De kracht van wiskunde in muziekonderzoek

Aline Honingh*
Institute for Logic, Language and Computation
Universiteit van Amsterdam
Science Park 904
Postbus 94242, 1090 GE Amsterdam
A.K.Honingh@uva.nl

Anja Volk
Department of Information and Computing Sciences
Universiteit Utrecht
Postbus 80089, 3508 TB Utrecht
Volk@cs.uu.nl

Samenvatting

Mathematische muziektheorie is een vakgebied in opkomst. Muziek en wiskunde hebben een oeroude relatie (denk bijvoorbeeld aan Pythagoras, Euler, Kepler en Descartes), maar toch blijken er steeds meer elementen binnen de muziektheorie te profiteren van een wiskundige aanpak. In dit artikel beschrijven we een aantal voorbeelden van muziekgerelateerd onderzoek waarbij een heel scala wiskundige technieken is gebruikt. Verder zullen we aandacht besteden aan de uitdagingen en problemen die er in dit vakgebied zijn, en vooral kijken naar de kracht die wiskunde heeft binnen het muziekonderzoek.

1 Inleiding

Er zijn de laatste jaren een aantal artikelen in het tijdschrift *Science* verschenen op het gebied van mathematische muziektheorie [30, 56, 9, 23], en het tijdschrift *Nature* heeft vorig jaar een serie essays gepubliceerd met als titel 'science and music', hetgeen aangeeft dat er steeds meer *algemene* wetenschappelijke interesse is in dit vakgebied.

Mathematische muziektheorie is reeds lang een actieve onderzoeksrichting, maar is wel altijd heel klein gebleven. Echter, daar lijkt nu verandering in te komen. Sinds twee jaar heeft het zelfs een eigen 'lead-journal', het *Journal of Mathematics and Music*, dat zich specifiek richt op publicaties in dit vakgebied. Ook is er een organisatie opgericht, de *Society for Mathematics and Computation in Music*, speciaal voor de communicatie tussen onderzoekers en muzikanten die zich in het interdisciplinaire vakgebied begeven tussen muziek, wiskunde en informatica. De society organiseert een twee-jaarlijkse conferentie die tot nu toe een groot succes is gebleken.

2 De relatie tussen wiskunde en muziek

Veel muziekonderzoek maakt gebruikt van wiskundige technieken. De meeste mensen die aan de combinatie van muziek en wiskunde denken, denken aan

*Dit artikel is geschreven terwijl de auteur werkzaam was in de 'Music Informatics Research Group' aan de 'City University London'.

de door Pythagoras ontdekte getalsverhoudingen van de intervallen, de kwint (3/2) en het octaaf (2/1); en aan de stemmingsproblematiek die daarmee gepaard gaat (zie onder andere [57, 6] voor meer informatie hierover). Er zijn echter veel meer verbanden tussen muziek en wiskunde. We zullen zien dat wiskunde kan helpen om muziek te analyseren. Ook zijn er wiskundige modellen ontwikkeld die bijdragen aan ons begrip van cognitieve aspecten van muziek of die een mogelijke oorsprong van een bepaald muzikaal aspect vormgeven [13]. Wiskunde wordt soms ook gebruikt bij het componeren van muziek. De componist Iannis Xenakis heeft bijvoorbeeld een aantal compositietechnieken ontwikkeld gebaseerd op stochastische methoden, en in het begin van de jaren 70 is in Frankrijk de spectrale muziek ontstaan waarbij spectrale analysen van geluid gebruikt worden om compositiemateriaal te ontwikkelen. Er zijn zelfs onderzoeken naar het gebruik van de Fibonacci serie en de gulden snede in muziek [38, 1, 32].

Hoewel wiskunde ook wordt gebruikt in onderzoek naar geluid en akoestiek [55, 51, 41], zullen we ons in dit artikel met name focussen op wiskunde in verband met muziektheorie en muziekcognitie welke veelal gebaseerd zijn op de symbolische notatie van muziek.

Hieronder volgen twee voorbeelden van muziekgerelateerd onderzoek die ieder gebruik maken van een ander soort wiskunde, en ook die ieder een ander soort muziek-model beschrijven (iets waar we later op in zullen gaan).

2.1 'Pitch class sets'

Voor de term 'pitch class sets' is nog geen Nederlandse naam bedacht, daarom wordt hier dus maar de Engelse term gebruikt. De pitch class set theorie is in 1973 beschreven door Alan Forte [21]. Een pitch class is een getal tussen 0 en 11 en is een representatie van een toonhoogte. De pitch class 0 zou kunnen verwijzen naar de toon C waarna pitch class 1 verwijst naar de toon $C\sharp$ of $D\flat$, pitch class 2 naar de toon D en zo verder. Tussen twee opvolgende pitch classes zit dus altijd een zogenaamde halve toonsafstand, de kleinste afstand op een piano. De pitch class is behalve een representatie ook een abstractie van een toonhoogte. Bij pitch classes wordt namelijk geen rekening gehouden met octaven: als een C wordt aangeduid met pitch class 0 dan wordt de C die een (of meerdere) octaven hoger is ook aangeduid met pitch class 0. Verder houden pitch classes ook geen rekening met het verschil tussen zogenaamde enharmonisch equivalente tonen, zoals $C\sharp$ of $D\flat$ (voor uitleg hierover, zie bijvoorbeeld [28]). De keuze om 0 niet naar C maar naar een andere toon te laten verwijzen is ook mogelijk. Bij het pitch class 'systeem' kiest men dus een referentie toon, waarna de rest van de tonen vastliggen. Een pitch class set is een groepje met pitch classes waarbij geen herhalingen mogen voorkomen. De tonen serie $C, D\flat, G, C, A, G$ wordt bijvoorbeeld gerepresenteerd (als de keuze $C = 0$ wordt gemaakt) door de pitch class set $(0, 1, 7, 9)$.

Pitch class sets hebben een aantal relaties met atonale muziek. Atonale muziek heeft, anders dan tonale muziek, geen tonaal centrum, en daardoor zijn alle tonen gelijkwaardig. Er is geen verschil tussen enharmonisch equivalente noten, en bij bepaalde compositietechnieken (twaalftoonsmuziek) geldt octaaf equivalentie en het verbod op herhalingen van een noot binnen een serie noten. Een reeks noten uit een stuk atonale muziek kan dus als pitch class set(s) gerepresenteerd worden waarna het dmv Forte's theorie geanalyseerd kan worden [50]. Tevens worden pitch class sets door sommige moderne componisten gebruikt om muziek te componeren.

