Institute for Language, Logic and Information

# ON THE EARLY HISTORY OF INTUITIONISTIC LOGIC

A.S. Troelstra

ITLI Prepublication Series
for Mathematical Logic and Foundations ML-88-04

University of Amsterdam

Institute for Language, Logic and Information
Instituut voor Taal, Logica en Informatie

# ON THE EARLY HISTORY OF INTUITIONISTIC LOGIC

A.S. Troelstra
Department of Mathematics and Computer Science
University of Amsterdam

Received August 1988

To be published in the Proceedings of the
Heyting Conference
Varna, September 1988

Correspondence to:

Faculteit der Wiskunde en Informatica
(Department of Mathematics and Computer Science)
Roetersstraat 15
1018WB Amsterdam

or

Faculteit der Wijsbegeerte
(Department of Philosophy)
Grimburgwal 10
1012GA Amsterdam

# ON THE EARLY HISTORY OF INTUITIONISTIC LOGIC

A.S.Troelstra

Faculteit Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam
Roetersstraat 15, 1018 WB Amsterdam, NL

**Abstract.** We describe the early history of intuitonistic logic, its formalization and the genesis of the so-called Brouwer–Heyting–Kolmogorov interpretation. In particular we discuss at some length whether Heyting's papers contain an anticipation of logic with existence predicate. Finally we publish some source material, in particular letters of Bernays, Glivenko and Kolmogorov to Heyting.

On this topic I have written before (1978,1981,1983), and there is not much news to tell. However, (1978) and (1983) are of limited distribution, and several sources of interest for this topic are unpublished, so I thought it appropriate to collect here my earlier remarks on the topic, together with some additions and a publication of some further sources: some fragments of the correspondence between O. Becker and A. Heyting (3.1), a fragment of a letter from L.E.J. Brouwer to Heyting (3.2), a letter of Brouwer to Th. de Donder (3.3), a letter of P. Bernays (3.4), and the letters of V. Glivenko and A. Kolmogorov to A. Heyting (3.5-6). The correspondence between A. Heyting and H. Freudenthal on the interpretation of intuitionistic logic has already been published in Troelstra (1983).

## 1. The formalization of intuitionistic logic.

**1.1.** Kolmogorov's first paper on intuitionistic logic. Kolmogorov (1925), in Russian, is the earliest published formalization of a fragment of intuitionistic logic. The paper represented a remarkable achievement, but remained virtually without effect because of the language in which it was written. In 1934 it was apparently still unknown to Heyting. Also Gödel was clearly unaware of the paper when he wrote his (1933). The paper is mentioned by Glivenko in his letter of 13-X-1928, and also by Kolmogorov in his third letter to Heyting, but it seems thet Heyting still had no idea of its contents when he wrote his survey (1934), since it is missing in the bibliography.

An english translation, with an introduction by H. Wang, may be found in van Heijenoort (1967). Kolmogorov restricts attention to the logical operators $\rightarrow$, $\neg$ $\forall$, $\exists$

(axioms for $\vee$ appear in a footnote); the quantifier rules are not complete, and Kolmogorov rejects the rule ("ex falso sequitur quodlibet") $p \to (\neg p \to q)$. The axiom schema $\forall x\, A(x) \to A(t)$ is not included in Kolmogorov's system (although Wang regards it as part of the system since it is clearly intuitively accepted as true by Kolmogorov). Kolmogorov in his paper also describes an embedding of classical propositional logic into (his fragment of) intuitionistic propositional logic, and shows that this embedding is capable of generalization to stronger systems, thereby anticipating Gödel (1933) and Gentzen (1974, dating from 1933).

**1.2.** The work of Glivenko and Heyting. In chronological order the next paper is Glivenko (1928), where a philosophical debate is settled by the use of formalization. Glivenko lists ten propositional axioms clearly valid on Brouwer's interpretation of the logical signs, and derives formally from his axioms

$$\neg(\neg p \vee p),\ \neg\neg\neg p \to \neg p,\ (\neg p \vee p \to \neg q) \to \neg q,$$

and then uses these theorems to show that "a proposition is tierce" (in the sense of Barzin and Errera (1927)) is false, thus revealing the fallacies in the Barzin-Errera argument which purported to show the contradictoriness of Brouwer's logic (it must be said, however, that the misunderstanding of Barzin and Errera was so tenacious that not even Glivenko's paper could convince them of their mistake). Glivenko does not refer to Kolmogorov's (1925), and the axioms he lists do not seem to be directly inspired by this paper. In a non-formal context, $\neg\neg(\neg p \vee p)$ already appears in Brouwer (1908). A formal approximation of Brouwer's informal reasoning is perhaps most easily given in natural deduction. The principle $\neg\neg\neg p \to \neg p$ is informally derived in Brouwer (1923).

In 1927, the Dutch Mathematical Association ("Het Wiskundig Genootschap") published the following prize question proposed by G. Mannoury (in a free translation):

"By its very nature, Brouwer's set theory cannot be identified with he conclusions formally derivable in a certain pasigraphic system. Nevertheless certain regularities may be observed in the language which Brouwer uses to give expression to his mathematical intuition; these regularities may be codified in a formal mathematical system. It is asked to

1) construct such a system and to indicate its deviations from Brouwer's theories;

2) to investigate whether from the system to be constructed a dual system may be obtained by (formally) interchanging the principium tertii exclusi and the principium contradictionis."

Heyting wrote a prize essay on the topic proposed, and was awarded the prize by the "Wiskundig Genootschap" early in 1928. Though originally publication in the Mathematische Annalen was intended, the essay finally appeared (Heyting 1930, 1930A, 1930B) in revised form,through the intermediacy of L. Bieberbach, in the Sitzungsberichte der Preussisschen Akademie von Wissenschaften (not a good choice from the point of view of the accessibility of the papers). There is no manuscript version of Heytings essay in its original form nor of the revised version among his papers (except for a single page in handwriting preserved by chance, which differs from the final version but cannot otherwise be chronologically located), so we do not know which changes he made for the revision. Clearly he has taken note of Glivenko's work, not known to him while writing the prize essay. Presumably, the references to Hilbert and Ackermann(1928) were inserted by Heyting while preparing his revision.

In his informal argument(1923) for $\neg\neg\neg p \to \neg p$ Brouwer assumes $p \to \neg\neg p$ as obviously valid. Originally Heyting adopted $p \to \neg\neg p$ as an axiom, but Glivenko's proof of $\neg\neg\neg p \to \neg p$ showed him how to derive it from the other principles.

On the other hand, Glivenko (1930), containing the well known Glivenko theorem, has been influenced by Heyting's work; from the correspondence reproduced below, it looks as if Heyting's derivation of $\neg\neg(\neg\neg p \to p)$ suggested to Glivenko his theorem.

