V(p)$, want Y is een bisimulatie. Dus w en w' maken dezelfde propositieletters waar.

(forth) Stel wZw' en wRv. Dan is $w' = \overline{w}$. Laat $v' := \overline{v}$. Uit wRv volgt dan $w'R_Zv'$. Bovendien geldt vZv'. We moeten alleen nog nagaan dat $\forall u'(v'S_{w'}u' \Rightarrow \exists u(uZu' \ \& \ vS_wu))$. Stel voor $u \in W_Z$ geldt $v'S_{w'}u'$. Dan geldt dus dat er $a, b, c \in W$ bestaan met $a \in v', b \in w', c \in u'$ en aS_bc. Dus we hebben aYv, bYw, wR_Zv en aS_bc. Y is een sterke bisimulatie, en dus volgt uit bovenstaande met (forth2) dat er een $u \in W$ is met cYu en vS_wu. Dus $u \in u'$, dus $\overline{u} = u'$, dus uZu'.

(back) Stel wZw' en $w'R_Yv'$. Dan is $w' = \overline{w}$ en $v' = \overline{x}$, voor een zekere $x \in W$. Uit $\overline{w}R_Y\overline{x}$ volgt dat er $a, b \in W$ bestaan met aYw, bYx en aRb. Omdat Y een bisimulatie is volgt uit wYa en aRb dat er een v bestaat met wRv en vYb. Dus $v \in v'$, dus $v' = \overline{v}$, dus vZv'. We moeten nog $\forall u(vS_wu \Rightarrow \exists u'(v'S_{w'}u' \ \& \ uZu'))$ nagaan. Stel $u \in W$ voldoet aan vS_wu. Zij $u' := \overline{u}$. Dan uZu'. Verder geldt $v'S_{w'}u'$, omdat vS_wu met $v \in v', w \in w'$ en $u \in u'$.

QED

Referenties

[1] P. Blackburn, M. de Rijke en Y. Venema. *Modal Logic.* Cambridge University Press, 2001.

[2] A. Berarducci. The interpretability logic of Peano arithmetic. In: *Journal of Symbolic Logic 55,* 1990.

[3] A. Visser. An overview of interpretability logic. In: M. Kracht, M. de Rijke, H. Wansing en M. Zaharyaschev, editors. *Advances in Modal Logic I.* CSLI Publications, Stanford, 1996.

[4] C. Areces, D. de Jongh en E. Hoogland. Interpolation, definability and fixed points in interpretability logics. In: M. de Rijke, K. Segerberg, H. Wansing en M. Zaharyaschev, editors. *Advances in Modal Logic II.* CSLI Publications, Stanford.

[5] G.K. Japaridze en D.H.J. de Jongh. The Logic of Provability. In: S.R. Buss. *Handbook of Proof Theory.* Elsevier Science, Amsterdam, 1998.

Index