Forte beschrijft in zijn pitch class set theorie verscheidene operaties op een pitch class set. Een voorbeeld hiervan is 'optelling': een getal kan worden opgeteld bij alle elementen in de set. Dit komt overeen met transpositie van alle noten in de set. De set $(0, 1, 4)$ kan bijvoorbeeld getransponeerd worden over een grote terts (een afstand die overeen komt met 4 eenheden in de pitch class representatie) en resulteert dan in de set $(4, 5, 8)$. De muzikale betekenis van deze operatie is direct duidelijk. Een akkoord of melodie kan getransponeerd worden over een bepaalde afstand maar het resultaat is nog steeds herkenbaar als dat akkoord of die melodie. Deze 'operatie' wordt in zowel tonale als atonale muziek gebruikt. Denk maar aan popmuziek, waarbij soms aan het eind van een nummer het refrein nog een keer wordt ingezet, maar dan beginnend op een noot die een halve toon hoger is. De noten zijn dan allemaal anders, maar de melodie is nog steeds duidelijk herkenbaar en net zo makkelijk mee te zingen. Bij atonale muziek kan de ongeordendheid van de pitch class set en het feit dat in de pitch class set de herhalingen zijn weggelaten het wel iets lastiger maken om een getransponeerde melodie inderdaad te herkennen, maar voor bijvoorbeeld akkoorden levert dit nauwelijks problemen op. Naast transpositie zijn ook andere (en ingewikkeldere) operaties mogelijk zoals 'inversie' (elke pitch class wordt afgetrokken van een bepaald getal en op het resultaat wordt de operatie modulo 12 toegepast) of zelfs 'multiplicatie' (elke pitch class wordt vermenigvuldigd met een getal en op het resultaat wordt de operatie modulo 12 toegepast). Er is discussie over het feit of deze operaties herkenbaar zijn in de muziek voor de luisteraar, en ook of deze operaties de werkwijze van de componist weergeven. Onderzoek hiernaar geeft soms tegenstrijdige antwoorden [53, 48].

Bij een analyse van atonale muziek wordt de muziek eerst opgedeeld in sets. Daarna wordt gekeken of verschillende sets gelijk aan elkaar zijn in termen van pitch classes, en zo niet, of de sets wellicht gelijk aan elkaar zijn onder de verschillende equivalenties en operaties. Net zoals het geval is bij de welbekende getransponeerde melodie, zou zo'n analyse meer inzicht kunnen verschaffen in de muziek. Op deze manier zou structuur kunnen worden aangebracht in de, op het eerste gezicht soms, ongeordende atonale muziek. De pitch class set theorie is tot op heden de meest gebruikte methode om atonale muziek te analyseren. In figuur 1 wordt een voorbeeld gegeven van een compositie van Anton Webern die gebruik maakt van pitch class sets als reeksen[1] die door inversie aan elkaar gerelateerd zijn [64]. Tabel 1 laat hierbij zien welke pitch classes gebruikt zijn.

2.2 CQT ruimte

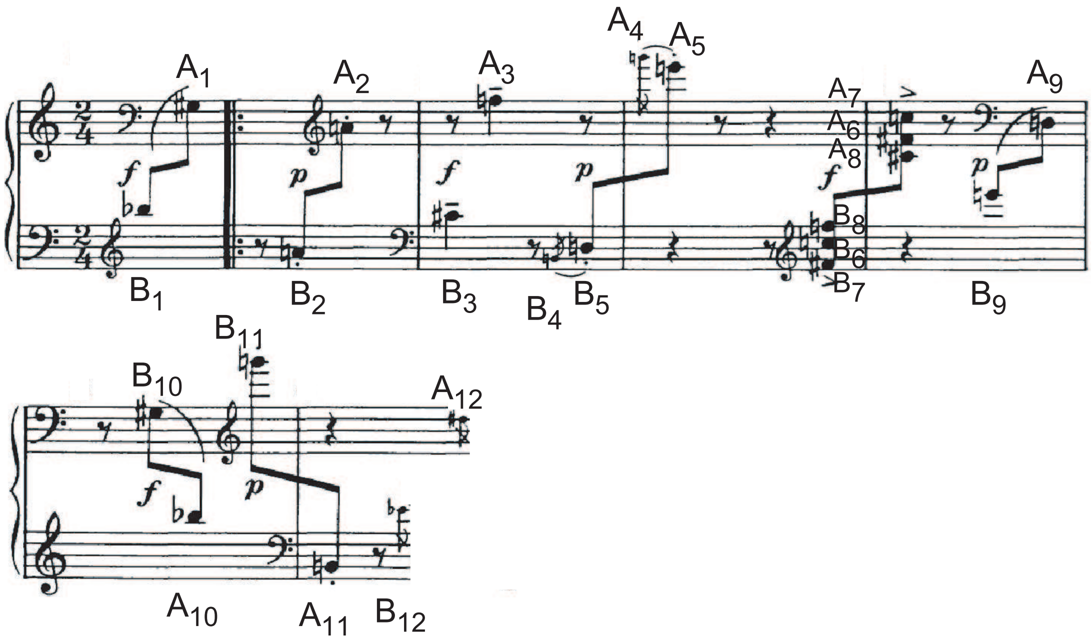
De theorie die we hieronder beschrijven is heel recent ontwikkeld. Een zogenaamde stemvoeringsruimte of CQT ruimte is beschreven met een geometrisch model door Clifton Callender, Ian Quinn en Dmitri Tymoczko (vandaar CQT) [9]. Deze CQT ruimte heeft een aantal equivalentieklassen als basis, die worden aangeduid met de letters OPTIC: 'Octaaf equivalente', 'Permutatie (herordering) equivalentie', 'Transpositie equivalentie', 'Inversie equivalentie', en 'Cardinaliteits equivalentie' (verwaarlozen van herhalingen). De auteurs menen dat deze OPTIC equivalentieklassen cruciale elementen vormen binnen de Westerse muziek, tenminste al sinds de zeventiende eeuw. Een aantal muzikale structuren kunnen worden beschreven met een combinatie van een of meer OPTIC klassen. Zo kunnen melodieën beschreven worden door T: een getransponeerde melodie is nog steeds dezelfde melodie. Akkoorden kunnen beschreven worden door OPC: we kunnen spreken van een C-groot akkoord zonder dat het ons uitmaakt om welke C het precies gaat (octaaf equivalentie), de noten kunnen onderling verwisseld worden zonder dat het akkoord verandert (permutatie equivalentie), en het aantal C's of G's in het akkoord maakt niet uit voor de akkoord naam (cardinaliteits equivalentie). Pitch class sets, zoals beschreven in de vorige sectie, voldoen aan OPTIC: alle beschreven equivalentieklassen zijn hier van toepassing. Er kunnen equivalentie relaties van alle mogelijke combinaties van de OPTIC klassen gevormd worden, wat resulteert in $2^5 = 32$ mogelijkheden[2].