The first paper (Heyting 1930) is the most polished one, and had the most immediate effect. Heyting arrived at his axiom system for propositional logic, according to his own account, in a very straightforward and simple-minded way: he went through the axioms and theorems in Principia Mathematica (Whitehead and Russell 1910) and retained those which were intuitionistically valid (cf. the fragments of the correspondence with O. Becker). This is a more thorough way of proceeding (in view of the rather exhaustive treatment of propositional logic in the Principia) than either Kolmogorov (1925) or Bernays (cf. his letter below) appear to have used. It does not strike one as a particularly imaginative method, but one should not forget that the project could be carried out successfully only on the basis of a clear insight in the intuitionistic interpretation of the logical operations (which had not yet been explicity formulated when Heyting wrote the formalization papers). The contents of the later two papers are difficult to compare with the formalism of either the Principia or Hilbert and Ackermann (1925); here more pioneering work was needed, and the second and third paper contain a number of technical flaws and weaknesses. The style of formalization is closer to Peano's "Formulaire"

Soon after the publication of his formalization papers, Heyting must have realized that the formal treatment was unsatisfactory at certain points, at least in (1934) he says, speaking of his own work, "regrettably his presentation is unduly complicated, due to a not completely successful attempt to formalize also the substitution process". In later years he expressed himself even more strongly (Heyting 1978):

"I regret that my name is known today mainly in connection with these papers, which were very imperfect and contained many mistakes. They were of little help in the struggle to which I devoted my life, namely a better understanding and appreciation of Brouwer's ideas. They diverted attention from the underlying ideas to the formal system itself." (We cannot agree with the second sentence in this quotation; here Heyting underestimates the contribution of his own formalization to a better understanding of the basic notions of intuitionism.)

The next two subsections contain some comments on the technical details of the second and third paper. We use modern notation in our discussion.

**1.3.** Strict identity. The second and third paper deal with predicate logic and mathematical theories based on predicate logic. The individual variables are taken to range over all mathematical objects, and special classes are singled out by introducing axiomatically or defining suitable predicates. The rules are formulated semantically, and it is not always obvious how to interpret them.

A feature of interest is the introduction of a primitive notion of strict identity denoted by $\equiv$. $\equiv$ is reserved for the possibly defined notion of mathematical equality of objects appropriate to the domain under consideration. "$p \equiv q$" is read as "p is the same object as q". We quote the relevant passages:

"The fundamental relation between objects [Individuen] is $p \equiv q$, 'p is the same object as q'. We therefore need a special sign for mathematical identity, which has to be defined for each kind of object, in such a way that identity implies that the objects agree w.r.t. all mathematically relevant properties For mathematical identity we choose the sign =. [ ... ]

The formula $p \equiv p$ does not hold for all signs p; rather, we use the formula to express that p denotes an object. Therefore we can explain 6.1 $\vdash \vdash 1 \equiv 1$ as '1 is an object'. Thus we obtain the possibility to introduce objects successively, just as in mathematics."

Of the axioms for $\equiv$ we note in particular

6.11 $\quad p \equiv p \wedge q \equiv q \supset p \equiv q \vee \neg(p \equiv q)$

(identity between objects is decidable).

**1.4.** Anticipation of logic with existence predicate. Elsewhere I have stated that in Heyting's formalization some of the ideas of Scott's intuitionistic logic with existence predicate E are present. On closer scrutiny I am less certain; due to certain defects of Heytings formalization, it is hard to say to what extent E-logic has been anticipated. The obvious candidate for the E-predicate in Heyting's system is $Et := t \equiv t$, and below we shall take this as definition.

5.3 stipulates that a true formula must always be well-formed. 5.31-33 state that well-formed formulas are closed under renaming variables, replacing denoting terms by other denoting terms, and variables by denoting terms. There is an unbalance in the stipulations here; we must assume that variables are not assumed to denote (otherwise some of the later axioms would obviously be redundant), but if a variable is replaced by a term, the term is required to denote.

Also substitution cannot be handled as a variable-binding operator in the way proposed by Heyting, and henceforth we shall tacitly correct this and assume substitution to be a syntactical operation in the way which is customary in modern treatments of predicate logic.

In order to interpret the rules 5.4-6 as deduction rules, one should replace the predicate variables a and b by metavariables A and B for formulas, and interpret

$$\binom{p}{x}$$

as syntactically defined substitution. Then 5.4 amounts to (in modern notation)

$$\vdash A \Rightarrow \vdash A[b/B] \text{ (b a propositional variable)},$$

$$\vdash A \wedge Et \Rightarrow \vdash A[x/t] \text{ (x an individual variable)},$$

and 5.5 and 5.6 correspond to

$$\vdash A \to B \Rightarrow \vdash A \to \forall x B \ (x \notin FV(A)),$$

$$\vdash A \to B \Rightarrow \vdash \exists x A \to B \ (x \notin FV(B)).$$

Rule 5.7 becomes redundant if ( ) is interpreted syntactically. The axiom

6.32 $\quad \vdash \forall y(Ey \to \forall y A) \to \forall y A$

may be read as saying that universal quantification runs over objects only (not over "virtual objects"); a corresponding axiom for existential quantification is missing. The axiom

6.3 $\quad \vdash \forall x A \to A[x/t]$

is now problematic; here we would have expected

$$\vdash \forall x A \wedge Et \to A[x/t].$$

It cannot be that t is tacitly assumed to satisfy E, (as might be suggested by 5.32), because in 6.402 a variable is taken for t. Note that 6.42 with

6.45 $\quad \vdash \forall x Ex$

implies $\vdash Ex$ (this would lead to $E^+$-logic, where variables are assumed to exist, cf.Troelstra and van Dalen 1988, 1.2.3), and this also does not agree very well with certain axioms which appear later (see e.g. Heyting's axiom 7.11), where "existence" for variables is apparently not assumed.

**1.5.** Arithmetic and analysis. The treatment of arithmetic does not exactly cover what is nowadays called Heyting's arithmetic, since multiplication is not introduced. Also, the definition by recursion of + cannot be treated as an explicit definition but should be regarded as a pair of axioms, which has to be supplemented e.g. by taking 10.4 ($\vdash p \in N \wedge q \in N \supset p+q \in N$) as an axiom, since the proof of 10.4 is wrong (cf. Henkin 1960).

The third paper deals with spreads in Brouwer's sense, and species; there are few axioms and many definitions, and the main purpose seems to have been to show that with relatively few primitives most of the intuitionistic notions appearing in Brouwer's papers could be defined. It is to be noted that the axioms are extremely weak: thus is no comprehension principle, and there are no axioms to warrant the existence of a single choice sequence.

There is one particular point of interest in the third paper: it contains the first known statement of the weak continuity axiom (12.22).

**1.6.** Later developments. Heyting and Glivenko's work on intuitionistic propositional logic **IPC** was soon taken up in other publications; as already said, Kolmogorov (1925) remained without effect until much later. Gentzen (1935) is perhaps the most important early paper on the syntax and proof theoryof **IPC**. The semantical characterization of intuitionistic logic started with Jaskowski (1936) and Tarski (1938); see also the references in Troelstra and van

Dalen (1988, 13.9.5). Intuitionistic predicate logic **IQC** was also studied by Gentzen (1935), but a (topological) semantics for **IQC** had to wait till Mostowski (1948).

Intuitionistic arithmetic was taken up in Gödel (1933) and Gentzen (1974), but further investigations had to wait till Kleene (1945), where the realizability interpretation was introduced. It took still longer till the formalization of intuitionistic analysis was taken up again by Kleene (1952, 1957), and the formalisms studied by Kleene were not inspired by Heyting (1930B).

## 2. The Brouwer-Heyting-Kolmogorov interpretation.

**2.1.** By the Brouwer-Heyting-Kolmogorov interpretation of intuitionistic logic (BHK-interpretation for short) we understand the well known explanation of the meaning of "proof of a compound statement A" in terms of what it means to prove the constituents of A. Characteristic is the explanation of implication:

> "A proof of $A \rightarrow B$ is a construction method c transforming any proof p of A into a proof c(p) of B".

(For more details see Troelstra and van Dalen 1988.) Implicitly such an interpretation is already found in Brouwer's writings, in particular (1908) and (1923).

**2.2.** Heyting 1930, 1931. In these papers the clauses of the BHK-interpretation for $\vee$ and $\neg$ are explicitly formulated. In (1930) Heyting associates with a proposition a problem or a expectation ("attente", §2), in (1931) an "Erwartung" or "Intention" (p.113), and distinguishes between a proposition p and the proposition +p ("p is provable"). As a result of correspondence with Freudenthal (published in Troelstra 1983), shortly after the meeting in Königsbergen (Kaliningrad), Heyting observed that his formalization of intuitionistic logic was applicable only to propositions of the form +p. In the correspondence with Freudenthal, Heyting also formulates for the first time explicitly the implicational clause of the BHK-interpretation mentioned above. Kolmogorov, in his first letter to Heyting (3.6), points out that Heyting is mistaken in presenting the Goldbach conjecture as an example of a proposition for which it might be the case that both $\vdash \neg\neg{+p}$ and $\vdash \neg\neg p$.

The possibility of a proposition with a parameter such that one can find a proof for each particular value of the parameter, but not a uniform proof applicable to all values of the parameter (a method), as considered in Heyting (1930C), does not fit into an intuitionistic point of view, as pointed out by Kolmogorov in his second letter; cf. also Heyting's letter to Becker.

**2.3.** Kolmogorov 1932 and Heyting 1934. Kolmogorov's second letter to Heyting suggests that he sent Heyting a copy of his (1932) before publication. Both Heyting (1934) and Kolmogorov apparently regarded the interpretation of propositions as expectations, and the interpretation as problems, as distinct. Later Heyting came to regard them as essentially the same, cf. Heyting (1958). In his monograph (1934) Heyting not only described his own version of the BHK-interpretation, but also Kolmogorov's calculus of problems, extended with clauses for the quantifiers. Thus we feel justified in saying that Heyting and Kolmogorov have an equal share in the explicit formulation of the proof-interpretation of intuitionistic logic.

**2.4.** Hypothetical reasoning. This has been discussed at some length in Troelstra (1983), and I do not want to repeat the whole discussion. However, I wish to add a comment. In (1983) it was noted that Brouwer's thesis might leave the reader with the impression that Brouwer did not want to allow hypothetical reasoning. Dirk van Dalen pointed out that the Brouwer-Korteweg correspondence, published in the 1981 reprint of Brouwer (1907), modifies this impression somewhat (though Brouwer is not very clear on this point). In any case, I think that there is little doubt that Brouwer was prepared to allow hypothetical reasoning as soon as he turned his attention to intuitionistic logic in earnest, i.e. from 1908 onwards.

**2.5.** There exist a number of "implementations" of the BHK-interpretation, of which Kleene's realizability (1945) is perhaps the simplest and most striking example. According to Kleene (1973), part of the idea for this interpretation went back, not to Heyting or Kolmogorov, but rather to remarks in Hilbert and Bernays (1934, page 32) describing the finitist meaning of an existential statement as an incomplete statement which may be completed by presenting the value of the variable verifying the existential statement, and similarly for disjunctions. It is not unlikely that these remarks in Hilbert-Bernays are the result of Brouwer's influence on the formulation of the finitary point of view. As described in his (1973), Kleene tried to use Heyting's clauses for implication for his definition of realizability, but that "did not work"; he then proposed the now familiar clause for "x realizes $A \to B$", apparently without recognizing or viewing this as a "recursive implementation" of Heyting's clause, a view which, in retrospect, seems so natural.

A good deal of discussion has been generated by Kreisel's (1960) proposal for a sharpening of Heyting's clauses; as to this discussion see the references in Troelstra and van Dalen (1988, 1.5.3)

## 3. Sources.

In reproducing the letters we have retained spelling and grammar (errors included), and the layout as far as possible.

**3.1.** Fragments from letters between O. Becker and A. Heyting. Here Heyting explains how he arrived at his axiomatization of intuitionistic propositional logic, and emphasizes that his logic is applicable only to propositions of the form "+p"; cf. the end of Kolmogorov's second letter below, and the Heyting-Freudenthal correspondence in Troelstra (1983).

Becker to Heyting, 19-III-33:

"... Man kann nämlich fragen: ist Ihr Logikkalkül der einzig mögliche Kalkül, um die Brouwersche intuitionistische Mathematik zu begründen? Dass er dazu hinreicht, glaube ich; aber ist er auch die notwendige logische 'Bedingung' der B'schen Mathematik? Wie sind sie überhaupt auf Ihre Axiome gekommen? Gefühlsmässig oder nach einem eindeutigen logischer Prinzip? Denn aus dem ... Hilbert'schen Kalkül einfach den Satz vom ausgeschlossenen Dritten ($p \vee \neg p$) weglassen, ist doch kein Verfahren, das eindeutig auf ein neues Axiomensystem führt. ... "

Heyting to Becker, 23-IX-33:

"...Sie fragen, wie ich zu meinen Axiomen der Logik gekommen bin. Ich habe die Axiome und Sätze der Principia Mathematica gesichtet und aus den zulässig befundenen ein System von unabhängigen Axiomen gemacht. Bei der relative Vollständigkeit der Principia ist die Vollständigkeit meines Systems m.E. in der best möglichen Weise gesichert. Es ist ja prinzipiell unmöglich mit Gewissheit alle zulässigen Schlußweisen in ein Formales System zu erfassen. eine andere Sache ist es, dass die Anwendung meiner Logik auf konstruktive Fragen beschränkt ist. Was ich damit meine, möge das folgende Beispiel erhellen. Es seien zwei Folgen von reellen Zahlen $\{a_i\}$ und $\{b_i\}$ vorgelegt. Die Aussage 'Für jedes i ist $a_i = b_i$' lässt zweierlei Auffassung zu. a). Sie kann die Aufgabe bedeuten, einen allgemeinen Beweis zu suchen, der sich bei der Wahl eines bestimmtes Index i zu einen Beweis für $a_i = b_i$ spezialisiert; b) man kann darunter die Erwartung verstehen, dass es, wenn man immer wieder einen Index i beliebig wählt, jedesmal gelingen wird, $a_i = b_i$ zu beweisen. Der Unterschied ist klar, wenn man auf a) und b) die Negation anwendet. Es wäre denkbar, dass die Annahme eines Beweises wie unter a) gefördert, als wiederspruchsvoll erwiesen wäre, ohne dass dieser Wiederspruch auch die Annahme unter b) treffen würde. Meine Logik gilt dann, wenn jede Aussage in der Art wie unter a) verstanden wird; die Logik der nicht-konstruktiven Erwartungen b) würde sich viel verwickelter gestalten; ich halte ihre Aufstellung nicht für sehr fruchtbar. ..."