Het geometrische CQT model kan men zich als volgt voorstellen. Noten worden gerepresenteerd door de logaritmen van hun (fundamentele) frequentie en corresponderen dan met reële getallen. Een reeks van n noten kan op deze manier voorgesteld worden door één punt in een n-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^n$. De vier OPTI equivalentieklassen creëren quotiënt ruimtes door punten in $\mathbb{R}^n$ te identificeren (ofwel, 'aan elkaar te plakken'). Bijvoorbeeld, 'octaaf equivalentie' identificeert de noten n en $n+12$ (herinnert u zich dat het getal 12 de breedte van het octaaf voorstelt in de pitch class representatie), wat ervoor zorgt dat $\mathbb{R}^n$ getransformeerd wordt in een n-torus $\mathbb{T}^n$.

Figuur 2 is een representatie van de CQT in drie dimensies. De punten (bolletjes) in de ruimte stel-

[1] In seriële muziek, een vorm van atonale muziek, is de compositie gebaseerd op een reeks.

[2] Iedere klasse kan *wel* of *niet* meedoen, dat zijn 2 mogelijkheden. In totaal zijn er 5 verschillende equivalentieklassen. Dit resulteert in $2^5 = 32$ mogelijke combinaties.



Figuur 1: Het begin van Anton Weberns *variaties voor piano* Op. 27, No. 2. Er worden twee pitch class sets gebruikt als reeks, set A=$(A_1, A_2, , A_{11})$ en B =$(B_1, B_2, , B_{11})$ waarbij reeks B een inversie is van A. Elk element B_i correspondeert dus met element A_i door inversie (van intervallen tussen opvolgende noten). Tabel 1 vermeldt de pitch classes voor de reeks A en B.

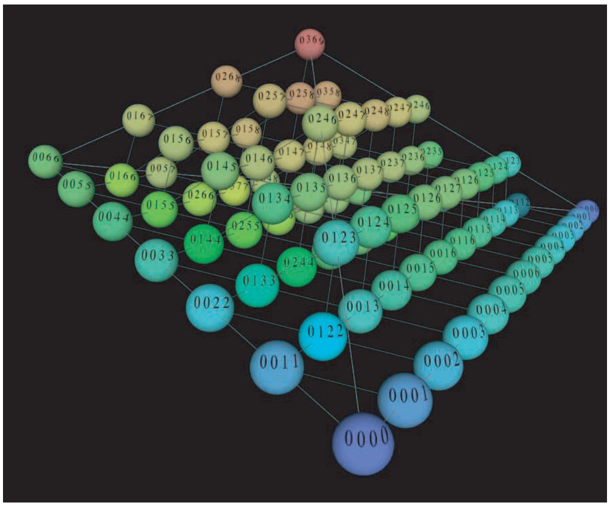
pitch class	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Set A	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_5	A_3	A_6	A_4	A_1	A_2	A_{11}	A_{10}
Set B	B_6	B_3	B_5	B_{12}	B_9	B_8	B_7	B_{11}	B_{10}	B_2	B_4	B_1

Tabel 1: Pitch class sets A en B, gebruikt in de compositie uit afbeelding 1, staan hier afgebeeld in volgorde van oplopende pitch classes.

len sets met noten voor. Punten die dicht bij elkaar liggen in de ruimte 'lijken' op elkaar. Bijvoorbeeld, het punt dat een C-groot akkoord voorstelt ligt dicht bij het punt dat een C klein akkoord voorstelt. En een C-groot akkoord in reine stemming ligt *heel* dicht bij een C-groot akkoord in een andere stemming (bijvoorbeeld gelijkzwevende stemming)[3]. Ook punten (sets van noten) die op elkaar lijken omdat ze een toonladder-transpositie van elkaar zijn, liggen dicht bij elkaar in deze ruimte. Toonladder transposities zijn transposities langs een toonladder, waarbij niet bij alle punten hetzelfde interval wordt opgeteld zoals bij gewone transposities, maar waarbij een melodie een of meerdere stapjes kan worden opgeschoven in de toonladder. Fragmenten zoals C-D-E ("Do, a deer"[4]) en D-E-F ("Re, a drop") zijn voorbeelden van toonladder transposities. Over beide voorbeelden, verschillende stemmingen en toonladder transposities, zou je dus kunnen zeggen dat hoe dichter de

[3]In het voorbeeld van figuur 2 representeren de noten sets (bolletjes) slechts een punt, bijvoorbeeld de set in gelijkzwevende stemming. Echter, de ruimte $\mathbb{R}^n$ is een continue ruimte waarin dezelfde set in een andere stemming (hoewel niet weergegeven in de figuur) vlak bij de set in gelijkzwevende stemming ligt. Voor meer informatie, zie [9].

[4]Begin van het lied *Do-Re-Mi* uit de musical *The Sound of Music.*



Figuur 2: CQT ruimte uit [9] in drie dimensies: $\mathbb{T}^3/(S_4 \times \mathbb{Z}^2)$ Ieder bolletje stelt een set noten voor die aangegeven worden door de getallen op het bolletje.

punten bij elkaar liggen, hoe meer ze op elkaar lijken. De CQT ruimte is de eerste gepubliceerde beschrijving van een ruimte die dit verschijnsel modelleert.

De nieuwe CQT ruimte geeft veel mogelijkheden om muziekfragmenten geometrisch te modelleren wat van pas kan komen bij muziekanalyse. Een stemvoering is een overgang van een akkoord naar een ander akkoord. In de CQT ruimte wordt deze overgang gerepresenteerd door een verbindingslijn van het ene punt (dat een representatie is van akkoord 1) naar het andere punt (dat een representatie is van akkoord 2). De 'omvang' van een stemvoering hangt af van de beweging in de verschillende stemmen tussen de akkoorden. Het vinden van de kleinste afstand tussen twee punten in de CQT ruimte correspondeert met de hypothese dat componisten proberen deze omvang zo klein mogelijk te maken.