**3.2.** Letter from P. Bernays to A. Heyting. This letter concerns technical points.

Sehr geehrter Herr Dr. Heyting!

Seit langer Zeit schon habe ich vor, Ihnen für die Übersendung Ihrer zwei

Abhandlungen zu danken und Ihnen zu derjenigen , welche den Aussagenkalkül betrifft, einige kleine Bemerkungen mitzuteilen, die ich mir bald nach dem Empfang Ihrer Separata überlegt habe.

Ihre Untersuchung steht mir nicht nur durch die Beziehung zu der axiomatischen Betrachtung der Russellschen Aussagenlogik nahe, – welche Sie in so freundlicher Weise zitiert haben. Diesen Russellschen Aufbau der Aussagenlogik habe ich bald als axiomatisch sehr unbefriedigend empfunden. Und bei der Entstehung der Hilbertschen Beweistheorie ergab es sich sozusagen von selbst, dass die positive Aussagenlogik von der Rolle der Negation abgesondert wurde.

Die Vorträge, die Prof. Brouwer seinerzeit (erstmalig) in Göttingen hielt, regten mich zu der Frage an, wie sich am einfachsten eine Brouwerschen Aussagenlogik aussondern lasse, und ich kam zu dem Ergebnis, dass sich dieses durch weglassen der einen Formel

$\neg\neg a \supset a$ (in Ihrer Symbolik)

bewirken lasse. Ich schrieb auch damals an Prof. Brouwer, als Bemerkung zu seinen Vortrag, eine briefliche Notiz, worin ich – gegenüber der von ihm damals geäusserten Vermutung, dass der Satz von der doppelten Verneinung schwächer sei als der Satz vom ausgeschlossenen Dritten – auf den deduktiven Zusammenhang hinwies, der jetzt als "Satz von der Absurdität der Absurdität des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten" benannt zu worden pflegt.)

– Sie finden in Hilberts Abhandlung "Die Grundlagen der Mathematik" (Abh. aus d. Math. Seminar d. Hamburg. Univ., 1928) ein System der Aussagen-Logik, welches bei Weglassung der letzten Formel (12.) mit Ihrem System, bei Weglassung von 4.1., gleichwertig ist. (Insbes. sind die Formeln 1.-7. mit Ihren Formeln 2.1., 2.11., 2.12., 2.13., 2.14., 2.15., gleichwertig.) Für dieses System der Formeln 1.-12. habe ich mir - im Anschluss an Unterhaltungen mit den Herren Prof. Lukasiewicz und Dr. Tarski, (die mir auf dem Kongress zu Bologna ihre Ergebnisse im Gebiete der Aussagenlogik mitteilten), vollständig die Unabhängigkeitsbeweise überlegt. – (N.B. die Formel 2. ist nicht von allen übrigen, wohl aber von den Formeln 1. und 3.-11. unabhängig.)

Diese Beweise sowie einige daran knüpfende Ergebnisse, insbes. über die positive Logik, habe ich nicht publiziert, vielmehr nur mündlich einiges davon in einer Vorlesung vorgetragen. –

Worin sich die Anlage Ihres Systems von den System der Formeln 1.-12. hauptsächlich unterscheidet, das ist die Zusammenfassung der Formeln für die Implikation mit denen für die Konjunktion zu einer Formelgruppe.

Diese Zusammensetzung ist ja von inhaltlichen Standpunkt durchaus zu motivieren; und wenn auch die Absonderung der Formeln der Implikation für sich ein Interesse hat (und es überdies möglich macht, dass in den Formeln, welche die Konjunktion, Disjunktion und die Negation charakterisieren, ausser der betreffende Operation jeweils nur die Implikation auftritt) –, so gibt andrerseits Ihr Verfahren den Axiom-Formeln eine andere Art von grösserer Übersichtlichkeit, – die wie ich annehme von Ihnen beabsichtigt ist, ich meine die

Tatsache, dass bei Ihren Axiomen nirgends im Vorderglied oder im Hinterglied einer Implikation wiederum eine Überlagerung von Implikationen vorkommt. Das ist jedenfalls ein Gewinn an formaler Eleganz und erleichtert die Auffassung der Axiome. –

Was ich nun vor allem bemerken wollte, ist dass Ihre Operationsregel "1.2" ("Sind a und b richtige Formeln, so ist $a \wedge b$ eine richtige Formel") entbehrlich ist.

Nämlich es seien a, b richtige Formeln. Aus 2.14. erhält man durch Einsetzung die Formel

$$a \supset .b \supset a.$$

Diese zusammen mit a gibt nach der Regel 1.3. die Formel

$$b \supset a,$$

diese zusammen mit der Formel

$$b \supset a. \supset .b \wedge b \supset a \wedge b,$$

welche durch Einsetzung aus 2.12. hervorgeht, ergibt nach der Regel 1.3. die Formel

(1) $\quad b \wedge b \supset a \wedge b.$

Andrerseits entsteht aus 2.1. durch Einsetzung die Formel

$$b \supset b \wedge b;$$

diese zusammen mit b gibt nach der Regel 1.3. die Formel

$$b \wedge b$$

und diese wieder ergibt zusammen mit der abgeleiteten Formel (1) nach Regel 1.3. die Formel

$$a \wedge b. –$$

Eine andere Vereinfachung ist, dass die Formel 4.11. ersetzt werden kann durch

$$a \supset \neg a. \supset \neg a.$$

Nämlich aus 4.1. ergibt sich durch Einsetzung

$$\neg b \supset .b \supset \neg a,$$

und aus dieser Formel leitet man mit Hilfe Ihrer sechs ersten Formeln ab:

$$a \supset b. \wedge .a \supset \neg b. \supset .a \supset \neg a.$$

Nimmt man daher

$$a \supset \neg a. \supset \neg a$$

als Axiom, so gelangt man zu 4.11. –

Bei den Unabhängigkeitsbeweisen wäre es vielleicht lohnend, noch gewisse Verschärfungen der Ergebnisse zu erhalten, so z.B. nachzuweisen, dass die Formel 2.14. nicht durch die Formel

$$a \wedge b \supset a$$

vertreten werden kann. – Ich vermute übrigens, dass man in allen diesen Fällen mit endlichen Element-Systemen auskommt.

– Mit besten Grüssen empfiehlt

sich Ihnen Ihr

P. Bernays

5.XI.30.

**3.3.** Translation of a fragment of a letter of L.E.J. Brouwer to Heyting. This letter and the next one are of some interest as revealing Brouwer's reaction to Heyting's work on intuitionistic logic.

17-VII-1928

Dear mr. Heyting,

I found your manuscript extraordinarily interesting, and I regret that you have to urge me to return it. I would appreciate it if, in the future, you would make copies of your manuscripts beforehand, at least if you desire me to read them more than just superficially. Even so, I have come to appreciate your work so much, that I want to ask you to prpare a version in German for the Mathematische Annalen (preferably slightly expanded, instead of shortened). Perhaps you can then distinguish more sharply between primitive symbols and symbols introduced by definition (as abbreviations for other symbols). And perhaps it is also possible (in view of §13) to formalize the notion of a "law". But these remarks are of secondary importance. ...