3 De kracht van wiskunde

Wiskunde speelt de laatste jaren een steeds belangrijkere rol binnen de muziektheorie. Traditionele (niet mathematische) muziektheorie heeft soms het probleem dat sommige concepten niet precies gedefinieerd zijn. Wiskunde kan hierbij een heel nuttige rol vervullen. Doordat wiskunde een universele taal is, is het in staat concepten heel precies te definiëren. Voor sommige mensen wordt muziektheorie op deze manier begrijpelijker, voor andere mensen wordt het gecompliceerder. In ieder geval wordt het eenduidiger. Ook kan wiskunde de soms ver uit elkaar liggende concepten binnen de muziektheorie in een gemeenschappelijke taal beschrijven zodat deze wellicht dichter bij elkaar worden gebracht. De muzikale structuren beschreven in de CQT ruimte (sectie 2.2) vormen hiervan voorbeelden.

3.1 Modellen

Dat modellen nuttig zijn behoeft geen betoog. Modellen gaan gepaard met abstracties, zoals we bijvoorbeeld zagen in het bovengenoemde onderzoek. Als we spreken over 'pitch classes' in plaats van noten, laten we een heleboel informatie over noten weg die in bepaalde gevallen van groot belang is en in andere gevallen minder belangrijk is. Een auteur die een model presenteert dat bepaalde abstracties hanteert gaat er van uit dat de specifieke details minder belangrijk zijn dan het grotere beeld van het hele model. Zo is de aanname dat de pitch class een goed model is voor een toon in een stuk atonale muziek.

Er bestaan verschillende soorten modellen en theorieën. Muziektheorie bevat verschillende methoden die grofweg in twee groepen kunnen worden verdeeld: A. theorieën die expliciet als doel hebben een bepaald muziekstuk te analyseren, zoals bijvoorbeeld Schenkeriaanse analyse [49], of analyse met behulp van pitch class set theory [21] (zie sectie 2.1), en B. theorieën die werken op een meer abstract en filosofisch niveau. Een voorbeeld van deze tweede groep is Riemanns theorie over de C majeur cadens $C-F-C-G-C$ [44]. Riemann noemt de C de 'thesis', de subdominant F de 'antithesis' omdat deze de tonica in twijfel trekt, en de dominant G de 'synthesis' omdat deze terug leidt naar de tonica. Hij formuleert een theorie over hoe andere akkoorden zouden kunnen functioneren als thesis, antithesis en synthesis, omdat deze elementen nodig zijn om een cadens te vormen. Deze theorie over waarom het F-akkoord de tonica C in twijfel trekt en waarom het G-akkoord de kracht heeft om terug te leiden naar de tonica, is een theorie die meer te maken heeft met de fundamenten van (Westerse) muziek, dan dat het een theorie is die direct toegepast kan worden op een bepaald stuk. Theorieën die in deze tweede groep vallen gaan bijvoorbeeld over toonladders en ander materiaal waar muziekstukken op gebaseerd zijn.

Er bestaan vaak geen duidelijke verbindingen tussen deze twee groepentheorieën. Mathematische modellen van muziek komen voor in beide categorieën maar bevinden zich doorgaans meer aan de kant van het abstracte niveau.

We zullen hier een aantal voorbeelden noemen van mathematische modellen in bovengenoemde categorieën. Zoals we gezien hebben, is de pitch class set theorie een duidelijk voorbeeld van een mathematische theorie die het doel heeft om een stuk muziek te analyseren. Een andere mathematische theorie die analyse als doel heeft is bijvoorbeeld de 'Transformational Theory' ontwikkeld door David Lewin [34]. De Transformational Theory, die gebruikt kan worden voor zowel tonale als atonale muziek, definieert operaties op een mathematische groep en kan op deze manier potentiële muzikale gebeurtenissen representeren. De resulterende analysen laten zien hoe een bepaalde muzikale gebeurtenis getransformeerd wordt in een andere. Een tak van de Transformational Theory is de Neo-Riemannian Theory die ontstaan is als antwoord op het probleem om 19-de eeuwse chromatische muziek, zoals muziek van Wagner en Liszt, te analyseren. Deze muziek is niet atonaal maar gebaseerd op drieklanken, maar desondanks zijn de analytische modellen bedoeld voor diatonische muziek vaak niet geschikt voor deze muziek. De Neo-Riemannian Theory is gecentreerd rond drie specifieke operaties op drieklanken. Deze operaties worden gebruikt om tonen van een drieklank te verschuiven naar een naast gelegen toon in de toonladder, terwijl tenminste een van de tonen gelijk wordt gehouden. Met deze operaties kunnen akkoord overgangen beschreven worden.

In aanvulling op deze voorbeelden binnen categorie A noemen we hier ook nog een aantal studies binnen de mathematische muziektheorie die geïnspireerd zijn door een muziektheoretische uitdaging van een concreet stuk muziek of een bepaalde muziek stijl. Voorbeelden hiervan zijn de onderzoeken naar de perceptie van accenten in 20-ste eeuwse muziek [45], de relatie tussen toonhoogte en temporele processen in een Brahms capriccio [33], en de ritmische structuur van Steve Reichs muziek [17].

Voorbeelden van categorie B zijn bijvoorbeeld modellen van toonladders [11, 5, 29, 3, 16, 15]. Een aantal wiskundige algemeen geldende eigenschappen van toonladders (vaak beschreven in termen van wiskundige groepentheorie) zijn hiermee in kaart gebracht. Dit is interessant om een aantal redenen. Allereerst kan de definitie van een toonladder hiermee preciezer gemaakt worden. Ten tweede kunnen deze eigenschappen nieuwe inzichten over muziek geven en daarmee bijdragen aan de verklaring voor de oorsprong van bepaalde toonladders[5]. Als laatste kunnen deze eigenschappen ook worden gebruikt om nieuwe toonladders te ontwikkelen.

Een ander voorbeeld van categorie twee is het onderwerp stemmingen en intonatie. Niet alleen is wiskunde gebruikt om de stemmingsproblematiek in kaart te brengen, er is zelfs een heel aantal alternatieve stemmings- en intonatie-systemen ontwikkeld op basis van discrete wiskunde. Een aantal onderzoekers heeft zich afgevraagd welke alternatieven er zijn voor bijvoorbeeld reine stemming [39, 65] of gelijkzwevende stemming [20, 5, 25].

Er zijn ook studies binnen de mathematische muziektheorie die uitgaan van een algemene theorie die toegepast wordt op een concreet stuk muziek. Voorbeelden hiervan zijn een topologisch model van motiefanalyse toegepast op Schumanns *Träumerei* [8] dat de karakteristieke motiven van het stuk bepaalt, en een topologisch model van het fenomeen 'consonantie en dissonantie' dat analytische inzichten geeft in Skrjabins Op. 65 Nr. 3, gebaseerd op harmonische progressies welke verder gaan dan de typische majeur en mineur akkoorden uit het diatonische tijdperk [37].

[5]Balzano [5] heeft bijvoorbeeld onderzoek gedaan naar groepen theoretische eigenschappen van microtonale toonsystemen, en trekt het belang van frequentie verhoudingen als verklaring voor de oorsprong van het 12-toons systeem in twijfel door te zeggen dat misschien de groepen theoretische eigenschappen vanaf het begin af aan perceptueel belangrijker zijn geweest (" it may well be that the group-theoretic properties [..] were the more perceptually important all along").

3.2 Uitdagingen

Het tijdschrift *Journal of Mathematics and Music* is onder andere opgericht met de achterliggende gedachte dat niet meer alle basis wiskunde uitgelegd hoeft te worden aan het begin van een artikel. Het tijdschrift veronderstelt een basiskennis van wiskunde zodat in de gepubliceerde artikelen snel meer diepgang bereikt kan worden. Dit is aan de ene kant natuurlijk prettig, maar aan de andere kant komt dit vakgebied op deze manier verder af te staan van andere disciplines die deze artikelen nu niet meer zo makkelijk kunnen begrijpen.

Dit lijkt een probleem te zijn en soms klinkt er kritiek uit verschillende hoeken. Sommige mensen lijken helemaal niet geïnteresseerd in onderzoek dat zo abstract is dat het niet meteen resultaten oplevert. "Maar wat betekent dit dan?", of "Dit is zo algemeen dat het niets betekent", of juist "Dit is zo abstract dat het de werkelijkheid helemaal niet goed weergeeft" zijn opmerkingen die vaak gehoord zijn. Een voorbeeld van onderzoek waar dit soort kritiek op is geuit, betreft de CQT theorie. Anders dan de pitch class set theorie, is de CQT theorie nog nauwelijks toegepast op echte muziekproblematiek. Het model is gepresenteerd als basis met veel mogelijke toepassingen. Echter, zonder deze toepassingen kan het moeilijk zijn om de waarde van het model in te schatten. Het model abstraheert op veel vlakken van de muziek-realiteit, en de waarde van abstracties worden vaak duidelijker in concrete toepassingen.

Er zijn gelukkig ook voorbeelden van onderzoek binnen de mathematische muziektheorie dat algemene waardering kent, zoals het werk van David Lewin. David Lewin, de grondlegger van de Transformational Theory, werd en wordt geroemd door mensen uit diverse vakgebieden en zelfs door de pers. Een artikel in de New York Times verscheen na zijn dood en zegt onder andere dat zijn invloed ongelooflijk is geweest ("his influence has been extraordinary") [47].

Het is jammer dat wiskundige methoden nauwelijks voorkomen in het curriculum van de musicologie opleiding. Zelfs pitch class set theory en transformational theory, die toch belangrijke analyse methoden zijn voor muziek, zijn doorgaans geen gebieden waarin musicologen zich verdiepen, althans in Nederland en de rest van Europa. In Amerika, echter, worden steeds meer cursussen pitch class set theory en transformational theory aangeboden binnen de studie 'music' en soms zelfs binnen de studie 'mathematics'. Het zou, voor wederzijds begrip tussen wiskundigen en musicologen, erg helpen als dit soort cursussen ook buiten Amerika aangeboden zouden worden.

De meeste problemen lijken met name te ontstaan door het hoge abstractieniveau dat wiskundig onderzoek kan hebben. Een deel van deze problemen zal zichzelf oplossen in de tijd: goed onderzoek zal door de jaren heen steeds meer geciteerd en uitgediept worden (zoals ook gebeurd is met de pitch class set theory) zodat er een bredere context ontstaat waardoor ook mensen met een mindere wiskundige achtergrond hieraan kunnen relateren.

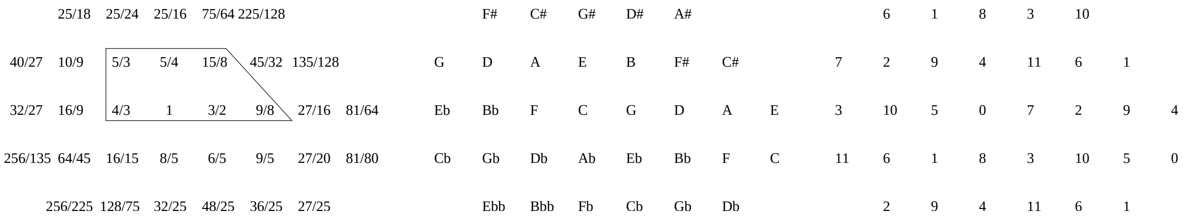
Ter vergelijking, terwijl computationele methoden in muziekonderzoek al gebruikt worden sinds de jaren 50, zijn deze lang onder-gerepresenteerd gebleven in dit vakgebied. Een van de redenen hiervoor was dat de resultaten van het computationeel modelleren niet overtuigend genoeg waren voor traditionele musicologen om de tijd te investeren om meer vertrouwd te worden met deze methoden. Dit is de laatste decennia veranderd door de massale digitalisatie van muziek en de hierdoor ontstane behoefte om deze informatie te kunnen hanteren. Iets vergelijkbaars is voor te stellen bij wiskundige modellen: deze zullen meer geaccepteerd worden binnen het muziekonderzoek als de voordelen hiervan meer duidelijk worden naar buitenstaanders.

Tenslotte, steeds vaker verschijnen er gezamenlijke publicaties door wiskundigen en musicologen [18, 19, 2], hetgeen de acceptatie van dit nieuwe vakgebied zeer zeker ten goede komt.

3.3 Toepassingen

Op het gebied van computationeel modelleren, was er in de jaren 70 veel kritiek op de modellen in de muziektheorie. Ze zouden niet geïmplementeerd kunnen worden omdat ze niet precies genoeg waren [40, 4, 58]. Er was dus vraag naar betere implementeerbare modellen, en wiskunde was hier duidelijk welkom.