**3.4.** Letter of L.E.J. Brouwer to Th. de Donder.

9 octobre 1930.

Mon cher collègue

En préparant une note sur l'intuitionisme pour le Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, je fus agréablement surpris d'en voir paraître une de mon élève M. Heyting élucidant d'une manière magistrale les points que j'avais voulu mettre en lumière moi-même. Je crois qu'après la note de M. Heyting il ne reste plus grand'chose à dire sur les questions en litige, et que dès à présent le lecteur des éditions de votre Académie saura suffisamment à quoi s'en tenir concernant les idées de M.M. Barzin et Errera, qui, à part du grand intérêt qu'elles présentent, sont néanmoins intenables dans leur tendance essentielle. J'examinerai si à la note de M. Heyting il reste à ajouter quelque chose qui puisse approfondir les notions générales sur la logique intuitionniste, et dans le cas affirmatif je ne tarderai pas à en composer une note et je serai heureux de vous l'envoyer.

Agréez, mon cher collègue, l'expression de mes sentiments cordiaux.

**3.5.** Letters of V. Glivenko to A. Heyting. The letters from 1928 document the discovery of the "Glivenko theorem". Glivenko's claim, in his letter of 4-VII-1928, that $\neg\neg(\neg\neg p \rightarrow p)$ is not provable, might have been proved by him e.g. by using an interpretation in a matrix with three truth values, corresponding to a linear lattice with three elements, where the middle element is assigned to falsehood. Glivenko's letter from 24-X-1933 discusses Kolmogorov's "calculus of problems" interpretation and mentions the possibility of taking falsehood instead of negation as a primitive.

4 Juillet 1928

Monsieur,

comme je suis, cet été, à un village près de Volga, loin de Moscou, c'est seulement aujourd'hui que j'ai reçu votre lettre.

Je suis heureux que nos points de vue sur le problème de formalisation de la logique et mathématique intuitionniste coïncident complètement. Dans ma note polémique de Bruxelles, je n'avais pas pu de poser ce probléme assez nettement, parce que là, conformément au but spécial de cette note, j'ai eu besoin d'un langage qui pourrait être comprise sans peine par des savants qui n'ont pas pénétrés, à mon avis, assez profondement aux idées intuitionnistes. Mais j'ai fait, moi-même, quelques considérations plus essentielles sur ce sujet dans un autre travail qui se trouve dejà sous presse et que, je le crois, je pourrai présenter à vous depuis quelques semaines.

Maintenant, permettez moi de me borner à vous communiquer un résultat qui se rattache encore immédiatement à ce que j'avais discuté dans ma note de Bruxelles, et que j'ai trouvé ces jours derniers. Il est à remarquer que le système d'axiomes I-X qui ont été indiqués dans cette note n'est point un système <u>complet</u> d'axiomes de la logique mathématique classique. D'ailleur, par obtenir un système complet, il suffirait de modifier légèrement ce système-ci, à savoir d'y préciser la correspondance formelle entre implication et multiplication, qui s'exprime par les formules:

XI*. $p \,.\supset.\, q \supset r :\supset: pq \supset r$,

XII*. $pq \supset r :\supset: p \,.\supset.\, q \supset r$,

et d'y remplacer le principe du tiers exclu X par ce de réciprocité des espèces complémentaires:

X*. $\sim(\sim p) \supset p$.

Comme les axiomes I-IX et XI*-XII* sont, sans doute, admissibles dans la logique intuitionniste, il est naturel de se demander s'il est, ou non, démontrable, à partir de ces axiomes-ci, la <u>non-fausseté</u> du principe X*:

$\sim(\sim(\sim(\sim p) \supset p))$.

J'ai démontré que la réponse est <u>négative</u>.

Que doit-on tirer de ce fait pour la construction de la logique intuitionniste? Au cours de mes recherches, j'ai trouvé quelques indications sur ce sujet, mais pas encore assez claires. Ce que me semble d'être certain, c'est seulement que l'élaboration des principes intuitionnistes exige encore beaucoup de travail qui peut devenir très fecond pour la connaissance de faits logiques importants sur lesquels la logique classique ne fait pas même les indications.

Agréez, Monsieur, l'assurance de ma parfaite considération.

V. Glivenko.

Moscou, le 13 octobre 1928.

Monsieur,

avant de tout, je dois vous remeçier pour que vous avez me présenté les extraits de vos travails. Au village où j'avais passé cet été, je n'avais reçu que votre lettre et même je n'avais su rien sur les extraits qui m'attendaient à Moscou.

Ce que je vous avais écrit, dans la lettre précédente, sur la fausseté de la fausseté du principe $\sim(\sim p) \supset p$, n'est, peut-être, que le résultat d'un malentendu. Dans le t.32 du «Recueil Mathematique» de Moscou (1925) M. Kolmogoroff, un des plus ingénieuses mathématiciens russes, a publié un article intitulé «Sur le principe de tertium non datur» (en russe), où il a proposé une axiomatique de la logique intuitionniste de propositions. Là, il rejette non seulement le principe du tiers exclu, mais aussi le principe $\sim p . \supset . q \supset p$ (quoique il admet le principe $p . \supset . q \supset p$). C'est précisement depuis cette restriction que ma conclusion est vraie, c'est-à-dire que la fausseté de la fausseté du principe $\sim(\sim p) \supset p$ n'a pas lieu. Mais maintenant je commence de douter que la restriction faite par M. Kolmogoroff est légitime, c'est-à-dire que, pour la mathématique intuitionniste, il est nécessaire de rejetter le principe $\sim p . \supset . p \supset q$, parce que je ne peux pas <u>démontrer</u> cette nécessité, tandis que la nécessité de rejetter le principe du tiers exclu a été <u>démontré</u>, plusieurs fois et bien clairement, par M. Brouwer.

Je serais heureux si vous me communiqueraient votre opinion sur ce sujet.

Agréez, Monsieur, l'assurance de ma parfaite considération

V. Glivenko.

Moscou, le 18 octobre 1928.

Monsieur,

hier j'ai reçu votre lettre de 7 octobre qui m'a fournit incidemment la réponse à la question posée dans ma lettre de 13 octobre.

A vrai dire, le rôle de l'axiome $\sim p . \supset . p \supset q$ n'est pas encore assez clair pour moi. Mais, quoiqu'il en soit, je me suis rendu à vos raisons que la mathématique intuitionniste n'a pas besoin de rejetter cet axiome, de sorte que toutes les reflexions contre cet axiome sortiraient des bornes des matières dont nous occupons actuellement.