Laten we naar de waarde van wiskunde binnen de muziek kijken aan de hand van een aantal (com-



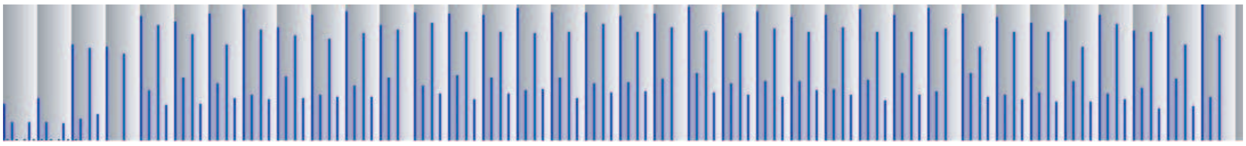
(a) (b) (c)

Figuur 3: Euler-rooster van (a) frequentie verhoudingen, (b) noot namen en (c) pitch classes. In afbeelding (a) is de diatonische majeurtoonladder ingetekend die een convex figuur beschrijft in deze ruimte [29].

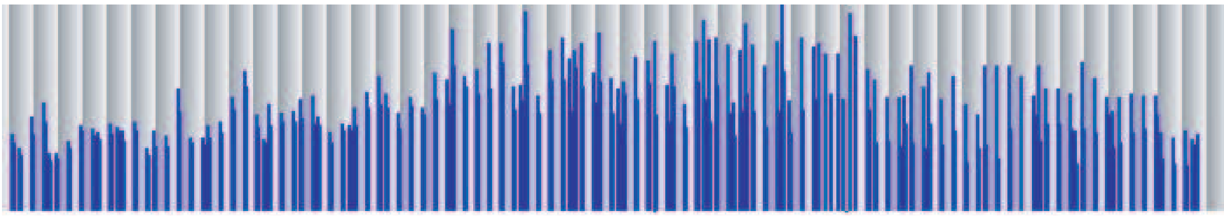
putationele) toepassingen. Aline Honingh heeft een model ontwikkeld voor de geometrische interpretatie van toonrelaties en ontdekte dat toonstructuren zoals toonladders en akkoorden bijna altijd een convexe en compacte vorm hebben in het Euler-rooster, zie figuur 3 [29]. Dit resultaat is onder andere gebruikt om het 'pitch spelling' probleem aan te pakken. De term 'pitch spelling' refereert naar de spelling van noten in muziek: wanneer wordt pitch class '1' geschreven (gespeld) als een $C\sharp$ en wanneer als een $D\flat$? Dit probleem is bijvoorbeeld van belang bij muzieknotatie software. Het probleem blijkt grotendeels opgelost te kunnen worden door pitch class sets van het Euler-rooster van pitch classes zoveel mogelijk convex en compact af te beelden op het Euler-rooster van noot namen [28] Het principe van convexe en compacte afbeeldingen is verder gebruikt bij het aanpakken van intonatie problematiek [27, 24] en het automatisch vinden van modulaties in muziek [26].

Anja Volk heeft het model 'Inner Metric Analysis' (interne metrische analyse) gebruikt om verschillende aspecten te beschrijven van de ritmische en metrische structuren in muziek [59, 60]. Het model heeft een algebraisch topologische basis. Voor elke noot wordt een metrisch gewicht berekent dat het (metrische) belang van deze noot in zijn context aangeeft, gebaseerd op de detectie van noten met gelijke tussenpozen (gemeten vanaf de noot aanzet) in het stuk muziek. Het model bepaald dus de interne metrische structuur die ontstaat door de noten, in tegenstelling tot de externe metrische structuur die gegeven wordt door de maatsoort van een stuk muziek. Het model kan onderscheid maken tussen enerzijds muziekstukken die een regelmatig ritmisch patroon volgen, zoals Ragtime muziek (zie figuur 4) waarbij het gemakkelijk is om de maat mee te kunnen tikken, en anderzijds muziekstukken die een onregelmatige ritmische structuur hebben, zoals Stravinsky's *Sacre du printemps* (zie figuur 5). Het model is tevens gebruikt om dansmuziek patronen [14] en volksliedjes [62] te classificeren aan de hand van ritmische gelijksoortigheid, en om stabiele segmenten binnen muziek stukken te vinden [61].

Andere toepassingen binnen de muziek die hebben geprofiteerd van een mathematische aanpak zijn bijvoorbeeld 'key finding', 'segmentatie', en 'similarity'. Bij 'key finding' gaat het om het automatisch vinden van de juiste toonsoort in een muziekstuk. Dit probleem is onder andere succesvol aangepakt met een geometrisch model [12, 35] en met Bayesiaanse principes [54]. Bij segmentatie is het doel een muziekstuk automatisch te segmenteren in perceptueel logische groepen. Net als tekst gesegmenteerd kan worden in zinnen, bijzinnen, en woorden, kan muziek gesegmenteerd worden in frases en subfrases. Verschillende soorten technieken worden hiervoor gebruikt, waaronder statistische methoden toegepast op experimentele data [7, 52]. Als laatste, 'similarity', ofwel gelijkenis of gelijksoortigheid, is een ruim begrip en kan betrekking hebben op verschillende muzikale entiteiten, van ritmes en melodieën tot pitch class sets. Gelijksoortigheid van melodieën heeft belangrijke implicaties voor bovengenoemde segmentatie [10], maar ook voor het gebied van Music Information Retrieval, om een automatische zoek naar melodieën binnen een grote corpus mogelijk te maken [63, 22]. Verder zijn er verschillende mathematische formules ontwikkeld om de mate van gelijkenis van pitch class sets aan te



Figuur 4: Metrisch gewicht diagram van Scott Joplins *Nonpareil Rag* met een regelmatig patroon: Hoe hoger de lijn, hoe groter het gewicht van de corresponderende noot. De van donker naar licht overlopende grijze achtergrond correspondeert met de maten zoals aangegeven in de partituur.



Figuur 5: Metrisch gewicht diagram van Igor Stravinsky's *Danse Sacrale* met een onregelmatig ritmisch patroon.

duiden [31, 36, 43, 46], die op hun beurt weer gebruikt zijn voor verschillende doeleinden, onder andere voor classificatie [42].

Alle bovengenoemde toepassingen zijn voorbeelden van gemodelleerde cognitieve processen. Het zijn als het ware 'taken' die mensen goed kunnen, maar waarvan het heel lastig is om precies te noteren wat er gebeurt. Neem als voorbeeld het segmenteren van muziek in frasen. De meeste mensen, zeker degenen die muzikaal geschoold zijn, doen dit automatisch goed, op hun gevoel. Het is echter heel lastig om dit proces in een set regels of mathematische code op te schrijven. Maar als we dit toch proberen te doen, zal een succesvol model niet alleen heel waardevol zijn voor het automatisch segmenteren van muziek, maar ook inzicht kunnen geven in de cognitieve aspecten die een rol spelen bij het menselijke muziek-segmentatie proces. Verder kunnen de inzichten in de cognitieve processen weer dienen als een nieuwe beginpunt voor een (mathematisch) model.