Quant à votre démonstration de la formule , basée sur l'axiome en question, il me semble qu'on y pourrait procéder d'une manière bien plus générale. Plus précisement, si l'on admet mes axiomes I-IX et XI*-XII* et vos axiomes

(A) $\quad p . \supset . q \supset p,$

(B) $\quad \sim p . \supset . p \supset q,$

on démontre la fausseté de la fausseté non seulement de tous ces axiomes mêmes, mais aussi de l'axiome $\sim p \vee p$. Il en suit, a l'aide de la formule $p \supset q . \supset . \sim\sim p \supset \sim\sim q$ qu'il est facile à démontrer, la fausseté de la fausseté de tous les formules démontrables à partir des axiomes I-IX, XI*-XII*, (A), (B) et $\sim p \vee p$. Or, ces derniers forment certainement un système complet d'axiomes de la logique classique de propositions (même, peut être, quand on omit les axiomes XI*-XII*). Il en résulte la fausseté de la fausseté non seulement de la formule $\sim\sim p \supset p$, mais aussi de toutes les formules que la logique classique reconnaît pour vraies.

Je remarquerai que, pour la logique intuitionniste, ce résultat positif est, à mon avis, bien plus agréable que le résultat négatif que j'avais vous communiqué cet été.

Agréez, Monsieur, l'assurance de ma parfaite considération
V.Glivenko

Moscou 30.10.1928

Monsieur,

je voudrais publier, dans les «Bulletins» de l'Académie Royale de Belgique, le résultat que je vous avez communiqué dans ma dernière lettre, à savoir que, si un certain principe est démontrable à partir des axiomes de la logique classique des propositions, c'est la fausseté de la fausseté de ce principe qui est démontrable à partir des axiomes de la logique intuitionniste. Bien entendu, cette publication n'aurait aucun sens si votre mémoire qui paraîtra dans les «Math. Ann» contient déjà ce résultat. C'est pourquoi je vous prie de me communiquer s'il en est ainsi ou non. Si non, permettez-moi d'indiquer aussi, dans le «Bulletin» de belgique, que vous avez adopté l'axiome

$$\sim p \,.\supset.\, p \supset q$$

dans le mémoire en question.

Agréz, Monsieur, etc.
V. Glivenko

Moscou, le 13 novembre 1928.

Monsieur,

je veux publier mon résultat indépendemment de votre mémoire, car, quoique ce résultat n'est qu'une rémarque presque trivial, sa démonstration rigoureuse est un peu longue. A savoir, il y est à vérifier la règle qui s'exprime par le schème

$$\begin{array}{l} \sim\sim P \\ \sim\sim(P \supset Q) \\ \hline \sim\sim Q, \end{array}$$

ce qui exige l'emploi de la formule $\sim\sim\sim p \supset \sim p$ et d'autres.

Cependant, il serait bon si vous mentionnait mon résultat dans votre mémoire en rapport avec l'idée d'intégrité. Moi-même, je ne puis rien dire sur ce rapport, et je serai le premier qui lira avec interêt vos explications sur ce sujet.

Agréez, Monsieur, etc.
V. Glivenko

12.10.1933

Monsieur!

J'ai reçu vos Notes sur la logique, et cela était bien opportunément, car, depuis presque quatre années, je me suis ramené aux études de ces questions. De plus, l'Institut des Mathématiques de l'Université m'a chargé, cette année, de la direction du séminaire de la logique mathématique. De fait, les travaux du séminaire doivent embrasser un domaine plus large, de de l'axiomatique moderne, comprenant non pas seulement les travaux sur la logique même, mais aussi des branches de la science où les méthodes élaborées dans la logique mathématique trouvent ses applications: Grundlagenfragen de M. Karl Menger, Theorie der abstrakten Verknüpfungen de M. Fritz Klein, etc. J'ai déjà communiqué votre Note de Zürich à cet séminaire.

Aujourd'hui, j'ai à vous une petite prière. Récemment, j'ai écrit le livre sur l'intégrale de Stieltjes qui sera édite en russe. Avant de recevoir les épreuves, je voudrait savoir comment on prononce le nom «Stieltjes», pour en faire la transcription russe tout-a-fait correcte. Comme je ne connais pas hollandais, je vous prie de m'écrire ce nom comme s'il était écrit en allemagne: c'est cette dernière langue, il me semble, où la phonétique d'un mot peut être exprimée le plus facilement.

Agréez, Monsieur, etc.

V. Glivenko

P.S. Que pouvait-on dire sur le livre de M. Dassen? Je le comprend mal.

V.G.

24.10.1933

Monsieur,

je vous remercie de vos indications qui m'ont été tout-à-fait suffisantes, de sorte que je peux maintenant reproduire sans hésiter la transcription Стультьес déjà employée par certains auteurs russes.

Outre cela, je profite l'occasion de vous communiquer quelques réflexions sur le calcul des problèmes de M. Kolmogoroff.

Sa conception est sans doute très intéressante. Mais il me semble que l'opération

$\neg a$,

dans le sens qu'il attribue, fait intervenir dans son calcul un certain élément inévitable de la logique, par exemple de la logique classique de propositions. En effet, le problème

$\neg a$

a, chez lui, un sens que voisi:

« étant supposé le problème <u>a</u> résolu, en tirer une contradiction ».

Il semble que ce n'est autre chose que

« démontrer la proposition suivante: la prémisse que le problème <u>a</u> est résolu entraîne une contradiction ».

Or, on peut obtenir un calcul des problèmes entièrement indépendant. A cet effet, admettons vos axiomes 2.1, 2.11-15, 3.1 et 3.11-3.12 et, de plus l'axiome suivant:

« Il existe un élément 0 tel que, quel que soit l'élément b, on a $0 \supset b$ ».

Formellement, ce système d'axiomes sera équivalente à votre. Seulement, au lieu de l'opération

$$\neg a$$

on aura ici l'opération

$$a \supset 0.$$

Les conséquences de cette modification sont manifestes. J'ajouterai seulement un example. Prenons le domaine des problèmes arithmétiques, ça veut dire des problèmes de la forme:

« trouver des entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfaisant à l'équation

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

où f est une fonction bien déterminée ».

Pour le problème 0, on peut y prendre le suivant:

« trouver un entier x satisfaisant à l'équation

$$x + 1 = x \text{ »}.$$

En effet, si nous supposons ce problème-ci résolu, nous avons successivement, quels que soient les $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sous le signe f,

$$(x+1)f = xf,$$

$$f = 0.$$

On voit que, malgré l'équivalence formelle, le sens et l'emploi du calcul ainsi modifié devient, lui-aussi, modifié et, en premier lieu, affranchi de tous les éléments de la logique.

Il me serait très intéressante de savoir votre opinion sur ce sujet.

Agréez, Monsieur, etc.

V. Glivenko.

**3.6.** Letters from A. Kolmogorov to A. Heyting. The first letter points to an oversight in Heyting (1930C). In the second letter Kolmogorov observes that the distinction between "P(x) can be solved for each x" and "there is a uniform method for solving P(x) for each x" is non-intuitionistic; the point was accepted by Heyting, as the fragment of his letter to Becker, reproduced above, shows. In the third letter Kolmogorov mentions his anticipation of Gödel (1933) in his (1925).

12-X-31

Monsieur et cher Collège

j'ai lu votre article dans "Erkenntniss" avec le plus vif interêt; l'exposition des principes de la logique intuitionniste est dans cet article extrèmement claire et définitive. Je voudrais seulement vous présenter quelques objections se rattachant à votre distinction entre +p et p.

1. Vous considérez (Académie de Belgique) comme exemple la proposition "tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers". Il est cependant connue que la

formule $\vdash \sim\sim p \supset p$ subsiste dans ce cas au point de vue intuitionniste aussi bien que classique. Si l'on sait $\vdash \sim\sim p$, on a ici automatiquement "une construction, qui nous donne cette décomposition pour tous les nombres pairs à la fois". C'est pourquoi on a aussi $\vdash \sim\sim p \supset +p$ et le cas

(1) $\vdash \sim\sim p \wedge \sim +p$

est impossible.

2. Il me semble que cela n'est pas le défaut de cet example particulier. Chaque "proposition" p dans votre conception est à mon avis de l'une des deux sortes:

(α) p exprime l'esperance que dans telles et telles circonstances un expériment donnera toujours un résultat déterminé (par example, que la tentative de décomposer un nombre pair en somme des deux nombres premiers donnera le résultat positif, si seulement tous les couples (p,q) $p < n$, $q < n$, seront utilisés). Chaque "expériment" doit être naturellement réalisable à l'aide d'un nombre fini d'operations déterminées.

(β) p exprime l'intention de trouver un construction.

3. Nous sommes d'accord, que dans le cas (β) la différence entre p et +p n'est pas essentielle, mais la proposition $\sim\sim p \supset p$ ne doit être considéré comme évidente. Dans le premier cas (å) au contraire p et +p ont une signification distincte, mais l'on a $\vdash \sim\sim p \supset p$ et $\vdash \sim\sim p \supset +p$. C'est pourquoi (1) est toujours impossible dans le cas (α) aussi que (β). On a donc, dans votre tableau des positions différentes d'une proposition seulement deux positions définitives $\vdash p$ et $\vdash \sim p$, puisque la position d' "insolubilité" est impossible.

4. Je préfère de conserver le nom d'une <u>proposition</u> (Aussage) seulement pour des propositions du genre (α) et nommer des "propositions" du genre (β) simplement <u>problèmes</u> (Aufgaben). Pour une proposition p on à des problèmes $\sim p$ (conduire p à une contradiction) et +p (démontrer p).

Veuillez agréer, Monsieur et chere collegue mes meilleurs salutations

A. Kolmogoroff

(undated)

Sehr geehrter Herr Kollege,

für die Aufmerksamkeit, mit welcher Sie meine Arbeit gelesen haben, bin ich ihnen sehr dankbar. Ihre Regel I,2 (oder, was formal dasselbe ist, meine Regel I) ist in der Tat überflüssig; ich lasse sie aber doch im Texte bleiben, um jede Komplikation bei dem Vergleich mit Ihrer Abhandlung zu vermeiden.

In Zürich beabsichtige ich nur eine Mitteilung aus dem Gebiete der Wahrscheinlichheitsrechnung zu machen, und wurde mir nur freuen , wenn Sie in Ihren Vortrage auch meine Gedanken über logische Fragen berühren wollten. Ich habe inzwischen über Ihr Beispiel des Satzes

"Für alle i gilt $a_i < b_i$ "

nachgedacht. Es sei im allgemeinen x eine Variable und P(x) eine von dieser Variable abhängige Aufgabe. Die "Hoffnung" für jedes x eine Lösung der Aufgabe P(x) zu finden ist in meiner Terminologie weder eine "Aufgabe" noch eine "Aussage" . Es wäre sehr interessant zu wissen, ob Sie mit dieser Hoffnung eine positive Erwartung verbinden, dass für jedes x die Aufgabe P(x) wirklich gelöst wird (von wem und wann?). Wenn diese Erwartung dabei nicht gemeint ist, so fürchte ich, dass wir uns der náiven nicht-intuitionistischen Auffassung des Satzes "P(x) ist für jedes x lösbar" zu nahe kommen würden.

Mit besten Grüsse, Ihr sehr ergebener

A. Kolmogoroff

(undated)

Sehr geehrter Herr Kollege,

ich danke Sie herzlich für die Sendung ihres Buches über die Grundlagenforschungen. Dieses Buch betrachte ich erstens als die beste Einführung in die modernen Grundlagenuntersuchungen und zweitens als ein wesentlicher Schritt zu einer Synthese verschiedener Richtungen. Für mich persönlich bildet die Erscheinung dieser zusammenfassender Darstellung einen wesentlichen Impuls um meine eigene Untersuchungen weiter zu verfolgen.

Ich möchte noch Ihnen zeigen, dass die Resultate von Gödel über die Möglichkeit die klassische Logik un die klassische Zahlentheorie im Rahmen der intuitionistischen Mathematik zu interpretieren sehr nahe mit den Ausführungen meiner russischen Arbeit "Sur le principe de tertium non datur" (Recueil Mathématique de Moscou 32 (1925), 646-667) stehen. Ich glaube, dass man noch viel weiter in dieser Richtung gehen könnte und also vom intuitionistischen Standpunkte aus die Widerspruchsfreiheit eines grossen Teiles der klassischen Mathematik zu beweisen.

Mit besten Grüssen,

Ihr sehr ergebener

A. Kolmogoroff.

## Bibliography


M. Barzin, A. Errera (1927), Sur la logique de M. Brouwer, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5) 13, 56-71.

L.E.J. Brouwer (1907), Over de Grondslagen der Wiskunde (Dutch) (Maas en van Suchtelen, Amsterdam. Republished (1981) with additional material, edited by D. van Dalen (Mathematiscl Centrum, Amsterdam)

– (1908), Over de onbetrouwbaarheid der logische principes (Dutch), Tijdschrift voor Wijsbegeerte 2, 152-158.

– (1923), Intuïtionistische splitsing van mathematische grondbegrippen (Dutch), Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen 32, 877-880. German translation Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 33, 251-256.

V.I. Glivenko (1928), Sur la logique de M. Brouwer, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5) 14, 225-228.

– (1929), Sur quelques points de la logique de M. Brouwer, Bull. Soc. Math. Belg. 15, 183-185.

G. Gentzen (1974), Über das Verhältnis zwischen intuitionistischer und klassischer Arithmetik, Arch math. Logik Grundlagenforsch. 16, 119-132 (the paper is based on a galley proof of the Mathematische Annalen which was withdrawn by Gentzen when he learnt of the results of Gödel 1933).

– (1935), Untersuchungen über das logische Schließen I,II, Math. Z. 39, 176-210, 405-431.

K. Gödel (1933), Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 4, 34-38.

J. van Heijenoort (1967), ed., From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931 (Harvard University Press, Cambridge Mass.). Reprinted 1970.

L. Henkin (1960), On mathematical induction, Amer. Math. Monthly 67, 323-338.

A. Heyting (1930), Die Formalen Regeln der intuitionistischen Logik, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie von Wissenschaften. Physikalisch Mathematische Klasse, 42-56.

– (1930A), Die Formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik II, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie von Wissenschaften. Physikalisch Mathematische Klasse, 57-71.

– (1930B), Die Formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik III, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie von Wissenschaften. Physikalisch Mathematische Klasse, 158-169.

– (1930C), Sur la logique intuitionniste, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5) 16, 957-963.