4 Concluderende opmerkingen

We hebben gezien dat mathematische muziektheorie een onderzoeksgebied is waarin zeer diverse wiskundige technieken gebruikt worden (statistische methoden, groepentheorie, geometrische modellen, getaltheorie, topologie). Dit vakgebied is niet homogeen wat betreft de muzikale toepassingen: Er zijn enerzijds abstracte modellen die theoretiseren over de basiselementen van de muziek, en anderzijds modellen die direct geïnspireerd zijn door concrete stukken muziek. Verder is het kenmerkend dat onderzoekers in dit vakgebied verschillende achtergronden hebben. Sommigen hebben een achtergrond in wiskunde en anderen in musicologie (en vakgebieden als natuurkunde of informatica zijn ook goed denkbaar), maar de meesten zijn in beide vakgebieden onderwezen.

De kracht van wiskunde in muziekonderzoek is dat 1) het zaken heel precies kan formuleren, 2) wiskundig geformuleerde theorie implementeerbaar is in computationele modellen die o.a. automatische analyse van muziek mogelijk maken, en 3) hierdoor mogelijk meer inzicht verkregen kan worden in muziek gerelateerde cognitieve processen.

Terwijl musicologie zich meestal richt op het bestuderen van een bepaalde muziekstijl of een specifieke vraag, heeft mathematische muziektheorie vaak als doel meer algemeen geldende theoriën op te stellen hetgeen tot een beter begrip van muziek en muziek maken/beluisteren kan leiden.

De voorbeelden van gecombineerd wiskunde en muziekonderzoek genoemd in dit artikel zijn nog maar het begin van wat allemaal mogelijk is in deze onderzoeksrichting. Dit eeuwenoude vakgebied heeft nog vele bruisende jaren in het vooruitzicht.

5 Dankwoord

De auteurs willen Frans Wiering, Remco Veltkamp en Peter van Kranenburg bedanken voor verhelderende discussies en nuttige suggesties.

Referenties

[1] Coutney S. Adams. Erik Satie and golden section analysis. *Music and Letters*, 77(2):242–252, 1996.

[2] Anna Rita Addessi, Mirko Degli Esposti, and Francois Pachet. Musical style again: A mathematical analysis of musical intertext. In *Proceedings of the fourth Conference on Interdisciplinary Musicology (CIM)*, Thessaloniki, Greece, 2008.

[3] Eytan Agmon. A mathematical model of the diatonic system. *Journal of Music Theory*, 33(1):1–25, 1989.

[4] Bo H. Alphonce. Music analysis by computer: a field of theory formation. *Computer Music Journal*, 4(2):26–35, 1980.

[5] Gerald J. Balzano. A group theoretical description of 12-fold and microtonal pitch systems. *Computer Music Journal*, 4(4):66–84, 1980.

[6] David Benson. *Music: A Mathematical Offering*. Cambridge University Press, 2006. Also available from `http://www.maths.abdn.ac.uk/~bensondj/html/music.pdf`.

[7] Rens Bod. Memory-based models of melodic analysis: Challenging the Gestalt principles. *Journal of New Music Research*, 31(1):27–37, 2002.

[8] Chantal Buteau and Guerino Mazzola. Motivic analysis according to Rudolph Reti: Formalization by a topological model. *Journal of Mathematics and Music*, 2(3):117–134, 2008.

[9] Clifton Callender, Ian Quinn, and Dmitri Tymoczko. Generalized voice-leading spaces. *Science*, 320:346–348, 2008.

[10] Emilios Cambouropoulos. Musical parallelism and melodic segmentation: A computational approach. *Music Perception*, 23(3):249–269, 2006.

[11] Norman Carey and David Clampitt. Aspects of well-formed scales. *Music Theory Spectrum*, 11(2):187–206, 1989.

[12] Elaine Chew. *Towards a mathematical model of tonality*. PhD thesis, Operations Research Center, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 2000.

[13] Elaine Chew. Music and operations research - the perfect match? *OR/MS Today*, 35(3):26–31, 2008.

[14] Elaine Chew, Anja Volk, and Chia-Ying Lee. Dance music classification using inner metric analysis: a computational approach and case study using 101 latin american dances and national anthems. In *Proceedings of the 9th INFORMS Computing Society Conference*, volume 29, pages 355–370. Springer OR/CS Interfaces Series, 2005.

[15] John Clough and Jack Douthett. Maximally even sets. *Journal of Music Theory*, 35:93–173, 1991.

[16] John Clough and Gerald Myerson. Variety and multiplicity in diatonic systems. *Journal of Music Theory*, 29(2):249–270, 1985.

[17] Richard Cohn. Transpositional combination of beat-class sets in steve reich's phase-shifting music. *Perspectives of New Music*, 30(2):146–177, 1992.

[18] Karst de Jong and Thomas Noll. Contiguous fundamental bass progressions. *Dutch Journal of Music Theory*, 13(1), 2008.

[19] Manuel Dominguez, David Clampitt, and Thomas Noll. Well-formed scales, maximally even sets, and christoffel words. In *Proceedings of the Mathematics and Computation in Music conference (MCM)*, Berlin, Germany, 2007.

[20] Adriaan D. Fokker. Equal temperament and the thirty-one-keyed organ. manuscript, 1955. http://www.xs4all.nl/ huygensf/doc/fokkerorg.html.

[21] Alan Forte. *The Structure of Atonal Music*. New Haven: Yale University Press, 1973.

[22] Joerg Garbers, Peter van Kranenburg, Anja Volk, Frans Wiering, Remco C. Veltkamp, and Louis P. Grijp. Using pitch stability among a group of aligned query melodies to retrieve unidentified variant melodies. In *Proceedings of the Eighth International Conference on Music Information Retrieval (ISMIR)*, pages 451–456, Vienna, Austria, 2007.

[23] Rachel W. Hall. Geometrical music theory. *Science*, 320(5874):328–330, 2008.

[24] Aline K. Honingh. Convexity and compactness as models for the preferred intonation of chords. In *Proceedings of the Ninth International Conference on Music Perception and Cognition (ICMPC 9)*, Bologna, 22-26 August, 2006.