– (1931), Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik, Erkenntnis 2, 106-115.

– (1934), Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie (Springer, Berlin) Reprinted 1974.

– (1958), Intuitionism in mathematics, in: R. Klibansky, editor, Philosophy in the mid-century. A Survey (La Nuova Italia editrice, Firenze), 101-115.

– (1978), History of the foundations of mathematics, Nieuw Archief voor Wiskunde (3), 26, 1-21.

D. Hilbert (1928), Die Grundlagen der Mathematik, Abh. Math. Sem. Hamburg 6, 65-85.

D. Hilbert, W. Ackermann (1928), Grundzüge der theoretischen Logik (Springer, Berlin).

D. Hilbert, P. Bernays (1934), Grundlagen der Mathematik I (Springer, Berlin).

S. Jaskowski (1936), Recherches sur le système de la logique intuitionniste, Actes du Congrès International de Philosophie scientifique, septembre 1935 Paris vol. VI (Hermann, Paris), 58-61.

S.C. Kleene (1945), On the interpretation of intuitionistic number theory, J. Symbolic Logic 10, 109-124.

– (1952), Recursive functions and intuitionistic mathematics, in: L.M. Graves, E. Hille, P.A.Smith O. Zariski ,editors, Proceedings of the Int. Congr. Math., August 1950, Cambridge, MA (Amer. Math. Soc., Providence, RI), 679-685.

– (1957), Realizability, in: Summaries of talks presented at the Summer Institute for Symbolic Logic, July 1957, Ithaca, NY (Institute for Defense Analyses, Communications Research Division), 100-104.

– (1973), Realizability: a retrospective survey, in: A.R.D. Mathias, H. Rogers, eds., Cambridge Summer School in Mathematical Logic (Springer, Berlin), 95-112.

A.N. Kolmogorov (1925), On the principle of the excluded middle (Russian), Mat. Sb. 32, 664-667; translated in van Heijenoort (1967), 414-437.

– (1932), Zur Deutung der intuitionistischen Logik, Math. Z. 35, 58-65.

G. Kreisel (1962), Foundations of intuitionistic logic, in: E. Nagel, P. Suppes, A. Tarski, eds., Proceedings of the first International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science (Stanford University Press, Stanford), 198-210.

A. Mostowski (1948), Proofs of non-deducibility in intuitionistic functional calculus, J. Symb. Logic 13, 204-207.

A. Tarski (1938), Der Aussagenkalkül und die Topologie, Fundam. Math. 31, 103-134.

A.S. Troelstra (1978), A. Heyting on the formalization of intuitionistic mathematics, in : E.M.J. Bertin, H.J.M. Bos and A.W. Grootendorst, eds., Two Decades of Mathematics in the Netherlands 1920-1940. A Retrospection on the Occasion of the Bicentennial of the Wiskundig Genootschap (Mathematisch Centrum, Amsterdam), 153-175.

– (1981), Arend Heyting and his contibution to intuitionism, Nieuw Archief voor Wiskunde (3) 29, 1-23.

– (1983), Logic in the writings of Brouwer and Heyting, in : V.M. Abrusci, E. Casari and M. Mugnai, eds., Atti del Convegno Internazionale di Storia della Logica. San Gimignano, 4-8 dicembre 1982 (Cooperativa Libraria Universitaria Editrice Bologna, Bologna), 193-210.

A.S. Troelstra, D. van Dalen (1988), Constructivism in Mathematics (North-Holland, Amsterdam).

A.N. Whitehead, B. Russell (1910), Principia Mathematica I (Cambridge University Press, Cambridge).

# The ITLI Prepublication Series

## 1986

| | |
|---|---|
| 86-01 | The Institute of Language, Logic and Information |
| 86-02 Peter van Emde Boas | A Semantical Model for Integration and Modularization of Rules |
| 86-03 Johan van Benthem | Categorial Grammar and Lambda Calculus |
| 86-04 Reinhard Muskens | A Relational Formulation of the Theory of Types |
| 86-05 Kenneth A. Bowen, Dick de Jongh | Some Complete Logics for Branched Time, Part I Well-founded Time, Forward looking Operators |
| 86-06 Johan van Benthem | Logical Syntax |

## 1987

| | |
|---|---|
| 87-01 Jeroen Groenendijk, Martin Stokhof | Type shifting Rules and the Semantics of Interrogatives |
| 87-02 Renate Bartsch | Frame Representations and Discourse Representations |
| 87-03 Jan Willem Klop, Roel de Vrijer | Unique Normal Forms for Lambda Calculus with Surjective Pairing |
| 87-04 Johan van Benthem | Polyadic quantifiers |
| 87-05 Víctor Sánchez Valencia | Traditional Logicians and de Morgan's Example |
| 87-06 Eleonore Oversteegen | Temporal Adverbials in the Two Track Theory of Time |
| 87-07 Johan van Benthem | Categorial Grammar and Type Theory |
| 87-08 Renate Bartsch | The Construction of Properties under Perspectives |
| 87-09 Herman Hendriks | Type Change in Semantics: The Scope of Quantification and Coordination |

## 1988

*Logic, Semantics and Philosophy of Language:*

| | |
|---|---|
| LP-88-01 Michiel van Lambalgen | Algorithmic Information Theory |
| LP-88-02 Yde Venema | Expressiveness and Completeness of an Interval Tense Logic |
| LP-88-03 | Year Report 1987 |
| LP-88-04 Reinhard Muskens | Going partial in Montague Grammar |
| LP-88-05 Johan van Benthem | Logical Constants across Varying Types |
| LP-88-06 Johan van Benthem | Semantic Parallels in Natural Language and Computation |
| LP-88-07 Renate Bartsch | Tenses, Aspects, and their Scopes in Discourse |
| LP-88-08 Jeroen Groenendijk, Martin Stokhof | Context and Information in Dynamic Semantics |
| LP-88-09 Theo M.V. Janssen | A mathematical model for the CAT framework of Eurotra |

*Mathematical Logic and Foundations:*

| | |
|---|---|
| ML-88-01 Jaap van Oosten | Lifschitz' Realizabiility |
| ML-88-02 M.D.G. Swaen | The Arithmetical Fragment of Martin Löf's Type Theories with weak $\Sigma$-elimination |
| ML-88-03 Dick de Jongh, Frank Veltman | Provability Logics for Relative Interpretability |
| ML-88-04 A.S. Troelstra | On the Early History of Intuitionistic Logic |

*Computation and Complexity Theory:*

| | |
|---|---|
| CT-88-01 Ming Li, Paul M.B.Vitanyi | Two Decades of Applied Kolmogorov Complexity |
| CT-88-02 Michiel H.M. Smid | General Lower Bounds for the Partitioning of Range Trees |
| CT-88-03 Michiel H.M. Smid, Mark H. Overmars Leen Torenvliet, Peter van Emde Boas | Maintaining Multiple Representations of Dynamic Data Structures |
| CT-88-04 Dick de Jongh, Lex Hendriks Gerard R. Renardel de Lavalette | Computations in Fragments of Intuitionistic Propositional Logic |
| CT-88-05 Peter van Emde Boas | Machine Models and Simulations (revised version) |