[25] Aline K. Honingh. *The Origin and Well-Formedness of Tonal Pitch Structures*. PhD thesis, University of Amsterdam, The Netherlands, 2006.

[26] Aline K. Honingh. Automatic modulation finding using convex sets of notes. In *Proceedings of Mathematics and Computation in Music (MCM2007)*, Berlin, Germany May 18-20, 2007.

[27] Aline K. Honingh. A geometrical approach to find the preferred intonation of chords. Technical Report TR/2008/DOC/02, Department of Computing, City University London, 2008.

[28] Aline K. Honingh. Compactness in the Euler lattice: A parsimonious pitch spelling algorithm. *Musicae Scientiae*, XIII(1):117–138, 2009.

[29] Aline K. Honingh and Rens Bod. Convexity and the well-formedness of musical objects. *Journal of New Music Research*, 34(3):293–303, 2005.

[30] Julian Hook. Exploring musical space. *Science*, 313(5783):49–50, 2006.

[31] Eric J. Isaacson. Similarity of interval-class content between pitch-class sets: the IcVSIM relation. *Journal of Music Theory*, 34:1–28, 1990.

[32] Jonathan Kramer. The fibonacci series in twentieth century music. *Journal of Music Theory*, 17:111–148, 1973.

[33] David Lewin. On harmony and meter in Brahmss op. 76, no. 8. *19th-Century Music*, 4(3):261–326, 1981.

[34] David Lewin. *Generalized Musical Intervals and Transformations*. Yale University Press: New Haven, CT, 1987.

[35] Hugh Christopher Longuet-Higgins and Mark Steedman. On interpreting Bach. In Hugh Christopher Longuet-Higgins, editor, *Mental Processes: Studies in Cognitive Science*, pages 82–104. British Psychological Society/MIT Press, 1987/1971. Published earlier as Longuet-Higgins and Steedman (1971).

[36] Robert Morris. A similarity index for pitch-class sets. *Perspectives of New Music*, 18:445–460, 1980.

[37] Thomas Noll and Anja Volk. Transformationelle logik der dissonanzen und konsonanzen. In B. Enders, editor, *Mathematische Musik musikalische Mathematik*. PFAU-Verlag, Saarbrücken, 2005.

[38] Hugo Norden. Proportions in music. *Fibonacci Quarterly*, 2:219–222, 1964.

[39] Harry Partch. *Genesis of a Music*. Da Capo Press, second edition, 1949/1974.

[40] P. Howard Patrick. A computer study of a suspension-formation in the masses of Josquin Desprez. *Computers and the Humanities*, 8:321–331, 1974.

[41] Reinier Plomp and Willem J. Levelt. Tonal consonance and critical bandwith. *Journal of the Acoustical Society of America*, 38:548–560, 1965.

[42] Ian Quinn. Listening to similarity relations. *Perspectives of New Music*, 39:108–158, 2001.

[43] John Rahn. Relating sets. *Perspectives of New Music*, 18:483–498, 1980.

[44] Hugo Riemann. *Musikalische Logik*. Leipzig, 1873.

[45] John Roeder. A calculus of accent. *Journal of Music Theory*, 39(1):1–46, 1995.

[46] David W. Rogers. A geometric approach to pcset similarity. *Perspectives of New Music*, 37(1):77–90, 1999.

[47] Edward Rothstein. A seeker of music's poetry in the mathematical realm. *The New York Times*, June 28 2003.

[48] Art Samplaski. The relative perceptual salience of Tn and TnI. *Music Perception*, 21(4):545–559, 2004.

[49] Heinrich Schenker. *Harmonielehre*. Wien, Universal edition, 1906.

[50] Michiel Schuijer. *Atonal music: Pitch-Class Set Theory and Its Contexts*. University of Rochester Press, 2008.

[51] Guido F. Smoorenburg. Pitch perception of two-frequency stimuli. *Journal of the Acoustical Society of America*, 48:924–942, 1970.

[52] Neta Spiro. *What contributes to the perception of musical phrases in western classical music?* PhD thesis, University of Amsterdam, 2007.

[53] Diana Stammers. *Set theory in the perception of atonal pitch relations*. PhD thesis, Cambridge University, 1994.

[54] David Temperley. *Music and Probability*. The MIT Press, 2007.

[55] Mark J. Tramo, Peter A. Cariani, Bertrand Delgutte, and Louis D. Braida. Neurobiological foundations for the theory of harmony in western tonal music. *Annals of the New York Academy of Science*, 930:92–116, 2001.

[56] Dmitri Tymoczko. The geometry of musical chords. *Science*, 313(5783):72–74, 2006.

[57] Jan Van de Craats. *De fis van Euler: Een nieuwe visie op de muziek van Schubert, Beethoven, Mozart en Bach*. Aramith Uitgevers, Bloemendaal, 1989.

[58] Barry Vercoe. Review of "The computer and music" by Harry B. Lincoln. *Perspectives of New Music*, 9:323–330, 1971.

[59] Anja Volk. Persistence and change: local and global components of metre induction using inner metric analysis. *Journal of Mathematics and Music*, 2(2):99–115, 2008.

[60] Anja Volk. The study of syncopation using inner metric analysis: Linking theoretical and experimental analysis of metre in music. *Journal of New Music Research*, 2009. to appear.

[61] Anja Volk and Elaine Chew. Reconsidering the affinity between metric and tonal structures in Brahms' capriccio op. 76, no. 8. *Computing in Musicology*, 15:138–171, 2008.

[62] Anja Volk, Joerg Garbers, Peter van Kranenburg, Frans Wiering, Remco C. Veltkamp, and Louis P. Grijp. Applying rhythmic similarity based on inner metric analysis to folksong research. In *Proceedings of the Eighth International Conference on Music Information Retrieval (ISMIR)*, pages 293–296, Vienna, Austria, 2007.

[63] Anja Volk, Peter van Kranenburg, Joerg Garbers, Frans Wiering, Remco C. Veltkamp, and Louis P. Grijp. A manual annotation method for melodic similarity and the study of melody feature sets. In *Proceedings of the Ninth International Conference on Music Information Retrieval (ISMIR)*, pages 101–106, Philadelphia, USA, 2008.

[64] Peter Westergaard. Webern and "total organization": An analysis of the second movement of the piano variations, op. 27. *Perspectives of New Music*, 1(2):107–120, 1963.

[65] Yoseph Yasser. *A theory of evolving tonality.* New York: Da Capo Press, 1975.